SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Commentarii Mathematici Helvetici
Verlag: Birkhäuser-Verlag
Jahr: 1969
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN358147735_0044
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN358147735_0044

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN358147735
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN358147735

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Commentarii Mathematici Helvetici

Volumen 44, 1969

Editi a Societate Mathematica Helvetica in Aedibus
Birkhäuser Verlag

Commentarii Mathematici Helvetici

Redaktionskomitee – Editing committee – Comité de rédaction – Comitato di redazione
J. J. Burckhardt, A. Haefliger, A. Pfluger

Beirat – Board of trustees – Comité de patronage – Comitato consultativo
A. Speiser, F. Gonseth, S. Bays, W. Saxer, W. Scherrer, P. Buchner, P. Finsler, G. de Rham, M. Gut, Ch. Blanc, H. Hadwiger, H. Hopf, E. Stiefel, G. Vincent, H. Jecklin, B. Eckmann, J. de Siebenthal, H. Huber, W. Nef.

Die Commentarii Mathematici Helvetici sind Eigentum der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft. Sie erscheinen in Bänden von vier Heften. Es ist vorgesehen, jährlich einen Band herauszugeben. Manuskripte in Maschinenschrift sind zu senden an J. J. Burckhardt, Bergheimstr. 4, CH 8032 Zürich. Die Autoren erhalten 100 Separatabzüge unentgeltlich.

Les Commentarii Mathematici Helvetici sont la propriété de la Société mathématique suisse. Ils paraissent en volumes de quater fascicules; on prévoit un volume par an. Les mémoires doivent être remis dactylographiés à J. J. Burckhardt, 4, Bergheimstr., CH 8032 Zürich. Les auteurs reçoivent 100 tirages à part gratuitement.

I Commentarii Mathematici Helvetici sono proprietà delle Società matematica svizzera. Escono in volumi di quattro fascicoli; si prevede un volume per anno. Le memoire (in dattilografia) vengono ricevute dal J. J. Burckhardt, 4, Bergheimstr., CH 8032 Zurigo. Gli autori ricevono 100 estratti gratuitamente.

The Commentarii Mathematici Helvetici are owned by the Swiss Mathematical Society. They appear in volumes of four fascicules. One volume per year is the rule. Manuscripts must be typewritten and should be submitted to J. J. Burckhardt, Bergheimstr. 4, CH 8032 Zürich. 100 reprints will be provided free of charge.

Abonnementspreis eines Bandes, Prix d'abonnement par volume, Prezzo di abbonamento per volume, Price per volume	sFr. 90.—
Für Mitglieder der SMG, pour membres de la SMS, per i membri della SMS	sFr. 39.—
Einzelnummer, le numéro, il numero, single copy	sFr. 28.—

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung.

NIEDERSÄCHS. STAATS- U. UNIV.- BIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Birkhäuser Verlag Basel

CH 4000 Basel 10
(Schweiz/Suisse/Switzerland)

© Birkhäuser Verlag, Basel 1969.

Z 1971. 4442

Index Volumen 44, 1969

AGARD, ST. and J. KELINGOS: On Parametric Representation for Quasisymmetric Functions 446
ANDERSON, D. W., E. H. BROWN, JR., and F. P. PETERSON: Pin Cobordism and Related Topics 462
BANK, ST.: On Meromorphic Solutions of Algebraic Differential Equations 401
BARTH, W. und M. OTTE: Über fast-uniforme Untergruppen komplexer Liegruppen und auflösbare komplexe Mannigfaltigkeiten 269
BLUM, E.: Die Extremalität gewisser Teichmüllerscher Abbildungen des Einheitskreises . . 319
BRÜHLMANN, H.: Einige Kongruenzsätze für geschlossene k-dimensionale Flächen in n-dimensionalen Riemannschen Räumen 164
CARADUS, S. R.: A Note on a Paper of J. T. M. MARTI 282
CHARTRAND, G. and H. V. KRONK: On a Special Class of Hamiltonian Graphs 84
COHEN, J. M.: Coherent Graded Rings and the Non-Existence of Spaces of Finite Stable Homotopy Type 217
COURANT, S.: Beiträge zur Theorie der limitierten Vektorräume 249
DERIGHETTI, A.: Representative Functions on Topological Groups 476
DOUGLAS, R. R. and F. SIGRIST: Homotopy-associative H-spaces which are Sphere Bundles over Spheres 308
GROSS, H. und P. HAFNER: Über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers 491
GRÜNBAUM, B.: Imbeddings of Simplical Complexes 502
GUGGENHEIMER, H.: Hill Equations with Coexisting Periodic Solutions, II 381
HARPER, J. R.: Stable Secondary Cohomology Operations 341
HESS, P.: Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen 245
HERSCH, J.: Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques 354
HUBER, H.: Nicht-hyperelliptische Schottky-Verdoppelungen 316
JARCHOW, H.: Marinescu-Räume 138
JOHNSON, J.: A Notion of Krull Dimension for Differential Rings 207
LEES, J. A.: Locally Flat Imbeddings in the Metastable Range 70
LEVINE, J.: Knot Cobordism Groups in Codimension Two 229
LEVITZ, H.: On the Finsler and Doner-Tarski Arithmetical Hierarchies 89
MAUMARY, S.: Contributions à la théorie du type simple d'homotopie 410
MAZZOLA, G.: Finslersche Zahlen 495
MISLIN, G.: Über die Künneth-Formel für ausserordentliche Cohomologie 371
NOMIZU, K. and B. SMYTH: On the Gauss Mapping for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Sphere 484
OGG, E.: Ein Satz über orthogonal abgeschlossene Unterräume 117
OJANGUREN, M. and R. SRIDHARAN: A Note on the Fundamental Theorem of Projective Geometry 310

OJANGUREN, M. and R. SRIDHARAN: A Note on Purely Inseparable Extensions 457
ORTH, D.: Welding Riemann Surfaces and Transmission Problems with Shifts 120
OSTROWSKI, A.: Note on Poisson's Treatment of the Euler–Maclaurin Formula 202
PHILLIPS, A.: Foliations on Open Manifolds, II 367
QUILLEN, D. G.: An Application of Simplicial Profinite Groups 45
REIMANN, H. M.: Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen im Raum 284
SAPIO, R. DE: Differential Structures on a Product of Spheres 61
SIEBENTHAL, J. DE: Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple 1
SCHEJA, G.: Multiplizitätenvergleich unter Verwendung von Testkurven 438
SCHERK, P.: Über eine Klasse von Polyederfunktionalen 191
STEINIG, J.: The Changes of Sign of Certain Arithmetical Error-Terms 385
STREBEL, K.: Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen 469
WIEGMANN, K.-W.: Strukturen auf Quotienten komplexer Räume 93

Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple

Par JEAN DE SIEBENTHAL (Lausanne)

Magnificat anima mea Dominum

§ 1. Introduction

1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang l sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0, Λ le système des racines de $\mathfrak{g}$ sur une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, avec $\Lambda' = \Lambda - \{0\}$. Une suite fondamentale de Λ est une suite libre $\varphi_1, \ldots \varphi_l$ de l racines telle que $\mu \in \Lambda$ implique $\mu = a_1\varphi_1 + \cdots + a_e\varphi_e$, les a_i étant des entiers rationnels, tous $\geqslant 0$ ou bien tous $\leqslant 0$. Λ engendre un espace euclidien R^l identifié à son dual au moyen du produit scalaire usuel.

Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ, c'est à dire tel que

$$\Lambda_0 = -\Lambda_0 \qquad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0 .$$

Une suite $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k\} \subset \Lambda$ est une Λ_0-suite si $\mu_{i+1} - \mu_i \in \Lambda_0$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$; une partie A de Λ est dite Λ_0-connexe, si pour toute paire $\gamma, \gamma' \in A$ il existe une Λ_0-suite qui relie γ à γ'.

THÉORÈME: *La partition* $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ *de* Λ *en classes mod* Λ_0 *vérifie:*

a) *Toute classe* Λ_i *est* Λ_0*-connexe*

b) *Si* $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq 0$, *il existe un entier* k *tel que* $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$; *de plus*

b') $k \neq 0$ *implique* $(\Lambda_i + \Lambda_j \cap \Lambda = \Lambda_k$
$(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$

b'') *Pour tout* i *il existe un* i' *tel que*
$(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$

2. L'addition dans Λ définit dans $\Lambda \mid \Lambda_0$ une loi de composition commutative, associative, non partout définie, ayant un 0 noté Λ_0, tout élément Λ_i ayant un opposé $\Lambda_{i'}$.

Le but du présent mémoire est l'étude de ces structures. On peut se ramener aux cas suivants:

3. *Une suite fondamentale de* Λ_0 *fait partie d'une suite fondamentale de* Λ.

C'est le cas des sous-systèmes fermés Λ_0 dits saturés: l'intersection du sous-espace $R(\Lambda_0)$ support de Λ_0 et de Λ coïncide avec Λ_0.

Lorsque

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\} \subset \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots \varphi_l\}$$

est l'inclusion de suites fondamentales ci-dessus, et si $\bar{\varphi}_{r+1}, \ldots, \bar{\varphi}_l$ sont les classes de

$\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_l \bmod \Lambda_0$, alors la classe de

$$\mu = \sum_1^l m_i \varphi_i \quad \text{est} \quad \bar{\mu} = \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i .$$

Désignant par R^{l-r} le supplémentaire orthogonal du support de Λ_0, chaque classe Λ_i admet une projection orthogonale sur R^{l-r} réduite à un point: le centre de gravité de cette classe.

La loi $\Lambda \mid \Lambda_0$ est ici entièrement déterminée par les centres $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ des classes $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$.

4. *Le sous-système fermé Λ_0 est de rang maximal l.*

Ici, $R^{l-r} = \{0\}$, les centres des classes Λ_i sont tous en 0. Particulièrement intéressants sont ici les simplifiés de Λ, c'est à dire les sous-systèmes fermés Λ_0 minimaux de rang l, tous de type

$$A_{s_1} \oplus \cdots \oplus A_{s_t} \qquad s_1 + \cdots + s_t = l .$$

Pour étudier $\Lambda \mid \Lambda_0$, on peut choisir dans le support R^l de Λ un système de générateurs

$$\tau_{1\,1}, \ldots, \tau_{1, s_1+1}; \cdots; \qquad \tau_{t\,1}, \ldots, \tau_{t, s_t+1}$$

avec

$$\sum_{j=1}^{s_i+1} \tau_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

Les racines de Λ_0 sont toutes les différences $\tau_{im} - \tau_{im'}$; les autres éléments de Λ sont de l'un des types

$$\tau + \tau', \quad \tau + \tau' \pm \tau'', \quad \tau + \tau' + \tau'' + \tau''' .$$

Les $A_7 \subset E_7$, $A_8 \subset E_8$, $A_2 \subset G_2$ conduisent aux expressions connues.

Pour $A_2 + A_2 + A_2 \subset E_6$, on obtient, en prenant

τ_1, τ_2, τ_3 ;	τ_4, τ_5, τ_6 ;	τ_7, τ_8, τ_9
$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$	$\tau_4 + \tau_5 + \tau_6 = 0$	$\tau_7 + \tau_8 + \tau_9 = 0$
$\alpha, \alpha', \cdots \in \{1, 2, 3\}$	$\beta, \beta', \cdots \in \{4, 5, 6\}$	$\gamma, \gamma', \cdots \in \{7, 8, 9\}$

les expressions suivantes pour les racines de E_6

$$\tau_\alpha - \tau_{\alpha'}; \quad \tau_\beta - \tau_{\beta'}; \quad \tau_\gamma - \tau_{\gamma'} \qquad \text{(racines de } \Lambda_0\text{)}$$
$$\pm (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma).$$

On a ici trois classes

$$\Lambda_0, \quad \Lambda_1 = \{\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma\}, \quad \Lambda_{1'} = -\Lambda_1$$

et $\Lambda \mid \Lambda_0$ est un groupe cyclique d'ordre 3. On pourra constater ici, lorsque Λ est une structure exceptionnelle E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 que les $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toujours des lois de groupes, sauf dans le cas $E_8 \mid 8A_1$.

5. Cette théorie peut servir à l'étude:

a) *des sous-algèbres réductives* $\mathfrak{g}_0$ *de* $\mathfrak{g}$ *qui correspondent aux systèmes fermés* $\Lambda_0 \subset \Lambda$

b) *des* $\mathfrak{g}_0$*-modules en lesquels* $\mathfrak{g}$ *se décompose suivant* ad $\mathfrak{g}_0$: A tout $\mu \in \Lambda$ correspond dans $\mathfrak{g}$ un sous-espace 1-dimensionnel $\mathbf{C}e_\mu$, avec

$$[h, e_\mu] = \mu(h)\, e_\mu \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

On a:

$$\mathfrak{g} = e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'} \mathbf{C}e_\mu \quad \text{où} \quad e_0 = \mathfrak{h}$$

$$\mathfrak{g}_0 = e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'_0} \mathbf{C}e_\mu .$$

J'écris:

$$\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{C}e_\alpha \quad \text{d'où}$$

1) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s .$$

Les $\mathfrak{g}_i$ sont des $\mathfrak{g}_0$-modules, irréductibles si $i \neq 0$.

On peut avoir $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$; si ce n'est pas le cas, il existe un indice k tel que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_k$. Lorsque $k \neq 0$, on a: $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$; $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_k$.

Enfin, pour tout i, il existe i' tel que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subset \mathfrak{g}_0$.

La connaissance de la loi $\Lambda \mid \Lambda_0$ implique celle des sur-algèbres de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, permet de trouver rapidement les sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ maximales (du type envisagé). Les sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ pour lesquelles 1) se réduit à

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1'} \qquad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{1'}] \subset \mathfrak{g}_0, \quad \text{ou}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

correspondent à certains espaces riemanniens symétriques.

6. Ce travail se rattache à [1] et à [2] chap II où sont étudiés principalement les systèmes fermés Λ_0 en eux-mêmes. Ici, la question est reprise dans son ensemble, en portant plutôt l'attention sur l'*insertion* de Λ_0 dans Λ. J'ai utilisé les listes données dans [1] ou [2]; celles qui figurent dans [4] permettront d'étudier le cas des sous-systèmes saturés des algèbres simples exceptionnelles, cas qui ne figure pas explicitement dans le § 5.

Plan

§ 1 *Introduction* 1

§ 2 *Partitions admissibles d'un Λ-système* 5

1 Notion de Λ-système 5
2 A-connexité dans un Λ-système 5
3 Sous-systèmes fermés Λ. 8
4 Partitions admissibles 9

§ 3 *Addition des classes modulo Λ_0* 10

§ 4 *Sous-systèmes saturés. Centre et caractères* 12

1 Sous-systèmes saturés 12
2 Suites fondamentales 12
3 Centre d'un sous-système 13
4 Structure du centre d'un sous-système saturé 14
5 Caractères d'une inclusion $\Lambda_0 \subset \Lambda$ 15

§ 5 *Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ lorsque Λ_0 est saturé* 16

1 Détermination pratique 16
2 Inclusions de suites fondamentales 16
3 Chambres de $\Lambda \mid \Lambda_0$ 17
4 Racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$ 18
5 Cas $\Lambda = A_l$ 6 Cas $\Lambda = B_l$ 7 Cas $\Lambda = C_l$ 8 Cas $\Lambda = D_l$ 19–23

§ 6 *Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ lorsque Λ_0 est de rang maximum* 23

1 Construction 23
2 Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ pour $\Lambda = A_l, B_l, C_l, D_l$ 23
3 Sous-systèmes minimaux de rang l. 25

§ 7 *Sur certains produits de modules irréductibles* 39

1 Sous algèbre $\mathfrak{g}_0$ associée à un sous-système Λ_0 fermé 39
2 Somme directe associée à une partition. 40
3 Sur-algèbres réductives d'une algèbre $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$ 42
4 Sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ maximales 43
5 Sur-algèbres réductives d'une algèbre $\mathfrak{g}_0$ semi-simple. 44

§ 2. Partitions admissibles

2.1 *Notion de Λ-système*

Soit $\Lambda \subset R^l$ le système des vecteurs-racines d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$. On en déduit:

a) le système inverse

$$\Lambda^* = \{\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha), \forall \alpha \in \Lambda\}$$

b) la symétrie $S_\alpha : z \mapsto z - (\alpha^*, z)\,\alpha$, et le groupe de Weyl W, engendré par les S_α, $\forall_\alpha \in \Lambda$.

c) la grille des poids

$$\gamma(\Lambda) = \{x \in R^l \mid (\alpha^*, x) \in \mathbf{Z}, \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

On sait que $W\gamma(\Lambda) = \gamma(\Lambda)$. Si $x \in \gamma(\Lambda)$, on a

$$S_\alpha x = x + mx \quad \text{où} \quad m \in \mathbf{Z}; \quad \text{les} \quad x + k\alpha, \quad \text{où} \quad k \in]0, m[\cap \mathbf{Z}$$

sont alors les intermédiaires stricts.

DÉFINITION 2.1: *J'appelle Λ-système toute partie Δ de R^l qui vérifie:*

1) $\Delta \subset \gamma(\Lambda)$

2) $x \in \Delta \Rightarrow S_\alpha x \in \Delta, \quad \forall \alpha \in \Lambda$

3) $x \in \Delta, \quad S_\alpha x = x + m\alpha \Rightarrow x + k\alpha \in \Delta \quad \forall k \in \mathbf{Z} \cap]0, m[$.

Autrement dit, Δ est une partie de la grille des poids stables pour W et qui, avec deux éléments symétriques $x, S_\alpha x$ contient tous les intermédiaires $x + k\alpha$, $(k \in z)$. Notons que

$$|S_\alpha x| = |x|, \quad |x + k\alpha| \leqslant |x|.$$

2.2 *A-connexité dans un Λ-système*

DÉFINITION 2.2: *Soit Λ le système des racines d'une algèbre $\mathfrak{g}$ semi-simple; soient*

1) Δ un Λ-système

2) $A \subset \Lambda$

3) $B \subset \Delta$

L'ensemble B est dit A-connexe si pour tout couple $(\mu, \mu') \in B \times B$, il existe une A-suite $\subset B$ qui relie μ à μ', c'est à dire une suite

$$\mu = \mu_0, \quad \mu_1, \ldots, \quad \mu_k = \mu'$$

d'éléments de B telle que $\mu_{i+1} - \mu_i \in A$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. B est dit connexe s'il est Λ-connexe.

Cela posé, j'écris

$$\mu' \equiv \mu \bmod A \quad \text{lorsque} \quad \mu' = \mu + \sum n_i \alpha_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

C'est une relation d'équivalence dans Δ, qui subit une partition en classes modulo le réseau engendré par A sur $\mathbf{Z}$ ou en bref modulo A:

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s .$$

PROPOSITION 2.1: *Soient Δ un Λ-système, $A \subset \Lambda$, avec $0 \in A$, $A = -A$, et*

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s$$

la partition de Δ en classes mod A. Chaque classe Δ_m est A-connexe.

Preuve: soient $\mu, \bar{\mu} \in \Delta_m$, avec

1) $$\bar{\mu} = \mu + \sum n_i \alpha_i \qquad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A .$$

Supposons d'abord

i) $$(\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) > 0 .$$

Je dis qu'il existe un indice j tel que $n_j \neq 0$ avec

$$\bar{\mu} - \alpha_j \in \Delta \quad \text{si} \quad n_j > 0$$
$$\bar{\mu} + \alpha_j \in \Delta \quad \text{si} \quad n_j < 0 .$$

En effet, si cet indice n'existe pas,

a) $n_j > 0$ implique $(\bar{\mu}, \alpha_j) \leqslant 0$, soit $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leqslant 0$

b) $n_j < 0$ implique $(\bar{\mu}, \alpha_j) \geqslant 0$, soit $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leqslant 0$.

Par exemple, avec a), $(\bar{\mu}, \alpha_j) > 0$ signifie

$$S_{\alpha_j} \bar{\mu} = \bar{\mu} - (\bar{\mu}, \alpha_j^*) \alpha_j \quad \text{et} \quad \bar{\mu} - \alpha_j \in \Delta ,$$

vu que Δ est un Λ-système.

Multipliant scalairement 1) par $\bar{\mu}$, il vient

$$(\bar{\mu}, \bar{\mu}) - (\bar{\mu}, \mu) = \sum n_i (\bar{\mu}, \alpha_i) .$$

D'après i), le premier membre est strictement positif, tandis que d'après a) et b) le second membre est négatif. On n'échappe à la contradiction qu'en admettant l'existence de l'indice j.

Maintenant la condition

ii) $$\bar{\mu} \neq \mu \quad \text{et} \quad (\bar{\mu}, \bar{\mu}) \geqslant (\mu, \mu)$$

implique i), comme le montre un calcul élémentaire:
si

$$|\bar{\mu}| = 1, \quad |\mu| = r \leqslant 1$$
$$\bar{\mu} = (1, 0)$$
$$\mu = (r \cos t, r \sin t)$$

dans le plan enclidien, on a $(\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) = 1 - r \cos t$.

Si $r<1$, on a $1-r\cos t>0$, et si $r=1$, alors $\cos t<1$ vu que $\bar{\mu}\neq\mu$, d'où encore $1-r\cos t>0$.

Prenons maintenant dans Δ_m un μ' de carré scalaire minimum; pour tout $\delta_0\neq\mu'$, $\delta_0\in\Delta_m$, on a

$$\delta_0=\mu'+\sum n_i\alpha_i \qquad n_i\in\mathbf{Z},\quad \alpha_i\in\Delta$$

δ_0 et μ' vérifiant ii) satisfont à i): $(\delta_0,\delta_0-\mu')>0$.

