

Werk

Titel: Inventiones Mathematicae

Verlag: Springer

Jahr: 1983

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN356556735_0072

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN356556735_0072|LOG_0025

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Variétés abéliennes et indépendance algébrique II: Un analogue abélien du théorème de Lindemann-Weierstraß

P. Philippon

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau,
F-91128 Palaiseau Cedex, France

§ 0. Introduction – Énoncé des résultats

Le présent article est la suite de [5] et [6] et s'appuie notamment sur certains des résultats qui y sont démontrés. Nous nous intéressons ici à un analogue du théorème de Lindemann-Weierstraß (cf. [7]) sur les variétés abéliennes. Dans le cas des variétés abéliennes à multiplications complexes le résultat principal de ce travail fournit l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions abéliennes en des points algébriques, voir le corollaire 0.2 et surtout le corollaire 0.3 qui répond à une conjecture bien connue. On retrouve ainsi tous les résultats de [2] que l'on étend au cas des variétés abéliennes de dimensions quelconques.

Signalons que dans [9] G. Wüstholz a annoncé qu'il avait également obtenu une démonstration du théorème que nous nous proposons d'établir.

La différence essentielle entre ce qui va suivre et [6] réside d'une part dans l'introduction d'opérateurs de dérivations et d'autre part dans le fait que l'on travaille sur un groupe algébrique produit (c'est en fait une extension triviale, par une puissance du groupe additif, de la variété abélienne considérée).

Soit F un corps de nombres que l'on considère plongé dans $\mathbb{C}$. Soit A une variété abélienne simple de dimension g définie sur F . On pose $\mathbf{k} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{End } A$ et $G = A^d$ pour un entier $d \geq 1$. Soit K un corps contenant $\mathbf{k}$ de dimension d sur $\mathbf{k}$. On dispose alors d'une représentation fidèle de K de degré d sur $\mathbf{k}$, c'est-à-dire un homomorphisme ρ injectif de K dans l'algèbre $\mathcal{M}(d, \mathbf{k})$ des matrices $d \times d$ à coefficients dans $\mathbf{k}$, tel que $\rho(1)$ soit la matrice identité. Soit $\mathcal{O}$ un sous-anneau unitaire de $\text{End } A$ de rang r sur $\mathbb{Z}$ et Γ un sous- $\mathcal{O}$ -module de K de rang d et engendrant K sur $\mathbf{k}$. L'action naturelle de $\mathcal{M}(d, \mathcal{O})$ sur G permet d'identifier Γ à une sous-algèbre de $\text{End } G$, et $\mathcal{M}(q, \Gamma)$ à une sous-algèbre de $\text{End } G^q$.

On dira qu'un point p de $G(\mathbb{C})$ est fortement propre pour Γ s'il existe un élément $\mathbf{z}$ de $TG(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{gd}$ tel que l'application exponentielle $\exp_G$ du groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ vérifie $\exp_G(\mathbf{z}) = p$ et que $\mathbf{z}$ soit un vecteur propre pour l'action naturelle de $d_0\gamma$ sur $TG(\mathbb{C})$ pour tout γ dans Γ .

Le résultat principal s'énonce alors :

Théorème 0.1. *Soit p un point non nul de $G(\mathbb{C})$ fortement propre pour Γ appartenant à $\exp_{\mathbb{G}}((\bar{\mathbb{Q}})^{g^d})$. Si X désigne la plus petite sous variété algébrique de G définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et contenant p , on a :*

$$\dim X \geq rd/2.$$

Le corollaire le plus frappant est le suivant :

Corollaire 0.2. *Si A est une variété abélienne à multiplications complexes et si l'on choisit $\mathcal{O} = \text{End } A$ alors sous les hypothèses du théorème 0.1 on a : $X = G$.*

Et enfin dans le cas où la variété abélienne est de dimension 1 le corollaire 0.2 entraîne :

Corollaire 0.3. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstraß d'invariants algébriques admettant des multiplications complexes, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur le corps des multiplications complexes de $\wp$. Alors les nombres*

$$\wp(\alpha_1), \dots, \wp(\alpha_n)$$

sont algébriquement indépendants sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

Le corollaire 0.2 découle immédiatement du théorème 0.1. Pour le corollaire 0.3 il convient de remarquer qu'il suffit de démontrer que sous les mêmes hypothèses sur la fonction $\wp$, et si β est un nombre algébrique de degré d sur le corps des multiplications complexes de $\wp$, les nombres

$$\wp(1), \wp(\beta), \dots, \wp(\beta^{d-1})$$

sont algébriquement indépendants sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Or ce dernier énoncé se déduit du corollaire 0.2 de la même façon que le corollaire 0.1 de [6] se déduit du théorème 3.2 de [6], on se reportera donc au paragraphe 3 de [6] pour les détails.

Cet article se présente comme suit. Dans le paragraphe 1 on rappelle, dans le contexte du théorème 0.1, quelques faits classiques sur les groupes algébriques et l'on prépare les notations pour la suite. Le paragraphe 2 est sans doute le point le plus important qui permet d'améliorer la méthode de [6]. Il s'agit de formaliser pour les opérateurs de dérivations sur le groupe algébrique considéré une idée de Baker-Coates-Anderson déjà utilisée par G.V. Choodnovsky dans [2], et dans une situation identique. Nous travaillerons avec des dérivations sur un groupe algébrique produit d'un groupe linéaire et d'une variété abélienne en séparant systématiquement les opérations sur l'un et l'autre des deux facteurs, les résultats de [3] ne suffisant pas à nos besoins nous démontrons dans le paragraphe 3 un lemme de zéro ad hoc pour la suite. Nous n'avons pas cherché à démontrer le lemme de zéros le meilleur possible ni le plus général, mais avons essayé d'être relativement brefs. Le paragraphe 4 donne la démonstration du théorème 0.1 et quelques commentaires.

Pour conclure ce paragraphe fixons une fois pour toute la notion de hauteur d'un polynôme à coefficient dans un corps de nombres F , que nous utiliserons. Si $p_1, \dots, p_v$ désignent les coefficients dans F d'un polynôme P , sa hau-

teur, notée $h(P)$, sera la hauteur logarithmique, telle que définie dans [8] page 19, du point $(1, p_1, \dots, p_v)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}_v(F)$.

Dans tout cet article nous ferons librement référence à [6].

C'est lors d'un séjour à Wuppertal en février 1982 que j'ai pu boucler la démonstration du théorème 0.1. Je tiens à ce propos à remercier G. Wüstholz qui m'a alors aimablement expliqué les détails qui forment maintenant l'important paragraphe 2.

§ 1. Préliminaires

Soit q un entier ≥ 1 .

On choisit un plongement de G^q dans un espace projectif $\mathbb{P}_N$:

$$\Psi: G^q \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}).$$

Identifions l'espace tangent TG^q de G^q à l'origine avec $\mathbb{C}^{gdq}$, l'application

$$\Psi \circ \exp_{G^q}: \mathbb{C}^{gdq} \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$$

est représentée par des fonctions analytiques $(\Theta_0(\mathbf{u}), \dots, \Theta_N(\mathbf{u}))$ ne s'annulant simultanément en aucun point de $\mathbb{C}^{gdq}$ et d'ordre strict ≤ 2 .

Nous allons décrire trois types d'opérations sur $\Psi(G^q)$ (que l'on identifie à G^q). Après le choix d'une base $\gamma_1, \dots, \gamma_{rd}$ du $\mathbb{Z}$ -module Γ on définit Γ_H pour $H \in \mathbb{N}$ comme dans [8] page 16.

$\alpha)$ Les lois d'additions (cf. [3] pages 492–3).

Lemme 1.1. *Il existe un recouvrement fini de $G^q \times G^q$ par des ouverts de Zariski $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ et des familles de polynômes $((A_0^{(\alpha)}, \dots, A_N^{(\alpha)}))_{\alpha \in \mathcal{A}}$ bihomogènes en $(X_0, \dots, X_N; X'_0, \dots, X'_N)$ tels que pour tout couple $(p, p') \in G^q \times G^q$, si $(x_0, \dots, x_N)$ (resp. $(x'_0, \dots, x'_N)$) sont des coordonnées projectives de p (resp. p'), chaque famille $(A_0^{(\alpha)}(\underline{x}, \underline{x}'), \dots, A_N^{(\alpha)}(\underline{x}, \underline{x}'))$ est soit identiquement nulle, soit forme un système de coordonnées projectives du point $p + p'$. De plus la famille d'indice α est non nulle si $(p, p') \in U_\alpha$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition d'un groupe algébrique.

$\beta)$ Les dérivations (cf. [1] page 289).

