

Werk

Titel: Inventiones Mathematicae

Verlag: Springer

Jahr: 1993

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN356556735_0113

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN356556735_0113

LOG Id: LOG_0039

LOG Titel: Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ... de paires.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN356556735

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN356556735>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=356556735>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ε de paires^{*}

Guy Henniart

Département de Mathématiques et URA D 0752 du C.N.R.S., Bâtiment 425,
Université de Paris XI, F-91405 Orsay Cedex, France

Oblatum 10 XII 1991

Résumé. Soit F un corps local non archimédien à corps résiduel fini. La conjecture de Langlands locale (prouvée par Laumon, Rapoport et Stuhler quand F est de caractéristique non nulle) associe à une classe d'isomorphisme σ de représentations irréductibles du groupe de Weil de F une classe d'isomorphisme $\pi(\sigma)$ de représentations admissibles irréductibles supercuspidales d'un groupe linéaire sur F , le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ si σ est de dimension n . Nous prouvons dans cet appendice qu'il existe au plus une telle correspondance qui préserve les facteurs ε de paires et coïncide, en dimension 1, avec l'application donnée par la théorie du corps de classes.

Summary. Let F be a non-archimedean local field with finite residue field. The local Langlands conjecture (proved by Laumon, Rapoport and Stuhler when the characteristic of F is positive) associates to an isomorphism class σ of irreducible representations of the Weil group of F an isomorphism class $\pi(\sigma)$ of admissible irreducible supercuspidal representations of some linear group over F , viz. $\mathrm{GL}_n(F)$ if $\dim(\sigma) = n$. In this appendix we prove that there is at most one such correspondence which extends local class field theory in dimension 1, and preserves ε -factors for pairs.

1 Introduction

1.1 Soit F un corps local non archimédien, à corps résiduel fini de cardinal q . On fixe un caractère additif non trivial ψ de F .

Soient n et r deux entiers ≥ 1 , et soient π une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, τ une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_r(F)$. A la paire (π, τ) , Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika [JPS 2, JPS 4] ont associé des facteurs $L(\pi \times \tau, s)$, $\varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi)$ et $\gamma(\pi \times \tau, s, \psi)$ (Pour les facteurs ε et γ , le choix, sur le groupe additif localement compact F , de la mesure de Haar

^{*} Un complément à l'article « $\mathcal{D}$ -elliptic sheaves and the Langlands correspondence» par G. Laumon, M. Rapoport et U. Stuhler.

autoduale pour ψ , est sous-entendu dans [JPS 4] et n'apparaît pas dans la notation).

Nous prouvons le résultat d'unicité suivant.

Théorème 1.1 *Soit n un entier ≥ 2 , et soient π et π' deux représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$. Supposons-les génériques. Supposons en outre que pour toute représentation admissible irréductible générique τ de $\mathrm{GL}_{n-1}(F)$, on ait l'égalité*

$$\gamma(\pi \times \tau, s, \psi) = \gamma(\pi' \times \tau, s, \psi).$$

Alors π et π' sont équivalentes.

Appliquant ce théorème au cas où π et π' sont supercuspidales, on obtient la conséquence suivante:

Corollaire *Soit n un entier ≥ 2 , et soient π et π' deux représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$. Supposons que pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$, et toute représentation admissible irréductible supercuspidale τ de $\mathrm{GL}_r(F)$, on ait l'égalité*

$$\varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi) = \varepsilon(\pi' \times \tau, s, \psi).$$

Alors π et π' sont équivalentes.

Pour $n=2$, ces résultats remontent à Jacquet et Langlands [JL]. Pour $n=3$, ils sont dus à Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika [JPS 1, § 7.5]. Notre méthode est d'ailleurs inspirée de [JPS 1], une fois acquises les constructions et définitions de [JPS 4]. Un résultat plus fin (où, pour $n \geq 3$, $n-1$ est remplacé par $n-2$) est annoncé par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika dans [JPS 2]. Jacquet a posé la question de savoir si on peut remplacer $n-1$ par $n/2$.

Remarque Le referee a suggéré la variante suivante du corollaire précédent (cf. § 3.5). Soit n un entier ≥ 2 , et soient π et π' deux représentations admissibles irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_n(F)$. Supposons que pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$, et toute représentation admissible irréductible supercuspidale τ de $\mathrm{GL}_r(F)$, on ait l'égalité

$$\gamma(\pi \times \tau, s, \psi) = \gamma(\pi' \times \tau, s, \psi).$$

Alors π et π' sont équivalentes.

Ce résultat est d'ailleurs aussi valable pour un corps local archimédien.

1.2 Nous appliquons ensuite ces résultats d'unicité à la correspondance de Langlands établie dans le corps de l'article [LRS], quand F est de caractéristique non nulle.