On a vu qu'il existe alors dans Δ_m

$$\delta_1=\delta_0-\alpha_j=\mu'+\cdots+(n_j-1)\alpha_j+\cdots \qquad (n_j>0)$$

ou

$$\delta_1=\delta_0+\alpha_j=\mu'+\cdots+(n_j+1)\alpha_j+\cdots \qquad (n_j<0).$$

Soit

$$\Delta\ni\delta_1=\mu'+\sum n_i'\alpha_i \qquad \sum|n_i'|=\sum|n_i|-1.$$

Si $\delta_1\neq\mu'$, on recommence l'opération,... Il se construit une Δ-suite

$$\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_k,\cdots\subset\Delta$$

avec

$$\delta_k=\mu'+\sum n_i^{(k)}\alpha_i, \qquad n_i^{(k)}\in\mathbf{Z},\ \alpha_i\in\Delta$$
$$\sum|n_i^{(k)}|=\sum|n_i^{(k-1)}|-1.$$
$$k=1,2,\ldots$$

Si pour un entier k, on a $\delta_k=\mu'$, alors la Δ-suite

$$\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_k=\mu' \quad \text{relie} \quad \delta_0 \text{ à } \mu'.$$

Cette circonstance se produit nécessairement puisque $\sum|n_i^{(k)}|$ décroît strictement. Ainsi, on peut relier μ et $\bar{\mu}$.

Ecrivons la suite obtenue:

$$\mu=\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_u=\bar{\mu} \qquad \tau_{i+1}-\tau_i\in\Delta_0.$$

Par construction, on a, successivement $\Delta_m\ni\mu=\tau_0,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_u=\bar{\mu}$ ce qui prouve que Δ_m est Δ_0-connexe.

Nous aurons encore besoin des résultats suivants:

PROPOSITION 2.2: *Soient Δ un Λ-système, $\tau\in\Delta$, α, $\beta\in\Lambda$, et $\tau'=\tau+\alpha+\beta\in\Delta$, où $\tau\neq\tau'$. Alors $\tau+\alpha\in\Delta$ ou $\tau+\beta\in\Delta$.*

On utilise le raisonnement qui suit i) dans la preuve de la proposition 2.1.

Si $(\tau',\tau')\geqslant(\tau,\tau)$, alors, comme $\tau\neq\tau'$, il vient $(\tau',\tau')-(\tau',\tau)>0$ d'où $\tau+\alpha\in\Delta$ ou $\tau+\beta\in\Delta$.

Si $(\tau,\tau')\leqslant(\tau,\tau)$, on a $(\tau,\tau)-(\tau',\tau)>0$ et $\tau=\tau'-\alpha-\beta$ montre à nouveau que $\tau+\alpha\in\Delta$ ou $\tau+\beta\in\Delta$.

PROPOSITION 2.3: *Soit Λ un système de racines de rang 1; pour que $\{\mu_1, \ldots, \mu_l\} \subset \Lambda$ soit une suite fondamentale de Λ, il faut et il suffit qu'on ait*

1) $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda \quad \forall i \neq j$ et

2) *Toute racine $\mu \in \Lambda$ est* **Z***-combinaison linéaire de $\mu_1, \ldots, \mu_1$.*

Si $m_1, \ldots, m_l$ est une suite fondamentale, il est bien connu que 1) et 2) sont vérifiées.

Les conditions 1) et 2) sont suffisantes. En effet, les racines

$$\mu = \sum m_i \mu_i \in \Lambda \quad \text{ont un poids} \quad P(\mu) = \sum_{i=1}^{l} |\, m_i \,|\,.$$

Les racines de poids 2 sont par hypothèse de la forme $\pm(\mu_i + \mu_j)$ $(i \neq j)$. Raisonnons par récurrence et soit β une racine de poids $p+1$; d'après la proposition 2.1, on peut écrire $\beta = \mu \pm \mu_i$ où μ est une racine de poids p, donc à coefficients tous $\geqslant 0$ par exemple.

Si β a des coefficients tous $\geqslant 0$, il n'y a rien à démontrer; sinon $\beta = \mu - \mu_i$ avec

$$\mu = m_1 \mu_1 + \cdots + m_s \mu_s, \quad m_j > 0, \quad j = 1, \ldots, s \quad \text{et} \quad i \notin \{1, \ldots, s\}.$$

Il existe un indice $j \leqslant s$, s par exemple, tel que

$$\mu - \mu_s = \alpha \in \Lambda, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \mu_s \in \Lambda, \quad \alpha + \mu_s - \mu_i \in \Lambda.$$

On a: $\beta = -\mu_i + \alpha + \mu_s$.

D'après la proposition 2.2, on a $-\mu_i + \alpha \in \Lambda$ ou bien $-\mu_i + \mu_s \in \Lambda$. Le second cas est exclu par hypothèse; $-\mu_i + \alpha$ est une racine de poids p à coefficients non tous $\geqslant 0$; pour éviter la contradiction, il faut poser $\beta = \mu + \mu_i$, d'où la conclusion.

2.3 *Sous-systèmes fermés*

PROPOSITION 2.4: *Supposons $\Delta = \Lambda$, $A \subset \Lambda$ avec $A = -A$, $(A + A) \cap \Lambda \subset A$. Alors la classe Δ_0 des $\mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\, A)$ coïncide avec A.*

On a d'abord $A \subset \Delta_0$. Soit maintenant $\mu \in \Delta_0$:

$$\mu = \sum n_i \alpha_i \qquad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

La proposition 2.1 affirme l'existence d'une A-suite qui relie 0 à μ: $0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k = \mu$. On a:

$$\begin{aligned}
&\mu_1 - 0 = \mu_1 \in A \\
&\mu_2 - \mu_1 \in A \quad \text{d'où} \quad \mu_2 = \mu_1 + \alpha \in (A + A) \cap \Lambda, \quad \text{et} \quad \mu_2 \in A \\
&\cdots\cdots \\
&\mu_k - \mu_{k-1} \in A \quad \text{d'où} \quad \mu_k = \mu \in A.
\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta_0 \subset A$ et $\Delta_0 = A$.

DÉFINITION 2.3: *Toute partie Λ_0 de Λ qui vérifie $\Lambda_0 = -\Lambda_0$, $(\Lambda_0+\Lambda_0)\cap\Lambda\subset\Lambda_0$ est appellée sous-système fermé de L.*

COROLLAIRE (à la proposition 2.1): *Soient Δ un Λ-système, Λ_0 un sous-système fermé de Λ, et $\Delta=\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_s$ la partition de Δ en classes mod Λ_0. Chaque classe Δ_m est Λ_0-connexe.*

En particulier, si $\Delta=\Lambda$, ce dernier subit une partition en classes mod Λ_0

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

et chaque classe Λ_m est Λ_0-connexe. Λ_0 est celle de ces classes qui contient 0.

2.4 *Partitions admissibles d'un Λ-système*

DÉFINITION 2.4: *Soit Δ un Λ-système dans R^l, et D une partition $\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_s$ de Δ. Le vecteur $\tau\to\tau'$ de R^l est dit vecteur de Δ si τ, $\tau'\in\Delta$ et si $\tau'-\tau\in\Lambda$. Le vecteur $\tau\to\tau'$ est dit vecteur de D si c'est un vecteur de Δ et si $\tau\equiv\tau'$ mod D.*

DÉFINITION 2.5: *La partition D du L-système Δ est dite admissible si*

1) *Tout vecteur de Δ équipollent à un vecteur de D est un vecteur de D* et

2) *Tout ensemble de la partition est connexe.*

PROPOSITION 2.5: *Soit Δ un Λ-système et D une partition de Δ. Pour que D soit la partition de Δ en classes modulo un sous-système fermé Λ_0, il faut et il suffit que D soit une partition admissible.*

a) Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ et D: $\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_s$ la partition de Δ en classes mod Λ_0. Considérons pour commencer un vecteur $\tau\to\tau'$ de D; On a: $\tau'=\tau+\alpha$, où $\alpha\in\Lambda$.

D'autre part, $\tau'\equiv\tau$ mod Λ_0 implique $\tau'=\tau+\sum n_i\alpha_i$, $n_i\in\mathbf{Z}$, $\alpha_i\in\Lambda_0$, d'où $\alpha=\sum n_i\alpha_i$, et comme Λ_0 est fermé, on a $\alpha\in\Lambda_0$.

Maintenant, *si $\gamma\to\gamma'$ est un vecteur de Δ équipollent au vecteur $\tau\to\tau'$ de D, on a:*

$$\gamma' = \gamma + \alpha, \quad \text{où} \quad \alpha\in\Lambda_0,$$

soit: $\gamma'\equiv\gamma$ mod Λ_0. *$\gamma\to\gamma'$ est un vecteur de D.*

D'après le corollaire à la proposition 2.1, chaque classe Δ_i est Λ_0-connexe et la condition 2) de la définition 2.5 est satisfaite. D est une partition admissible.

b) Soit $D:\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_s$ une partition admissible de Δ, soit Λ_0 l'ensemble des $\alpha\in\Lambda$ tels qu'il existe τ, $\tau'\in\Delta$ avec $\tau'\equiv\tau$ mod D, $\tau'-\tau=\alpha$.

Je dis que Λ_0 est un sous-système fermé de Λ. On a d'après la définition: $\Lambda_0=-\Lambda_0$, et $0\in\Lambda_0$.

Soient α, $\beta\in\Lambda_0$, avec $\alpha+\beta\in\Lambda-\{0\}$. Construisons le sous-espace R^h de R^l engendré par Δ. On a par hypothèse α, $\beta\in R^h$, d'où $\alpha+\beta\in R^h$. Si, pour tout $\tau\in\Delta$, on a $(\alpha+\beta,\tau)=0$, alors $(\alpha+\beta, R^h)=0$ $(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=0$, ce qui est absurde.

Soit donc $\tau \in \Delta$ avec $(\alpha+\beta, \tau) \neq 0$. En prenant un intermédiaire entre τ et $S_{\alpha+\beta}\tau$, on obtient $\mu, \mu' \in \Delta$ avec $\mu' = \mu+\alpha+\beta$, $\mu \neq \mu'$.

D'après la proposition 2.2, on a par exemple $\mu+\alpha \in \Delta$, et le vecteur $\mu \to \mu+\alpha$ est équipollent à un vecteur de D, d'où $\mu \equiv \mu+\alpha \bmod D$; de même, $\mu+\alpha \to (\mu+\alpha)+\beta$ est un vecteur de D, et μ, $\mu+\alpha$, $\mu+\alpha+\beta$ sont congrus mod D, ce qui prouve que $\alpha+\beta \in \Lambda_0$.

Il reste à prouver que D est la partition de Δ en classes mod Λ_0. Supposons $x, y \in \Delta_m$; comme Δ_m est connexe, il existe une Λ_0-chaîne qui relie x à y, d'où $y = x+\sum n_i\alpha_i$, $n_i \in \mathbf{Z}$, $\alpha_i \in \Lambda_0$. Réciproquement, si cette dernière relation a lieu entre $x, y \in \Delta$, il existe une Λ_0-chaine reliant x à y: $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$, avec $x_{i+1} - x_i \in \Lambda_0$, et $x_i \to x_{i+1}$ est un vecteur de D. De proche en proche:

$$x \in \Delta_m, \quad x_1 \in \Delta_m, \ldots, x_k = y \in \Delta_m \quad \text{et} \quad x \equiv y \bmod D.$$

§ 3. Addition des classes de Λ modulo un sous-système fermé Λ_0

Soient

Λ le système des racines d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$

Λ_0 un sous-système fermé de Λ, et

Δ un Λ-système.

Δ subit une partition en classes mod Λ_0: $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s$

chaque classe étant Λ_0-connexe. Considérons deux classes Δ_i, Δ_j et formons $(\Delta_i+\Delta_j) \cap \Delta$; cette intersection peut être vide. Si ce n'est pas le cas, il existe un indice k tel que $(\Delta_i+\Delta_j) \cap \Delta \subset \Delta_k$. Il s'introduit ainsi une loi de composition entre classes mod L_0, associative, commutative, non nécessairement partout définie.

Je me propose d'étudier cette loi dans le cas où $\Delta = \Lambda$; alors

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

où

$$\Lambda_0' = \Lambda_0 - \{0\}, \quad \Lambda_0 = \{0, \pm\mu_{0\,1}, \ldots, \pm\mu_{0\,n_0}\}, \quad \Lambda_m = \{\mu_{m\,1}, \ldots, \mu_{m,n_m}\}, \quad m \geqslant 1.$$

L'addition des classes de Λ mod Λ_0 est une loi de composition associative, commutative, non nécessairement partout définie, pourvue d'un zéro Λ_0, chaque classe ayant une opposée. Nous voulons préciser ces diverses propriétés.

Supposons $(\Lambda_i+\Lambda_j) \cap \Lambda$ non vide, contenue dans Λ_k et $0 \notin \{i, j, k\}$ distincts. Il existe des racines notées

$$\mu_{i_1}, \mu_{j_1}, \mu_{k_1} \quad \text{telles que} \quad \mu_{i_1} + \mu_{j_1} = \mu_{k_1}.$$

Prenons alors $\mu^* \in \Lambda_k$; comme Λ_k est Λ_0-connexe, il existe une Λ_0-suite qui relie μ_{k_1} à μ^*:

$$m_0 = \mu_{k_1}, \quad \mu_1, \ldots, \mu_p = m^*.$$

Comme $0 \notin \Lambda_k$, aucune de ces racines n'est nulle; *je dis que μ^* est somme d'un élément*

de Λ_i et d'un élément de Λ_j; l'affirmation est vraie pour μ_0. Supposons qu'elle soit vraie pour μ_{z-1}. On a:

$$\mu_{z-1} = \mu_{is'} + \mu_{js''} \quad \mu_z = \mu_{is'} + \mu_{js''} + \alpha, \quad \alpha \in \Lambda_0^*.$$

En appliquant la proposition 2.2, on a par exemple:

$$\mu_{is'} + \alpha \in \Lambda_i \quad \text{et} \quad \mu_z = (\mu_{is'} + \alpha) + \mu_{js''} \in (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda.$$

L'affirmation est établie. En résumé:

LEMME 3.1: *Les hypothèses:*

$$0 \notin \{i, j, k\}, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$$

impliquent $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$.

Supposons maintenant $0 = i$, $j \neq 0$, $j = k$.

On a: $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_j$.

Comme $0 \in \Lambda_0$, on a $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$; précisons en faisant apparaitre Λ_0':

a) si Λ_j n'a qu'un seul élément μ, alors

$$\mu \pm \alpha \notin L, \quad \forall \alpha \in L_0', \quad \text{et} \quad (\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap L = \Lambda_j = \{\mu\}$$

b) si Λ_j a deux éléments μ, μ' au moins, alors la conjonction

$$\mu \in \Lambda_j, \quad \mu \pm \alpha \notin \Lambda, \quad \forall \alpha \in \Lambda_0'$$

est impossible, vu que Λ_j est Λ_0-connexe; il existe donc

$$\alpha \in L_0 \quad \text{avec} \quad \mu + \alpha \in \Lambda_j, \quad \text{et} \quad \mu \in (\Lambda_0' + \Lambda_j) \cap \Lambda, \quad (\Lambda_0' + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j.$$

LEMME 3.2: *On a, pour $j \neq 0$: $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$; si Λ_j a plus d'un élément, $(\Lambda_0' + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$.*

Supposons enfin $i \neq 0$, $\Lambda_i = \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_{n_i}}\}$; alors $-\Lambda_i = \{-\mu_{i_1}, \ldots, -\mu_{i_{n_i}}\}$ est une classe de $\Lambda \bmod \Lambda_0$, et il existe $i' \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$. On a: $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$. Le cas où $i = i'$ n'est pas exclu. Ces résultats peuvent être rassemblés.

THÉORÈME 3.1: *La partition $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ du système Λ en classes modulo le sous-système fermé Λ_0 a les propriétés suivantes:*

a) *toute classe Λ_m est Λ_0-connexe*

b) si $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$, *il existe $k \leqslant s$ tel que $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cup \Lambda \subset \Lambda_k$; de plus*

b') *$k \neq 0$ implique $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$, $(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$ avec $(\Lambda_0' + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$ si Λ_k a plus d'un élément.*

b'' *pour tout i, il existe un indice i' et un seul tel que $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$, ou $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$.*

L'ensemble quotient est ainsi pourvu d'une loi de composition, qui est précisée par le théorème.

Lorsque $\Lambda_0' = \emptyset$, on retrouve Λ, chaque classe ayant un seul élément.

On peut adopter une notation abrégée, en écrivant autrement les relations du théorème:

$$(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \emptyset \quad \text{devient} \quad \Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset$$
$$(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k \quad \text{devient} \quad \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k$$
$$(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j \quad \text{devient} \quad \Lambda_0 + \Lambda_j = \Lambda_j$$
$$(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0 \quad \text{devient} \quad \Lambda_i + \Lambda_{i'} = \Lambda_0 .$$

Lorsque $\Lambda_0' = \emptyset$, $\Lambda_i = \{\mu_i\}$, on a toujours, pour $i \neq 0$: $2\Lambda_i = \emptyset$. Lorsque $\Lambda_0' \neq \emptyset$, on peut avoir des classes $\Lambda_i, 2\Lambda_i, \ldots, p\Lambda_i$ non vides, $(p+1)\Lambda_i = \emptyset$; p pouvant prendre l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dans certains cas, on peut aussi obtenir:

$\Lambda_1, 2\Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1$ non vides, $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$, $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ formant un groupe cyclique.

§ 4. Sous-systèmes saturés. Centre et caractères

4.1

DÉFINITION 4.1: Soit Λ_0 un sous-système fermé du système Λ; *le saturé* $\bar{\Lambda}_0$ *de* Λ_0 *dans* Λ *est l'intersection du support* R^r *de* Λ_0 *et de* Λ. C'est un sous-système fermé, qui vérifie $\bar{\bar{\Lambda}}_0 = \bar{\Lambda}_0$. On a $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda$ lorsque Λ_0 est de rang 1.

DÉFINITION On dit que le sous-système fermé Λ_0^* de Λ est *un simplifié* de Λ_0 si Λ_0^* et Λ_0 ont même rang, si $\Lambda_0^* \subset \Lambda_0$ et si Λ_0^* ne contient aucun sous-système fermé $\neq 0$ propre de même rang.

Tout sous-système fermé Λ_0 de Λ admet un saturé unique $\bar{\Lambda}_0$; il admet au moins un simplifié Λ_0^*. Tout simplifié est du type $A_{s_1} \oplus \cdots \oplus A_{s_k}$, et tout sous-système fermé d'un simplifié est encore un simplifié.

PROPOSITION 4.1: *Tout sous-système fermé* Λ_0 *de* Λ *est saturé dans un système de rang maximum.*

Si $\mu_1, \ldots, \mu_r (r < l)$ est une base entière de Λ_0, on prend $\mu_{r+1}, \ldots, \mu_l \in \Lambda$ en sorte que $\mu_1, \ldots, \mu_l$ soient libres dans R^l. Les éléments de Λ qui sont des **Z**-combinaisons linéaires de $\mu_1, \ldots, \mu_l$ forment un sous-système fermé Λ_0^* de rang l dans lequel Λ_0 est saturé.

4.2 *Sous-systèmes saturés et suites fondamentales*

PROPOSITION 4.2: *Soit* Λ_0 *un sous-système fermé de* Λ*; pour que* Λ_0 *soit saturé dans* Λ*, il faut et il suffit qu'il existe une suite fondamentale de* Λ_0 *contenue dans une suite fondamentale de* Λ.

Si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ est une suite fondamentale de Λ_0, contenue dans la suite fondamentale $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ de Λ, alors, d'après la définition, Λ_0 est saturé dans Λ.

Réciproquement, supposons Λ_0 saturé dans Λ; soient R^r le support de $\Lambda_0 (r<l)$, R^{l-r} le supplémentaire orthogonal de R^r dans R^l.

Si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \notin \Lambda_0$ on a $\lambda \notin R^r$; la restriction $\bar{\lambda}$ de λ à R^{l-r} n'est pas nulle; $\bar{\lambda}=0$ définit un $(l-r-1)$-plan de R^{l-r}, noté π_λ. La réunion de tous les π_λ est une partie F fermée de R^{l-r}.

Je désigne par $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots$ les composantes connexes du complémentaire de F dans R^{l-r}; ces $\mathscr{D}_1$ sont ouverts, connexes, et même convexes: ce sont les chambres de $\Lambda \mid \Lambda_0$.

Soit $x \in \mathscr{D}$; une chambre de Weyl (ouverte) P_φ de Λ est dite adjacente à x si x est adhérent à $P_\varphi : x \in \bar{P}_\varphi$; si dans ce cas, $y \in P_\varphi$, le segment $u=(x, y)$ est dans $\bar{P}_\varphi$. Sur y, les racines $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ qui définissent P_φ sont toutes >0; il en est de même en chaque point de u, sauf en x, où elles sont $\geqslant 0$. Avec de bonnes notations:

a)
$$\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_{r'}(x) = 0$$
$$\varphi_{r'+1}(x) > 0, \ldots, \varphi_l(x) > 0.$$

La forme $\varphi_j (j \leqslant r')$ étant nulle en un point x intérieur à $\mathscr{D}_1$ est, par définition de F, nulle sur R^{l-r}; alors

$$\varphi_j \in R^r \cap \Lambda, \quad \text{d'où}$$
$$\varphi_1, \ldots, \varphi_{r'} \in \Lambda_0.$$

D'autre part, soit $\mu \in \Lambda_0$; on a

$$\mu = \sum_1^l m_i \varphi_i \qquad m_i \in \mathbf{Z}, \quad m_i \text{ nuls ou tous de même signe.}$$

Alors
$$0 = \mu(x) = m_{r'+1} \varphi_{r'+1}(x) + \cdots + m_l \varphi_l(x)$$

et par a): $m_{r'+1} = \cdots = m_l = 0$; il vient

$$\mu = m_1 \varphi_1 + \cdots + m_{r'} \varphi_{r'}, \quad \text{et} \quad r' = r.$$

Ainsi $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ est une suite fondamentale de Λ_0, contenue dans $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_l\}$, qui est une suite fondamentale de Λ.