Soit $\beta \in \mathcal{B} = \{0, \dots, N\}$ et $V_\beta = G^q \cap \{X_\beta \neq 0\}$. La famille $(V_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ est un recouvrement de G^q par des ouverts de Zariski. Sur chaque ouvert $\exp_{G^q}^{-1}(V_\beta)$ et pour tout $i = 1, \dots, gdq$ et tout $j \neq \beta$ on a (cf. [8] page 26):

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\Theta_j}{\Theta_\beta} \right) = \Phi_{j,i}^{(\beta)} \left(\frac{\Theta_0}{\Theta_\beta}, \dots, \frac{\Theta_N}{\Theta_\beta} \right),$$

où $\Phi_{j,i}^{(\beta)}$ est un polynôme homogène de $F[X_0, \dots, X_N]$ de degré $\delta + 1$, où δ est indépendant de i et j . On peut donc énoncer le lemme:

Lemme 1.2. *L'opérateur*

$$\Delta_{i,\beta}: F[X_0, \dots, X_N] \rightarrow F[X_0, \dots, X_N]$$

$$P \rightarrow \sum_{j \neq \beta} \Phi_{j,i}^{(\beta)} \cdot P'_{X_j}$$

qui transforme le polynôme homogène P de degré D en un polynôme homogène de degré $D + \delta$, vérifie:

$$\left. \frac{\Delta_{i,\beta} P \circ \Psi \circ \exp_{G^q}}{\Theta_\beta^{D+\delta}} \right|_{\exp_{G^q}^{-1}(V_\beta)} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{P \circ \Psi \circ \exp_{G^q}}{\Theta_\beta^D} \right) \Big|_{\exp_{G^q}^{-1}(V_\beta)}.$$

γ) Les endomorphismes (cf. [6] lemme 2.4).

Lemme 1.3. *Il existe un nombre réel c_1 ne dépendant que de $\Psi, G^q, \gamma_1, \dots, \gamma_{rd}$ tel que pour tout $H \in \mathbb{N}$ il existe un recouvrement fini de G^q par des ouverts de Zariski $(W_\xi)_{\xi \in \mathcal{C}_H}$ et pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ des familles $\underline{F}_\gamma^{(\xi)} = (F_{0,\gamma}^{(\xi)}, \dots, F_{N,\gamma}^{(\xi)})$, indexées par $\xi \in \mathcal{C}_H$, de polynômes homogènes de même degré $\leq c_1 H^2$ en $X_0, \dots, X_N$ à coefficients dans $\mathcal{O}_F$ de hauteurs $\leq c_1(H^2 + 1)$ et tels que pour tout point p de G^q de coordonnées projectives $(X_0, \dots, X_N)$ la famille $\underline{F}_\gamma^{(\xi)}(X_0, \dots, X_N)$ ou soit nulle ou forme un système de coordonnées projectives du point $\gamma \cdot p$. De plus pour au moins un ξ la famille d'indice ξ est non nulle.*

Démonstration. C'est le lemme 2.4 de [6].

δ) Normalisation des coordonnées projectives.

Nous désignerons dorénavant par p le point fortement propre pour Γ de $\exp_G(TG(\mathbb{Q}))$ considéré dans le théorème 0.1. Et $(p, \dots, p)$ est un point de G^q . On définit les idéaux de $F[X_0, \dots, X_N]$:

$$\mathcal{G} = (P \in F[X_0, \dots, X_N]; P|_{G^q} \equiv 0)$$

et

$$\mathcal{E} = (P \in F[X_0, \dots, X_N]; P(p, \dots, p) = 0).$$

La dimension κ de l'idéal $\mathcal{E}$ est égale à la dimension de la sous-variété algébrique X de G du théorème 0.1. On a bien sûr $\mathcal{E} \supset \mathcal{G}$.

Lemme 1.4. *Il existe des formes linéaires $L_0, \dots, L_N$ en $X_0, \dots, X_N$ linéairement indépendantes sur F telles que $L_0, \dots, L_\kappa$ (resp. $L_0, \dots, L_{gdq}$) forment une base de transcendance sur F de l'anneau $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{E}$ (resp. $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{G}$) et que de plus L_i pour $i = \kappa + 1, \dots, N$ (resp. L_j pour $j = gdq + 1, \dots, N$) vérifie une relation de dépendance intégrale sur $F[L_0, \dots, L_{i-1}]$ modulo $\mathcal{E}$ (resp. $F[L_0, \dots, L_{j-1}]$ modulo $\mathcal{G}$).*

Démonstration. Le lemme 3.5 de [6] nous fournit des formes linéaires $L_0, \dots, L_{gdq}, L_{gdq+1}, \dots, L_N$ en $X_0, \dots, X_N$ linéairement indépendantes telles que $L_0, \dots, L_{gdq}$ forment une base de transcendance sur F de $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{G}$ et que L_j pour $j = gdq + 1, \dots, N$ vérifie une relation de dépendance intégrale sur $F[L_0, \dots, L_{j-1}]$ modulo $\mathcal{G}$. Réutilisant le lemme 3.5 de [6] on trouve des for-

mes linéaires $L_0, \dots, L_{gdq}$ en $L'_0, \dots, L'_{gdq}$ donc en $X_0, \dots, X_N$, linéairement indépendantes telles que $L_0, \dots, L_\kappa$ forment une base de transcendance sur F de $F[L'_0, \dots, L'_{gdq}]/\mathcal{E} \cap F[L'_0, \dots, L'_{gdq}]$ et que L_i pour $i=\kappa+1, \dots, gdq$ vérifie une relation de dépendance intégrale sur $F[L'_0, \dots, L'_{i-1}]$ modulo $\mathcal{E}$. Et comme

$$F[L_0, \dots, L_{gdq}] = F[L'_0, \dots, L'_{gdq}],$$

d'une part $L_0, \dots, L_{gdq}$ forment une base de transcendance sur F de $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{G}$, d'autre part L_i pour $i=gdq+1, \dots, N$ vérifie une relation de dépendance intégrale sur $F[L'_0, \dots, L'_{i-1}]$ modulo $\mathcal{G}$ et donc aussi modulo $\mathcal{E}$ car $\mathcal{E} \supset \mathcal{G}$. Enfin $L_0, \dots, L_\kappa$ forment clairement une base de transcendance sur F de $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{E}$, ce qui achève la preuve du lemme 1.4.

Désormais nous choisissons une fois pour toutes $(N+1)$ formes linéaires que nous notons encore $X_0, \dots, X_N$ et qui satisfont aux assertions du lemme 1.4. On en déduit que pour $i=\kappa+1, \dots, N$ il existe des relations homogènes de dépendance intégrale de X_i sur $F[X_0, \dots, X_\kappa]$ modulo $\mathcal{E}$,

$$R_i(X_0, \dots, X_i) = X_i^{n_i} + a_1^i(X_0, \dots, X_\kappa) X_i^{n_i-1} + \dots + a_{n_i}^i(X_0, \dots, X_\kappa) \in \mathcal{E}.$$

Et pour $j=gdq+1, \dots, N$ il existe des relations de dépendance intégrale de X_j sur $F[X_0, \dots, X_{gdq}]$ modulo $\mathcal{G}$,

$$R_j^*(X_0, \dots, X_j) = X_j^{n_j^*} + a_1^{*j}(X_0, \dots, X_{gdq}) X_j^{n_j^*-1} + \dots + a_{n_j^*}^{*j}(X_0, \dots, X_{gdq}) \in \mathcal{G}.$$

Soit $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_{gd})$ un élément de $\bar{\mathbb{Q}}^{gd}$ propre pour l'action de $d_0\gamma$ lorsque γ parcourt Γ et tel que $p=\exp_G(\mathbf{z})$.

Nous allons considérer le sous-groupe à q -paramètres de G^q suivant:

$$\varepsilon: \mathbb{C}^q \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{C}^{gdq} \xrightarrow{\Psi \circ \exp_{G^q}} \mathbb{P}_N$$

où $\mathcal{L}$ est l'application linéaire de matrice $q \times gdq$, dont la transposée s'écrit:

$$\begin{pmatrix} z_1 \dots z_{gd} & 0 & \dots & & & \\ 0 & 0 & z_1 \dots z_{gd} & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & 0 & z_1 \dots z_{gd} \end{pmatrix}.$$

ε est représenté par les fonctions analytiques $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ vérifiant:

$$\varphi_i(t_1, \dots, t_q) = \Theta_i(\mathcal{L}(t_1, \dots, t_q)).$$

Remarquons que l'image $\varepsilon(\mathbb{C}^q)$ du sous-groupe à q -paramètres de G^q ci-dessus contenant l'orbite sous Γ du point p , qui n'est pas de torsion dans G^q , est Zariski dense dans G^q . En effet s'il n'en était pas ainsi on devrait avoir $\mu(\Gamma \cdot p, G) = 0$ contredisant le lemme 2.1 de [6].

Le lemme 1.3 nous a permis de décrire l'action sur G^q des endomorphismes $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma)$, terminons ce paragraphe en expliquant comment nous ferons agir

ces mêmes endomorphismes sur $\mathbb{G}_a^q$ plongé dans $\mathbb{P}_q \cdot A$ tout élément $\gamma^0 \in \Gamma$ et au vecteur propre $\mathbf{z}$ de $d_0 \gamma^0$ est associé la valeur propre $\lambda(\gamma^0) \in \mathbb{Q}$. Pour $(Z_0, \dots, Z_q)$ un $(q+1)$ -uplet on pose:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \underline{Z} &= \gamma \cdot (Z_0, \dots, Z_q) \\ &= \left(Z_0, \sum_{i=1}^q \lambda(\gamma^{i,1}) Z_i, \dots, \sum_{i=1}^q \lambda(\gamma^{i,q}) Z_i \right) \quad \text{où } \gamma = (\gamma^{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq q}}. \end{aligned}$$

Pour un q -uplet $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_q)$ on notera aussi $\gamma \cdot \mathbf{t}$, le q -uplet défini par:

$$\gamma \cdot (1, t_1, \dots, t_q) = (1, \gamma \cdot \mathbf{t}),$$

ce qui décrit l'action de γ sur $\mathbb{G}_a^q$.