Plaçons-nous dans ce cas, et choisissons une clôture algébrique séparable $\bar{F}$ de F . Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{G}_F^n(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes continues irréductibles, de dimension n , du groupe de Galois G_F de $\bar{F}$ sur F , et $\mathcal{A}_F^n(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes admissibles irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, dont le caractère central est d'ordre fini.

Laumon, Rapoport et Stuhler construisent [LRS, Theorem 15.7], pour chaque entier $n \geq 1$, une bijection $\pi \mapsto \sigma_\pi$ de $\mathcal{A}_F^o(n)$ sur $\mathcal{G}_F^o(n)$, ces bijections vérifiant

$$L(\pi \times \pi', s) = L(\sigma_\pi \otimes \sigma_{\pi'}, s)$$

et

$$\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi) = \varepsilon(\sigma_\pi \otimes \sigma_{\pi'}, s, \psi)$$

pour tout choix de $n \geq 1$, $n' \geq 1$, $\pi \in \mathcal{A}_F^o(n)$, $\pi' \in \mathcal{A}_F^o(n')$. Les facteurs ε galoisiens sont ceux de [De], relatifs au choix de la mesure de Haar sur F autoduale pour ψ .

Plus exactement, le théorème 15.7 de [LRS] affirme l'existence de telles bijections si l'on considère des représentations $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -adiques (où ℓ est un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de F) au lieu de représentations complexes. Cependant, le choix d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathbb{C}$, effectué dès l'introduction de [LRS, p. 1.5], permet d'identifier représentations $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -adiques et représentations complexes, de sorte que les facteurs L et ε se correspondent. A vrai dire, le choix d'un tel isomorphisme ne joue qu'un rôle mineur, élucidé dans [He].

Pour chaque entier $n \geq 1$, nous notons $\sigma \mapsto \pi_\sigma$ la bijection de $\mathcal{G}_F^o(n)$ sur $\mathcal{A}_F^o(n)$ réciproque de $\pi \mapsto \sigma_\pi$.

Théorème 1.2 *Supposons F de caractéristique non nulle. Soit n un entier ≥ 2 , et soient $\sigma \in \mathcal{G}_F^o(n)$ et $\pi \in \mathcal{A}_F^o(n)$ vérifiant*

$$\varepsilon(\pi \times \pi_\tau, s, \psi) = \varepsilon(\sigma \otimes \tau, s, \psi)$$

pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$ et tout $\tau \in \mathcal{G}_F^o(r)$. Alors π est équivalente à π_σ .

On voit bien que le théorème 1.2 donne, par récurrence sur l'entier n , et en partant pour $n=1$ de l'application de réciprocity de la théorie du corps de classes, une caractérisation de l'application $\sigma \mapsto \pi_\sigma$ de $\mathcal{G}_F^o(n)$ dans $\mathcal{A}_F^o(n)$, par la préservation des facteurs ε de paires. Bien entendu, l'hypothèse sur la caractéristique de F n'intervient que par l'intermédiaire de l'existence des bijections $\sigma \mapsto \pi_\sigma$. Nous énonçons au § 4 un résultat utilisable en toute caractéristique.

Pour une généralisation aux représentations non nécessairement irréductibles de $\mathcal{G}_F$ et aux représentations non nécessairement cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, voir [He].

1.3 Le plan de cet article est le suivant. Après quelques rappels sur les représentations génériques et les facteurs L et ε de paires (§ 2), nous prouvons le théorème 1 et son corollaire, en suivant la méthode de [JPS 1, § 7.5] (§ 3). Le théorème 2 – ou plutôt sa version utilisable en toute caractéristique – en est une conséquence facile (§ 4).

2 Représentations génériques et facteurs ε de paires

2.1 Pour tout entier $r \geq 1$, nous notons G_r le groupe $\mathrm{GL}(r, F)$ et N_r son sous-groupe formé des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Le caractère additif ψ de F définit un caractère ψ_r de N_r par la formule

$$\psi_r(n) = \psi \left(\sum_{i=1}^{r-1} n_{i, i+1} \right) \quad \text{pour } n = (n_{ij}) \in N_r.$$

Soit τ une représentation admissible irréductible de G_r , agissant sur l'espace vectoriel complexe V . On dit que τ est *générique* (cf. [JPS 4, § 2]) si l'espace V_ψ^* des formes linéaires λ sur V vérifiant

$$(2.1.1) \quad \lambda(\tau(n)v) = \psi_r(n) \lambda(v) \quad \text{pour } n \in N_r \text{ et } v \in V,$$

est non nul. Il est alors de dimension 1. On sait que la propriété d'être générique ne dépend pas du choix de ψ et que si τ est supercuspidale, elle est générique [GK, Theorem 6]. On note $\mathcal{W}(\tau, \psi)$ l'espace des fonctions (dites de Whittaker) W sur G_r , définies par

$$(2.1.2) \quad W(g) = \lambda(\tau(g)v) \quad \text{avec } \lambda \in V_\psi^* \text{ et } v \in V.$$

Le groupe G_r agit sur $\mathcal{W}(\tau, \psi)$ par translations à droite; on notera ρ cette action, sans autre précision. Si τ est générique (rappelons qu'elle est supposée irréductible), τ est équivalente à cette représentation de G_r sur $\mathcal{W}(\tau, \psi)$.