Par usage du groupe de Weyl de Λ_0, on voit de plus que toute suite fondamentale de Λ_0 a aussi cette propriété.

COROLLAIRE: *On obtient tous les sous-systèmes Λ_0 saturés dans Λ, en prenant une partie quelconque $\mu_1, \ldots, \mu_r$ d'une suite fondamentale $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ de Λ. Λ_0 est constitué par les* **Z***-combinaisons linéaires de $\mu_1, \ldots, \mu_r$ qui appartiennent à Λ.*

4.3 *Centre d'un sous-système*

DÉFINITION 4.2: *Soit Λ_0 un sous-système fermé* de Λ.

$$\mathscr{Z}_0 = \{x \in R^l \mid (x, \Lambda_0) \subset \mathbf{Z}\}$$

est par définition le centre de Λ_0 dans R^l.

Le centre $\mathscr{Z}_0$ est un sous-groupe additif de R^l. A une inclusion de sous-systèmes fermés $\{0\}\subset\Lambda_0\subset\Lambda_0^*\subset\cdots\subset\Lambda$ correspond $R^l\supset\mathscr{Z}_0\supset\mathscr{Z}_0^*\supset\cdots\supset\mathscr{Z}$.

PROPOSITION 4.3: *Si Λ_0, Λ_0^* sont deux sous-systèmes fermés de Λ, distincts, alors les centres $\mathscr{Z}_0$, $\mathscr{Z}_0^*$ sont distincts.*

Soit $\mu_1,\ldots,\mu_r$ une base entière de Λ_0, sous-tendant R^r; prenons $\lambda\in\Lambda$, $\lambda\notin\Lambda_0$. Il suffit de montrer qu'il existe un $v\in\mathscr{Z}_0$, avec $\lambda(v)\notin\mathbf{Z}$.

Deux cas se présentent:

a) $$\lambda = m_1\mu_1+\cdots+m_r\mu_r \quad \text{avec} \quad m_1\notin\mathbf{Z}.$$

Ici on prend $v\in R^r$, avec $\mu_1(v)=1$, $\mu_2(v)=\cdots=\mu_r(v)=0$ alors $v\in\mathscr{Z}_0$, et $\lambda(v)=m_1\notin\mathbf{Z}$.

b) $\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_r$ sont linéairement indépendants.

On prend $v\in R^l$ tel que $\lambda(v)=\frac{1}{2}$, $\mu_1(v)=\cdots=\mu_r(v)=0$.

PROPOSITION 4.4: *Toute forme linéaire sur R^l, entière sur le centre $\mathscr{Z}_0$ du sous-système fermé Λ_0, est* **Z***-combinaison linéaire d'éléments de Λ_0.*

Si ϱ est cette forme, elle s'annule sur le supplémentaire R^{l-r} du support R^r de Λ_0. Si $\mu_1,\ldots,\mu_r$ est une base entière de Λ_0, on a $\varrho=m_1\mu_1+\cdots+m_r\mu_r$. Il existe $v_1,\ldots,v_r\in R^r$ avec $\mu_i(v_j)=\delta_{ij}$ (Symbole de Kronecker); ainsi $v_1,\ldots,v_r\in\mathscr{Z}_0$, $\varrho(v)_j=m_j\in\mathbf{Z}$ cqfd.

4.4 *Structure du centre d'un sous-système saturé*

PROPOSITION 4.5: *Soient Λ_0 un sous-système fermé de Λ, $\mathscr{Z}_0$ son centre, $\mathscr{Z}$ celui de Λ. Pour que Λ_0 soit saturé dans Λ, il faut et il suffit que $\mathscr{Z}_0\mid\mathscr{Z}$ soit un tore.*

Supposons Λ_0 saturé; soit R^r son support, de supplémentaire R^{l-r}. Il suffit de prouver que toute classe de $\mathscr{Z}_0 \bmod R^{l-r}$ contient un élément de $\mathscr{Z}$.

Soit $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_r\}$ une suite fondamentale de Λ_0 contenue dans une suite fondamentale $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\ldots,\varphi_l\}$ de Λ.

Pour $v\in\mathscr{Z}_0$, on a

$$v = v_1+v_2, \quad \text{où} \quad v_1\in R^r, \quad v_2\in R^{l-r}, \quad \text{et}$$
$$\varphi_i(v)=\varphi_i(v_1) \qquad i=1,2,\ldots,r$$

ce qui prouve que $v_1\in\mathscr{Z}_0$. Cherchons $u\in R^{l-r}$ en sorte que

$$\varphi_i(v+u)\in\mathbf{Z}, \qquad v_1=1,2,\ldots,l$$

c'est à dire $v_1+u\in\mathscr{Z}$. On a

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(v_1+u)&=\varphi_1(v_1)\in\mathbf{Z}\\ \varphi_r(v_1+u)&=\varphi_r(v_1)\in\mathbf{Z}\end{aligned}\right\} \quad \forall u\in R^{l-r}.$$

Posons $\varphi_i(v_1+u)=0 \quad i=r+1,\ldots,l$, d'où $\varphi_i(u)=-\varphi_i(v_1)$.

On a un système de $l-r$ équations indépendantes pour $u\in R^{l-r}$; il y a une solution u_0 et une seule, et $v_1+u_0\in\mathscr{Z}$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z}$ soit un tore, c'est à dire que chaque classe de $\mathscr{Z}_0 \bmod R^{l-r}$ contienne un élément de $\mathscr{Z}$.

Soit $v+R^{l-r}$ une classe de $\mathscr{Z}_0 \bmod R^{l-r}$, où

$$v = v_1 + v_2 \in \mathscr{Z}_0, \quad v_1 \in \mathscr{Z}_0.$$

Il existe $x \in R^{l-r}$ avec $v_1 + x \in \mathscr{Z}$.

Si $\mu_1, \ldots, \mu_r$ est une base entière de Λ_0, et si
$\mu = m_1 m_1 + \cdots + m_r \mu_r \in \bar{\Lambda}_0$, on a
$\mu(v_1+x) \in \mathbf{Z}$, $m(v_1) \in \mathbf{Z}$; ainsi
$\mu(v) \in \mathbf{Z}$, $\forall v \in \mathscr{Z}_0$ et $\mu \in \Lambda_0$.
On a $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda_0$ cqfd.

REMARQUE 1: Lorsque Λ_0 n'est pas saturé, on a $\Lambda_0 \subset \bar{\Lambda}_0 \subset \Lambda$, d'où

$$\mathscr{Z}_0 \supset \overline{\mathscr{Z}}_0 \supset \mathscr{Z} \quad \text{et} \quad \mathscr{Z}_0 \mid \overline{\mathscr{Z}}_0 \sim (\mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z})/(\overline{\mathscr{Z}}_0 \mid \mathscr{Z}).$$

$\mathscr{Z}_0 \mid \overline{\mathscr{Z}}_0$ est un groupe fini, tandis que $\overline{\mathscr{Z}}_0 \mid \mathscr{Z}$ est un tore; ainsi $\mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z}$ est une extension de ce tore par un groupe fini.

REMARQUE 2: Lorsque Λ_0 n'est pas saturé, on a encore Λ_0 saturé dans un Λ_0^* de rang maximal:

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* \subset \Lambda \quad \text{et} \quad \mathscr{Z}_0 \supset \mathscr{Z}_0^* \supset \mathscr{Z} \quad \text{avec} \quad \mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z}_0^* \sim (\mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z})/(\mathscr{Z}_0^* \mid \mathscr{Z}).$$

Le premier membre est un tore, tandis que $\mathscr{Z}_0^* \mid \mathscr{Z}$ est un groupe fini. $\mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z}$ contient ce groupe fini, avec un quotient toroïdal.

4.5 *Caractères d'une inclusion* $\Lambda_0 \subset \Lambda$

Soit Λ_0 un sous-système fermé du système Λ, et $\mathscr{Z}_0$ son centre dans R^l; soit

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ en classes $\bmod \Lambda_0$. Soit $\mu \in \Lambda$; je pose

$$\mu^* = (\mu \mid \mathscr{Z}_0) \bmod 1.$$

C'est par définition le caractère de $\Lambda_0 \subset \Lambda$ associé à μ; μ^* est une fonction définie sur $\mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z}$, à valeurs dans $T = R/\mathbf{Z}$.

Si $\mu, \mu' \in \Lambda_i$, on a

$$\mu' = \mu + \sum_1^r m_i \mu_i \quad m_i \in \mathbf{Z}, \quad \mu_1, \ldots, \mu_r \text{ base entière de } \Lambda_0.$$

Sur $\mathscr{Z}_0$ les μ_i sont entiers, d'où $\mu'^* = \mu^*$.
Réciproquement, si $\mu, \mu' \in \Lambda$ sont tels que $\mu^* = \mu'^*$, alors $\mu' - \mu$ est une forme linéaire

sur R^l entière sur $\mathscr{Z}_0$; d'après la proposition 2 de 4.3, on a

$$\mu' - \mu = \sum_1^r m_i \mu_i \quad m_i \in \mathbf{Z} \quad \text{d'où} \quad \mu, \mu' \in \Lambda_k .$$

Par ailleurs, si μ, μ', $\mu+\mu' \in \Lambda$, on a $(\mu+\mu')^* = \mu^* + \mu'^*$.

PROPOSITION 4.6: *La loi $\mu \to \mu^*$ détermine un isomorphisme de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sur l'ensemble des caractères de $\Lambda_0 \subset \Lambda$.*

Lorsque Λ_0 est saturé, chaque caractère est défini sur le tore T^{l-r}.

§ 5. Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ lorsque Λ_0 est saturé dans Λ

5.1 *Détermination pratique de la loi-quotient*

PROPOSITION 5.1: *Soit Λ_0 un sous-système saturé dans Λ; pour que deux racines μ, $\mu' \in \Lambda$ appartiennent à une même classe mod Λ_0, il faut et il suffit que leurs restrictions $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}'$ au supplémentaire orthogonal R^{l-r} du support de Λ_0 coïncident.*

Si μ, $\mu' \in \Lambda_i$, $\mu' - \mu$ est une forme entière sur $\mathscr{Z}_0$, entière sur R^{l-r}, donc nulle sur ce sous-espace.

Réciproquement, si $\bar{\mu} = \bar{\mu}'$, on a $\mu^* = \mu'^*$ sur le tore $\mathscr{Z}_0 \mid \mathscr{Z}$, et μ, μ' sont dans une même classe mod Λ_0.

Ainsi, on déduit $\Lambda \mid \Lambda_0$ de Λ en prenant les restrictions à R^{l-r} des $\mu \in \Lambda$. Pratiquement, si

$$\Lambda = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_l, \ldots, \sum_1^l m_i \varphi_i, \ldots\}$$

il suffit de supprimer partout $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$

$$\Lambda \mid \Lambda_0 = \{\bar{\varphi}_{r+1}, \ldots, \bar{\varphi}_l, \ldots, \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i, \ldots\} .$$

Les éléments de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont des $\mathbf{Z}$-combinaisons linéaires de $\bar{\varphi}_{r+1}, \ldots, \bar{\varphi}_1$ à coefficients nuls ou tous de même signe.

5.2 *Ensemble des inclusions de suites fondamentales correspondant à $\Lambda_0 \subset \Lambda$*

PROPOSITION 5.2: *Soit Λ_0 un sous-système saturé dans Λ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ une suite fondamentale de Λ_0 et $\mu_1, \ldots, \mu_s$ s classes de Λ mod Λ_0. Pour qu'il existe $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ de façon que $\varphi_1, \ldots, \varphi_2, \mu_1, \ldots, \mu_s$ soit une suite fondamentale de Λ, il faut et il suffit que*

1) *Pour tout couple (i, j) $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, s$: $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda \mid \Lambda_0$, et*

2) *$\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_s$ forment une base entière de $\Lambda \mid \Lambda_0$, $(s = l - r)$.*

La condition est nécessaire: Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_2, \mu_1, \ldots, \mu_s$ est une suite fondamentale de Λ alors $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j$ n'est pas une classe vu que $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda$, et $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_s$ engendrent $\Lambda \mid \Lambda_0$ par combinaisons linéaires à coefficients entiers.

La condition est suffisante: soient $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_s$, $s = l - r$ classes vérifiant 1) et 2). Pre-

nons $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ tel que $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda, j=1,\ldots,r$. On a par ailleurs $\mu_i - \mu_k \notin \Lambda (i \neq k)$, sinon $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_k$ serait une classe. Ainsi la différence des deux racines quelconques dans $\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\mu_1,\ldots,\mu_s$ n'est pas une racine.

Soit $\mu \in \Lambda$; on a par hypothèse $\bar{\mu} = m_1\bar{\mu}_1 + \cdots + m_s\bar{\mu}_s$, $m_i \in \mathbf{Z}$.

Alors $m_1\mu_1 + \cdots + m_s\mu_s$ est de la forme

$$\mu - \sum_1^r n_i\varphi_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \text{d'où} \quad \mu = \sum_1^r n_i\varphi_i + \sum_1^s m_i\mu_i .$$

Ainsi $\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\mu_1,\ldots,\mu_{l-r}$ est une base entière de Λ telle que la différence de deux de ses éléments distincts quelconques ne soit pas dans Λ. D'après la proposition 2.3, $\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\mu_1,\ldots,\mu_{l-r}$ est une suite fondamentale de Λ.

SCHOLIE: *Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ une suite fondamentale du sous-système Λ_0 saturé dans Λ, et $\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\ldots,\varphi_l$ une suite fondamentale de Λ contenant la précédente. On obtient toutes les suites fondamentales de Λ qui contiennent $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ en constituant la loi-quotient:*

1) $$\pm\bar{\varphi}_{r+1},\ldots,\pm\bar{\varphi}_l,\ldots,\sum_{r+1}^{l} m_i\bar{\varphi}_i,\ldots$$

puis en déterminant les suites $\bar{\mu}_{r+1},\ldots,\bar{\mu}_l$ extraites de 1) telles que

a) $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda \mid \Lambda_0$ b) $\bar{\mu}_{r+1},\ldots,\bar{\mu}_l$ base entière de $\Lambda \mid \Lambda_0$.

Les $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ tels que $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda (j=1,2,\ldots,r)$ constituent avec $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ une telle suite fondamentale $\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\mu_{r+1},\ldots,\mu_l$ de Λ.

5.3 *Caractérisation des domaines $\mathscr{D}_i$*

PROPOSITION 5.3: *Soit Λ_0 un sous-système saturé de Λ; toute chambre $\mathscr{D}$ de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est définie par des relations*

$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_r = 0, \quad \varphi_{r+1} > 0,\ldots,\varphi_l > 0$$

où $\varphi_1,\ldots,\varphi_l(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ est une suite fondamentale de Λ resp. (Λ_0).

Reprenons les notations de 4.2, avec $x \in \mathscr{D}_1$; on a

1) $$\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_r(x) = 0, \quad \varphi_{r+1}(x) > 0,\ldots,\varphi_l(x) > 0 .$$

Par définition de $\mathscr{D}_1$, chaque racine de Λ est ou bien nulle sur $\mathscr{D}_1$, ou bien garde un signe constant. Les relations 1) ont donc lieu pour tout $y \in \mathscr{D}_1$.

Réciproquement, soit $z \in R^l$ vérifiant

$$\varphi_1(z) = \cdots = \varphi_r(z) = 0;\ \varphi_{r+1}(z) > 0,\ldots,\varphi_l(z) > 0 .$$

On a d'abord $z \in R^{l-r}$; sur le segment (z, x), la forme $\varphi_{r+j}(1 \leqslant j \leqslant l-r)$, qui est positive aux extrémités, est positive sur tout le segment; il en est de même de $\bar{\varphi}_{r+j}$

Toutes les formes $\lambda \in \Lambda \mid \Lambda_0$ gardent alors un signe constant sur (z, x), d'où $(z, x) \subset D_1$, $z \in \mathscr{D}_1$.

Maintenant, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ est la base duale de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$:

$$(\varepsilon_i, \varphi_j) = \delta_{ij}; \quad \text{on a}$$
$$z = \lambda_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + \lambda_l \varepsilon_l$$

car R^{l-r} est engendré par $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_l$; $\varphi_\alpha(z) > 0$ $\alpha \in (r+1, \ldots, l)$ s'écrit alors $\lambda_\alpha > 0$.

COROLLAIRE: *$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ étant la base duale de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, la chambre associée à cette suite dans R^{l-r} est le premier quadrant relatif au repère $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_l$ de R^{l-r}.*

En écrivant

$$\bar{\varphi}_{r+j}(z) = (\bar{\varphi}_{r+j}, z), \qquad \text{on obtient sans peine.}$$

PROPOSITION: *$\bar{\varphi}_{r+1}, \ldots, \bar{\varphi}_l$ est la base duale de $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_l$ dans R^{l-r}.*

5.4 *Λ-systèmes modulo un sous-système saturé*

Soit Δ un Λ-système dans R^l, et Λ_0 un sous-système fermé de Λ; *soit R^{l-r} le supplémentaire orthogonal du support R^r de Λ_0.* Je me propose d'étudier ici la projection orthogonale $\bar{\Delta}$ de Δ sur R^{l-r}; $\bar{\Delta}$ est le Λ-système Δ modulo Λ_0.

Si $\Delta = \mathscr{S}$ est un système de racines secondaires de Λ, $\mathscr{S}$ est dit système de racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$. Si $\Delta = \Lambda$, Λ est dit système de racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$. Cette étude est surtout intéressante lorsque Λ_0 est saturé.

PROPOSITION 5.4: *Soit Δ un Λ-système dans R^l, Λ_0 un sous-système fermé de Λ et $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s$ la partition de Δ modulo Λ_0. Chaque face Δ_i se projette sur un point de R^{l-r}: le centre de cette face.*

Soient $\mu, \mu' \in \Delta_i$; $\mu' - \mu$ étant dans R^r, μ et μ' ont même projection sur R^{l-r}, et Δ_i se projette sur $\sigma_i \in R^{l-r}$.

Soit maintenant

$$\sigma_i^* = \frac{1}{n_i} \sum_{\alpha \in \Delta_i} \alpha, \quad n_i \text{ nombre d'éléments dans } \Delta_i$$

le centre de Δ_i. Le groupe de Weyl W_0 associé à Λ_0 conserve Δ_i et conserve donc σ_i^*; cela implique $\sigma_i^* \in R^{l-r}$.

Ainsi, σ_i^* est un point du support plan de Δ_i situé dans R^{l-r}, et on a vu que ce support se projette sur un point σ_i. On a $\sigma_i = \sigma^*$ cqfd.

COROLLAIRE: *Si Λ_0 est de rang maximum 1, les centres des faces de la partition d. Δ mod Λ_0 sont tous en* 0.
Ici $R^{l-r} = \{0\}$.

PROPOSITION 5.5: *Soit Δ un Λ-système connexe, et Λ_0 un sous-système saturé de rang*

r de Λ. Dans la projection orthogonale $R^l \to R^{l-r}$, deux faces distinctes de Δ modulo Λ_0 ont pour image deux points distincts.

Soient $\tau, \tau' \in \Delta$ se projetant sur $\gamma \in R^{l-r}$.

On a:

1) $$\tau' = \tau + \sum_1^r m_i \alpha_i$$

en supposant que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_l)$ est une suite fondamentale de Λ_0 (resp. Λ).

Comme Δ est connexe, on peut écrire

$$\tau' = \tau + \sum b_i \beta_i, \quad b_i \in \mathbf{Z}, \quad \beta_i \in \Lambda$$

où

$$\beta_i = \sum_1^l b_{ik} \alpha_k, \quad b_{ik} \in \mathbf{Z}$$

d'où encore

$$\tau' - \tau = \sum_{i,k} b_i b_{ik} \alpha_k = \sum b'_k \alpha_k, \quad b'_k \in \mathbf{Z}$$

2) $$\tau' = \tau + \sum_1^l b'_k \alpha_k \quad b'_k \in \mathbf{Z}.$$

Comparant 1) et 2), on voit que $m_1, \ldots, m_r$ sont entiers, ce qui signifie que τ, τ' sont dans une même face Δ_i de $\Delta \bmod \Lambda_0$.

COROLLAIRE 1: *Pour Δ connexe et Λ_0 saturé, les centres des faces de $\Delta \bmod \Lambda_0$ sont distincts.*

COROLLAIRE 2: *Lorsque Λ_0 est saturé, le système des racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces de $\Lambda \bmod \Lambda_0$.*

COROLLAIRE 3: *Soit $\mathscr{S}$ un système de racines secondaires de Λ, et Λ_0 un sous-système saturé de Λ. Le système $\overline{\mathscr{S}}$ des racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces de $\mathscr{S} \bmod \Lambda_0$.*

5.5 *Sous-systèmes saturés de A_l et loi-quotient*

Pour étudier l'algèbre semi-simple A_l, on se sert du simplexe régulier fondamental

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(A_l) = \{\tau_1, \ldots, \tau_{l+1}\}$$

où

$$\sum_1^{l+1} \tau_i = 0, \quad (\tau_i, \tau_i) = l/(l+1), \quad (\tau_i, \tau_j) = -1/(l+1).$$

Le système des racines de A_l est constitué par toutes les arêtes de $\mathscr{S}$.