Dans toute la suite on supposera sans perte de généralité que les composantes $z_1, \dots, z_{gd}$ de $\mathbf{z}$ ainsi que les $(\lambda(\gamma^0))_{\gamma^0 \in \Gamma}$ sont dans F . Remarquons encore que si $\mathbf{1}$ est le q -uplet $(1, \dots, 1)$, pour tout γ dans $\mathcal{M}(q, \Gamma)$ le $(N+1)$ -uplet $(\varphi_0(\gamma \cdot \mathbf{1}), \dots, \varphi_N(\gamma \cdot \mathbf{1}))$ est un système de coordonnées projectives du point $\gamma \cdot (p, \dots, p)$, $((p, \dots, p) \in G^q)$.

§ 2. La remarque fondamentale

Nous considérerons dans la suite le groupe algébrique $\mathbb{G}_a^q \times G^q$. A l'aide du plongement $\Psi: G^q \rightarrow \mathbb{P}_N$ on identifie $\mathbb{G}_a^q \times G^q$ à un ouvert de Zariski d'une sous-variété de $\mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_N$.

Soit $\mathcal{G}$ l'idéal bihomogène de $F[Z_0, \dots, Z_q, X_0, \dots, X_N] = F[\underline{Z}, \underline{X}]$ engendré par l'idéal homogène $\tilde{\mathcal{G}}$ de $F[X_0, \dots, X_N]$ introduit précédemment au paragraphe 1.δ. Ainsi $\mathcal{G}$ est un idéal premier de codimension $N - gdq$, et sa variété des zéros $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ dans $\mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_N$ est $\mathbb{P}_q \times G^q$. A un polynôme $P \in F[\underline{Z}, \underline{X}]$ bihomogène en $\underline{Z}$ et $\underline{X}$ on associe la fonction analytique des q -variables $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_q)$:

$$\Phi(t_1, \dots, t_q) = P(1, t_1, \dots, t_q, \varphi_0(\mathbf{t}), \dots, \varphi_N(\mathbf{t})) = P(1, \mathbf{t}, \underline{\varphi}(\mathbf{t})),$$

et l'on déduit aisément du paragraphe 1.β le lemme suivant qui décrit l'action des opérateurs $\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial t_1^{\sigma_1} \dots \partial t_q^{\sigma_q}}$ (où $\sigma \in \mathbb{N}^q$ et $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_q$) sur l'algèbre des polynômes bihomogènes en $\underline{Z}$ et $\underline{X}$.

Lemme 2.1. *Pour tout multi-indice $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ de $\mathbb{N}^q$ et tout $\beta \in \mathcal{B}$ il existe un opérateur*

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma, \beta}: F[Z_0, \dots, Z_q, X_0, \dots, X_N] &\rightarrow F[Z_0, \dots, Z_q, X_0, \dots, X_N] \\ P &\mapsto \Delta_{\sigma, \beta} P \end{aligned}$$

transformant le polynôme bihomogène P de degrés L en $\underline{Z}$ et D en $\underline{X}$ en un polynôme bihomogène de degrés L en $\underline{Z}$ et $D + \delta|\sigma|$ en $\underline{X}$, vérifiant

$$\left. \frac{\Delta_{\sigma, \beta} P(1, \mathbf{t}, \underline{\varphi}(\mathbf{t}))}{(\varphi_{\beta}(\mathbf{t}))^{D + \delta|\sigma|}} \right|_{\varepsilon^{-1}(V_{\beta})} = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial t_1^{\sigma_1} \dots \partial t_q^{\sigma_q}} \left(\frac{P(1, \mathbf{t}, \underline{\varphi}(\mathbf{t}))}{(\varphi_{\beta}(\mathbf{t}))^D} \right) \Big|_{\varepsilon^{-1}(V_{\beta})}.$$

On considère l'ensemble $\{U_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}/U_\alpha \cap \{\varepsilon(\mathbf{0})\} \times G^q \neq \emptyset\} = \{U_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}'\}$, cette famille forme un recouvrement fini de $\{\varepsilon(\mathbf{0})\} \times G^q$. Soit $\alpha \in \mathcal{A}'$, $\beta \in \mathcal{B}$ et $\mathbf{t}$ vérifiant $\varepsilon(\mathbf{t}) \in V_\beta$ et $(\varepsilon(\mathbf{0}), \varepsilon(\mathbf{t})) \in U_\alpha$, alors pour tout $\mathbf{w}$ suffisamment proche de $\mathbf{0}$ on a encore $\varepsilon(\mathbf{t} + \mathbf{w}) \in V_\beta$ et $(\varepsilon(\mathbf{w}), \varepsilon(\mathbf{t})) \in U_\alpha$. Et l'on peut écrire:

$$\frac{\Phi(\mathbf{w} + \mathbf{t})}{[\varphi_\beta(\mathbf{w} + \mathbf{t})]^D} = \frac{P(1, \mathbf{w} + \mathbf{t}, A_0^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}); \varphi(\mathbf{t})), \dots, A_N^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}); \varphi(\mathbf{t})))}{[A_\beta^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}); \varphi(\mathbf{t}))]^D}.$$

Appliquant l'opérateur $\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mathbf{w}^\sigma}$ à cette formule (après multiplication des deux membres par $[A_\beta^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}); \varphi(\mathbf{t}))]^D$) on trouve:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mathbf{w}^\sigma} P(1, \mathbf{w} + \mathbf{t}, A^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}); \varphi(\mathbf{t}))) \\ &= \sum_{\substack{\sigma' \leq \sigma \\ \sigma' \in \mathbb{N}^q}} \binom{\sigma}{\sigma'} \frac{\partial^{|\sigma'|}}{\partial \mathbf{w}^{\sigma'}} \left(\frac{\Phi(\mathbf{w} + \mathbf{t})}{\varphi_\beta(\mathbf{w} + \mathbf{t})^D} \right) \cdot \frac{\partial^{|\sigma| - |\sigma'|}}{\partial \mathbf{w}^{(\sigma - \sigma')}} ([A_\beta^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}); \varphi(\mathbf{t}))]^D). \end{aligned}$$

On remarque alors que:

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mathbf{t}^\sigma} \left(\frac{\Phi(\mathbf{t})}{\varphi_\beta(\mathbf{t})^D} \right) = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mathbf{w}^\sigma} \left(\frac{\Phi(\mathbf{w} + \mathbf{t})}{\varphi_\beta(\mathbf{w} + \mathbf{t})^D} \right) \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{0}}.$$

Prenant la limite lorsque $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{0}$ dans la formule ci-dessus on obtient;

$$Q_{\sigma, \alpha}(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t})) = \sum_{\sigma' \leq \sigma} \binom{\sigma}{\sigma'} \frac{\partial^{|\sigma'|}}{\partial \mathbf{t}^{\sigma'}} \left(\frac{\Phi(\mathbf{t})}{\varphi_\beta(\mathbf{t})^D} \right) \cdot B_{\sigma - \sigma', \alpha, \beta}(\varphi(\mathbf{t}))$$

où

$$\begin{aligned} Q_{\sigma, \alpha}(\underline{Z}, \underline{X}) = \\ \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mathbf{w}^\sigma} P(Z_0, w_1 + Z_1, \dots, w_q + Z_q, A_0^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}), \underline{X}), \dots, A_N^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{w}), \underline{X})) \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{0}} \end{aligned}$$

est un polynôme bihomogène en $\underline{Z}$ et $\underline{X}$ et $B_{\sigma - \sigma', \alpha, \beta}(\underline{X})$ un polynôme homogène en $\underline{X}$ qui vérifie pour $|\sigma| - |\sigma'| \leq D$:

$$[A_\beta^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{0}); \underline{X})]^{D + |\sigma'| - |\sigma|} \text{ divise } B_{\sigma - \sigma', \alpha, \beta}(\underline{X}).$$

Mais on a,

$$\frac{\partial^{|\sigma'|}}{\partial \mathbf{t}^{\sigma'}} \left(\frac{\Phi(\mathbf{t})}{\varphi_\beta(\mathbf{t})^D} \right) = \frac{\Delta_{\sigma', \beta} P(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t}))}{(\varphi_\beta(\mathbf{t}))^{D + \delta|\sigma'|}}$$

sur $\varepsilon^{-1}(V_\beta)$, et donc, en utilisant le fait que $\varepsilon(\mathbb{C}^q)$ est Zariski dense dans G^q , on a pour tout $\alpha \in \mathcal{A}'$ et $\beta \in \mathcal{B}$:

$$X_\beta^{D + \delta|\sigma|} Q_{\sigma, \alpha} \in (\tilde{\mathcal{G}}, \Delta_{\sigma', \beta} P; |\sigma'| \leq |\sigma|).$$

De même on voit facilement que, du fait que $B_{\mathbf{0}, \alpha, \beta}(\underline{X}) = [A_\beta^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{0}), \underline{X})]^D$,

$$[A_\beta^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{0}), \underline{X})]^{D + |\sigma|} \Delta_{\sigma, \beta} P \in (\tilde{\mathcal{G}}, Q_{\sigma, \alpha}; |\sigma| \leq |\sigma|).$$

On pose $A_\beta'^{(\alpha)}(\underline{X}) = A_\beta^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{0}), \underline{X})$.