L'outil principal de ce paragraphe est le lemme suivant de [JS, lemme 3.2, voir aussi JPS3, lemme 3.5], où dg désigne n'importe quelle mesure G_r -invariante sur $N_r \backslash G_r$.

Lemme 2.1 *Soit H une fonction lisse (à valeurs complexes) sur G_r vérifiant*

$$(2.1.3) \quad H(n g) = \bar{\psi}_r(n) H(g) \quad \text{pour } g \in G_r \text{ et } n \in N_r,$$

et à support compact modulo N_r .

Supposons que pour toute représentation admissible irréductible (générique) τ de G_r et tout choix de $W \in \mathcal{W}(\tau, \psi)$, l'intégrale

$$(2.1.4) \quad \int_{N_r \backslash G_r} H(g) W(g) dg$$

s'annule.

Alors on a $H = 0$.

2.2 Soit n un entier, $n \geq 2$; posons $r = n - 1$. Soit π une représentation admissible irréductible générique de G_n et soit τ une représentation admissible irréductible générique de G_r . Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $W' \in \mathcal{W}(\tau, \bar{\psi})$, on pose

$$(2.2.1) \quad \Psi(s, W, W') = \int_{N_r \backslash G_r} W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W'(g) |\det g|^{s-1/2} dg$$

où la valeur absolue est la valeur absolue normalisée de F .

On sait [JPS 4, Theorem 2.7] que cette intégrale converge pour $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle assez grande et se prolonge en une fonction rationnelle de q^{-s} (où, rappelons-le, q est le cardinal du corps résiduel de F); on note encore $\Psi(s, W, W')$ cette fonction prolongée.

Quand W parcourt $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et W' parcourt $\mathcal{W}(\tau, \bar{\psi})$, les fonctions rationnelles obtenues engendrent un idéal fractionnaire de $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$ possédant un générateur $L(\pi \times \tau, s)$ uniquement déterminé par le fait que $L(\pi \times \tau, s)$ est de la forme $P(q^{-s})^{-1}$, où $P \in \mathbb{C}[T]$ est un polynôme de terme constant égal à 1.

2.3 Dans le cadre de 2.2, nous aurons besoin principalement de l'équation fonctionnelle des fonctions Ψ . Notons

$$w_r \text{ la matrice } \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \text{ de } G_r \text{ et } w_n \text{ la matrice } \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \text{ de } G_n.$$

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, on définit $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\pi^\vee, \bar{\psi})$ par la formule

$$(2.3.1) \quad \tilde{W}(g) = W(w_n {}^t g^{-1}) \quad \text{pour } g \in G_n.$$

De même, pour $W' \in \mathcal{W}(\tau, \bar{\psi})$ on définit $\tilde{W}' \in \mathcal{W}(\tau^\vee, \psi)$ par la formule

$$(2.3.2) \quad \tilde{W}'(g) = W(w_r {}^t g^{-1}) \quad \text{pour } g \in G_r.$$

Notant ω_τ le caractère central de τ , on sait [JPS 4, Theorem 2.7] qu'il existe une unique fonction $\varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi)$ du paramètre complexe s telle que l'on ait, pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et tout $W' \in \mathcal{W}(\tau, \bar{\psi})$ l'équation fonctionnelle

$$(2.3.3) \quad \frac{\Psi(1-s, \tilde{W}, \tilde{W}')}{L(\pi^\vee \times \tau^\vee, 1-s)} = \omega_r(-1)^r \varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi) \frac{\Psi(s, W, W')}{L(\pi \times \tau, s)}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Le facteur ε est en fait un monôme (non nul) en q^{-s} . Si l'on introduit le facteur $\gamma(\pi \times \tau, s, \psi)$ par

$$(2.3.4) \quad \gamma(\pi \times \tau, s, \psi) = \varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi) \frac{L(\pi^\vee \times \tau^\vee, 1-s)}{L(\pi \times \tau, s)},$$

l'équation fonctionnelle prend la forme

$$(2.3.5) \quad \Psi(1-s, \tilde{W}, \tilde{W}') = \omega_\tau(-1)^r \gamma(\pi \times \tau, s, \psi) \Psi(s, W, W').$$

2.4 Comme en 2.2, notons n un entier ≥ 2 et r l'entier $n-1$. Nous aurons encore besoin des résultats suivants concernant les fonctions de Whittaker.