Pour étudier un sous-système fermé quelconque de A_l (toujours saturé), on se sert

d'une partition

$$p_1 \cup \cdots \cup p_{s+1} \quad \text{de} \quad 1, 2, \ldots, l+1$$

où p_i a r_i éléments. Les faces de $\mathscr{S} \bmod \Lambda_0$ sont les $s+1$ ensembles

$$P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad \text{et} \quad \Lambda_0 = \{\tau_\alpha - \tau_\beta) \mid \alpha, \beta \in p_i;\ i = 1, \ldots, s+1\}.$$

Le polyèdre des racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces P_i

$$\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \left\{\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \ldots, \mu_{s+1} = \frac{1}{r_{s+1}} \sum_{\alpha \in p_{s+1}} \tau_\alpha\right\}.$$

Cela détermine les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ qui ne sont autres que les arêtes de $\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$.

$\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$ est un simplexe dans R^{l-r}, en général non régulier. Un calcul simple montre que $l-r=s$.

PROPOSITION 5.6: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toutes les arêtes du simplexe constitué par les centres des faces de Λ_0.*

5.6 *Sous-systèmes saturés de B_l et loi-quotient*

Si $\tau_1, \ldots, \tau_l$ est un repère orthonormal de R^l, on pose $\mathscr{S} = \mathscr{S}(B_l) = \{\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l, 0\}$ $2l+1$ points. Le système des racines de B_l est formé de toutes les arêtes de $\mathscr{S}$ sauf les $\pm(\tau_i - (-\tau_i)) = \pm 2\tau_i$: on obtient:

$$\Lambda = \Lambda(B_l) = \{\pm\tau_i,\ \pm\tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, l\}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque Λ_0, il suffit de se donner une partition de $\{1, 2, \ldots, l\}$

$$(p_0) \cup p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_k, \qquad p_0 \text{ éventuellement vide}$$

p_i ayant r_i éléments, $r_1, \ldots, r_k > 0$, r_0 éventuellement nul. Les faces de Λ_0 sont alors

$$P_0 = \{0, \pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\}, \quad \begin{matrix} P_1 = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\} \\ P_1' = \{-\tau_a \mid \alpha \in p_1\} \end{matrix} \cdots \begin{matrix} P_k = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\} \\ P_k' = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}. \end{matrix}$$

On a

$$\Lambda_0 = \text{ensemble de toutes les arêtes des } P_0, P_i, P_{i'}$$

sauf les $\pm(\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)) = \pm 2\tau_\alpha$, $\forall \alpha \in p_0$.

$$= \{\pm\tau_\alpha,\ \pm\tau_\alpha \pm \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_0\} \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_1\} \cup \cdots \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_k\}.$$

Le rang de Λ_0 est ici

$$r_0 + (r-1) + \cdots + (r_k - 1) = \sum r_i - k = l - k = r$$

d'où $l-r=k$.

Le supplémentaire orthogonal $R^{l-r} = R^k$ du support R^r de Λ_0 est engendré par les

centres des faces de $\mathscr{S}$ mod Λ_0:

$$\overline{\mathscr{S}} = \mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{0, \pm\mu_1, \ldots, \pm\mu_k\};\ \mu_i = \frac{1}{r_i}\sum_{\alpha \in p_i} \tau_\alpha .$$

Notons que $\mu_1, \ldots, \mu_k$ est un repère orthogonal de R^{l-r}.

PROPOSITION 5.7: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont les arêtes de $\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$, c'est à dire toutes les expressions $\pm\mu_i$, $\pm\mu_i \pm \mu_j$ et de plus toutes les $\pm 2\mu_j$ pour lesquelles $r_j > 1$.*

Exemple:

$$p_0 = \emptyset, \quad p_1 = \{1\}, \qquad p_2 = \{2, 3, 4\}$$

$$P_0 = \{0\} \begin{matrix} P_1 = \{\tau_1\} & P_2 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_4\} \\ P_1' = \{-\tau_1\} & P_2' = \{-\tau_2, -\tau_3, -\tau_4\} \end{matrix}$$

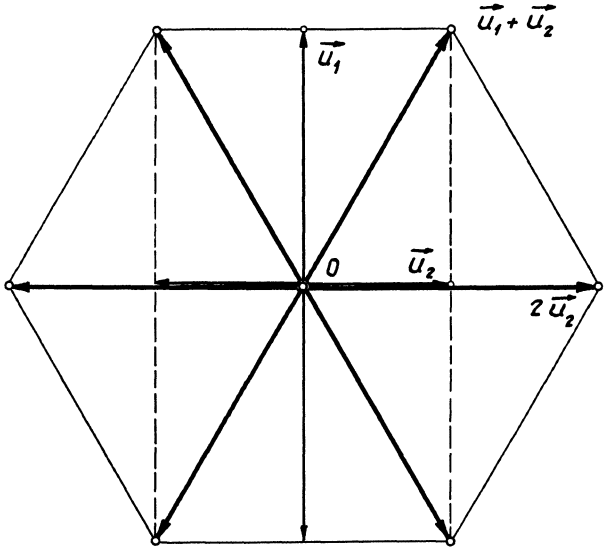
Λ_0 a pour racines: $\pm(\tau_2 - \tau_3)$, $\pm(\tau_3 - \tau_4)$, $\pm(\tau_2 - \tau_4)$ et est du type A_2.

$\Lambda \mid \Lambda_0$ est déterminée par

$$0, \quad \mu_1 = \tau_1, \quad \mu_2 = (\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/3$$

et admet les racines:

$$0, \pm\mu_1, \pm\mu_2, \pm\mu_1 \pm \mu_2, \pm 2\mu_2 .$$



5.7 *Sous-systèmes saturés de C_l et loi-quotient*

Soit $\tau_1, \ldots, \tau_l$ un repère orthonormal de R^l, et

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(C_l) = \{\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l\} \qquad 2l \text{ points}.$$

Les racines de C_l sont toutes les arêtes de $\mathscr{S}$, sans exception:

$$\Lambda = \{ \pm \tau_i \pm \tau_j,\ \pm 2\tau_i \mid i \neq j;\ i,j = 1, 2, \ldots, l \}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque, il suffit de se donner une partition $(p_0) \cup p_1 \cup \cdots \cup p_k$ p_i ayant r_i éléments, avec $r_0 \geqslant 0$; $r_1, \ldots, r_k > 0$.

On en déduit une partition de $\mathscr{S}$:

$$(P_0) = \{ \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0 \} \qquad \begin{matrix} P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \\ P_i' = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \end{matrix} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Les racines de Λ_0 sont toutes les arêtes de (P_0), P_1, P_1', ..., P_k, P_k'; le rang de Λ_0 est $l-k$, d'où $l-r=k$. Le supplémentaire R^k du support R^r de Λ_0 est engendré par les centres:

$$\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \ldots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha$$

et

$$\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{(0), \pm \mu_1, \ldots, \pm \mu_k\} \qquad (0 \text{ si } r_0 > 0).$$

PROPOSITION 5.8: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toutes les arêtes de $\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$, c'est à dire les $\pm\mu_i \pm \mu_j$, $\pm 2\mu_j$ avec en plus les $\pm\mu_j$ si $r_0 > 0$.*

5.8 *Sous-systèmes saturés de D_l et loi-quotient*

Soit $\tau_1, \ldots, \tau_l$ un repère orthonormal de R^l et

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(D_l) = \{ \pm \tau_1, \ldots, \pm \tau_l \} \quad 2l \text{ points}.$$

Les racines de D_l sont toutes les arêtes de $\mathscr{S}$, sauf les $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha) = 2\tau_\alpha$:

$$\Lambda = \{ \pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j;\ i,j = 1, \ldots, l \}.$$

Pour constituer un sous-système saturé Λ_0 quelconque, on se donne une partition

$$(p_0) \cup p_1 \cup \cdots \cup p_k \quad \text{de} \quad 1, 2, \ldots, l$$

p_i ayant r_i éléments: $r_0 \geqslant 0$; $r_1, \ldots, r_k > 0$. On en déduit une partition de $\mathscr{S}$:

$$(P_0) = \{ \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0 \} \qquad \begin{matrix} P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \\ P_i' = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \end{matrix} \quad i = 1, \ldots, k$$

P_0 étant vide si $p_0 = \emptyset$.

Les racines de Λ_0 sont toutes les arêtes des faces P_0, P_i, P_i', sauf les $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)$, $\forall \alpha \in p_0$.

Le rang de Λ_0 est $l-k$. Ici $R^{l-r} = R^k$ est engendré par les centres:

$$\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \ldots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha$$

$$\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{(0), \pm \mu_1, \ldots, \pm \mu_k\}.$$

PROPOSITION 5.9: *Les racines de* $\Lambda \mid \Lambda_0$ *sont les arêtes de* $\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$
a) si $r_0=0$: $\pm m_i \pm m_j$, et les $2\mu_j$ où $r_j>1$
b) si $r_0>0$: $\pm\mu_i \pm \mu_j$, $\pm\mu_j$, et les $\pm 2\mu_s$ où $r_s>1$ $(i\neq j;\ i,j=1,\ldots l)$.

§ 6. Loi-quotient lorsque le sous-système Λ_0 est de rang maximum

Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ ayant même rang l que L. Le but de ce paragraphe est de donner le principe de la construction de tous les tels Λ_0 contenus dans un système Λ donné.

Je me propose ensuite de donner la forme de la loi-quotient Λ/Λ_0 lorsque Λ est simple, classique (A_l, B_l, C_l, D_l).

Enfin, je crois utile d'étudier Λ/Λ_0 pour toutes les algèbres simples, le système Λ_0 étant minimal (de rang maximal l); il s'agit ici de l'étude des simplifiés de Λ. A tout simplifié de Λ, on peut associer un système de générateurs remarquables de R^l, permettant de donner à l'expression des racines une forme standard.

6.1 *Principe de la construction*

Soit:

1) $$\varphi_1, \ldots, \varphi_{l_1}; \varphi_{l_1+1}, \ldots, \varphi_{l_2}; \ldots; \varphi_{l_t+1}, \ldots, \varphi_{l_{t+1}}$$

une suite fondamentale de Λ, chaque suite partielle correspondant à une composante simple de Λ. Je construis les racines dominantes, respectivement:

2) $$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots, \quad \omega_{t+1}$$

puis la suite

3) $$\varphi_1 \cdots \varphi_{l_1} - \omega_1; \varphi_{l_1+1}, \ldots, \varphi_{l_2} - \omega_2; \ldots; \varphi_{l_t+1}, \ldots, \varphi_{l_{t+1}} - \omega_{t+1}.$$

En supprimant une racine quelconque dans chaque suite partielle de 3), on obtient une suite fondamentale d'un sous-système Λ_0 fermé de rang maximal.

On recommence sur la suite obtenue l'opération effectuée sur 1) etc, de toutes les façons possibles. Cela fournit tous les Λ_0 du type désiré, d'où possibilité d'étudier toutes les lois Λ/Λ_0.

Par ailleurs, à chaque tel Λ_0 est associée une partition:

4) $$\mathscr{S} = (\mathscr{S}_0) \cup \mathscr{S}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{S}_u$$

d'un système de racines secondaires $\mathscr{S}$ de Λ. Les centres des faces $\mathscr{S}_i$ sont tous en 0. En assimilant chaque $\mathscr{S}_i$ à un élément, on peut déduire de 4) la forme de la loi-quotient.

6.2 *Loi-quotient* Λ/Λ_0 *lorsque* Λ *est simple du type* A_l, B_l, C_l, D_l

ALGÈBRE A_l: Tout sous-système Λ_0 de rang l coïncide avec Λ.

ALGÈBRE B_l: Soit

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(B_l) = \{0, \pm\tau_1, \pm\tau_2, \ldots, \pm\tau_l\}$$

et

$$(p_0) \cup p_1 \cup \cdots p_k$$

une partition de $1, 2, \ldots, l$, p_i ayant r_i éléments, avec $r_0 \geqslant 0$, $r_1 > 0, \ldots, r_k > 0$. Les faces de Λ_0 sont:

$$P_0 = \{0, \pm\tau_a \mid \alpha \in P_0\},\ P_1 = \{\pm\tau_a \mid \alpha \in p_1\}, \ldots, P_k = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in P_k\}$$

Λ_0 est de type

$$B_{r_0} \times D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_k}$$

avec les racines

$$\Lambda_0\colon \pm\tau_i, \quad \pm\tau_i \pm \tau_j; \quad \pm\tau_i \pm \tau_j; \quad \ldots; \quad \pm\tau_i \pm \tau_j, \quad \begin{matrix} i,j \in p_0 \\ i \neq j \end{matrix}, \quad \begin{matrix} i,j \in p_1 \\ i \neq j \end{matrix} \cdots \begin{matrix} i,j \in p_k \\ i \neq j \end{matrix}.$$

Les classes de $\Lambda \bmod \Lambda_0$ sont les

$$\Lambda_{0\,i} = \{\pm\tau_k, \pm\tau_k \pm \tau_j \mid k \in p_i; j \in p_0\}$$
$$\Lambda_{i\,j} = \{\pm\tau_k \pm \tau_m \mid k \in p_i; m \in p_j\}$$

et la loi-quotient s'exprime par

$$2\Lambda_{i\,j} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h\,r} = \Lambda_{m\,r}$$
$$2\Lambda_{0\,i} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h'\,r=0} \qquad (m, h, h', r \text{ distincts})$$

où $\Lambda_{i\,j} = \Lambda_{j\,i}$.

ALGÈBRE C_l: ici

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(C_l) = \{\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l\}$$

et on prend une partition

$$p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_k \qquad (r_i \text{ éléments dans } p_i)$$

de $1, 2, \ldots, l$. Les faces de Λ_0 sont toutes de centre 0.

$$P_1 = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \ldots, P_k = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

Λ_0 est de type:

$$C_{r_1} \times \cdots \times C_{r_k}.$$

Les classes $\bmod \Lambda_0$ sont les

$$\Lambda_{m\,h} = \{\pm\tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \qquad \Lambda_{m\,h} = \Lambda_{h\,m}$$

avec les règles de calcul

$$2\Lambda_{m\,h} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h\,r} = \Lambda_{m\,r}$$
$$\Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h'\,r=0} \qquad (m, h, h', r, \text{distincts}).$$

ALGÈBRE D_l:

$$\mathscr{S} = (D_l) = \{\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l\}.$$

Si $p_1 \cup \cdots \cup p_k$ est une partition de $1, 2, \ldots, l$ où p_i a $r_i \geqslant 2$ éléments, on a les faces de Λ_0:

$$P_1 = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \ldots, P_k = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

Ici

$$\Lambda_0 = \{\pm\tau_i \pm \tau_j; \ldots; \pm\tau_i \pm \tau_j\}, \quad \begin{matrix} i,j \in p_1 \\ i \neq j \end{matrix} \cdots \begin{matrix} i,j \in p_k \\ i \neq j \end{matrix}$$

et

$$\Lambda_0 = D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_k}.$$

Les classes de $\Lambda \bmod \Lambda_0$ sont les

$$\Lambda_{mh} = \{\pm\tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \quad L_{mh} = L_{hm}$$

avec les règles:

$$2\Lambda_{mh} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{mh} + \Lambda_{hr} = \Lambda_{mr}$$
$$\Lambda_{mh} + \Lambda_{h'r} = 0 \qquad (m, h, h', r, \text{distincts}).$$

6.3 *Sous-systèmes Λ_0 minimaux de rang maximal*

6.3.1 SIMPLEXES DANS R^s

Prenons l'espace enclidien R^{s+1} pourvu d'un repère

1) $\varrho\tau'_1, \ldots, \varrho\tau'_{s+1}$ où $\tau'_1, \ldots, \tau'_{s+1}$ est orthonormal. Posons $\varepsilon = \tau'_1 + \cdots + \tau'_{s+1}$ et soit R^s le s-plan orthogonal à ε. En projetant les vecteurs 1) orthogonalement sur R^s, on obtient

2) $$\tau_1 = \varrho(\tau'_1 - \varepsilon/(s+1)), \ldots, \tau_{s+1} = \varrho(\tau'_{s+1} - \varepsilon/(s+1)). \qquad \varrho(\ldots)$$

Les vecteurs $\tau_1, \ldots, \tau_{s+1}$ forment un système de générateurs remarquables de R^s; on a:

a) $$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_{s+1} = 0$$

b) si $\sum_{i=1}^{s+1} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{s+1} y_i = 0$, on a $\left(\sum_{i=1}^{s+1} x_i\tau_i, \sum_{i=1}^{s+1} y_i\tau_i\right) = \varrho^2 \sum_{1}^{s+1} x_i y_i$

c) $$(\tau_i, \tau_i) = \varrho^2 s/(s+1); \quad (\tau_i, \tau_j) = -\varrho^2/(s+1)\,(i \neq j)$$
$$(\tau_i - \tau_j, \tau_i - \tau_j) = 2\varrho^2.$$

Les vecteurs $\tau_i - \tau_j$ forment le système des vecteurs-racines d'une algèbre simple A_s, de longeur $\varrho\sqrt{2}$. Les vecteurs $\tau_1, \ldots, \tau_{s+1}$ sont alors un système de racines secondaires de A_s.

6.3.2 LES SOUS-SYSTÈMES Λ_0 DE RANG MAXIMUM l DANS Λ, minimaux de cette espèce, c'est à dire les simplifiés de Λ, sont tous du type $A_{s_1} \oplus \cdots \oplus A_{s_q}$. Les vecteurs de Λ sont

a) les racines des $A_{s_1}, \ldots, A_{s_q}$

b) certaines combinaisons linéaires rationnelles de ces racines.

Lorsque $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i,s+1}$ est un système de racines secondaires de A_{s_i}, alors les racines du type a) s'écrivent:

a) $\tau_{1m}-\tau_{1m'}$; $\cdots$; $\tau_{qm}-\tau_{qm'}$ (racines de Λ_0)

Les autres racines de Λ sont certaines combinaisons linéaires des τ_{ij}, toujours de l'une des formes

$$2\tau, \quad \tau+\tau', \quad \tau+\tau'\pm\tau'', \quad \tau+\tau'+\tau''+\tau'''$$

comme nous allons nous en assurer. Ci-dessous, je démontre ce fait pour les systèmes simples Λ de l'un des types D_l, E_6, E_7, E_8, en donnant les expressions correspondant à chaque $\Lambda_0 \subset \Lambda$; le fait annoncé est ensuite directement vérifié pour B_l, C_l, F_4, G_2.

6.3.3 PRENONS:

$$\Lambda_0 = \{A_{s_1}, \ldots, A_{s_q}\}$$

les racines de A_{sj} étant les $\tau_{jm}-\tau_{jm'}$; les vecteurs-racines ont ici tous la même longueur $\sqrt{2}$ et $\varrho=1$.

On veut trouver tous les vecteurs du type

$$\omega = \sum_i x_{1i}\tau_{1i} + \cdots + \sum_i x_{qi}\tau_{qi} \quad \text{où} \quad \sum_i x_{1i} = 0, \ldots, \sum_i x_{qi} = 0$$

capables de former avec les $\tau_{jm}-\tau_{jm'}$ un système de vecteurs-racines d'un Λ.

On a:

$$(\omega, \omega) = 2, \qquad \frac{2(\tau_{1m}-\tau_{1m'}, \omega)}{(\omega, \omega)} \in \{0, \pm 1\}$$

d'où $x_{1m}-x_{1m'} \in \{0, \pm 1\}$. $x_{11}-x_{11}$, $x_{11}-x_{12}$, $x_{11}-x_{13}, \ldots, x_{11}-x_{1s_1+1}$ sont des entiers, ce qui implique $x_{11}=u_{11}/(s_1+1)$, $u_{11} \in \mathbf{Z}$; de même $x_{ij}=u_{ij}/(s_i+1)$, $u_{ij} \in \mathbf{Z}$.

$u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,s_1+1}$ sont des entiers dont les différences deux à deux ne peuvent prendre que l'une des valeurs $0, s_1+1, -s_1-1$.

Ils se partagent en deux classes d'entiers égaux à u_1, u_1+s_1+1 et

$$\omega = [u_1(\tau_{11}+\cdots+\tau_{1r_1}) + (u_1+s_1+1)(\tau_{1,r_1+1}+\cdots+\tau_{1,s_1+1})]/(s_1+1).$$
$$+\cdots$$

En exprimant que $\sum x_{1i}=0$, on obtient:

$$\omega = [(r_1-s_1-1)(\tau_{11}+\cdots+\tau_{1,r_1}) + r_1(\tau_{1,r_1+1}+\cdots+\tau_{1,s_1+1})]/(s_1+1).$$
$$+\cdots$$

Tenons compte de $\sum \tau_{1i}=0$:

$$\omega = -(\tau_{11}+\cdots+\tau_{1r_1}) - \cdots - (\tau_{q1}+\cdots+\tau_{qr_q}).$$

Enfin, tenant compte encore de $\sum_i \tau_{ji}=0$, on a:

$$\omega = \pm(\tau_{11}+\cdots+\tau_{1r_1}) \pm \cdots \pm (\tau_{q1}+\cdots+\tau_{qr_q}); \quad 2r_j \leqslant s_j+1.$$

Il reste à vérifier que $\sum r_j = 3$ ou 4. On peut, pour la racine ω considérée, remplacer certains systèmes $\tau_{i1}, \ldots, \tau_{i,\, s_i+1}$ par les opposés, d'où

$$\omega = (\tau_{11} + \cdots + \tau_{1\, r_1}) + \cdots + (\tau_{q\,1} + \cdots + \tau_{q\, r_q}) \qquad 2r_j \leqslant s_j + 1$$

$$\omega = -(\tau_{1,\, r_1+1} + \cdots + \tau_{1,\, s_1+1}) - \cdots - (\tau_{q,\, r_q+1} + \cdots + \tau_{q,\, s_q+1})$$

$$(\omega, \omega) = \frac{r_1(s_1 + 1 - r_1)}{s_1 + 1} + \cdots + \frac{r_q(s_q + 1 - r_q)}{s_q + 1}$$

$$(\omega, \omega) = \sum r_j - \sum \frac{r_j^2}{s_j + 1}.$$

En faisant usage de symétrie $S_{\tau_{im}} - \tau'_{im}$, on peut transformer les racines ω en

$$\omega' = (\tau_{1,\, r_1+1} + \cdots + \tau_{1,\, 2r_1+1}) + \cdots + (\tau_{q,\, r_q+1} + \cdots + \tau_{q,\, 2r_q+1}).$$

On supprime les termes pour lesquels $r_j = 0$. Alors

$$(\omega, \omega') = -\sum_j \frac{r_j^2}{s_j + 1}$$

$$(\omega, \omega) - (\omega, \omega') = \sum r_j.$$

Si $\omega' = -\omega$, on a

$$(\omega, \omega') = -(\omega, \omega) = -2 \quad \text{et} \quad \sum r_j = 4\,;$$

Si $\omega' \neq -\omega$, on a $(\omega, \omega') = -1$, et $\sum r_j = 3$.
Le fait annoncé est établi. Nous allons donner les expressions dans chaque cas.