Et des estimations aisées permettent d'énoncer le lemme:

Lemme 2.2. Soit T un entier ≥ 0 , L et D des entiers ≥ 1 , et P un polynôme bihomogène de $F[Z_0, \dots, Z_q, X_0, \dots, X_N]$ de degrés L en $\underline{Z}$ et D en $\underline{X}$ et de hauteur $\leq h$. Il existe des familles $(\Delta_{\sigma, \beta} P)_{\substack{|\sigma| \leq T \\ \beta \in \mathcal{B}}}$ et $(Q_{\sigma, \alpha})_{\substack{|\sigma| \leq T \\ \alpha \in \mathcal{A}'}}$ de polynômes bihomogènes, et une constante c_2 ne dépendant pas de T et P , telles que:

(i) $d_X^0 Q_{\sigma, \alpha} \leq L$, $d_X^0 Q_{\sigma, \alpha} \leq c_2 D$ et $h(Q_{\sigma, \alpha}) \leq h + c_2(D + T \log(T + L + D))$ pour tout $|\sigma| \leq T$ et $\alpha \in \mathcal{A}'$

(ii) $([A_{\beta}^{(\alpha)}(\underline{X})]^{D+T} \cdot \Delta_{\sigma, \beta} P; |\sigma| \leq T, \beta \in \mathcal{B}) \subset (\tilde{\mathcal{G}}, Q_{\sigma, \alpha}; |\sigma| \leq T)$

(iii) pour tout $|\sigma| \leq T$ et $\alpha \in \mathcal{A}'$ et $\beta \in \mathcal{B}$ on a:

$$X_{\beta}^{D+\delta T} \cdot Q_{\sigma, \alpha} \equiv \sum_{\sigma' \leq \sigma} C_{\sigma', \alpha, \beta} \cdot \Delta_{\sigma', \beta} P \pmod{\tilde{\mathcal{G}}},$$

où $C_{\sigma', \alpha, \beta}$ est un polynôme homogène de degré $\leq c_2 D + \delta T$ en $\underline{X}$ et de hauteur $h(C_{\sigma', \alpha, \beta}) \leq c_2(D + T \log(T + L + D))$

(iv) pour tout $|\sigma| \leq T$ et $\beta \in \mathcal{B}$ on a:

$$\frac{\Delta_{\sigma, \beta} P(1, \underline{t}, \underline{\varphi}(\underline{t}))}{(\varphi_{\beta}(\underline{t}))^{D+\delta|\sigma|}} \Big|_{\varepsilon^{-1}(V_{\beta})} = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \underline{t}^{\sigma}} \left(\frac{P(1, \underline{t}, \underline{\varphi}(\underline{t}))}{(\varphi_{\beta}(\underline{t}))^D} \right) \Big|_{\varepsilon^{-1}(V_{\beta})}.$$

§ 3. Le lemme de zéros

Ce paragraphe est consacré à la preuve du lemme 3.2. Je remercie Y.V. Nesterenko pour ses remarques sur une première version de ce paragraphe.

Lemme 3.1. Il existe une constante $c_3 \geq 1$ ne dépendant que de $\mathcal{G}$ et vérifiant ce qui suit. Soit $P \in F[\underline{Z}, \underline{X}]$ un polynôme, n'appartenant pas à $\tilde{\mathcal{G}}$, bihomogène de degrés L en $\underline{Z}$ et D en $\underline{X}$ avec $1 \leq D \leq L$. Soit T un entier $> c_3 \cdot g d q \cdot D^{g d q}$ et $(Q_{\sigma, \alpha})$ la famille de polynômes introduite dans le lemme 2.2. On pose;

$$I_T = (\tilde{\mathcal{G}}, Q_{\sigma, \alpha}; \alpha \in \mathcal{A}', |\sigma| \leq T)$$

alors I_T engendre dans $F(\underline{Z})[X_0, \dots, X_N]$ un idéal de codimension $N+1$. (càd la variété des zéros $\mathcal{Z}(I_T)$ de I_T dans $\mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_N$ est contenue dans $H \times \mathbb{P}_N$ où H est un sous-ensemble algébrique de codimension 1 de $\mathbb{P}_q$)

Démonstration. On va faire la démonstration par récurrence en montrant pour tout $r=1, \dots, g d q + 1$ l'assertion $(\mathcal{K})_r$ suivante:

$(\mathcal{K})_r$: pour $T > c_3 \cdot (r-1) \cdot D^{r-1}$ il existe une décomposition primaire normale

$$I_T = \mathfrak{Q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{Q}_{h'},$$

et un entier $h \in \{1, \dots, h'\}$ tels que:

- $\forall i=1, \dots, h$ $\mathfrak{Q}_i \cap F[\underline{Z}] = (0)$ et $\mathfrak{P}_i = \sqrt{\mathfrak{Q}_i}$ est un idéal premier de codimension $\geq N - g d q + r$,

- $\forall i=h+1, \dots, h'$ $\mathfrak{Q}_i \cap F[\underline{Z}] \neq (0)$.

1°) Pour $r=1$, comme on sait que $\text{codim } \tilde{\mathcal{G}} = N - g d q$, et $P \notin \tilde{\mathcal{G}}$ on a $\text{codim } I_T = N - g d q + 1$ pour $T > 0$ et donc l'assertion $(\mathcal{K})_1$ est immédiate.

2°) Montrons que pour $r \in \{1, \dots, g d q\}$ l'hypothèse $(\mathcal{K})_r$ entraîne $(\mathcal{K})_{r+1}$. Soit T un entier tel que I_T vérifie l'assertion $(\mathcal{K})_r$.

Soit i un indice entre 1 et h tel que l'idéal premier $\mathfrak{P}_i$ soit de codimension exactement $N - g dq + r$ (s'il n'y en a pas alors l'assertion $(\mathcal{K})_{r+1}$ est vérifiée). On continue la preuve en trois temps :

i) D'abord on montre que l'exposant e_i de l'idéal primaire $\mathfrak{Q}_i$ associé à $\mathfrak{P}_i$ est $\leq [c_3 \cdot D']$. Pour cela on va localiser par rapport à $F[\underline{Z}] \setminus \{0\}$. Désignons par $\bar{I}_T, \bar{\mathfrak{Q}}_j, \bar{\mathfrak{P}}_j, \dots$ les idéaux engendrés dans l'anneau $F(\underline{Z})[\underline{X}]$ par $I_T, \mathfrak{Q}_j, \mathfrak{P}_j, \dots$. On démontre alors comme dans [1] (voir le paragraphe 2) que, lorsque $\mathfrak{P}_j \cap F[\underline{Z}] = (0)$ l'idéal $\bar{\mathfrak{P}}_j$ est premier dans $F(\underline{Z})[\underline{X}]$ de codimension égale à celle de $\mathfrak{P}_j$ dans $F[\underline{Z}, \underline{X}]$ et l'idéal $\bar{\mathfrak{Q}}_j$ est primaire associé à $\bar{\mathfrak{P}}_j$ de même exposant e_j que $\mathfrak{Q}_j$. Enfin

$$\bar{I}_T = \bar{\mathfrak{Q}}_1 \cap \dots \cap \bar{\mathfrak{Q}}_h$$

est une décomposition primaire normale de $\bar{I}_T$.

A l'aide de combinaisons linéaires génériques des générateurs de I_T on construit une suite régulière dans $\bar{I}_T$ de la forme :

$$Q_1, \dots, Q_{N-gdq}, Q_{N-gdq+1}, \dots, Q_{N-gdq+r}$$

où $Q_1, \dots, Q_{N-gdq}$ ne dépendent que de $\mathcal{G}$ et $Q_{N-gdq+1}, \dots, Q_{N-gdq+r}$ sont des polynômes homogènes de $F(\underline{Z})[\underline{X}]$ de degré D en $\underline{X}$.

Comme $\bar{\mathfrak{Q}}_i$ est une composante primaire de $\bar{I}_T$ on sait que son exposant e_i est majoré par le degré de l'idéal $\bar{I}_T$. Utilisant la suite régulière ci-dessus et le lemme 3 de [1] on conclut que le degré de l'idéal $\bar{I}_T$ est majoré par $c_3 \cdot D'$ où c_3 ne dépend que de $Q_1, \dots, Q_{N-gdq}$, donc de $\mathcal{G}$.

Ceci fournit la majoration de l'exposant e_i de l'idéal primaire $\mathfrak{Q}_i$ cherchée.

ii) On pose $\tilde{V}_\beta = \{Z_0 \neq 0\} \times V_\beta$ pour $\beta \in \mathcal{B}$.

Soit $\beta_0 \in \mathcal{B}$ tel que $\tilde{V}_{\beta_0} \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i) \neq \emptyset$. Il y a nécessairement un tel β_0 car $(\tilde{V}_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ est un recouvrement de $\{Z_0 \neq 0\} \times \mathbb{P}_N$ et $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i) \not\subset \{Z_0 = 0\}$. On montre alors que $\Delta_{\sigma_0, \beta_0} I_T \not\subset \mathfrak{P}_i$ pour un multi-indice σ tel que $|\sigma| = e_i$.