Lemme 2.4.1 *Soit π une représentation admissible irréductible générique de G_n . Soit H une fonction lisse sur G_r , à support compact modulo N_r , et vérifiant*

$$(2.4.1) \quad H(n g) = \psi_r(n) H(g) \quad \text{pour } n \in N_r \text{ et } g \in G_r.$$

Alors il existe une fonction $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ telle que

$$W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H(g) \quad \text{pour } g \in G_r.$$

Ce résultat est dû à Bernstein et Zelevinsky [BZ, 5.15, 5.16].

Lemme 2.4.2 *Soit π une représentation admissible irréductible générique de G_n , et soit $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$. Alors pour chaque entier m , il existe une partie compacte*

C de G_r (dépendant de m) telle que si $g \in G_r$ vérifie $|\det g| = q^m$ et $W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ alors $g \in N_r C$.

C'est une conséquence de la proposition 2.3.6 de [JPS 1]. En effet utilisons la décomposition d'Iwasawa

$$G_n = N_n A_n K_n,$$

où A_n est le sous-groupe des matrices diagonales de G_n et K_n le groupe $GL_n(\mathcal{O}_F)$, $\mathcal{O}_F$ étant l'anneau des entiers de F .

Soit a une matrice diagonale de la forme

$$\text{diag}(a_1 \dots a_n, a_2 \dots a_n, \dots, a_{n-1} a_n, a_n)$$

où les a_i sont des éléments de F . La proposition citée implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, si $n \in N_n$ et $k \in K_n$ vérifient $W(nak) \neq 0$, alors on a $|a_i| \leq c$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Si on ajoute les conditions $a_n = 1$ et $|\det(nak)| = q^m$, c'est-à-dire $|a_1 a_2^2 \dots a_r^r| = q^m$, on voit qu'il existe alors une constante $d > 0$ telle que

$$|a_i| \geq d \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1.$$

Par suite en utilisant la décomposition d'Iwasawa pour G_r , on voit que pour $g \in G_r$ les conditions $W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et $|\det g| = q^m$ impliquent que g appartient à $N_r B K_r$, où B est l'ensemble des matrices $\text{diag}(a_1 \dots a_r, a_2 \dots a_r, \dots, a_r)$, les coefficients a_i vérifiant $d \leq |a_i| \leq c$ pour $i = 1, \dots, n-1$. On peut donc prendre $C = B K_r$, qui est une partie compacte de G_r .

3 Preuve du théorème principal

3.1 Prouvons ici le théorème 1. On fixe donc l'entier $n \geq 2$ et on pose $r = n-1$. On dispose de deux représentations admissibles irréductibles génériques π et π' de G_n , qui vérifient

$$(3.1.1) \quad \gamma(\pi \times \tau, s, \psi) = \gamma(\pi' \times \tau, s, \psi)$$

pour toute représentation admissible irréductible générique τ de G_r .

Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de $\mathcal{W}(\pi, \psi) \oplus \mathcal{W}(\pi', \psi)$ formé des couples (W, W') vérifiant

$$(3.1.2) \quad W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W' \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } g \in G_r.$$

D'après le lemme 2.4.1, l'espace $\mathcal{S}$ est non nul, loin s'en faut. De manière analogue, nous notons $\tilde{\mathcal{S}}$ le sous-espace de $\mathcal{W}(\pi^\vee, \tilde{\psi}) \oplus \mathcal{W}(\pi'^\vee, \tilde{\psi})$ formé des couples (W, W') vérifiant (3.1.2).

Soit $(W, W') \in \mathcal{S}$. D'après la définition (2.2.1), on a alors

$$(3.1.3) \quad \Psi(s, W, V) = \Psi(s, W', V)$$

pour toute représentation admissible irréductible générique τ de G_r et tout $V \in \mathcal{W}(\tau, \bar{\psi})$.

Il découle immédiatement de l'hypothèse (3.1.1) et de l'équation fonctionnelle (2.3.5) que l'on a aussi

$$(3.1.4) \quad \Psi(s, \tilde{W}, \tilde{V}) = \Psi(s, \tilde{W}', \tilde{V})$$

pour tout τ et V comme plus haut.

Pour chaque entier m , notons H_m la fonction sur G_r telle que

$$\begin{aligned} H_m(g) &= 0 && \text{si } |\det g| \neq q^m \\ H_m(g) &= \tilde{W} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tilde{W}' \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{si } |\det g| = q^m. \end{aligned}$$

Considérée comme une égalité de séries de Laurent formelles en q^{-s} , l'égalité (3.1.4) signifie que l'on a

$$(3.1.5) \quad \int_{N_r \backslash G_r} H_m(g) \tilde{V}(g) dg = 0$$

pour tout entier m et tout choix de τ , V comme plus haut. Remarquons de plus que la fonction H_m est, pour chaque m , lisse et, par le lemme 2.4.2, à support compact modulo N_r . Lorsque V parcourt $\mathcal{W}(\tau, \bar{\psi})$, la fonction $\tilde{V}$ parcourt $\mathcal{W}(\tau^\vee, \psi)$. Lorsque τ parcourt les représentations admissibles irréductibles génériques de G_r , il en est de même de $\tau^\vee$. On peut donc appliquer à H_m le lemme 2.1.1 et conclure que l'on a $H_m = 0$, et par suite $(\tilde{W}, \tilde{W}') \in \tilde{\mathcal{S}}$.