6.3.4 SOUS-SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG MAXIMAL DES SYSTÈMES SIMPLES D_l, E_6, E_7, E_8

ALGÈBRE D_l: $\pm\tau_i \pm \tau_j (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l)$ étant les racines de D_l, on obtient tous les sous-systèmes désirés en prenant une solution (k, k') quelconque de l'équation

$$3k + 2k' = l \qquad K, K' \text{ entiers} \geqslant 0$$

et une partition de $1, 2, \ldots, l$ du type (k, k') notée:

$$11, 12, 13; 21, 22, 23; \ldots; k1, k2, k3; 1'1, 1'2; \ldots; k'1, k'2.$$

Les racines secondaires du sous-système minimal de type (K, K') *sont alors:*

$$\begin{cases} \mu_{p\,1} = (\tau_{p\,1} + \tau_{p\,2} + \tau_{p\,3})/2 \\ \mu_{p\,2} = \tau_{p\,1} - \mu_{p\,1} \\ \mu_{p\,3} = \tau_{p\,2} - \mu_{p\,1} \\ \mu_{p\,4} = \tau_{p\,3} - \mu_{p\,1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_{q'\,1} = (\tau_{q'\,1} + \tau_{q'\,2})/2 \\ \mu_{q'\,2} = -\mu_{q'\,1} \\ \mu_{q'\,3} = \tau_{q'\,1} - \mu_{q'\,1} \\ \mu_{q'\,4} = \tau_{q'\,2} - \mu_{q'\,1} \end{cases}.$$

$$p = 1, \ldots, k \qquad q' = 1, \ldots, k'$$

On en déduit les racines de D_l sous la forme:

$$\begin{aligned} &\mu_{p\,i} - \mu_{p\,j},\ \mu_{q'\,i} - \mu_{q'\,j} && \text{(système } \Lambda_0\text{)} \\ &\mu_{p\,i} + \mu_{p\,j} + \mu_{r\,m} + \mu_{r\,n} && K A_3 \times 2K' A_1 \subset D_l. \\ &\mu_{p\,i} + \mu_{p\,j} + \mu_{r'\,m} + \mu_{r'\,n} && \\ &\mu_{q'\,i} + \mu_{q'\,j} + \mu_{r'\,m} + \mu_{r'\,n} && \mu_{q'\,i} + \mu_{q'\,j} \neq 0 \end{aligned}$$

Notons ici que les racines secondaires de D_l: $\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l$ s'écrivent:

$$\mu_{p\,i} + \mu_{p\,j}, \quad \text{et} \quad \mu_{q'\,i} + \mu_{q'\,j}$$

cette dernière devant être $\neq 0$.

ALGÈBRE E_6: Les racines sont $\tau_i - \tau_j$, $\pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k)$, $\pm\sum_i \tau_i$ (i, j, k distincts $\in\{1, 2, \ldots, 6\}$) avec $-3\varepsilon = \sum \tau_i$. On peut poser:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = \tau_1 - \tau_2 && \varphi_4 = \tau_4 - \tau_5 \\ &\varphi_2 = \tau_2 - \tau_3 && \varphi_5 = \tau_5 - \tau_6 \\ &\varphi_3 = \tau_3 - \tau_4 && \varphi_6 = \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 \qquad \text{(suite fondamentale).} \end{aligned}$$

La racine dominante est ici:

$$-3\varepsilon = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_6.$$

Par suppression de φ_3 dans la figure

$$\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ 3\varepsilon \end{matrix}$$

on obtient une suite fondamentale d'un sous-système Λ_0 du type $3A_2$

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3; \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6; \quad \tau_4 + \tau_5 + \tau_6, \quad 3\varepsilon.$$

Posant:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} && \mu_4 = -\tau_4 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} && \mu_7 = -\varepsilon - \tfrac{2}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \\ &\mu_2 = \tau_2 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} && \mu_5 = -\tau_5 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} && \mu_8 = -\varepsilon + \tfrac{1}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \\ &\mu_3 = \tau_3 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} && \mu_6 = -\tau_6 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} && \mu_9 = 2\varepsilon + \tfrac{1}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \end{aligned}$$

puis $\alpha, \alpha', \ldots \in\{1, 2, 3\}$ $\beta, \beta', \ldots \in\{4, 5, 6\}$ $\gamma, \gamma', \ldots \in\{7, 8, 9\}$,

on peut écrire ainsi les racines de E_6

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \end{matrix} \qquad 3A_2 \subset E_6 .$$

$E_6/3A_2$ est cyclique d'ordre 3.

Notons que les racines secondaires $-\tau_i+\varepsilon, -\tau_i-2\varepsilon, \tau_i+\tau_j+\varepsilon$ deviennent:

$$\mu_\beta - \mu_\gamma; \quad \mu_\gamma - \mu_\alpha; \quad \mu_\alpha - \mu_\beta .$$

Par suppression de φ_6, on obtient une suite fondamentale de $A_5+A_1 \subset E_6$

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad -3\varepsilon .$$

D'où les racines secondaires de A_5+A_1:

$$\mu_i = \tau_i + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \quad \mu_7 = 3\varepsilon/2, \quad \mu_8 = -3\varepsilon/2 .$$

Posant $\alpha, \alpha', \ldots \in \{1, 2, \ldots, 6\}$; $\beta, \beta', \ldots \in \{7, 8\}$ on écrit les racines de E_6:

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \mu_\alpha + \mu_{\alpha'} + \mu_{\alpha''} + \mu_\beta \end{matrix} \qquad A_5 + A_1 \subset E_6 .$$

$E_6/(A_5+A_1)$ est cyclique d'ordre 2.

ALGÈBRE E_7: Les racines sont $\tau_i-\tau_j, \tau_i+\tau_j+\tau_k+\tau_m$ où i, j, k, m sont distincts, arbitraires dans $\{1, \ldots, 8\}$ avec $\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_8=0$. On peut poser

$$\varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2 \quad \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3 \quad \varphi_3 = -\tau_3 + \tau_4 \quad \varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5$$
$$\varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6 \quad \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7 \quad \varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 .$$

La racine dominante est ici:

$$\omega = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 3\varphi_5 + 2\varphi_6 + 2\varphi_7 = \tau_7 - \tau_8 .$$

Dans la figure $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_7, -\omega$, on peut procéder par suppression de divers éléments.

$A_7 \subset E_7$ est obtenue par suppression de φ_7, d'où la suite simple

$$-\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \ldots, \quad -\tau_7 + \tau_8 .$$

Les racines de E_7 correspondant à $A_7 \subset E_7$ sont ici précisément les expressions déjà données

$$\begin{matrix} \tau_i - \tau_j & i \neq j;\ i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\} \\ \tau_i + \tau_j + \tau_k + \tau_m & i, j, k, m \text{ distincts} \in \{1, 2, \ldots, 8\} \end{matrix}$$

les racines secondaires sont les $\pm(\tau_i+\tau_j)$.

E_7/A_7 est cyclique d'ordre 2.

Par suppression de φ_3, on obtient:

$$A_2 + A_5 \subset E_7$$

$$\varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2 \quad \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3 \quad \varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$
$$\varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5 \quad \varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6 \quad \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7 \quad -\omega = -\tau_7 + \tau_8$$

d'où:

$$\mu_1 = -\tau_1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_2 = -\tau_2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$
$$\mu_3 = -\tau_3 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_4 = -2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$
$$\mu_5 = \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_6 = \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$
$$\mu_7 = \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_8 = \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$
$$\mu_9 = \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

Si $\alpha, \alpha', \ldots, \in \{1, 2, 3\}$, $\beta, \beta', \ldots, \in \{4, 5, \ldots, 9\}$,
les racines de E_7 s'écrivent

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) \end{matrix} \qquad A_2 + A_5 \subset E_7 .$$

$E_7/(A_2+A_5)$ est cyclique d'ordre 3.

Par suppression de φ_2, on obtient un A_1+D_6, qui fournit A_1+2A_3 et un $7A_1$

$$A_1 + 2A_3 \subset E_7 .$$

La suite fondamentale est

$$-\tau_1 + \tau_2; \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_4 + \tau_5, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4;$$
$$\tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6, \quad -\tau_6 + \tau_7, \quad -\tau_7 + \tau_8$$

d'où les racines secondaires de A_1+2A_3:

$$\mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 \qquad \mu_2 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2$$
$$\mu_3 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_4 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_5 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_6 = -(\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - 3(\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_7 = (\tau_1 + \tau_2)/4 - (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 \qquad \mu_8 = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_6$$
$$\mu_9 = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_7 \qquad \mu_{10} = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_8 .$$

Les racines de E_7 s'écrivent alors, avec

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2,\}; \ \beta, \beta' \in \{3, 4, 5, 6\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{7, 8, 9, 10\}$$

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}, \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \\ \mu_\beta + \mu_{\beta'} + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} \end{matrix} \qquad A_1 + 2A_3 \subset E_7 .$$

La loi $E_7/(A_1+2A_3)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$$

$7A_1 \subset E_7$ La suite fondamentale est

$$-\tau_1+\tau_2,\quad -\tau_3+\tau_4,\quad -\tau_5+\tau_6,\quad -\tau_7+\tau_8;$$
$$\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4,\quad \tau_1+\tau_2+\tau_5+\tau_6,\quad \tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6$$

d'où les racines secondaires de $7A_1$:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \tau_1-(\tau_1+\tau_2)/2 & \mu_2 &= \tau_2-(\tau_1+\tau_2)/2\\
\mu_3 &= \tau_3-(\tau_3+\tau_4)/2 & \mu_4 &= \tau_4-(\tau_3+\tau_4)/2\\
\mu_5 &= \tau_5-(\tau_5+\tau_6)/2 & \mu_6 &= \tau_6-(\tau_5+\tau_6)/2\\
\mu_7 &= \tau_7-(\tau_7+\tau_8)/2 & \mu_8 &= \tau_8-(\tau_7+\tau_8)/2\\
\mu_9 &= (\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)/2 & \mu_{10} &= -(\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)/2\\
\mu_{11} &= (\tau_1+\tau_2+\tau_5+\tau_6)/2 & \mu_{12} &= -(\tau_1+\tau_2+\tau_5+\tau_6)/2\\
\mu_{13} &= (\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6)/2 & \mu_{14} &= -(\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6)/2
\end{aligned}$$

$$\alpha,\alpha'\in\{1,2\};\quad \beta,\beta'\in\{3,4\};\quad \gamma,\gamma'\in\{5,6\};\quad \delta,\delta'\in\{7,8\}$$
$$\varepsilon,\varepsilon'\in\{9,10\};\quad \tau,\tau'\in\{11,12\};\quad \nu,\nu'\in\{13,14\}.$$

Les racines de E_7 prennent la forme

$$\mu_\alpha-\mu_{\alpha'};\quad \mu_\beta-\mu_{\beta'};\quad \mu_\gamma-\mu_{\gamma'};\quad \mu_\delta-\mu_{\delta'}$$
$$\mu_\varepsilon-\mu_{\varepsilon'};\quad \mu_\tau-\mu_{\tau'};\quad \mu_\nu-\mu_{\nu'} \qquad 7A_1\subset E_7.$$
$$\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma+\mu_\delta$$
$$\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\tau+\mu_\nu$$
$$\mu_\alpha+\mu_\gamma+\mu_\varepsilon+\mu_\nu$$
$$\mu_\alpha+\mu_\delta+\mu_\varepsilon+\mu_\tau$$
$$\mu_\beta+\mu_\gamma+\mu_\varepsilon+\mu_\tau$$
$$\mu_\gamma+\mu_\delta+\mu_\tau+\mu_\nu$$
$$\mu_\beta+\mu_\delta+\mu_\varepsilon+\mu_\nu$$

$E_7/7A_1$ est un groupe, produit direct des trois sous-groupes

$$\{\Lambda_0,\ \mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma+\mu_\delta\}$$
$$\{\Lambda_0,\ \mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\tau+\mu_\nu\}$$
$$\{\Lambda_0,\ \mu_\alpha+\mu_\gamma+\mu_\varepsilon+\mu_\nu\}.$$

ALGÈBRE E_8: On prend $\tau_1,\ldots,\tau_9$ dans R^8 avec $\sum\tau_i=0$;

Les racines sont:

$$\tau_i - \tau_j, \quad \pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k) \qquad i, j, k \text{ distincts}, \quad i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 9\}.$$

Une suite fondamentale est

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_2 - \tau_3 & \varphi_4 &= \tau_5 - \tau_6 & \varphi_7 &= \tau_8 - \tau_9 \\ \varphi_2 &= \tau_3 - \tau_4 & \varphi_5 &= \tau_6 - \tau_7 & \varphi_8 &= \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \\ \varphi_3 &= \tau_4 - \tau_5 & \varphi_6 &= \tau_7 - \tau_8 \end{aligned}$$

avec la racine dominante:

$$= 2\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3 + 5\varphi_4 + 6\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_7 + 3\varphi_8 = -\tau_1 + \tau_2$$

d'où la figure initiale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9.$$

En appliquant le processus connu, on obtient les sous-systèmes simplifiés Λ_0 et les Λ/Λ_0. On constate que deux sous-systèmes Λ_0 de même type sont conjugués.

$2A_1 + 2A_3 \subset E_8$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 & \mu_3 &= (\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\ \mu_2 &= (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 & \mu_4 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\ \mu_5 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_9 &= (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 + 3\tau_9/4 \\ \mu_6 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{10} &= \tau_6 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\ \mu_7 &= \tau_3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{11} &= \tau_7 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\ \mu_8 &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 + 3\tau_9/4 & \mu_{12} &= \tau_8 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4. \end{aligned}$$

Posons

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma', \ldots, \in \{5, 6, 7, 8\}, \quad \delta, \delta', \ldots, \in \{9, 10, 11, 12\}.$$

Les racines de E_8 s'écrivent alors:

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \quad \text{racines de } \Lambda_0.$$

$$\begin{aligned} &\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} && \pm(\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta) \\ &\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_{\delta'} && \pm(\mu_\beta + \mu_\gamma - \mu_\delta) \\ &\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'} \end{aligned}$$

$E_8/(2A_1+2A_3)$ a huit classes qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes:

$$\{A_0, (\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta), \quad (\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'}), \quad (-\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta)\}$$
$$\{A_0, (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'})\}.$$

Le premier est cyclique d'ordre 4.

$A_1 + A_2 + A_5 \subset E_8$

La suite fondamentale:

$$\tau_1 - \tau_2; \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9;$$
$$\tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

conduit aux expressions:

$$\mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 \qquad \mu_3 = (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_8 - (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_2 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 \qquad \mu_4 = (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_9 - (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_5 = -2(\tau_1 + \tau_2)/3 - (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_6 = (\tau_1 + \tau_2)/6 + \tau_3 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \qquad \mu_9 = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_6 + (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_7 = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_4 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \qquad \mu_{10} = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_7 + (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_8 = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_5 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \qquad \mu_{11} = (\tau_1 + \tau_2)/2 - 2(\tau_8 + \tau_9)/3.$$

Avec $\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}$; $\beta, \beta', \ldots, \in \{3, 4, 5\}$; $\gamma, \gamma', \ldots, \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ les racines de E_8 sont:

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad \text{racines de } A_0.$$
$$\pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma)$$
$$\pm(-\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'})$$
$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''}$$

$E_8/(A_1+A_2+A_5)$ est cyclique d'ordre 6, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma.$$

$A_1 + A_7 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2; \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9$$

conduit à:

$$\mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 \qquad \mu_3 = \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_2 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 \qquad \mu_4 = \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_5 = \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_8 = \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_6 = \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_9 = \tau_9 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_7 = \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_{10} = -3(\tau_1 + \tau_2)/4$$

On pose:

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \gamma, \gamma', \ldots, \in \{3, 4, \ldots, 10\}.$$

Les racines de E_8 s'écrivent alors:

$$\begin{array}{ll} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} & \text{racines de } \Lambda_0. \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}) & \\ \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''} + \mu_{\gamma'''} & \end{array}$$

$E_8/(A_1 + A_7)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\gamma.$$

$4A_2 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3; \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6; \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

donne

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_1 & \mu_4 = -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_4 \\ \mu_2 = -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_2 & \mu_5 = -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_5 \\ \mu_3 = -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_3 & \mu_6 = -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_6 \\ \mu_7 = -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_7 & \mu_{10} = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 - (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 \\ \mu_8 = -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_8 & \mu_{11} = (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_9 = -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_9 & \mu_{12} = (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 - (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3. \end{array}$$

Avec

$$\begin{array}{ll} \alpha, \alpha', \ldots \in \{1, 2, 3\}; & \beta, \beta', \ldots \in \{4, 5, 6\} \\ \gamma, \gamma', \ldots \in \{7, 8, 9\}; & \delta, \delta', \ldots \in \{10, 11, 12\}. \end{array}$$

Les racines de E_8 s'écrivent:

$$\begin{array}{lll} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} & \text{racines de } \Lambda_0 & \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) & & \\ \pm(\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta) & & \\ \pm(\mu_\alpha - \mu_\beta + \mu_\delta) & & 4A_2 \subset E_8. \\ \pm(\mu_\beta - \mu_\gamma + \mu_\delta) & & \end{array}$$

$E_8/4A_2$ est un groupe d'ordre 9, produit direct des sous-groupes (cycliques d'ordre 3)

$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma, -\mu_\alpha - \mu_\beta - \mu_\gamma\}$$
$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta, -\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta\}.$$

$2A_4 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2,\quad \tau_2 - \tau_3,\quad \tau_3 - \tau_4,\quad \tau_4 - \tau_5;\quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9,\quad \tau_6 - \tau_7,\quad \tau_7 - \tau_8,\quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit à

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \tau_1 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_6 &= -3(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5\\
\mu_2 &= \tau_2 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_7 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_6\\
\mu_3 &= \tau_3 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_8 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_7\\
\mu_4 &= \tau_4 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_9 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_8\\
\mu_5 &= \tau_5 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_{10} &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_9
\end{aligned}$$

$\alpha, \alpha', \ldots \in \{1, 2, \ldots, 5\}$; $\quad \beta, \beta', \ldots \in \{6, 7, \ldots, 10\}$

et les racines de E_8 sont

$$\begin{array}{ll}
\mu_\alpha - \mu_{\alpha'};\quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} & \text{racines de } A_0\\
\pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) & \\
\pm(\mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta) & 2A_4 \subset E_8.
\end{array}$$

$E_8/2A_4$ est un groupe cyclique d'ordre 5.

$A_8 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2,\quad \tau_2 - \tau_3, \ldots,\quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit aux expressions connues:

$$\begin{array}{ll}
\tau_i - \tau_j & \\
\pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k) & \text{racines de } A_0.
\end{array}$$

E_8/A_8 est un groupe cyclique d'ordre 3.

$8A_1 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2;\quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9;\quad \tau_3 - \tau_4;\quad \tau_3 + \tau_4 + \tau_9;\quad \tau_5 - \tau_6;\quad \tau_5 + \tau_6 + \tau_9;\quad \tau_7 - \tau_8;\quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

conduit aux expressions

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2\\
\mu_2 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2\\
\mu_5 &= \tau_5 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_7 &= \tau_7 - (\tau_7 + \tau_8)/2\\
\mu_6 &= \tau_6 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_8 &= \tau_8 - (\tau_7 + \tau_8)/2\\
\mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{11} &= (\tau_3 + \tau_4)/2 + (\tau_9)/2\\
\mu_{10} &= -(\tau_1 + \tau_2)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{12} &= -(\tau_3 + \tau_4)/2 - (\tau_9)/2\\
\mu_{13} &= (\tau_5 + \tau_6)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{15} &= (\tau_7 + \tau_8)/2 + (\tau_9)/2\\
\mu_{14} &= -(\tau_5 + \tau_6)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{16} &= -(\tau_7 + \tau_8)/2 - (\tau_9)/2.
\end{aligned}$$

Les racines de E_8 s'écrivent, avec

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{5, 6\}; \quad \delta, \delta' \in \{7, 8\}$$
$$\lambda, \lambda' \in \{9, 10\}; \quad \mu, \mu' \in \{11, 12\}; \quad \nu, \nu' \in \{13, 14\}; \quad \varrho, \varrho' \in \{15, 16\}$$
$$\mu_\varepsilon - \mu_{\varepsilon'} \quad \varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \varrho\}\ \varepsilon' = -\varepsilon$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho \quad \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu$$
$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\nu \quad \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\varrho$$
$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\mu \quad \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\nu + \mu_\varrho$$
$$\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\lambda \quad \mu_\alpha + \mu_\mu + \mu_\nu + \mu_\varrho$$
$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\mu \quad \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\nu + \mu_\varrho$$
$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\nu \quad \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\mu + \mu_\varrho$$
$$\mu_\alpha + \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\varrho \quad \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\mu + \mu_\nu$$

$$8A_1 \subset E_8.$$

$E_8/8A_1$ n'est pas un groupe, car

$$(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho) + (\mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu)$$

n'est pas définie.