Pour cela, suivant [1] et [4], on définit pour $Q \in F[\underline{Z}, \underline{X}]$, et $p' \in \tilde{V}_{\beta_0} \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)$,

$$\text{ord}_{p'} Q = \max \{l / \forall |\sigma| < l, \Delta_{\sigma, \beta_0} Q(p') = 0\}.$$

Et l'on pose

$$\text{ord}_{p'} \mathfrak{P}_i = \min \{\text{ord}_{p'} Q; Q \in \mathfrak{P}_i\} > 0.$$

Si P_i est un polynôme de $\mathfrak{P}_i$ réalisant ce minimum il existe un multi-indice σ_0 de la forme $\sigma_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ tel que $\text{ord}_{p'} \Delta_{\sigma_0, \beta_0} P_i < \text{ord}_{p'} P_i$ ce qui entraîne que $\Delta_{\sigma_0, \beta_0} P_i \notin \mathfrak{P}_i$.

Choisissons pour tout $j \neq i$ un élément $P_j \in \mathfrak{Q}_j \setminus \mathfrak{P}_i$. On peut même, pour $j \geq h+1$, prendre $P_j \in \mathfrak{Q}_j \cap F[\underline{Z}]$. Alors si $\sigma = e_i \cdot \sigma_0$ on a :

$$\Delta_{\sigma, \beta_0} (P_i^{e_i} \prod_{j \neq i} P_j) \equiv e_i! (\Delta_{\sigma_0, \beta_0} P_i)^{e_i} \cdot \prod_{j \neq i} P_j \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_i},$$

et comme $P_i^{e_i} \prod_{j \neq i} P_j \in I_T$ on a bien montré que $\Delta_{\sigma, \beta_0} I_T \not\subset \mathfrak{P}_i$ pour un multi-indice σ vérifiant $|\sigma| = e_i$.

iii) D'après le lemme 2.2 on a pour $\beta \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathcal{A}'$ et $|\sigma'| \leq T$;

$$X_\beta^{D+\delta T} \cdot Q_{\sigma', \alpha} \in (\mathcal{G}, \Delta_{\sigma'', \beta} P; |\sigma''| \leq T)$$

d'où pour le σ_0 du (ii) et pour tout $\beta \in \mathcal{B}$,

$$\Delta_{\sigma_0, \beta_0}(X_\beta^{D+\delta T} \cdot Q_{\sigma', \alpha}) = \Delta_{\sigma_0, \beta_0}(X_\beta^{D+\delta T}) \cdot Q_{\sigma', \alpha} + X_\beta^{D+\delta T} \cdot \Delta_{\sigma_0, \beta_0} Q_{\sigma', \alpha},$$

avec

$$X_\beta^\delta \cdot \Delta_{\sigma_0, \beta_0}(X_\beta^{D+\delta T} \cdot Q_{\sigma', \alpha}) \in (\mathcal{G}, \Delta_{\sigma'', \beta} P; |\sigma''| \leq T+1).$$

Et enfin pour $\sigma = e_i \sigma_0$;

$$X_\beta^{D+\delta(T+e_i)} \cdot \Delta_{\sigma, \beta_0} Q_{\sigma', \alpha} \in (\mathcal{G}, \Delta_{\sigma'', \beta} P; |\sigma''| \leq T+e_i).$$

Soit $T' \geq T + [c_3 D'] \geq T + e_i$, on déduit toujours du lemme 2.2 que pour tout $\beta \in \mathcal{B}$ et $\alpha' \in \mathcal{A}'$

$$[A_\beta^{(\alpha')}(X) \cdot X_\beta]^{D+\delta T'} \cdot \Delta_{\sigma, \beta_0} Q_{\sigma', \alpha} \in I_{T'}.$$

Comme lorsque α' parcourt $\mathcal{A}'$ et β parcourt $\mathcal{B}$ les polynômes $X_\beta \cdot A_\beta^{(\alpha')}(X)$ n'ont pas de zéro commun on obtient que, pour $\alpha \in \mathcal{A}'$ et $|\sigma'| \leq T$,

$$\Delta_{\sigma, \beta_0} Q_{\sigma', \alpha} \in I_T^*,$$

où le symbole $*$ signifie que l'on omet les composantes primaires de radical contenant $(X_0, \dots, X_N)$.

D'où il découle que:

$$\Delta_{\sigma, \beta_0} I_T \subset I_T^*.$$

On en déduit que pour $T' \geq T + [c_3 D']$ on a $I_T^* \not\subset \mathfrak{P}_i$ pour tous les $i \in \{1, \dots, h\}$ tels que la composante $\mathfrak{P}_i$ de I_T soit de codimension $N - g d q + r$. Et par suite, vu que $I_{T'} \supseteq I_T$, les seules composantes $\mathfrak{P}_i$ de $I_{T'}$ de codimension $\leq N - g d q + r$ sont parmi celles qui proviennent des $\mathfrak{P}_i$ avec $i = h+1, \dots, h'$ et vérifient donc $\mathfrak{P}_i' \cap F[\underline{Z}] \neq (0)$. Mais pour tout $T' > c_3 \cdot r \cdot D'$ on peut trouver $T > c_3(r-1)D'^{-1}$ tel que $T' \geq T + [c_3 D']$, l'assertion $(\mathcal{K})_{r+1}$ est donc vérifiée.

Pour achever la preuve du lemme 3.1 il suffit de remarquer que les idéaux $\mathfrak{Q}$ primaires bihomogènes de $F[\underline{Z}, \underline{X}]$ de codimension $N+1$ vérifient nécessairement $\mathfrak{Q} \cap F[\underline{Z}] \neq (0)$ ou $\sqrt{\mathfrak{Q}} = (X_0, \dots, X_N)$, le lemme découle de l'assertion $(\mathcal{K})_{g d q + 1}$.

Le lemme de zéro que nous avons en vue s'énonce:

Lemme 3.2. *Il existe une constante $c_4 > 0$ ne dépendant que de G^q et des relations (R_j^*) choisies au paragraphe 1 telle que la proposition suivante soit vraie.*

Soit P un élément de $F[\underline{Z}, \underline{X}]$ bihomogène de degrés L en $\underline{Z}$ et D en $\underline{X}$, n'appartenant pas à $\mathcal{G}$. Soit T et H des entiers vérifiant:

$$(T - c_3 g d D^{g d}) \cdot H^{r d} > c_4 L D^{g d}.$$

Alors l'idéal

$$J = (\mathcal{G}, Q_{\sigma, \alpha}(\gamma \cdot \underline{Z}, F_\gamma^{(\xi)}(\underline{X})); \alpha \in \mathcal{A}', \xi \in \mathcal{C}_H, |\sigma| \leq T \text{ et } \gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H))$$

vérifie:

$$\mathcal{Z}(J) \subset \mathcal{Z}((Z_0)) \cup \mathcal{Z}((Z_1, \dots, Z_q)).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur q .

(i) *le cas $q=1$:* Le lemme 3.1 avec $q=1$ nous assure que dans l'anneau $F(\mathbb{Z})[X_0, \dots, X_N]$ l'idéal engendré par $I_{T'}$ pour $T' > c_3 g d D^{g^d}$ est de codimension $N+1$. Les relations $R_{g^d+1}^*, \dots, R_N^*$ introduites à la fin du paragraphe 1 étant dans $\mathcal{G}$ sont dans $I_{T'}$. Notant $P_1, \dots, P_m$ des générateurs de $\mathcal{G}$ et les $(Q_{\sigma, \alpha})$ on peut alors appliquer le lemme 1.2 de [6] qui fournit un polynôme Δ de $F[\mathbb{Z}]$, non nul, homogène de degré $\leq c'_4 L \cdot D^{g^d}$ où c'_4 est une constante ne dépendant que des (R_i^*) .

Comme $X_\beta^{c_2(N+1)D} \cdot \Delta \in I_{T'}$, on déduit du lemme 2.2 que:

$$X_\beta^{c_2 D + \delta T'} \cdot \Delta \in (\tilde{\mathcal{G}}, \Delta_{\sigma', \beta} P; |\sigma'| \leq T')$$

où $c'_2 = 1 + c_2(N+1)$. D'où encore,

$$X_\beta^{c_2 D + \delta T' + |\sigma|} \cdot \Delta_{\sigma, \beta}(\Delta) \in (\tilde{\mathcal{G}}, \Delta_{\sigma', \beta} P; |\sigma'| \leq T' + |\sigma|)$$

et enfin,

$$[A'^{(\alpha')}(X) \cdot X_\beta]^{c_2 D + \delta(T' + |\sigma|)} \cdot \Delta_{\sigma, \beta}(\Delta) \in (\tilde{\mathcal{G}}, Q_{\sigma', \alpha}; \alpha \in \mathcal{A}' \text{ et } |\sigma'| \leq T' + |\sigma|)$$

pour tout $\alpha' \in \mathcal{A}'$ et tout $\beta \in \mathcal{B}$.