On a donc prouvé une implication du lemme suivant:

Lemme 3.1 Soient $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $W' \in \mathcal{W}(\pi', \psi)$. Alors on a $(W, W') \in \mathcal{S}$ si et seulement si on a $(\tilde{W}, \tilde{W}') \in \tilde{\mathcal{S}}$.

Réciproquement, remarquons que l'on a, par l'équation fonctionnelle (2.3.5) appliquée à $\pi \times \tau$ et $\pi^\vee \times \tau^\vee$,

$$\gamma(\pi^\vee \times \tau^\vee, s, \bar{\psi}) \gamma(\pi \times \tau, 1-s, \psi) = 1,$$

et que par suite l'hypothèse sur π et π' s'écrit aussi

$$\gamma(\pi^\vee \times \tau^\vee, s, \bar{\psi}) = \gamma(\pi'^\vee \times \tau^\vee, s, \bar{\psi})$$

pour tout τ comme plus haut. On peut donc utiliser exactement le même raisonnement, en remplaçant π par $\pi^\vee$, π' par $\pi'^\vee$ et ψ par $\bar{\psi}$, pour prouver l'implication réciproque.

3.2 Notons P le sous-groupe de G_n formé des matrices dont la dernière ligne est $(0, \dots, 0, 1)$. Considérant $G_r = G_{n-1}$ comme sous-groupe de G_n par l'application $g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P = N_n G_r = G_r N_n$.

Faisons agir G_n par translations à droite sur

$$\mathcal{W}(\pi, \psi) \oplus \mathcal{W}(\pi', \psi) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}(\pi^\vee, \bar{\psi}) \oplus \mathcal{W}(\pi'^\vee, \bar{\psi}).$$

Il est clair, par définition de $\mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$, que le sous-groupe P de G_n stabilise chacun des sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$. Cependant, soit $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et soient g et h dans G_n ; on a

$$\begin{aligned}(\rho(\tilde{g})W)(h) &= (\rho(g)W)(w_n {}^t h^{-1}) \\ &= W(w_n {}^t h^{-1}g) \\ &= \tilde{W}(h {}^t g^{-1}) \\ &= (\rho({}^t g^{-1})\tilde{W})(h).\end{aligned}$$

Comme $\tilde{\mathcal{S}}$ est stable par P , ce petit calcul et le lemme 3.1 montrent que $\mathcal{S}$ est stable par ${}^t P$.

Par suite $\mathcal{S}$ est stable par le sous-groupe de G_n engendré par P et ${}^t P$. Mais $P \cup {}^t P$ contient toutes les matrices élémentaires, donc le sous-groupe engendré contient $SL_n(F)$. Comme l'application $\det: P \rightarrow F^\times$ est surjective, ce sous-groupe engendré est G_n tout entier.

On voit donc que $\mathcal{S}$ est stable par G_n . D'après le lemme 2.4.1 $\mathcal{S}$ n'est pas égal à $\mathcal{W}(\pi, \psi) \oplus \mathcal{W}(\pi', \psi)$, et les deux projections de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\mathcal{W}(\pi', \psi)$ (qui sont évidemment G_n -équivariantes) sont non triviales. Comme les représentations de G_n sur les espaces $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\mathcal{W}(\pi', \psi)$, respectivement équivalentes à π et π' , sont irréductibles, il s'ensuit que $\mathcal{S}$ est le graphe d'un G_n -isomorphisme de $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\mathcal{W}(\pi', \psi)$ et par suite que π et π' sont équivalentes.

On a prouvé le théorème 1.1.

3.3 Pour prouver le corollaire au théorème 1.1, nous nous appuyons sur la classification de Zelevinsky [Ze] et les calculs de facteurs L et ε de [JPS 4].