6.3.5 Systèmes minimaux de rang maximal des systèmes simples B_l, C_l, F_4

Algèbre B_l: Si $\pm\tau_i$, $\pm\tau_i \pm \tau_j$ sont les racines de B_l, on a des sous-algèbres semi-simples minimales de rang l de deux types:

a) (k, k') solution de $3k+2k'=l$

b) (k, k') solution de $3k+2k'=l-1$.

Dans le premier cas, on a un sous-système $kA_3+k'2A_1=kD_3+k'D_2$, comme en 6.3.4 pour D_l;
les racines secondaires sont:

$$\mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$
$$\mu_{p2} = \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'2} = -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$
$$\mu_{p3} = \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$
$$\mu_{p4} = \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$
$$p = 1, 2, \ldots, k \qquad q' = 1, 2, \ldots, k'.$$

Les racines de B_l s'écrivent:

$\mu_{pi} - \mu_{pj}$; $\mu_{q'i} - \mu_{q'j}$	racines de $kD_3 + k'D_2$
$i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ $i, j \in \{1, 2\}$ ou $i, j \in \{3, 4\}$	
$\mu_{pi} + \mu_{pj}$ $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$	type $\pm\tau_{p1}, \pm\tau_{p2}, \pm\tau_{p3}$
$p = 1, 2, \ldots, k$	

$\mu_{q'i} + \mu_{q'j} \quad i \neq j$ type $\pm \tau_{q'1}, \pm \tau_{q'2}$

$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} \quad i \neq j,\ m \neq n$ type $\pm \tau_{pi} \pm \tau_{rj}$

$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n}$ type $\pm \tau_{pi} \pm \tau_{r'j}$

$\mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n}$ type $\pm \tau_{q'i} \pm \tau_{r'j}$.

On a la classe Λ_0 et $k+k'$ classes génératrices

$$\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k, \quad \Lambda_{k+1}, \ldots, \Lambda_{k+k'} \quad \Lambda_p = \{\mu_{pi} + \mu_{pj}\}, \quad \Lambda_{q'} = \{\mu_{q'i} + \mu_{q'j}\}$$

Dans le deuxième cas, on a un sous-système

$$k D_3 + k' D_2 + B_1, \text{ avec les racines secondaires:}$$

$$\mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \qquad \mu_{r''1} = \tau_l/2$$

$$\mu_{p2} = \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'2} = -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \qquad \mu_{r''2} = -\tau_l/2$$

$$\mu_{p3} = \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$

$$\mu_{p4} = \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \qquad \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$

Les racines de B_l sont

$$\mu_{pi} - \mu_{pj}; \quad \mu_{q'i} - \mu_{q'j}; \quad \mu_{r''1} - \mu_{r''2} = \pm 2\mu_{r''1}$$

$$\mu_{pi} + \mu_{pj}; \quad \mu_{q'i} + \mu_{q'j}$$

$$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} \qquad \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n}$$

$$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} \qquad \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + 2\mu_{r''m}$$

$$\mu_{pi} + \mu_{pj} + 2\mu_{r''m}$$

ALGÈBRE C_l: Il y a un seul sous-système semi-simple minimal de rang l: $lA_1 \subset C_l$. Les racines étant:

$$\pm 2\tau_i, \qquad \pm \tau_i \pm \tau_j$$

on prend $2l$ vecteurs:

$$\mu_1, \mu_2; \mu_3, \mu_4; \ldots; \mu_{2l-1}, \mu_{2l} \quad \text{où} \quad \mu_{2p-1} = \tau_p, \quad \mu_{2p} = -\tau_p.$$

Les racines de C_l sont les

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'} \quad \alpha, \alpha' \in \{2p-1, 2p\} \qquad \text{racines de } \Lambda_0.$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta$$

ALGÈBRE F_4: Les racines étant: $\pm\tau_i, \pm\tau_i \pm \tau_j; \frac{1}{2}(\pm\tau_1 \pm \tau_2 \pm \tau_3 \pm \tau_4)$ où $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a une suite fondamentale complétée

$$\tau_1, \quad \tfrac{1}{2}(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4), \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4.$$

On en déduit

$$4A_1 \subset F_4$$

$$-\tau_1 + \tau_2, \quad +\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad \tau_3 + \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $4A_1$:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\
\mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\
\mu_5 &= (\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_7 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\
\mu_6 &= -(\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_8 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2 .
\end{aligned}$$

Les racines de F_4 s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
&\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \\
&\mu_\alpha + \mu_\beta, \quad \mu_\beta + \mu_\gamma, \quad \mu_\alpha + \mu_\gamma \\
&\mu_\beta + \mu_\delta, \quad \mu_\alpha + \mu_\delta, \quad \mu_\gamma + \mu_\delta \\
&\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta .
\end{aligned}$$

Il y a 8 classes, toutes d'ordre 2 (sauf la classe nulle Λ_0), qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes

$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta\}, \quad \{\Lambda_0, \mu_\gamma + \mu_\delta\}, \quad \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\gamma\} .$$

$A_1 + A_3 \subset F_4$

La suite fondamentale est:

$$\frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}; \quad \tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $A_1 + A_3$:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= (\tau_1 + \tau_4)/4 - (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_4 &= -\tau_2 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\
\mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_5 &= -\tau_3 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\
\mu_3 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_6 &= \tau_4 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 .
\end{aligned}$$

Les racines de F_4 s'écrivent:

$$\begin{aligned}
&\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \qquad \alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, \ldots, 6\} . \\
&\pm(\mu_\alpha + \mu_\beta) \\
&\begin{cases} 2\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'} \\ \mu_\beta + \mu_{\beta'} \end{cases}
\end{aligned}$$

$F_4/(A_1 + A_3)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur $\mu_\alpha + \mu_\beta$.

$2A_2 \subset F_4$

La suite fondamentale est:

$$\tau_1, \quad \frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $2A_2$:

$$\mu_1 = \tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 \qquad \mu_4 = (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_2 - \tau_4/3$$
$$\mu_2 = -\tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 \qquad \mu_5 = (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_3 - \tau_4/3$$
$$\mu_3 = 2\tau_4/6 - 2(\tau_2 + \tau_3)/6 \qquad \mu_6 = (\tau_2 + \tau_3)/3 + 2\tau_4/3 .$$

Les racines de F_4 ont pour expressions:

$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}$; $\mu_\beta - \mu_{\beta'}$	racines de Λ_0
$\mu_\alpha + \mu_\beta$	$\alpha, \alpha' = 1, 2, 3$
$\mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta$	$\beta, \beta' = 4, 5, 6$.

$F_4/2A_2$ est un groupe cyclique d'ordre 3.

6.3.6 SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG 2 DANS G_2

Les racines sont: $\pm\tau_i$, $\tau_i - \tau_j$, avec $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$. Une suite fondamentale complétée est:

$$\tau_1, \quad -\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3 \quad \text{dont on tire}$$
$$-\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_1 + \tau_2 : A_2 \subset G_2$$

avec les racines secondaires:

$$\mu_1 = \tau_1 , \quad \mu_2 = \tau_2 , \quad \mu_3 = \tau_3 .$$

Les racines de G_2 sont ici:

$$\mu_i - \mu_j \quad \text{et} \quad \pm\mu_i$$

G_2/A_2 est cyclique d'ordre 3.

On obtient aussi:

$$-\tau_2 + \tau_3, \tau_1 \qquad A_1 + A_1 \subset G_2$$

d'où les racines secondaires

$$\mu_1 = \tau_2 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_3 = \tau_1/2 \quad \mu_2 = \tau_3 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_4 = -\tau_1/2$$

et les racines de G_2

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}$$
$$\mu_\alpha + \mu_\beta , \quad \mu_\alpha + 3\mu_\beta$$

$G_2/2A_1$ est cyclique d'ordre 2.

§ 7. Decomposition d'algèbres de Lie semi-simples

7.1 *Sous-algèbre* $\mathfrak{g}_0$ *associée à un sous-système fermé* Λ

Soient

$\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps **K**(§ 1)

Λ le système des racines de $\mathfrak{g}$ sur une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, avec
$\Lambda' = \Lambda - \{0\}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\Lambda' \alpha \in} \mathbf{K} e_\alpha$$

la décomposition de Cartan associée à $\mathfrak{h}$,

Λ_0 un sous-système fermé de Λ:

1) $$\Lambda_0 = -\Lambda_0; \quad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$$

et

2) $$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'_0} \mathbf{K} e_\alpha$$

le sous-espace de $\mathfrak{g}$ associé à Λ_0. Les relations 1) impliquent que $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre réductive dont le centre est

$$\mathfrak{C} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Lambda'_0\}$$

Ainsi ad h: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
$x \mapsto [h, x]$
où $h \in \mathfrak{G}$, est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{g}$. Cela signifie que $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}_0$-module complètement réductible.

Par ailleurs, lorsque Λ_0 est de rang maximum l, $\mathfrak{G} = \{0\}$, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ est semi-simple.

Les résultats des paragraphes précédents permettent d'étudier *l'insertion* de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$.

7.2 *Somme directe associée à une partition de Λ mod Λ_0*

Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ, et

3) $$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ en classes mod Λ_0 (§ 2). On a

4) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

où $\mathfrak{g}_0$ est donné par 2) et où

$$\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{K} e_\alpha \quad (i \geqslant 1).$$

Le but de ce paragraphe 7 est l'étude des propriétés de la somme directe 4) associée à 3).

Je pose

$$\Lambda_0 = \{0, \pm \mu_{0\,1}, \ldots, \pm \mu_{0\,n_0}\}$$
$$\Lambda_i = \{\mu_{i\,1}, \ldots, \mu_{i\,n_i}\} \quad (i \geqslant 1).$$

De plus, je vais désigner par $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les $[g_i, g_j]$, où g_i, g_j décrivent $\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j$ respectivement.
$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$ est engendré par les $[e_{\mu_{i\,m}}, e_{\mu_{j\,m'}}]$ si $i \geqslant 1, j \geqslant 1$.

PROPOSITION 7.1: *Les sous-espaces* $\mathfrak{g}_i$ $(i \geqslant 1)$ *sont des* $\mathfrak{g}_0$ *modules irréductibles et* $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$

$$(\Lambda_0 + \Lambda_i) \cap \Lambda \subset \Lambda_i \quad \text{implique}$$
$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$$

ce qui prouve que $\mathfrak{g}_i$ est un $\mathfrak{g}_0$-module. Maintenant:

LEMME 7.1: *Tout sous-espace* $H \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$ *stable pour* $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$ *est de la forme* $\sum k e_\alpha$, où $\alpha \in L \subset \Lambda'$.

Deux racines distinctes $\alpha, \beta \in \Lambda'$ étant données, on peut trouver $z \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha(z) = 1, \beta(z) = 0$. Soit alors

$$x = k_\alpha e_\alpha + k_{\alpha'} e_{\alpha'} + \cdots + k_{\alpha(p)} e_{\alpha(p)} \in H$$
$$k_\alpha k_{\alpha'} \cdots k_{\alpha(p)} \neq 0.$$

On prend un $z \in \mathfrak{h}$ associé à $\beta = \alpha'$, d'où

$$x' = k_\alpha e_\alpha + k_{\alpha''} e_{\alpha''} + \cdots + k_{\alpha(p)} e_{\alpha(p)} \in H$$

etc. On obtient finalement $k_\alpha e_\alpha \in H$, d'où $K e_\alpha \subset H$, et le lemme est établi.

Soit maintenant H un $\mathfrak{g}_0$-module non trivial, avec $H \subset \mathfrak{g}_i$. D'après $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ et le lemme 7.1, on a

$$H = K e_{\mu_{i+1}} \oplus \cdots \oplus K e_{\mu_{i\,v_i}} \qquad v_i \leqslant n_i$$

avec de bonnes notations. Comme Λ_i est Λ_0-connexe, on a nécessairement $e_{\mu_{i\,t}} \in H$, $\forall t \in \{1, \ldots, n_i\}$, ce qui implique $H = \mathfrak{g}_i$.

Les $\mathfrak{g}_0$-modules $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_s$ sont bien irréductibles.

On peut encore écrire:

$$[\mathfrak{g}_0 [\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_i]] \subseteq [[\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_0] \mathfrak{g}_i] + [\mathfrak{g}_0 [\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_i]]$$
$$\subseteq |\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_i| \subset \mathfrak{g}_i$$

et $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i]$ est un $\mathfrak{g}_0$-module non trivial dans $\mathfrak{g}_i$ qui est irréductible. Alors:

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i.$$

PROPOSITION 7.2: *Soient* $i, j \geqslant 1$: *on a* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ *ou bien il existe* $k \in \{0, 1, \ldots, s\}$ *tels que* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_k$; *lorsque* $k \neq 0$, *on a* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$.

Si

$$(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \emptyset, \text{ on a } [e_{\mu_{i\,m}}, e_{\mu_{j\,m'}}] = 0, \quad \forall m, m' \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0.$$

Supposons $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$; il existe k avec $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$, d'où $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_k$.

Or

$$[\mathfrak{g}_0[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]] \subseteq [[\mathfrak{g}_0\,\mathfrak{g}_i]\,\mathfrak{g}_j] + [\mathfrak{g}_j[\mathfrak{g}_0\,\mathfrak{g}_j]] \subseteq [\mathfrak{g}_i\,\mathfrak{g}_j].$$

Ainsi $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$ est un $\mathfrak{g}_0$-module non trivial, contenu dans $\mathfrak{g}_k$. Si $k \neq 0$, $\mathfrak{g}_k$ est irréductible, et $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$.

PROPOSITION 7.3: *Pour tout* $i \in I = \{0, 1, \ldots, s\}$ *il existe* $i' \in I$ *tel que* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subseteq \mathfrak{g}_0$.

Soit Λ_i; il existe i' tel que $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$ (§ 3) ce qui entraine $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subseteq \mathfrak{g}_0$. Il faut noter que le cas $i = i'$ n'est pas exclu.

Il convient de rassembler les résultats du présent numéro:

THÉORÈME 7.1: *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple sur le corps* $\mathbf{K}$ (§ 1), Λ *le système des racines de* $\mathfrak{g}$ *sur une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$,

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ *en classes* mod Λ_0 *où* Λ_0 *est un sous-système fermé, et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

la somme directe associée, où

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda_0} \mathbf{K} e_\alpha \qquad \mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{K} e_\alpha \quad (i \geqslant 1).$$

Alors $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_s$ *sont des* $\mathfrak{g}_0$*-modules irréductibles dans* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}_0$ *et*

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0 \qquad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i \quad (i \geqslant 1);$$

si $i, j \geqslant 1$: $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ *ou bien il existe* k *tel que* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_k$ *avec* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$ *si* $k \neq 0$; *enfin* $\forall\, i \in I = \{0, 1, \ldots, s\}$, $\exists\, i' \in I$ *avec* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subseteq \mathfrak{g}_0$. En bref, la somme directe $\sum_0^s \mathfrak{g}_i$ vérifie $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_k\ \forall i, j$; je dirai que cette somme directe est la décomposition associée au sous-système fermé Λ_0. Elle fournit un produit de $\mathfrak{g}_0$-modules irréductibles régi par la loi Λ/Λ_0. Les résultats des paragraphes 5 et 6 peuvent en particulier être utilisés. On peut considérer $\sum_0^s \mathfrak{g}_i$ comme une graduation de g par le groupe local Λ/Λ_0.

7.3 *Sur-algèbre réductive de* $\mathfrak{g}_0$ *dans* $\mathfrak{g}$

Soient

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ modulo un sous-système fermé Λ_0;

$$Q = \{0, i_1, \ldots, i_q\}, \qquad S = \{0, 1, 2, \ldots, s\} \qquad Q \subset S,$$
$$\Lambda_Q = \Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \cdots \cup \Lambda_{i_q}.$$

On a sans difficulté la

PROPOSITION 7.4: *Pour que Λ_Q soit un sous-système fermé de Λ, il faut et il suffit que*

1) $(\forall i, j \in Q)\,(\exists k \in Q)\,(\Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k)$ si $\Lambda_i + \Lambda_j \neq \emptyset$

2) $(\forall i \in Q)\,(\exists i' \in Q)\,(\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$

Alors, avec les notations connues $\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_q}$, où est Λ_Q fermé dans Λ, est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{g}_0$; on a une sur-algèbre réductive de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, et, de cette manière on les obtient toutes:

PROPOSITION 7.5: Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$ *la décomposition de l'algèbre semi-simple* $\mathfrak{g}$ *associée à la partition*

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

du système Λ modulo un sous-système fermé Λ_0.

Pour que

$$\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_q} \quad (Q = \{0, i_1, \ldots, i_q\})$$

soit une sur-algèbre réductive de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que

$$(\forall i, j \in Q)\,(\Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset \text{ ou } \exists\, k \in Q\colon \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k)$$

et que $(\forall i \in Q)\,(\exists i' \in Q)\,(\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$.

Les sur-algèbres réductives de $\mathfrak{g}_0$ correspondent aux systèmes $\Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \cdots \cup \Lambda_{i_q}$ identiques à leurs opposés et stables pour l'addition.

7.4 *Sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ maximales*

Les sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ sont maximales dans $\mathfrak{g}$ si elles n'admettent aucune sur-algèbre distincte de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$; il s'agit ici uniquement d'algèbres réductives.

Considérons $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ et soit Λ_1 une classe arbitraire distincte de Λ_0; dans Λ/Λ_0 elle engendre un système de l'un des types suivants:

a) $$\Lambda^* = \{-p\Lambda_1, \ldots, -\Lambda_1, \Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1\}$$

où $(p+1)\Lambda_1 = \emptyset$

b) $$\Lambda^* = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1\}$$

où $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$.

Pour que $\mathfrak{g}_0$ soit maximale, il est nécessaire que $\Lambda^* = \Lambda$, c'est à dire que Λ/Λ_0 soit monothétique, au sens a) ou au sens b).

De plus, dans le cas a) $-p\Lambda_1, \Lambda_0, p\Lambda_1$ détermine une sur-algèbre réductive de $\mathfrak{g}_0$; on a nécessairement: $p = 1$.

Dans le cas b), les classes $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1$ forment un groupe cyclique d'ordre $p+1$ et pour que $\mathfrak{g}_0$ soit maximale (réductive) il est nécessaire que $p+1$ soit premier. Ces conditions sont aussi suffisantes. D'où

PROPOSITION 7.6: *Soit* $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$ *la décomposition de l'algèbre de Lie semi-simple* $\mathfrak{g}$ *associée à la partition* $\Lambda=\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\cdots\cup\Lambda_s$ *du système* Λ *des racines de* $\mathfrak{g}$ *modulo le sous-système fermé* Λ_0 *de* Λ.

Pour que $\mathfrak{g}_0$ *soit réductive maximale dans* $\mathfrak{g}$ *il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée.*

a) $\Lambda=\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\Lambda_1,\quad 2\Lambda_1=\emptyset$

b) $\Lambda=\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\cdots\cup\Lambda_p,\quad (p+1)\Lambda_1=\Lambda_0,\quad p+1$ premier.

cf. ([1]), théorème 6.

7.5 *Sur-algèbres réductives d'une algèbre* $\mathfrak{g}_0$ *semi-simple*

Lorsque le sous-système fermé Λ_0 est de rang maximal, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ correspondante est semi-simple; alors $\mathfrak{g}$ se présente comme extension d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}_0$ par «un groupe local» Λ/Λ_0. On a vu, dans le cas des algèbres simples exceptionnelles, que Λ/Λ_0 est toujours un groupe, avec une seule exception: $E_8/8A_1$.

Par exemple:

E_6 est extension de $3A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3.
E_7 est extension de A_2+A_5 par un groupe cyclique d'ordre 3.
E_8 est extension de $2A_4$ par un groupe cyclique d'ordre 5.
F_4 est extension de $2A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3.
G_2 est extension de A_2 par un groupe cyclique d'ordre 3.
$D_{2m}, B_{2m}C_l$ sont extension de lA_1 par des groupes locaux à éléments d'ordre 2. $(l=2m)$.
$B_l=B_{2m+1}$ est extension de $B_1+(l-1)A_1$.
$D_l=D_{2m+1}$ est extension de $A_3+2(m-1)A_1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL et J. DE SIEBENTHAL, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv., *23* (1949), 200–221.

[2] DYNKIN, E. B., *Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras*, Mat. Sbornik. N.S. *30* (72) (1952), 349–462. Amer. Math. Soc. Translations (Série 2, *6*, p. 111–244).

[3] JACOBSON, N., *Lie algebras* (Interscience Publishers, New York, London 1962).

[4] TITS, J., *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen* (Springer-Verlag, 1967 [Lecture Notes in Mathematics]).

L'aide du *Fonds National Suisse de la recherche scientifique* a rendu possible le présent travail (contrat no 2326).

Reçu le 12 juillet 1967.

An Application of Simplicial Profinite Groups

by DANIEL G. QUILLEN[1])

In this paper we use simplicial pro-p-groups to give quite different proofs of the convergence theorems for the lower central series and p-lower central series spectral sequences of a simplicial group (CURTIS [2], RECTOR [7]). The proofs are, we believe, more conceptual than the delicate calculations with generators in free groups used in [2]. In addition in the case of the p-lower central series spectral sequence we obtain convergence for certain non-connected simplicial groups, in particular those corresponding to connected H-spaces with finitely generated homology in each dimension.

The idea of the proof is as follows. If G is a free simplicial group with finitely many generators in each dimension, then because inverse limits are exact for profinite groups the p-lower central series spectral sequence of G converges strongly to $\pi(\hat{G})$, where $\wedge$ denotes p-completion. So the weak convergence of the spectral sequence to $\pi(G)$ follows from the formula $(\pi G)^{\wedge} \simeq \pi(\hat{G})$, and our main theorem gives conditions under which this holds. The main theorem is proved by a modification of a method of ARTIN and MAZUR, who prove an analogous theorem for pro-p homotopy objects in their work on etale homotopy theory (to appear).