On remarque alors que $\Delta_{\sigma, \beta}(\Delta) = Z_0^{\sigma_1} \cdot \frac{\partial^{\sigma_1}}{\partial Z_1^{\sigma_1}} \Delta$ est indépendant de β . On peut donc comme à la fin de la preuve du lemme 3.1 déduire que:

$$\Delta_{\sigma, \beta}(\Delta) \in (\tilde{\mathcal{G}}, Q_{\sigma', \alpha}; \alpha \in \mathcal{A}' \text{ et } |\sigma'| \leq T' + |\sigma|)^*,$$

d'où:

$$\forall |\sigma| \leq T - T', \quad \forall \gamma \in \Gamma_H \quad \Delta_{\sigma, \beta}(\Delta)(\gamma \cdot \underline{z}) \in J^*.$$

Si $(z_0, z_1, x_0, \dots, x_N)$ est un système de coordonnées projectives d'un zéro de J dans $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_N$ avec $z_0 z_1 \neq 0$ on doit avoir:

$$\forall \sigma_1 \leq T - T', \quad \forall \gamma \in \Gamma_H \quad \frac{\partial^{\sigma_1}}{\partial Z_1^{\sigma_1}} \Delta(\gamma \cdot \underline{z}) = 0$$

ce qui est clairement impossible pour $(T - T') H^{rd} > c'_4 L D^{g^d}$ car le degré de Δ est borné par $c'_4 L D^{g^d}$.

(ii) *la récurrence $q-1 \rightarrow q$:* On suppose que contrairement à la conclusion du lemme 3.2 il existe un zéro $(z_0, \dots, z_q) \times (p_1, \dots, p_q)$ de J dans $\mathbb{P}_q \times G^q$ tel que $z_0 z_i \neq 0$ pour un certain i entre 1 et q . Quitte à remplacer ce zéro par son image par un élément de $\mathcal{M}(q, \Gamma_1)$ convenable et à remplacer H par $[H/q]$ on peut faire l'hypothèse que $z_0 \dots z_q \neq 0$. On peut également supposer ce point rationnel sur une extension finie de F , que l'on notera encore F . Soit $z \times p$ un point générique de $\mathbb{G}_a \times G$ et J' l'idéal de $F[\mathbb{Z}, \underline{X}]$ suivant,

$$J' = (\mathcal{G}, Z_q - z Z_0, Q_{\sigma, \alpha}(\gamma \cdot \underline{z}, F_\gamma^{(\xi)}(\underline{X})); \quad \alpha \in \mathcal{A}', \xi \in \mathcal{C}_H, \sigma \in \Sigma_{q, T} \text{ et } \gamma \in \mathcal{M}(q-1, \Gamma_H))$$

où $\Sigma_{q, T} = \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{q-1}, 0); |\sigma| < (1-1/q)T\}$ et où un élément $\gamma \in \mathcal{M}(q-1, \Gamma_H)$ est identifié à élément $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}(q, \Gamma_H)$.

Comme $\mathcal{G} = (Q \in F[X]; Q|_{\mathcal{G}^{q-1} \times \{p\}} \equiv 0)$ le lemme admis à l'ordre $q-1$ entraîne que l'idéal J' n'a pas de zéro de la forme $(z_0, \dots, z_{q-1}, z z_0) \times (p_1, \dots, p_{q-1}, p)$. (notons que l'on utilise en fait le lemme 3.2 à l'ordre $q-1$ avec F remplacé par $F(z)$, et que ceci est bien licite). Il existe donc un polynôme $P^{(1)} = Q_{\sigma_0, z_0}$ n'appartenant pas à l'idéal

$$\mathcal{G}_1 = (Q \in F[X]; Q|_{\gamma_0((p_1, \dots, p_{q-1}) \times G) \equiv 0}).$$

Ecrivons $\gamma_0 \cdot (z_0, \dots, z_q) = (z_0, z'_1, \dots, z'_{q-1}, z_q)$, un des z'_i est non nul. Soient T' un entier $> c_3 g d D^{g^d}$ et $Q_{\sigma, \alpha}^{(1)}$ les polynômes donnés par le lemme 2.2 à partir de $P^{(1)}$. Utilisant le lemme 3.1 pour $q=1$ on déduit que l'idéal

$$I_1 = (\mathcal{G}_1, Z_0 z'_i - Z_i z_0, Q_{\sigma, \alpha}^{(1)}; \quad i=1, \dots, q-1, \alpha \in \mathcal{A}', \sigma = (0, \dots, 0, \sigma_q) \text{ avec } \sigma_q \leq T'/q)$$

engendre dans $F(Z)[X]$ un idéal de codimension $N+1$.

Réduisant les polynômes $Q_{\sigma, \alpha}^{(1)}$ modulo les relations $Z_0 z'_i - Z_i z_0$ ($i=1, \dots, q-1$) on obtient des éléments $\tilde{Q}_{\sigma, \alpha}^{(1)}$ de $F[Z_0, Z_q, X_0, \dots, X_N]$ bihomogènes de degré L en (Z_0, Z_q) et $\leq c'_2 D$ en X . Posons:

$$J_1 = (\mathcal{G}_1, \tilde{Q}_{\sigma, \alpha}^{(1)}(\gamma \cdot Z, F_{\gamma}^{(\xi)}(X)); \quad \alpha \in \mathcal{A}', \xi \in \mathcal{C}_H, \sigma = (0, \dots, 0, \sigma_q) \text{ et } \sigma_q < T/q, \text{ et } \gamma \in \Gamma_H)$$

où l'on a identifié $\gamma \in \Gamma_H$ et l'élément $\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}(q, \Gamma_H)$.

On reprend alors la construction du pas $q=1$ qui fournit un polynôme Δ_1 de $F[Z_0, Z_q]$ homogène de degré $\leq c'_4 L D^{g^d}$ et tel que pour tout $\sigma_q \leq (T-T')/q$ et tout $\gamma \in \Gamma_H$ on ait,

$$Z_0^{\sigma_q} \cdot \frac{\partial^{\sigma_q}}{\partial Z_q^{\sigma_q}} \Delta_1(Z_0, \gamma Z_q) \in J_1^*.$$

On vérifie alors par des arguments similaires à ceux utilisés dans les démonstrations des lemmes 2.2 et 3.1 que pour tout les α, ξ, σ et γ intervenant dans la définition de l'idéal J_1 et tout $\xi' \in \mathcal{C}_H$ on a:

$$Q_{\sigma, \alpha}^{(1)}(\gamma \gamma_0 \cdot Z, F_{\gamma}^{(\xi)}(F_{\gamma_0}^{(\xi')}(X))) \in J^*.$$

Mais $(z_0, \dots, z_q) \times (p_1, \dots, p_q)$ étant un zéro de J (donc de J^*) on en déduit que $(z_0, z_q) \times \gamma_0(p_1, \dots, p_q)$ est un zéro de J_1 et donc, comme $z_0 \neq 0$, que,

$$\forall \gamma \in \Gamma_H, \quad \forall \sigma_q < (T-T')/q \quad \frac{\partial^{\sigma_q}}{\partial Z_q^{\sigma_q}} \Delta_1(z_0, \gamma z_q) = 0.$$

Ceci contredit la majoration du degré de Δ_1 , car $(T-T')H^{rd} > c_4 L D^{g^d}$ et $z_q \neq 0$, et établit le lemme 3.2 au pas q .

§ 4. Preuve du Théorème 0.1

Soit ε un nombre réel >0 arbitrairement petit et q un entier $\geq 2(gd + 1/\varepsilon)$. Soit L un paramètre entier arbitrairement grand, on pose $D = [(\log L)^\varepsilon] + 1$. Dans ce qui suit $c_5, c_6, \dots$ sont des constantes réelles strictement positives ne dépendant pas de L .

Lemme 4.1. *Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[\underline{Z}, \underline{X}]$ bihomogène de degrés L en $\underline{Z}$ et D en $\underline{X}$ et de hauteur $\leq c_5 L$ tel que :*

- (i) $P \notin \mathcal{G}$
- (ii) la fonction $\Phi(t_1, \dots, t_q) = P(1, t_1, \dots, t_q, \varphi_0(\mathbf{t}), \dots, \varphi_N(\mathbf{t}))$ vérifie pour tout réel $R_0 \leq \log L$ et tout $|\sigma| < L/\log L$,

$$\sup_{\mathbf{t} \in B(\mathbf{0}, R_0)} \left\{ \left| \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial t_1^{\sigma_1} \dots \partial t_q^{\sigma_q}} \Phi(\mathbf{t}) \right| \right\} \leq \exp(-c_6 L (\log L)^{1 + (\varepsilon/2)}).$$

Démonstration. Soit Ξ une base des monômes de $F[\underline{Z}, \underline{X}]$ bihomogènes de degrés L en $\underline{Z}$ et D en $\underline{X}$ linéairement indépendants sur F modulo $\mathcal{G}$. On sait que $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ étant $\mathbb{P}_q \times G^q \subset \mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_N$, le cardinal de Ξ est $\geq c_7 L^q D^{g dq}$. Écrivons

$$\Phi(\mathbf{t}) = \sum_{\underline{Z} \in \underline{X}^\beta \in \Xi} p_{\underline{z}, \underline{\beta}} t_1^{\alpha_1} \dots t_q^{\alpha_q} \cdot \varphi_0^{\beta_0}(\mathbf{t}) \dots \varphi_N^{\beta_N}(\mathbf{t}),$$

la non nullité de la famille $(p_{\underline{z}, \underline{\beta}})$ entrainera bien que $P \notin \mathcal{G}$.