Soient donc n un entier ≥ 2 , et π, π' deux représentations admissibles irréductibles supercuspidales de G_n . On suppose que pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$, et toute représentation admissible irréductible supercuspidale τ de G_r , on ait l'égalité

$$(3.3.1) \quad \varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi) = \varepsilon(\pi' \times \tau, s, \psi).$$

Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 1.1 et du lemme suivant

Lemme 3.3 *Pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$ et pour toute représentation admissible irréductible générique τ de G_r , on a*

$$(3.3.2) \quad L(\pi \times \tau, s) = L(\pi' \times \tau, s) = L(\pi^\vee \times \tau^\vee, s) = L(\pi'^\vee \times \tau^\vee, s) = 1$$

$$(3.3.3) \quad \varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi) = \varepsilon(\pi' \times \tau, s, \psi)$$

$$(3.3.4) \quad \gamma(\pi \times \tau, s, \psi) = \gamma(\pi' \times \tau, s, \psi).$$

3.4 Il s'agit donc de prouver ce lemme. Rappelons le concept de segment [Ze, § 3.1]. Soit a un entier ≥ 1 . Notons $\parallel$ le caractère $g \mapsto |\det(g)|$ de G_a . Soient ρ une représentation admissible irréductible supercuspidale de G_a et b un entier ≥ 1 . Le segment de base ρ et de longueur b est l'ensemble $\Delta = \{\rho, \rho^\parallel, \dots, \rho^{\parallel^{b-1}}\}$. A Δ est attachée une représentation $\langle \Delta \rangle^c$ de G_c (où $c = ab$), qui est l'unique quotient irréductible de la représentation de G_c obtenue par induction parabolique à partir de Δ , de la façon suivante:

On considère le sous-groupe $D_{a,b}$ de G_c formé de blocs diagonaux $(g_1, \dots, g_b)$ de taille $a \times a$, et sa représentation $(g_1, \dots, g_b) \mapsto \rho(g_1) \otimes \rho(g_2) \otimes \dots \otimes \rho \|^{b-1}(g_b)$; on étend trivialement cette représentation en une représentation du sous-groupe parabolique triangulaire supérieur par blocs, dont $D_{a,b}$ est un sous-groupe de Levi, et on induit à G_c par induction normalisée. La contragrédiente de $\langle \Delta \rangle'$ est équivalente à $\langle \Delta^\vee \rangle'$, où $\Delta^\vee$ est le segment $\Delta^\vee = \{\rho^\vee \|^{1-b}, \dots, \rho^\vee\}$.

C'est un des résultats fondamentaux de Zelevinsky [Ze, Theorem 9.7] que toute représentation admissible irréductible générique τ de G_r est obtenue par induction parabolique à partir d'une représentation $\langle \Delta_1 \rangle' \otimes \dots \otimes \langle \Delta_d \rangle'$, où les Δ_i sont des segments, l'induite étant irréductible. De plus, il découle de [JPS 4, Proposition 9.4] qu'on a alors

$$\begin{aligned} L(\pi \times \tau, s) &= \prod_{i=1}^d L(\pi \times \langle \Delta_i \rangle', s) \\ L(\pi^\vee \times \tau^\vee, s) &= \prod_{i=1}^d L(\pi^\vee \times \langle \Delta_i^\vee \rangle', s) \\ \varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi) &= \prod_{i=1}^d \varepsilon(\pi \times \langle \Delta_i \rangle', s, \psi) \\ \gamma(\pi \times \tau, s, \psi) &= \prod_{i=1}^d \gamma(\pi \times \langle \Delta_i \rangle', s, \psi) \text{ et de même pour } \pi'. \end{aligned}$$

Pour prouver le lemme 3.3, il suffit donc de prouver les égalités (3.3) lorsque τ est de la forme $\langle \Delta \rangle'$ où Δ est un segment $\{\rho, \rho \|, \dots, \rho \|^{b-1}\}$. On a alors [JPS 4, Theorem 3.1 et 8.2].

$$\begin{aligned} \gamma(\pi \times \tau, s, \psi) &= \prod_{j=1}^b \gamma(\pi \times \rho \|^{j-1}, s, \psi) \\ L(\pi \times \tau, s) &= L(\pi \times \rho \|^{b-1}, s) \\ L(\pi^\vee \times \tau^\vee, s) &= L(\pi^\vee \times \rho^\vee, s) \text{ et de même pour } \pi'. \end{aligned}$$

L'égalité (3.3.4) découle donc de l'hypothèse faite sur π et π' . D'autre part, puisque π est une représentation supercuspidale de G_n et ρ une représentation supercuspidale de G_a avec $a < n$, on a

$$L(\pi \times \rho \|^{j-1}, s) = L(\pi^\vee \times \rho^\vee \|^{1-j}, s) = 1$$

pour tout entier j [JPS 4, Proposition 8.1], ce qui entraîne les égalités (3.3.2). L'égalité (3.3.3) est alors conséquence de la définition (2.3.4) des facteurs γ .

3.5 De manière analogue, la remarque de 1.1 découle du théorème 1.1 et du lemme suivant, qui se prouve comme plus haut en utilisant la classification de Zelevinsky [Ze] et l'inductivité des facteurs γ [JPS4, Theorem 3.1].