The paper is in three sections. In the first we give the statement of the main theorem and deduce the convergence theorems from it. Section 2 is devoted to generalizing to simplicial profinite groups standard properties of the cohomology of simplicial groups such as the Serre spectral sequence and the Whitehead theorems. In the third section we use these results to study the p-completion functor from simplicial groups to simplicial pro-p groups. Using ZEEMAN's comparison theorem in the way indicated by ARTIN and MAZUR we prove a result on the compatibility of completion and fibrations (Th. 3.6) from which the main theorem follows easily.

This paper resulted from putting ideas of ED CURTIS and MIKE ARTIN and BARRY MAZUR together. I wish to acknowledge the benefit of numerous conversations.

§ 1. Statement and Application of the Main Theorem

We assume familiarity with basic facts about profinite groups (SERRE [8]) and (semi-)simplicial groups (KAN [4]). A fundamental property of profinite groups is that the inverse limit functor is exact for filtered inverse systems. Consequently

$$\pi_q(\varprojlim \mathbf{G}_i) \simeq \varprojlim \pi_q \mathbf{G}_i \tag{1.1}$$

[1]) This work was supported by NSF GP-6959.

if $\mathbf{G}_i$ $i \in I$ is an inverse system of simplicial profinite groups indexed by a direct set I.

If G is a simplicial group and M is a $\pi_0 G$ module, then M defines a local coefficient system on the "classifying space" simplicial set $\bar{W}G$, and we define the *homology* $H_q(G, M)$ and the *cohomology* $H^q(G, M)$ of G with values in M to be the homology and cohomology of this local coefficient system. We shall identify a group π with the *constant* simplicial group which is π in each dimension and has all face and degeneracy operators the identity, in which case $H_q(\pi, M)$ and $H^q(\pi, M)$ as just defined are the ordinary Eilenberg-MacLane homology and cohomology.

By a module M over a profinite group π we shall always mean one which is a topological π module when endowed with the discrete topology. If $\mathbf{G}$ is a simplicial profinite group and M is a $\pi_0 \mathbf{G}$ module, we define the *cohomology* of $\mathbf{G}$ with values in M to be

$$H^q(\mathbf{G}, M) = \varinjlim H^q(\mathbf{G}/\mathbf{U}, M^{\pi_0 \mathbf{U}}) \tag{1.2}$$

where $\mathbf{U}$ runs over the directed set of open normal simplicial subgroups of $\mathbf{G}$. When $\mathbf{G}$ is constant we obtain the definition of cohomology given in SERRE [8].

Let p be a prime number. If π is a group, let $\hat{\pi}$ be its *p-completion*, i.e. $\varprojlim \pi/\pi'$ where π' runs over the set of normal subgroups of index a power of p. If M is a π module which is also an abelian p-group, then the following conditions are equivalent: (i) M comes from a $\hat{\pi}$ module under the map $\pi \to \hat{\pi}$, (ii) M has a composition series with quotients of the form $\mathbf{Z}/p$ (integers mod p) with trivial π action, (iii) the subgroup of π consisting of the elements acting trivially on M is of index a power of p. If these conditions hold, we say that π acts *unipotently* on M.

Let $G \to \hat{G}$ be the dimension-wise extension of $\wedge$ to a functor from the category of simplicial groups to the category of simplicial pro-p groups. The normalized subgroups $N_q \mathbf{G}$ and the Moore homotopy groups $\pi_q \mathbf{G}$ of a simplicial pro-p group $\mathbf{G}$ are pro-p groups, hence the map $\pi_q G \to \pi_q \hat{G}$ extends uniquely to a canonical map

$$(\pi_q G)^\wedge \to \pi_q \hat{G}. \tag{1.3}$$

If M is a $\pi_0 \hat{G}$ module, then there is also a canonical map

$$H^q(\hat{G}, M) \to H^q(G, M) \tag{1.4}$$

and we say that G is *p-good* if this map is an isomorphism for q and for all M which are abelian p-groups. (It suffices by the five lemma and (ii) above that 1.4 be an isomorphism for $M = \mathbf{Z}/p$ and all q). This definition in the case of a constant G is an obvious extension of the one given in SERRE [8], p. 1–16. In Section 3 we shall shown that if each G_n is p-good so is G, and that free groups and finitely generated nilpotent groups are p-good.

Let $\tilde{G}$ = the kernel of the augmentation $G \to \pi_0 G$ be the 'universal covering' of

G. If M is a $\pi_0 G$ module, then G_0 acts by conjugation on the pair $(\bar{G}, M)$, hence on $H_q(\bar{G}, M)$ and this action induces an action of $\pi_0 G$ on $H_q(\bar{G}, M)$.

We can now state our main result which will be proved in § 3.

THEOREM 1.5: *Let G be a simplicial group satisfying the following conditions:*

(i) *G is p-good*

(ii) *$\pi_0 G$ is p-good*

(iii) *$H_q(\bar{G}, \mathbf{Z})$ is finitely generated for all q*

(iv) *$\pi_0 G$ acts unipotently on $H_q(\bar{G}, \mathbf{Z}/p)$ for all q.*

Then the canonical map (1.3) *is an isomorphism for all q.*

Our first application of this theorem is to deduce CURTIS' connectivity theorem for simplicial groups [2] from the simpler one for simplicial Lie algebras [1]. Let $f(q)$ be any function of q (e.g. 2^q) such that $\pi_q(L_r X)=0$ if $r \geqslant f(q)$ and X is any connected free simplicial abelian group. Let $\Gamma_r \pi$ be the lower central series of a group π, and let $\mathrm{gr}\,\pi = \oplus \Gamma_r \pi / \Gamma_{r+1}\pi$ be the associated graded Lie algebra.

COROLLARY 1.6: *If G is a free simplicial group such that $\pi_0 G=0$, then $\pi_q \Gamma_r G=0$ for $r>f(q)$.*

Proof: We first reduce to the case where G is finitely generated in each dimension. As G is connected we may by the simplicial analogue of cell-attaching construct a weak equivalence $F \to G$, where F is free with all generators of dimension >0. As G is free it is homotopy equivalent to F, so we may assume $G_0=1$. But then G is the filtered inductive limit of those simplicial subgroups whose set of non-degenerate generators is a finite subset of the set of non-degenerate generators of G. Each of these subgroups is connected since $G_0=1$, and since π_* and Γ_r commute with filtered inductive limits we may assume G has finitely many non-degenerate cells and that $G_0=1$.

Consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} (\pi_q G)^\wedge & \to \lim\limits_{\leftarrow r} \pi_q (G/\Gamma_r G)^\wedge \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ \pi_q \hat{G} & \to \lim\limits_{\leftarrow r} \pi_q ((G/\Gamma_r G)^\wedge) \end{array} \tag{1.7}$$

The vertical arrows are isomorphisms by the main theorem. In effect $H_q(G, \mathbf{Z}) = \pi_{q-1}(\mathrm{gr}_1 G)$ is finitely generated, $\pi_0 G=0$, and free simplicial groups are good, so the main theorem applies to G. Also $\mathrm{gr}_r G = L_r(\mathrm{gr}_1 G)$ is finitely generated in each dimension, so by induction on r and the homotopy long exact sequence associated to $1 \to \mathrm{gr}_r G \to G/\Gamma_{r+1} G \to G/\Gamma_r G \to 1$ one sees that $\pi_q(G/\Gamma_r G)$ is finitely generated. But $G/\Gamma_r G$ is trivial in dimension 0 hence is connected, so by SERRE $H_q(G/\Gamma_r G, \mathbf{Z})$ is finitely generated. Also $G/\Gamma_r G$ is good because it's a finitely generated nilpotent group in each dimension. Thus the main theorem applies to $G/\Gamma_r G$.

Now if U runs over the normal subgroups of index a power of p in any group G we have

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\leftarrow r}(G/\Gamma_r G)^\wedge &= \lim_{\leftarrow r}\lim_{\leftarrow U}(G/U)/\Gamma_r(G/U)\\ &= \lim_{\leftarrow U}\lim_{\leftarrow r}(G/U)/\Gamma_r(G/U) = \lim_{\leftarrow U} G/U = \hat{G}\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

where we have used the fact that p groups are nilpotent. Consequently by 1.1 the bottom row of 1.7 is an isomorphism, and hence all maps in 1.7 are isomorphisms.

By CURTIS' connectivity theorem for simplicial Lie algebras $\pi_q(\mathrm{gr}_r G)=\pi_q(L_r(\mathrm{gr}_1 G))=0$ for $r\geqslant f(q)$. Hence the inverse system $\pi_q(G/\Gamma_r G)$ stabilizes for $r>f(q)$ and we see that $\pi_q(G)^\wedge\to\pi_q(G/\Gamma_r G)^\wedge$ is an isomorphism for $r>f(q)$. But this is true when $\wedge$ is the p-completion for any prime p, hence as both groups are finitely generated abelian groups $\pi_q G\cong\pi_q(G/\Gamma_r G)$ for $r>f(q)$ and the corollary follows.

Our second application of the main theorem is to generalize RECTOR's result [7] to a class of non-connected simplicial groups. If π is a group let $\Gamma_r^p\pi$ $r\geqslant 1$ be its p-lower central series and let $\mathrm{gr}^p\pi=\oplus\Gamma_r^p\pi/\Gamma_{r+1}^p\pi$ be the associated graded p-Lie algebra over $\mathbf{Z}/p$. If $L^p V=\oplus L_r^p V$ is the free p-Lie algebra generated by a $\mathbf{Z}/p$ module V, then the canonical map

$$L^p(\mathrm{gr}_1^p\pi)\to\mathrm{gr}^p\pi \tag{1.9}$$

of p-Lie algebras which extends the identity in degree 1 is always surjective and is an isomorphism when π is free. If G is a free simplicial group, then the decreasing filtration $\Gamma_r^p G$ gives rise to the p-lower central series spectral sequence

$$E^1_{n\,m}=\pi_n L^p_m\,\mathrm{gr}_1^p G \qquad d_r: E^r_{n\,m}\to E^r_{n-1,\,m+r} \tag{1.10}$$

PROPOSITION 1.11: *If G is a free simplicial group such that $H_q(G,\mathbf{Z}/p)=\pi_{q-1}(\mathrm{gr}_1^p G)$ is finite for all q, then the spectral sequence* 1.10 *converges strongly to $\pi_n\hat{G}$.*

Proof: Define the p-lower central series for a pro-p group π by $\Gamma_r^p\pi=\lim_{\leftarrow}\Gamma_r^p(\pi/\pi')$ where π' runs over the open normal subgroups of π. As inverse limits are exact for profinite groups $\mathrm{gr}^p\pi=\lim_{\leftarrow}\mathrm{gr}^p(\pi/\pi')$, and moreover

$$\left.\begin{aligned}\pi=\lim_{\leftarrow\pi'}\pi/\pi' &= \lim_{\leftarrow\pi'}\lim_{\leftarrow r}(\pi/\pi')/\Gamma_r^p(\pi/\pi')\\ &= \lim_{\leftarrow r}\lim_{\leftarrow\pi'}(\pi/\pi')/\Gamma_r^p(\pi/\pi') = \lim_{\leftarrow r}\pi/\Gamma_r^p\pi\,.\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

If $\mathbf{V}$ is a profinite $\mathbf{Z}/p$ module, define the p-Lie algebra it generates by $L^p\mathbf{V}=\lim_{\leftarrow}L^p(\mathbf{V}/\mathbf{V}')$, so that by passage to the inverse limit in 1.9 one obtained a canonical map

$$L^p(\mathrm{gr}_1^p\pi)\to\mathrm{gr}^p\pi\,. \tag{1.13}$$

LEMMA 1.14: *The map* 1.13 *is an isomorphism iff* π *is a free pro-p group.*

A free pro-p group $\mathbf{F}$ is by definition (SERRE [8], p. 1–5) the completion of the free group FS generated by a set S with respect to the family of normal subgroups which are of index a power of p and which contain almost all members of S. In other words $\mathbf{F}=\lim_{\leftarrow S'}\lim_{\leftarrow r} FS'/\Gamma_r^p FS'$, where S' runs over the finite subsets of S and the map $FS_1'\to FS_2'$ when $S_2'\subset S_1'$ is the identity on S_2' and sends $S_1'-S_2'$ to zero.

Taking into account the definition of 1.13, one sees that it is an isomorphism for $\mathbf{F}$, since 1.9 is an isomorphism for FS' and hence an isomorphism in degrees $\leqslant r$ for $\pi=FS'/\Gamma_r^p FS'$. Conversely if 1.13 is an isomorphism, then choosing a map $u:\mathbf{F}\to\pi$ where $\mathbf{F}$ is free such that $\mathrm{gr}_1^p u$ is an isomorphism (SERRE [8], p. 1–36, prop. 24), we have that $\mathrm{gr}^p u$ and hence u is an isomorphism. This proves the lemma.

The map $G\to\hat{G}$ carries $\Gamma_r^p G$ into $\Gamma_r^p\hat{G}$, hence induces a map of spectral sequences

$$\pi_*(\mathrm{gr}^p G)\to\pi_*(\mathrm{gr}^p\hat{G}). \tag{1.14}$$

$\mathrm{gr}_1^p G$ is a simplicial $\mathbf{Z}/p$ module hence is homotopy equivalent to the simplicial $\mathbf{Z}/p$ module $N=\oplus_q K(\pi_q \mathrm{gr}_1^p G, q)$ which is finite in each dimension by hypothesis. So $\mathrm{gr}_1^p\hat{G}=(\mathrm{gr}_1^p G)^\wedge$ is homotopy equivalent to $\hat{N}$ and hence $\mathrm{gr}^p\hat{G}$, which equals $L^p(\mathrm{gr}_1^p\hat{G})$ by the lemma and the fact that the completion of a free group is free (SERRE [8], p. 1–6, Remarque), is homotopy equivalent to $L^p\hat{N}$. But $N=\hat{N}$ so $L^p\hat{N}=L^pN$, which is homotopy equivalent to $\mathrm{gr}^p G$. Thus 1.14 is an isomorphism of spectral sequences. But the second spectral sequence converges strongly to $\pi_n\hat{G}$ by 1.1 and 1.12, so the proof of the proposition is complete.

Combining the main theorem and this proposition we obtain

THEOREM 1.15: *Let G be a free simplicial group such that*

(i) $H_q(\tilde{G}, \mathbf{Z})$ *is finitely generated for all* q

(ii) $H_q(G, \mathbf{Z}/p)$ *is finite for all* q

(iii) $\pi_0 G$ *is p-good*

(iv) $\pi_0 G$ *acts unipotently on* $H_q(\tilde{G}, \mathbf{Z}/p)$ *for all* q.

Then the p-lower central series spectral sequence 1.10 *converges weakly to* $\pi_n G$ *in the sense that the following hold:*

(a) $E^\infty_{nm}=\lim_{\leftarrow} E^r_{nm}$ $r>m$

(b) *the topology on* $\pi_n G$ *given by the filtration* $\mathrm{Ker}\{\pi_n G\to\pi_n(G/\Gamma_m^p G)\}$ *is the p-topology.*

COROLLARY 1.16: *Let G be a free simplicial group which is an "H-space" object of the homotopy category of simplicial groups. If* $H_q(G, \mathbf{Z})$ *is finitely generated for all* q, *then the p-lower central series spectral sequence of G converges weakly to* $\pi_n G$.

Proof: In this case $\pi_0 G$ is abelian and acts trivially on $H_*(\tilde{G}, \mathbf{Z})$. So $\pi_0 G=$

$H_1(G, \mathbf{Z})$ is finitely generated and hence p-good. Moreover by a well-known argument of SERRE [9] applied to the homology spectral sequence of the fibration $\tilde{G} \to G \to \pi_0 G$ one finds that $H_q(\tilde{G}, \mathbf{Z}/p)$ is finitely generated for all q. So the corollary follows from 1.15.

Example: Let G be a simplicial group corresponding under KAN's theory [4] to real projective space $\mathbf{R}P^k$. If $p=2$ then the hypotheses of 1.15 are satisfied, but if p is odd, then $\pi_1 \mathbf{R}P^k = \mathbf{Z}/2$ acts unipotently (trivially in this case) on $H_*(S^k, \mathbf{Z}/p)$ exactly when k is odd. If k is even then the map $* \to \mathbf{R}P^k$ is a $\mathbf{Z}/p$ homology isomorphism, so the sequence can't converge or else $0 = \pi_n(\mathbf{R}P^k)^\wedge = \pi_n(S^k)^\wedge$ $(n>1)$, which is non-sense.

§ 2. Cohomology of simplicial profinite groups

We shall need the following properties of the cohomology of simplicial groups. A map of simplicial sets or groups is called a *weak equivalence* if it induces isomorphisms on homotopy groups.

PROPOSITION 2.1: *Let G, H be simplicial groups and let M be a $\pi_0 G$ module.*

(a) *If $f: H \to G$ is a weak equivalence, then $H^*(f, M): H^*(G, M) \to H^*(H, M)$ is an isomorphism.*

(b) *If f and g are homotopic maps of simplicial groups from H to G, then $H^*(f, M) = H^*(g, M)$.*

(c) *There is a canonical spectral sequence*

$$E_2^{p\,q} = \pi^p \mathscr{H}^q(G, M) \Rightarrow H^{p+q}(G, M).$$

where $\mathscr{H}^q(G, M)$ is the cosimplicial abelian group $n \mapsto H^q(G_n, M)$ and π^p is its "cohomotopy", i.e. homology with respect to the differential $\delta = \Sigma(-1)^i \delta_i$.

(d) *There are canonical isomorphisms*

$$H^0(G, M) = M^{\pi_0 G}$$

$$H^1(G, M) = \mathrm{Hom}_{(gps)}(\pi_0 G, M), \text{ if } \pi_0 G \text{ acts trivially on } M.$$

(e) *If $1 \to R \to G \to H \to 1$ is an exact sequence of simplicial groups, then there is a Serre spectral sequence*

$$E_2^{p\,q} = H^p(H, H^q(R, M)) \Rightarrow H^{p+q}(G, M).$$

(f) $H^*(G, M)$ is a cohomological functor of M.

Proof: All of these except (c) follow from the properties of the classifying space functor $\bar{W}$. Thus (e) is the Serre spectral sequence for the fibration $\bar{W}R \to \bar{W}G \to \bar{W}H$ (see [3], Appendix II), and the second half of (d) follows from POINCARE's theorem and the universal coefficient theorem. (b) is trivial because $\bar{W}f$ and $\bar{W}g$ are homo-

topic, and (a) follows from the fact that $\bar{W}f$ is a weak equivalence and hence a homotopy equivalence since $\bar{W}G$ and $\bar{W}H$ satisfy the extension condition.

To prove (c) let $\mathscr{W}(G)$ be the bisimplicial group given by $\mathscr{W}(G)_{pq} = W(G_p)_q$, where $W(\pi)$ is the classifying simplicial set of a group π. As $W(\pi)$ has trivial homotopy, $\mathscr{W}(G)$ has trivial vertical homotopy, so by the spectral sequence of a bisimplicial group [6], $\Delta\mathscr{W}(G)$ has trivial homotopy, where $[\Delta\mathscr{W}(G)]_n = \mathscr{W}(G)_{nn}$. Now π is contained in $W(\pi)$ as a simplicial subgroup, so G is contained in $\Delta\mathscr{W}(G)$ as a simplicial subgroup. Therefore $\Delta\mathscr{W}(G)$ is a principal contractible simplicial G set and hence is homotopy equivalent as a simplicial G set to $W(G)$. Thus

$$\pi^n \operatorname{Map}_G(\Delta\mathscr{W}(G), M) = \pi^n \operatorname{Map}_G(W(G), M) = H^n(G, M),$$

where Map_G denotes the set of morphisms in the category of G sets. One of the spectral sequences of the bi-cosimplicial abelian group $\operatorname{Map}_G(\mathscr{W}(G), M)^{pq} = \operatorname{Map}_{G_p}(W(G_p)_q, M)$ is

$$E_2^{pq} = \pi_h^p \pi_v^q \operatorname{Map}_G(\mathscr{W}(G), M) \Rightarrow \pi^{p+q}(\Delta \operatorname{Map}_G(\mathscr{W}(G), M))$$

which one easily sees is the desired spectral sequence (c). This completes the proof of the proposition.

REMARK: Corresponding properties for homology were derived in [5], Ch. II, § 6 as consequences of Kunneth spectral sequences pertaining to the derived tensor product $X \overset{L}{\otimes}_R Y$ of a left simplicial module X and a right simplicial module Y over a simplicial ring R. In an analogous way one may derive the above properties of cohomology from general spectral sequences pertaining to a derived Hom functor $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ where X is a left simplicial module and Y is a left *co*simplicial module over the simplicial ring R.

PROPOSITION 2.2: *Let* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *be simplicial profinite groups and let* M *be a* $\pi_0\mathbf{G}$ *module.*

(b) *If* f *and* g *are homotopic maps of simplicial profinite groups from* $\mathbf{H}$ *to* $\mathbf{G}$ *then* $H^*(f, M) = \mathbf{H}^*(g, M)$.

(c) *There is a canonical spectral sequence*

$$E_2^{pq} = \pi^p \mathscr{H}^q(\mathbf{G}, M) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{G}, M).$$

(d) *There are canonical isomorphisms*

$$H^0(\mathbf{G}, M) = M^{\pi_0 \mathbf{G}}$$

$$H^1(\mathbf{G}, M) = \operatorname{Homcont}(\pi_0 \mathbf{G}, M)$$

if $\pi_0\mathbf{G}$ *acts trivially on* M, *where* Homcont *is the set of homomorphisms which are continuous for the topology on* $\pi_0\mathbf{G}$ *and the discrete topology on* M.