En développant les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ en séries entières au voisinage de $\mathbf{0}$, on obtient :

$$\Phi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^q} \left(\sum_{\underline{Z} \in \underline{X}^\beta \in \Xi} a_{\underline{z}, \underline{\beta}, \mathbf{v}} \cdot p_{\underline{z}, \underline{\beta}} \right) t_1^{v_1} \dots t_q^{v_q},$$

où les $a_{\underline{z}, \underline{\beta}, \mathbf{v}}$ sont des éléments du corps de nombres F dont un dénominateur commun et les tailles sont majorés par $c_8(|\underline{z}| + |\underline{\beta}| + |\mathbf{v}| \log |\mathbf{v}|)$.

Soit $T = [L \cdot D^{gd - (1/2)}]$, les équations $(\sum_{\underline{Z} \in \underline{X}^\beta \in \Xi} a_{\underline{z}, \underline{\beta}, \mathbf{v}} \cdot p_{\underline{z}, \underline{\beta}} = 0)_{|\mathbf{v}| < T}$ donnent au plus $c_9 T^q$ équations linéaires en les $(p_{\underline{z}, \underline{\beta}})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de tailles majorées par $c_{10} T \log T$. Le principe des tiroirs (de Dirichlet) nous permet donc de trouver une famille $(p_{\underline{z}, \underline{\beta}})$ d'éléments, non tous nuls, de $\mathbb{Z}$ vérifiant d'une part

$$\sum_{\underline{Z} \in \underline{X}^\beta \in \Xi} a_{\underline{z}, \underline{\beta}, \mathbf{v}} \cdot p_{\underline{z}, \underline{\beta}} = 0 \quad \text{pour tout } |\mathbf{v}| < T,$$

et d'autre part

$$\max_{\underline{Z} \in \underline{X}^\beta \in \Xi} \{|p_{\underline{z}, \underline{\beta}}|\} \leq \exp \left(c_{11} L D^{gd - (1/2)} \log L \times \frac{L^q D^{gdq - (q/2)}}{L^q D^{gdq}} \right),$$

mais on a $D^{q/2 - gd + (1/2)} \geq (\log L)^{\varepsilon(\frac{q+1}{2} - gd)} > \log L$ (car $q \geq 2(gd + (1/\varepsilon))$) et donc la majoration ci-dessus se réécrit :

$$\max_{\underline{Z} \in \underline{X}^\beta \in \Xi} \{|p_{\underline{z}, \underline{\beta}}|\} \leq \exp(c_5 L).$$

De plus le polynôme $P = \sum_{Z^a X^\beta \in \mathbb{Z}} p_{z, \beta} Z^a X^\beta$, ainsi déterminé, vérifie bien (i) et la fonction Φ associée à P s'annule à l'ordre T à l'origine. Un "lemme de Schwarz" très classique (par exemple le théorème 7.1.5 de [8] avec $r = R_0 \leq \log L$ et $R = L^{1/4}$) nous permet de conclure, étant donné que les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ sont d'ordre strict ≤ 2 , à la validité de (ii) pour la fonction Φ . Ceci achève donc la preuve du lemme 4.1.

Démonstration du théorème 0.1: On sait d'après le théorème de Schneider-Lang (cf. [8] page 59) que dans la situation du théorème 0.1 on a toujours $\dim X = \kappa \geq 1$, on peut donc sans perte de généralité supposer pour la démonstration que $rd > 2$.

La démonstration se fait par un raisonnement par l'absurde en supposant au départ que $1 \leq \kappa < rd/2$, on choisit alors un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{2g}, \frac{rd - 2\kappa}{d\kappa(2g+r)} \right\}.$$

q et D sont alors choisis en fonction de L et ε comme précédemment, et on considère le polynôme P fourni par le lemme 4.1.

Nous décomposons la suite de l'argument en trois pas.

i) Les estimations analytiques

On sait d'après le lemme 2.2 (iv) que pour β et $\mathbf{t}$ tels que $\varepsilon(\mathbf{t}) \in V_\beta$ on a :

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma, \beta} P(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t})) &= (\varphi_\beta(\mathbf{t}))^{D+\delta|\sigma|} \cdot \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mathbf{t}^\sigma} \left(\frac{\Phi(\mathbf{t})}{(\varphi_\beta(\mathbf{t}))^D} \right) \\ &= \sum_{\sigma' \leq \sigma} \binom{\sigma}{\sigma'} (\varphi_\beta(\mathbf{t}))^{D+\delta|\sigma|} \cdot \frac{\partial^{|\sigma-\sigma'|}}{\partial \mathbf{t}^{\sigma-\sigma'}} \left(\frac{1}{(\varphi_\beta(\mathbf{t}))^D} \right) \frac{\partial^{|\sigma'|}}{\partial \mathbf{t}^{\sigma'}} (\Phi(\mathbf{t})). \end{aligned}$$

Posons

$$M_\beta(\sigma, \mathbf{t}) = \max_{\sigma' \leq \sigma} \left\{ (1 + |\varphi_\beta(\mathbf{t})|)^{D+\delta|\sigma|} \cdot \left| \frac{\partial^{|\sigma-\sigma'|}}{\partial \mathbf{t}^{\sigma-\sigma'}} \left(\frac{1}{(\varphi_\beta(\mathbf{t}))^D} \right) \right| \right\}.$$

En faisant les hypothèses que $|\sigma| \leq L/\log L$ et $R_0 \leq \log L$ on déduit du lemme 4.1 (ii) et des égalités ci-dessus que pour tout $\beta \in \mathcal{B}$ et tout $\mathbf{t} \in B(\mathbf{0}, R_0)$

$$|\Delta_{\sigma, \beta} P(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t}))| \leq M_\beta(\sigma, \mathbf{t}) \exp(-c_{12} L(\log L)^{1+(\varepsilon/2)}).$$

et combinant avec le lemme 2.2 (iii) on trouve que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}'$, tout $\beta \in \mathcal{B}$ et tout $\mathbf{t} \in B(\mathbf{0}, R_0)$ on a

$$\begin{aligned} &|\varphi_\beta(\mathbf{t})|^{D+\delta|\sigma|} \cdot |Q_{\sigma, \alpha}(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t}))| \\ &\leq \left(\sum_{\sigma' \leq \sigma} |C_{\sigma', \alpha, \beta}(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t}))| \right) M_\beta(\sigma, \mathbf{t}) \times \exp(-c_{12} L(\log L)^{1+(\varepsilon/2)}). \end{aligned}$$

Mais un argument classique utilisant les équations fonctionnelles des fonctions thêta montre qu'il existe pour tout $\mathbf{t} \in B(\mathbf{0}, R_0)$ un $\beta \in \mathcal{B}$ tel que $|\varphi_\beta(\mathbf{t})| \geq \exp(-c_{13} R_0^2)$ où c_{13} ne dépend pas de $\beta, \mathbf{t}$ et R_0 .

Une conséquence immédiate est que pour tout $\mathbf{t} \in B(\mathbf{0}, R_0)$ il existe un $\beta \in \mathcal{B}$ tel que

$$M_\beta(\sigma, \mathbf{t}) \leq \exp(c_{14}(D + |\sigma|)(R_0^2 + \log|\sigma|))$$

Le lemme 2.2 (iii) montre que pour ce même β et pour tout $\alpha \in \mathcal{A}'$ et tout $\sigma' \leq \sigma$ on a

$$|C_{\sigma', \alpha, \beta}(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t}))| \leq \exp(c_{14}|\sigma|(R_0^2 + \log(|\sigma| + L))).$$

D'où enfin si $|\sigma| < L/\log L$ et $R_0 \leq \log L$

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}'} \sup_{\mathbf{t} \in B(\mathbf{0}, R_0)} \{|Q_{\sigma, \alpha}(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t}))|\} \leq \exp(-c_{15}L(\log L)^{1+(\varepsilon/2)}).$$

Soit $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \bar{\mathbb{Q}}^q$. On a remarqué à la fin du paragraphe 1 que $(\varphi_0(\gamma \cdot \mathbf{1}), \dots, \varphi_N(\gamma \cdot \mathbf{1}))$ est un système de coordonnées projective du point $\gamma \cdot (p, \dots, p) \in G^q$, et comme $(F_{0, \gamma}^{(\xi)}(\varphi(\mathbf{1})), \dots, F_{N, \gamma}^{(\xi)}(\varphi(\mathbf{1})))$ est un autre système de coordonnées projectives de ce même point on peut écrire si $\varphi_\beta(\gamma \cdot \mathbf{1}) \neq 0$:

$$Q_{\sigma, \alpha}(1, \gamma \cdot \mathbf{1}, F_\gamma^{(\xi)}(\varphi(\mathbf{1}))) = \left(\frac{F_{\beta, \gamma}^{(\xi)}(\varphi(\mathbf{1}))}{\varphi_\beta(\gamma \cdot \mathbf{1})} \right)^{d_X Q_{\sigma, \alpha}} \cdot Q_{\sigma, \alpha}(1, \gamma \cdot \mathbf{1}, \varphi(\gamma \cdot \mathbf{1})).$$