Lemme 3.5 Soient n un entier ≥ 2 et π, π' deux représentations admissibles irréductibles génériques de G_n . On suppose que pour tout entier $r, 1 \leq r \leq n-1$, et toute représentation admissible irréductible supercuspidale τ de G_r , on a l'égalité

$$\gamma(\pi \times \tau, s, \psi) = \gamma(\pi' \times \tau, s, \psi).$$

Alors, pour toute représentation admissible irréductible générique τ de G_{n-1} , on a également

$$\gamma(\pi \times \tau, s, \psi) = \gamma(\pi' \times \tau, s, \psi).$$

4 Applications à la correspondance de Langlands

4.1 Choisissons une clôture galoisienne $\bar{F}$ de F et notons W_F le groupe de Weil et G_F le groupe de Galois de $\bar{F}$ sur F .

Théorème 4.1 Soit n un entier ≥ 2 . Supposons que pour chaque entier r , $1 \leq r \leq n-1$, on ait associé à chaque classe d'isomorphisme ρ de représentations complexes continues irréductibles de dimension r de W_F une classe d'isomorphisme π_ρ de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de G_r , et que toute telle classe soit de la forme π_ρ . Soit σ une représentation complexe continue irréductible de dimension n de W_F . Alors il existe au plus une classe de représentations admissibles irréductibles supercuspidales π de G_n telle que l'on ait

$$(4.1.1) \quad \varepsilon(\pi \times \pi_\rho, s, \psi) = \varepsilon(\sigma \otimes \rho, s, \psi)$$

pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$ et toute représentation complexe continue irréductible ρ de dimension r de W_F .

Remarque Supposons que pour $r=1$, l'application $\rho \mapsto \pi_\rho$ soit donnée par la théorie locale du corps de classes. Sous les conditions du théorème, si π existe, son caractère central ω_π correspond au déterminant de σ par la même théorie locale du corps de classe [He].

Le théorème 4.1 découle aisément du corollaire au théorème 1.1. En effet soient π et π' deux représentations admissibles irréductibles supercuspidales de G_n vérifiant (4.1.1). On a alors

$$(4.1.2) \quad \varepsilon(\pi \times \pi_\rho, s, \psi) = \varepsilon(\pi' \times \pi_\rho, s, \psi)$$

pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$ et toute représentation complexe continue irréductible ρ de dimension r de W_F . Par l'hypothèse de surjectivité du théorème, on obtient

$$(4.1.3) \quad \varepsilon(\pi \times \tau, s, \psi) = \varepsilon(\pi' \times \tau, s, \psi)$$

pour tout entier r , $1 \leq r \leq n-1$ et toute représentation admissible irréductible supercuspidale τ de G_r . Le corollaire au théorème 1.1 entraîne alors que π et π' sont équivalentes.

4.2 Pour terminer, montrons comment déduire le théorème 1.2 du théorème 4.1. La seule difficulté est d'ailleurs de passer des représentations de G_F à celles de W_F ! Une représentation complexe continue de G_F définit par restriction une représentation complexe continue de W_F , dont le déterminant est d'ordre fini. Inversement, une telle représentation de W_F , si elle est irréductible, s'étend par continuité, de manière unique, en une représentation complexe continue de G_F . D'autre part tout caractère de W_F est de la forme $\omega \parallel^s$, où ω est un caractère d'ordre fini, s un nombre complexe, la notation $\parallel$ désignant par abus le caractère

de W_F correspondant au caractère $\parallel$ de $F^\times$. Soit σ une représentation complexe continue de dimension n de W_F . Comme on a $\det(\sigma \parallel^s) = \det \sigma \cdot \parallel^{ns}$ pour tout nombre complexe s , on voit que si σ est irréductible, il existe un nombre complexe s tel que $\sigma \parallel^s$ ait un déterminant d'ordre fini donc s'étende par continuité à G_F .

4.3 Supposons que la caractéristique de F soit non nulle. On veut étendre pour chaque entier r l'application $\tau \mapsto \pi_\tau$ à toutes les classes de représentations complexes continues irréductibles de dimension r de W_F . Si τ est une telle classe et s un nombre complexe tel que $\det(\tau \parallel^s)$ soit d'ordre fini, on a envie de poser

$$\pi_\tau = \pi_{\tau \parallel^s} \otimes (\parallel^{-s} \circ \det).$$

Cela est licite pourvu que cette définition ne dépende pas du choix de s . Soit donc s' un autre nombre complexe tel que $\tau \parallel^{s'}$ ait un déterminant d'ordre fini. Alors $\parallel^{s-s'}$ est un caractère d'ordre fini χ de $F^\times$ et désignant par la même lettre le caractère correspondant de W_F , on a [LRS, Theorem 15.7]

$$\pi_{\tau \parallel^{s'} \otimes \chi} = \pi_{\tau \parallel^{s'}} \otimes (\chi \circ \det),$$

c'est-à-dire

$$\pi_{\tau \parallel^s} \otimes (\parallel^{-s} \circ \det) = \pi_{\tau \parallel^{s'}} \otimes (\parallel^{-s'} \circ \det).$$

On a donc prolongé l'application $\tau \mapsto \pi_\tau$ des classes de représentations complexes continues irréductibles de G_F à celles de W_F .

Soit r un entier ≥ 1 et soit π une classe de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de G_r . Pour tout nombre complexe s , le caractère central de $\pi \otimes (\parallel^s \circ \det)$ vaut $\omega_\pi \parallel^{rs}$. Par suite il existe un nombre complexe s tel que $\pi \otimes (\parallel^s \circ \det)$ ait un caractère central d'ordre fini. De la surjectivité de l'application $\tau \mapsto \pi_\tau$ de $\mathcal{G}_F^r(r)$ vers $\mathcal{A}_F^o(r)$, on tire que π est de la forme π_τ , où τ est une classe de représentations complexes continues irréductibles de dimension r de W_F .

4.4 Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses du théorème 1.2. Par la construction précédente, l'hypothèse du théorème 4.1 est satisfaite et par suite il existe au plus une classe d'équivalence de représentations admissibles irréductibles supercuspidales π de G_n vérifiant (4.1.1). Mais π et π_σ vérifient toutes deux (4.1.1): en effet on a bien par hypothèse l'égalité (4.1.1) quand ρ a un déterminant d'ordre fini et dans le cas général cette égalité découle des identités suivantes, conséquences des propriétés élémentaires des facteurs ε (cf. [De, § 5] et [JPS 2]).

$$\begin{aligned} \varepsilon(\pi \times \pi_{\rho \parallel^u}, s, \psi) &= \varepsilon(\pi \times \pi_\rho \otimes (\parallel^u \circ \det), s, \psi) \\ &= \varepsilon(\pi \times \pi_\rho, s+u, \psi) \\ &= \varepsilon(\sigma \otimes \rho, s+u, \psi) \\ &= \varepsilon(\sigma \otimes \rho \parallel^u, s, \psi), \end{aligned}$$

pour tous nombres complexes s et u .

On a donc bien $\pi = \pi_\sigma$ par le théorème 4.1, ce qui prouve le théorème 1.2.

Remerciement Je tiens à remercier G. Laumon, M. Rapoport et U. Stuhler de leur proposition d'écrire ces résultats d'unicité en complément à leur article. Mes remerciements vont également à H. Jacquet pour plusieurs conversations et correspondances sur le thème des facteurs L et ε de paires. Je voudrais aussi remercier l'Université Catholique d'Eichstätt, et tout particulièr-

ement J. Rohlfs et J. Schwermer, qui m'ont donné l'occasion, dans le cadre de la fondation Maximilian Bickhof d'exposer les présents résultats et ceux de [He]. Enfin je remercie le referee pour ses commentaires, et particulièrement la remarque de 1.1.

Références

- [BZ] Bernstein, I.N., Zelevinsky, A.V.: Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-archimedean field. *Usp. Mat. Nauk* **31**(n° 3). 5–70 (1976)
- [De] Deligne, P.: Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . In: Deligne, P., Kuyk, W. (eds.) *Modular functions of one variable II*. (Lect. Notes. Math., vol. 349, pp. 501–597) Berlin Heidelberg New York: Springer 1973
- [GK] Gelfand, I.M., Kazhdan, D.A.: Representations of $Gl(n, K)$. In: Gelfand, I.M. (ed.) *Lie groups and their representations 2*, pp. 95–118. Budapest: Akademia Kiado
- [He] Henniart, G.: La correspondance de Langlands locale: caractérisation et propriétés fonctorielles (en préparation)
- [JL] Jacquet, H., Langlands, R.P.: *Automorphic forms on $GL(2)$* . (Lect. Notes Math., vol. 114) Berlin Heidelberg New York: Springer 1971
- [JPS 1] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Automorphic forms on $GL(3)$, *Ann. Math.* **109**, 169–258 (1979)
- [JPS 2] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Facteurs L et ε du groupe linéaire. *C.R. Acad. Sci., Paris* **289**, 59–61 (1979)
- [JPS 3] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Conducteur des représentations du groupe linéaire. *Math. Ann.* **256**, 199–214 (1981)
- [JPS 4] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Rankin-Selberg convolutions, *Am. J. Math.* **105**, 367–483 (1983)
- [JS] Jacquet, H., Shalika, J.: A lemma on highly ramified ε -factors. *Math. Ann.* **271**, 319–332 (1985)
- [LRS] Laumon, G., Rapoport, M., Stuhler, U.: $\mathcal{D}$ -elliptic sheaves and the Langlands correspondence. *Invent. Math.* (in press)
- [Ze] Zelevinsky, A.V.: Induced representations of reductive p -adic groups II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., IV. Sér.* **13**, 165–210 (1980)