On note alors que pour $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ avec $H \leq c_{16}R_0$ on a $\gamma \cdot \mathbf{1} \in B(\mathbf{0}, R_0)$ et donc il existe un $\beta \in \mathcal{B}$ tel que $|\varphi_\beta(\gamma \cdot \mathbf{1})| \geq \exp(-c_{13}R_0^2)$ d'où l'on déduit que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}'$, tout $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ et tout $\xi \in \mathcal{C}_H$:

$$|Q_{\sigma, \alpha}(1, \gamma \cdot \mathbf{1}, F_\gamma^{(\xi)}(\varphi(\mathbf{1})))| \leq \sup_{\mathbf{t} \in B(\mathbf{0}, R_0)} \{|Q_{\sigma, \alpha}(1, \mathbf{t}, \varphi(\mathbf{t}))|\} \times \exp(c_{17}D(H^2 + R_0^2)).$$

On peut donc écrire si $|\sigma| < L/\log L$, et $H \leq c_{16}R_0 \leq c_{16} \log L$,

$$|Q_{\sigma, \alpha}(1, \gamma \cdot \mathbf{1}, F_\gamma^{(\xi)}(\varphi(\mathbf{1})))| \leq \exp(-c_{18}L(\log L)^{1+(\varepsilon/2)})$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}'$, $\xi \in \mathcal{C}_H$ et $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$.

ii) L'élimination

Posons $T = \lfloor L/\log L \rfloor$, $H = c_{19}(\log L)^{(1/rd) + (\varepsilon g/r)}$ et $R_0 = H/c_{16}$ de sorte que l'on ait pour L assez grand $(T - c_3 g d D^{gd})H^{rd} > c_4 L D^{gd}$. Remarquons que l'on a aussi $R_0 \leq \log L$ car $rd > 2$ et $\varepsilon < 1/2g$.

Reprenons l'idéal J introduit dans le lemme 3.2

$$J = (\mathcal{G}, Q_{\sigma, \alpha}(\gamma \cdot \mathbf{Z}, F_\gamma^{(\xi)}(\mathbf{X})); \alpha \in \mathcal{A}', \xi \in \mathcal{C}_H, |\sigma| \leq T \text{ et } \gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)).$$

Etant donné que T et H satisfont à l'hypothèse du lemme 3.2 et que $P \notin \mathcal{G}$ on sait que, dans $\mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_N$;

$$\mathcal{Z}(J) \subseteq \mathcal{Z}((Z_0)) \cup \mathcal{Z}((Z_1, \dots, Z_q)).$$

En reprenant l'idéal $\mathcal{E}$ de la fin du paragraphe 1, on a $\mathcal{E} \supset \mathcal{G}$. L'idéal de $F[\mathbf{X}]$ suivant

$$\tilde{J} = (\mathcal{E}, Q_{\sigma, \alpha}(1, \gamma \cdot \mathbf{1}, F_\gamma^{(\xi)}(\mathbf{X})); \alpha \in \mathcal{A}', \xi \in \mathcal{C}_H, |\sigma| \leq T \text{ et } \gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H))$$

vérifie donc qu'un point p' de $\mathcal{Z}(\tilde{J})$ dans $\mathbb{P}_N$ donne un point $(1, \mathbf{1}) \times p'$ de $\mathcal{Z}(J)$ dans $\mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_N$, comme $\mathcal{Z}(J)$ ne contient pas de point de la forme $(1, \mathbf{t}) \times p'$ dans $\mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_N$ avec $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$, on en conclut que la sous-variété $\mathcal{Z}(\tilde{J})$ de $\mathbb{P}_N$ est vide.

Les relations $R_{\kappa+1}, \dots, R_N$ introduites avec l'idéal $\mathcal{E}$ à la fin du paragraphe 1 sont dans cet idéal et donc dans $\tilde{J}$. Notons $\{P_1, \dots, P_m\}$ un choix de générateurs de $\mathcal{E}$ et les $(Q_{\sigma, \alpha}(1, \gamma \cdot \mathbf{1}, F_{\gamma}^{(\zeta)}(X)))$. On peut alors appliquer le lemme 1.2 de [6] qui nous fournit un élément δ , non nul, dans F .

iii) Les estimations arithmétiques

Rappelons que $\kappa = \dim X$ et que $N - \kappa$ est la codimension de l'idéal $\mathcal{E}$ de $F[X]$. D'après les estimations des lemmes 1.3, 2.2 et 4.1 on peut affirmer que les polynômes $P_1, \dots, P_m$ introduit ci-dessus sont des éléments homogènes de $F[X]$ de degré $\leq c_{20}DH^2$ et de hauteur $\leq c_{20}(L \log H + T \log L + DH^2)$. Reportant ces estimations dans l'énoncé du lemme 1.2 de [6] on trouve que d'une part δ est un élément de $F \setminus \{0\}$ de taille majorée par

$$c_{21}(L \log H + T \log L + DH^2)(DH^2)^\kappa \\ \leq c_{22} \cdot L \cdot (\log L)^{\frac{2\kappa}{rd} + \varepsilon \kappa \frac{2g+r}{r}} \log \log L,$$

et d'autre part que pour tout $\beta \in \mathcal{B}$ on a ;

$$X_\beta^{c_{23}DH^2} \cdot \delta = \sum_{i=1}^m A_i(X) \cdot P_i(X)$$

où A_i est un polynôme homogène de $F[X]$ de degré $\leq c_{23}DH^2$ et de hauteur $\leq c_{24}(L \log H + T \log L + DH^2)(DH^2)^\kappa$. On en déduit que pour $i = 1, \dots, m$

$$|A_i(\varphi(\mathbf{1}))| \leq \exp(c_{25}L(\log L)^{\frac{2\kappa}{rd} + \varepsilon \kappa \frac{2g+r}{r}} \cdot \log \log L),$$

mais on sait à la suite du (i) que pour $i = 1, \dots, m$

$$|P_i(\varphi(\mathbf{1}))| \leq \exp(-c_{18}L(\log L)^{1+\varepsilon/2})$$

et comme on a fait l'hypothèse que $\frac{2\kappa}{rd} + \varepsilon \kappa \frac{2g+r}{r} < 1$ il s'ensuit que

$$|\delta| \leq \exp(-c_{26}L \cdot (\log L)^{1+\varepsilon/2}).$$

D'un autre côté l'inégalité de la taille nous assure que

$$|\delta| \geq \exp(-c_{27}L(\log L)^{\frac{2\kappa}{rd} + \varepsilon \kappa \frac{2g+r}{r}} \cdot \log \log L).$$

Mais alors l'hypothèse $\frac{2\kappa}{rd} + \varepsilon \kappa \frac{2g+r}{r} < 1$ entraîne une contradiction entre la majoration et la minoration de $|\delta|$ obtenues, c'est donc que l'on ne peut choisir

$0 < \varepsilon < \left(1 - \frac{2\kappa}{rd}\right) \cdot \frac{r}{\kappa(2g+r)}$ d'où l'on déduit que $\frac{2\kappa}{rd} \geq 1$. On a donc bien montré que

$$\kappa = \dim X \geq rd/2$$

dans tous les cas du théorème 0.1, et ceci en achève la preuve.

En conclusion faisons quelques remarques:

La démonstration ci-dessus s'apparente naturellement à la démonstration du théorème de Lindemann-Weierstraß (cf. [7]), elle en diffère néanmoins en plusieurs endroits. D'abord la construction de la fonction auxiliaire se fait de façon beaucoup plus grossière que dans le cas exponentiel, ensuite le lemme de zéro que l'on utilise est nettement moins précis que celui que l'on démontre dans le cas exponentiel. Ces deux défauts sont palliés par l'utilisation d'un grand nombre d'endomorphismes et ce n'est que lorsque l'on a suffisamment d'endomorphismes (i.e. dans le cas de multiplications complexes) que l'on obtient le meilleur résultat espérable.

Enfin on se sert d'un procédé d'élimination projective inutilisable tel quel dans le cas exponentiel, où le fait que le groupe algébrique considéré n'est pas fermé pour la topologie de Zariski nécessite l'emploi de techniques d'élimination affine.

Références

1. Brownawell, W.D., Masser, D.W.: Multiplicity estimates for analytic functions II. *Duke Mathematical Journal* **47**, 273–295 (1980)
2. Choodnovsky, G.V.: Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points. *Invent. Math.* **61**, 267–290 (1981)
3. Masser, D.W., Wüstholz, G.: Zero estimates on group varieties I. *Invent. Math.* **64**, 489–516 (1981)
4. Nesterenko, Y.V.: Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Math.* **41**, 253–284 (1977); *Math. USSR Izv.* **11**, 239–270 (1977)
5. Philippon, P.: Indépendance algébrique et variétés abéliennes. *C.R. Acad. Sci. Paris, ser I* **294**, 257–259 (1982)
6. Philippon, P.: Variétés abéliennes et indépendance algébrique I. *Invent. Math.* **70**, 289–318 (1983)
7. Siegel, C.L.: *Transcendental numbers*. Ann. of Math. Studies, Princeton, n° 16, 102 pp. (1949)
8. Waldschmidt, M.: Nombres transcendants et groupes algébriques, *Astérisque* 69–70 (1979)
9. Wüstholz, G.: Sur l'analogie abélien du théorème de Lindemann. *C.R. Acad. Sci. Paris, ser I* **295**, 35–37 (1982)