(e) *If* $1 \to \mathbf{R} \to \mathbf{G} \to \mathbf{H} \to 1$ *is an exact sequence of simplicial profinite groups then there is a Serre spectral sequence*

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{H}, H^q(\mathbf{R}, M)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{G}, M).$$

(f) $H^q(\mathbf{G}, M)$ *is a cohomological functor of* M.

Proof: (b). Let $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{G}^{\Delta(1)}$ be the path functor on the category of simplicial profinite groups so that $\mathscr{H}om(\mathbf{H}, \mathbf{G}^{\Delta(1)}) = \mathscr{H}om(\mathbf{H}, \mathbf{G})^{\Delta(1)}$, where $\mathscr{H}om$ is the function complex of maps for the category of simplicial profinite groups ([5], Ch. II, 1.3). Thus the homotopy from f to g is represented by a map $h: \mathbf{H} \to \mathbf{G}^{\Delta(1)}$. The object $\mathbf{G}^{\Delta(1)}$ exists and is the usual function complex of maps from $\Delta(1)$ to $\mathbf{G}$ in the category of simplicial sets endowed with the structure of a profinite simplicial group induced from that of $\mathbf{G}$ (see [5], II, § 1, prop. 2 and cor.). Consequently if $\mathbf{G}$ is a simplicial finite group so is $\mathbf{G}^{\Delta(1)}$. If $\mathbf{V}$ is an open normal simplicial subgroup of $\mathbf{G}$, this means that $h^{-1}(\operatorname{Ker} \mathbf{G}^{\Delta(1)} \to (\mathbf{G}/\mathbf{V})^{\Delta(1)})$ is an open normal simplicial subgroup of $\mathbf{H}$. Hence if $\mathbf{U}$ is a smaller open normal simplicial subgroup of $\mathbf{H}$, the maps $f_{\mathbf{U},\mathbf{V}}$ and $g_{\mathbf{U},\mathbf{V}}$ from $\mathbf{H}/\mathbf{U}$ to $\mathbf{G}/\mathbf{V}$ induced by f and g are homotopic, so $H^*(f_{\mathbf{U},\mathbf{V}}, M^{\pi_0 \mathbf{V}}) = H^*(g_{\mathbf{U},\mathbf{V}}, M^{\pi_0 \mathbf{V}})$. Taking the direct limit as $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}$ run over all such open normal simplicial subgroups we see that $H^*(f, M) = H^*(g, M)$, which proves (b).

LEMMA 2.3: *If* $\mathbf{G}$ *is a simplicial profinite group, then for each* n, $\mathbf{G}_n = \lim_{\leftarrow} (\mathbf{G}/\mathbf{U})_n$ *where* $\mathbf{U}$ *runs over the directed set of open normal simplicial subgroups of* $\mathbf{G}$.

Given $\mathbf{V}$ open and normal in $\mathbf{G}_n$, set $\mathbf{U}_k = \cap(\varphi^*)^{-1}\mathbf{V}$ where φ runs over the finite set of monotone maps from $[n]$ to $[k]$. Clearly $\mathbf{U}$ is an open normal simplicial subgroup of $\mathbf{G}$ with $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{V}$, so the lemma follows.

(c) follows by passage to the inductive limit in the spectral sequences 2.1 (c) for the simplicial groups $\mathbf{G}/\mathbf{U}$ using 2.3.

(d) follows from 2.1 (d) by passage to the limit.

LEMMA 2.4: *Let* $\mathbf{G}_i$ $i \in I$ *be an inverse system of simplicial groups and let* M_i $i \in I$ *be a directed system of abelian groups indexed by the same directed set* I. *Suppose each* M_i *has the structure of a* $\pi_0 \mathbf{G}_i$ *module such that for* $i \leqslant j$ *the map* $M_i \to M_j$ *is a homomorphism of* $\pi_0 \mathbf{G}_j$ *modules. Then*

$$\lim_{\rightarrow} H^q(\mathbf{G}_i, M_i) \simeq H^q(\lim_{\leftarrow} \mathbf{G}_i, \lim_{\rightarrow} M_i).$$

This may be reduced to the case of constant simplicial groups by 2.2 (c) where it is easy.

(e) As $\mathbf{U}$ runs over the directed set of open normal simplicial subgroups of $\mathbf{G}$, $\mathbf{U}_n$ runs over a neighborhood basis of e in $\mathbf{G}_n$ by the lemma. Hence if i and f are the maps $\mathbf{R} \to \mathbf{G}$ and $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$, $i^{-1}\mathbf{U}_n$ and $f\,\mathbf{U}_n$ form a basis for e in $\mathbf{R}_n$ and $\mathbf{H}_n$ respectively.

Thus $\mathbf{R}=\lim_{\leftarrow} \mathbf{R}/i^{-1}\mathbf{U}$ and $\mathbf{H}=\lim_{\leftarrow} \mathbf{H}/f\mathbf{U}$, so using 2.4 we may obtain (e) by passing to the limit in the spectral sequences 2.1 (e) associated to the exact sequences $1\to \mathbf{R}/i^{-1}\mathbf{U}\to\mathbf{G}/\mathbf{U}\to\mathbf{H}/f\mathbf{U}\to 1$ and the module M^{π_0}, where $\mathbf{U}$ runs over the open normal simplicial subgroups of $\mathbf{G}$. This concludes the proof of 2.2.

By the method of SERRE [9] we may now use the Serre spectral sequence to prove

WHITEHEAD THEOREM 2.5: *Let $f:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ be a map of simplicial profinite groups and let n be $\geqslant 1$. The following conditions are equivalent:*

(i) *$\pi_q f$ is an isomorphism for $q<n$ and a surjection for $q=n$.*

(ii) *$\pi_0 f$ is an isomorphism and for every $\pi_0\mathbf{H}$ module M $H^q(f, M)$ is an isomorphism for $q\leqslant n$ and an injection for $q=n+1$.*

(ii)′ *same as* (ii) *but where M is any irreducible $\pi_0\mathbf{H}$ module* (such an M is necessarily finite dimesional over $\mathbf{Z}/p$ for some prime p).

COROLLARY 2.6: *Let $\mathbf{R}$ be a simplicial profinite group and let $n\geqslant 1$. Then $\pi_q\mathbf{R}=0$ for $q<n$ iff $\pi_0\mathbf{R}=0$ and $H^q(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/p)=0$ for $0<q<n$ and all primes p.*

Proof: Equivalence of (ii) and (ii)′: (ii)⇒(ii)′ is trivial. Assume (ii)′. By the five lemma, the family $\mathscr{C}$ of $\pi_0\mathbf{H}$ modules M for which $H^q(f, M)$ is an isomorphism for $q\leqslant n$ and a surjection for $q=n+1$ has the property that if $0\to M'\to M\to M''\to 0$ is an exact sequence, then $M', M''\in\mathscr{C}\Rightarrow M\in\mathscr{C}$ and $M, M''\in\mathscr{C}\Rightarrow M'\in\mathscr{C}$. Also $\mathscr{C}$ is closed under filtered inductive limits. Any finite $\pi_0\mathbf{H}$ module has a composition series hence is in $\mathscr{C}$, so any torsion $\pi_0\mathbf{H}$ module is in $\mathscr{C}$. If M is a vector space over $\mathbf{Q}$, then $M\in\mathbf{C}$ because then $H^q(\mathbf{G}, M)=0$ for $q<0$, as one sees by using the spectral sequence (2.2c) to reduce to the case of a single profinite group. If M is torsion-free there is an exact sequence $0\to M\to M\otimes\mathbf{Q}\to M\otimes(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\to 0$ where the second two belong to $\mathscr{C}$, hence $M\in\mathscr{C}$. Finally if M_t is the torsion subgroup of M, the exact sequence $0\to M_t\to M\to M/M_t\to 0$ together with what has been proved shows that $M\in\mathscr{C}$, so (ii) is proved.

Reduction of the theorem to the corollary: Factor the map f in the standard way $\mathbf{G}\xrightarrow{i}\mathbf{G}\times_{\mathbf{H}}\mathbf{H}^{\Delta(1)}\xrightarrow{p}\mathbf{H}$ dual to the mapping cylinder construction. i is a homotopy equivalence so induces an isomorphism on π_* and H^* (2.2(b)), while p is surjective since it's a fibration and $\pi_0 f$ is surjective. Thus we may assume f is surjective.

Let $\mathbf{R}=\operatorname{Ker} f$ and consider the Serre spectral sequence

$$E_2^{p\,q}=H^p(\mathbf{H}, H^q(\mathbf{R}, M))\Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{G}, M). \tag{2.7}$$

If (i) holds, then $\pi_q\mathbf{R}=0$ for $q<n$. If we take M to be an irreducible $\pi_0\mathbf{H}$ module, then $M\simeq(\mathbf{Z}/p)^k$ as $\pi_0\mathbf{R}$ modules for some k, so by the corollary $H^q(\mathbf{R}, M)=M$ for $q=0$ and 0 for $0<q<n$; thus the spectral sequence 2.7 yields (ii)′.

Now suppose (ii) holds and let s be the greatest integer $0<s<n$ such that $H^q(\mathbf{R}, A)=0$ for $0<q<s$ and all finite abelian groups A. Then from 2.7 we obtain an exact

sequence

$$H^s(\mathbf{H}, M) \underset{\simeq}{\to} H^s(\mathbf{G}, M) \to H^0(\mathbf{H}, H^s(\mathbf{R}, M)) \to H^{s+1}(\mathbf{H}, M) \underset{\subsetneq}{\to} H^{s+1}(\mathbf{G}, M)$$

which shows that $H^0(\mathbf{H}, H^s(\mathbf{R}, M))=0$ for all $\pi_0\mathbf{H}$ modules M. Given an abelian group A, let M be the $\pi_0\mathbf{H}$ module induced from A regarded as a module over the identity subgroup. Thus $M=\varinjlim_{\mathbf{U}} \{\text{set maps: } \pi_0\mathbf{H}/\mathbf{U} \to A\}$ where $\pi_0\mathbf{H}$ acts on $\pi_0\mathbf{H}/\mathbf{U}^n$ by right translation, so

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{H}, H^s(\mathbf{R}, M)) &= \varinjlim_{\mathbf{U}} H^0(\mathbf{H}, \{\text{set maps: } \pi_0\mathbf{H}/\mathbf{U} \to H^s(\mathbf{R}, A)\}) \\ &= \varinjlim_{\mathbf{U}} \{f : \pi_0\mathbf{H}/\mathbf{U} \to H^0(\mathbf{R}, A) \mid f \text{ set map such that} \\ &\qquad f(x\gamma) = \gamma^{-1} f(x)\} \quad \text{for all} \quad \gamma \in \pi_0\mathbf{H}\} \\ &= H^s(\mathbf{R}, A) \end{aligned}$$

Hence $H^q(\mathbf{R}, A)=0$ for $0<q\leqslant s$ and all abelian groups A, which shows that $s=n$. In particular by 2.2 (d)

$$H^1(\mathbf{R}, A) = \text{Homcont}(\pi_0\mathbf{R}, A) = 0 \tag{2.8}$$

hence $\pi_0\mathbf{R}=0$ because $\pi_0 f$ is an isomorphism and so $\pi_0\mathbf{R}=\text{Coker } \pi_1 f$ is abelian. Thus by the corollary $\pi_q\mathbf{R}=0$ for $q<n$ and so we obtain (i).

Proof of the corollary: As $\pi_0\mathbf{R}=0$, there is a canonical exact sequence (see [6] for formulas)

$$1 \to \Omega\mathbf{R} \to E\mathbf{R} \to \mathbf{R} \to 1$$

where $E\mathbf{R}$ is contractible. This gives rise to a spectral sequence

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbf{R}, H^q(\Omega\mathbf{R}, A)) \Rightarrow H^{p+q}(1, A).$$

Using this, the fact that $\pi_0\Omega\mathbf{R}=\pi_1\mathbf{R}$ is abelian, and the formula (2.8) one establishes the corollary by induction on n.

For simplicial pro-p groups the Whitehead theorem may be strengthened as follows:

COROLLARY 2.9: *Let $f: \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ be a map of simplicial pro-p groups and let $n \geqslant 0$. The following conditions are equivalent:*

(i) *$\pi_q f$ is an isomorphism for $q<n$ and a surjection for $q=n$.*

(ii) *$H^q(f, \mathbf{Z}/p)$ is an isomorphism for $q\leqslant n$ and an injection for $q=n+1$.*

Proof: Since $H^1(\mathbf{G}, \mathbf{Z}/p)=\text{Homcont}(\pi_0\mathbf{G}, \mathbf{Z}/p)=H^1(\pi_0\mathbf{G}, \mathbf{Z}/p)$, $H^1(f, \mathbf{Z}/p)$ injective implies that $\pi_0 f$ is surjective (SERRE [8], p. 1–35, prop. 23), which proves the corollary when $n=0$. If $n\geqslant 1$ then we can apply the Whitehead theorem once we

know that (ii) implies that $\pi_0 f$ is an isomorphism. We know $\pi_0 f$ is surjective, so replacing f by a surjection as in the proof of the theorem we may assume f surjective. If $\mathbf{R}=\mathrm{Ker} f$, then there is a five term exact sequence

$$H^1(\mathbf{H}, \mathbf{Z}/p) \underset{\simeq}{\to} H^1(\mathbf{G}, \mathbf{Z}/p) \to H^0(\mathbf{H}, H^1(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/p)) \to H^2(\mathbf{H}, \mathbf{Z}/p) \underset{\subsetneq}{\to} H^2(\mathbf{G}, \mathbf{Z}/p).$$

so $H^0(\mathbf{H}, H^1(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/p))=0$. But the action of a pro-p group on a non-zero p primary module has non-zero invariants, so $H^1(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/p)=0$ and $\pi_0 \mathbf{R}=0$. Therefore $\pi_0 f$ is an isomorphism, and the corollary follows from 2.5.

§ 3. Completion and cohomology

In this section we shall abbreviate $H^*(G, \mathbf{Z}/p)$ to $H^*(G)$, use "good" instead of "p-good", and call a subgroup of a group open if it contains a normal subgroup of index a power of p.

PROPOSITION 3.1: *If G is a simplicial group such that G_n is good for all n, then G is good.*

Proof: There is a map of spectral sequences 2.1 and 2.2 (c)

$$\begin{array}{ccc} \pi^p \mathscr{H}^q(\hat{G}) & \Rightarrow & H^{p+q}(\hat{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi^p \mathscr{H}^q(G) & \Rightarrow & H^{p+q}(G) \end{array}$$

which is an isomorphism on the E_2 terms, hence also on the abutment.

PROPOSITION 3.2: *If $G \to H$ is a weak equivalence of simplicial groups and G, H are good, then $\hat{G} \to \hat{H}$ is a weak equivalence.*

Proof: In the square

$$\begin{array}{ccc} H^q(\hat{H}) & \to & H^q(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\hat{G}) & \to & H^q(G) \end{array}$$

the horizontal arrows are isomorphisms since G and H are good, and the left vertical arrow is an isomorphism by 2.1 (a). So the proposition follows from Whitehead theorem 2.9.

PROPOSITION 3.3: *Let $1 \to R \to G \to H \to 1$ be an exact sequence of groups such that*

(i) *H and R are good*

(ii) *$H^q(R)$ is finite for all q*

(iii) *H acts unipotently on $H^1(R)$.*

Then (a) *$1 \to \hat{R} \to \hat{G} \to \hat{H} \to 1$ is exact*

(b) *G is good.*

Proof: (b) follows from (a) since then there is a map of spectral sequences

$$\begin{array}{ccc} H^p(\hat{H}, H^q(\hat{R})) & \Rightarrow & H^{p+q}(\hat{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(H, H^q(R)) & \Rightarrow & H^{p+q}(G) \end{array}$$

which will be an isomorphism on E_2 by hypotheses (i) and (ii).

To prove (a) we must show that $\hat{R} \to \hat{G}$ is injective, or equivalently that if V is an open subgroup of R, then $V \supset U \cap R$ for some open subgroup U of G. As $H^1(R) = \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_1^p R, \mathbf{Z}/p)$ is finite, $\mathrm{gr}_1^p R$ is finite, hence $\mathrm{gr}_q^p R$, which is a quotient of $L_q^p(\mathrm{gr}_1^p R)$ (1.9) is finite, so $R/\Gamma_r^p R$ is a p-group. As $V \supset {}_r^p\Gamma R$ for some r, we may by shrinking V assume it is invariant under the conjugation action of G. Notice also that G acts unipotently on $\mathrm{gr}_1^p R$ by hypothesis (iii) and hence acts unipotently on $\mathrm{gr}^p R$. Consequently there is a sequence of subgroups $R = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = V$ normal in G such that $V_i/V_{i+1} \simeq \mathbf{Z}/p$ with trivial G action. We are going to construct inductively a sequence $G = U_0 \supset U_1 \supset \ldots$ of open subgroups of G such that $U_i \cap R = V_i$. For $i = 1$ the extension

$$1 \to V_0/V_1 \to G/V_1 \to H \to 1$$

is classified by an element $a \in H^2(H)$. As H is good $a \in \mathrm{Im}\{H^2(H/H_1) \to H^2(H)\}$ for some H_1 open and normal in H. In other words there is a diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \to & V_0/V_1 & \to & G/V_1 & \to & H & \to 1 \\ & \wr & & \downarrow & * & \downarrow & \\ 1 \to & \mathbf{Z}/p & \to & Q & \to & H/H_1 & \to 1 \end{array}$$

where the square $*$ is cartesian. Hence over H_1 there is a section homomorphism s of $G/V_1 \to H$, so $sH_1 \subset G/V_1$ is an open subgroup with $sH_1 \cap (V_0/V_1) = 1$. If U_1 is the inverse image of sH_1 under the map $G \to G/V_1$, then U_1 is open in G and $U_1 \cap R = V_1$. This takes care of the case $i = 1$. Having found U_i one applies the same argument to the extension

$$1 \to V_i/V_{i+1} \to U_i/V_{i+1} \to U_i/V_i \to 1$$

which is possible since $U_i/V_i \subsetneq H$ is an open subgroup, hence good by

LEMMA 3.4: *An open subgroup of a good group is good.*

Proof: If H_1 is open in H, then $\hat{H}_1$ clearly maps injectively into $\hat{H}$. Let $i: H_1 \to H$ be the inclusion and let $i_*(\mathbf{Z}/p)$ be the H module induces by the trivial H_1 module $\mathbf{Z}/p$. Then $(\hat{i})_*(\mathbf{Z}/p) = i_*(\mathbf{Z}/p)$ as $\hat{H}$ modules so we have a square

$$\begin{array}{ccc} H^q(\hat{H}, i_*(\mathbf{Z}/p)) & \simeq & H^q(\hat{H}_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(H, i_*(\mathbf{Z}/p)) & \simeq & H^q(H_1) \end{array}$$

where the first vertical arrow is an isomorphism since H is good. This proves the lemma and completes the proof of 3.3.

COROLLARY 3.5: *Any finitely generated nilpotent group is good. Any free group is good.*

Proof: Assume G finitely generated and nilpotent. $\mathrm{gr}\,G=\oplus\Gamma_r G/\Gamma_{r+1}G$ is a Lie algebra over $\mathbf{Z}$ generated by $\mathrm{gr}_1 G$ which is a finitely generated abellian group. Hence $\mathrm{gr}_q G$ is a finitely generated abelian group for each q, so we may refine the lower central series of G to a sequence of normal subgroups $G=G_0\supset\cdots\supset G_n=1$ where G_i/G_{i+1} is either $\mathbf{Z}$ or $\mathbf{Z}/l$, l a prime number, with trivial G action. One may then use the proposition inductively to prove G/G_i is good once one knows that A is good and $H^q(A)$ is finite for each q where $A=\mathbf{Z}$ or $\mathbf{Z}/l$. In the latter case $\bar{W}(A)$ is a simplicial finite set hence $H^q(A)$ is finite. Also A is good if $l=p$ since $A=\hat{A}$, and A is good if $l\neq p$ because then $H^q(A)=0$ for $q>0$. If $A=\mathbf{Z}$ then A is free, and free groups are good because $H^q(\hat{G})=H^q(G)$ for $q\leqslant 1$ for any group G and because $H^q(\hat{G})=H^q(G)=0$ for $q\geqslant 2$ if G is free. This completes the proof of 3.5.

THEOREM 3.6: *Let* $1\to R\to G\to H\to 1$ *be an exact sequence of good simplicial groups. Suppose that for each* q $H^q(R)$ *is finite and that* $\pi_0 H$ *acts unipotently on it. Then* $\hat{R}\to\mathrm{Ker}\{\hat{G}\to\hat{H}\}$ *is a weak equivalence.*

LEMMA 3.7: *Let* $\mathbf{H}$ *be a simplicial pro-p group and let* $u: A\to B$ *be a map of p-primary* $\pi_0\mathbf{H}$ *modules. Then*

(i) $H^0(\mathbf{H}, u)$ *injective* $\Rightarrow$ u *injective*

(ii) $H^0(\mathbf{H}, u)$ *bijective and* $H^1(\mathbf{H}, u)$ *injective* $\Rightarrow u$ *is an isomorphism.*

Proof: (i). If K is the kernel of u, then there is an exact sequence $0\to H^0(\mathbf{H}, K)\to H^0(\mathbf{H}, A)\subsetneq H^0(\mathbf{H}, B)$ so $H^0(\mathbf{H}, K)=0$ and so $K=0$ since it is p-primary. (ii) We have that u is injective by (i), so letting $C=\mathrm{Coker}\,u$, there is an exact sequence $H^0(\mathbf{H}, A)\xrightarrow{\sim} H^0(\mathbf{H}, B)\to H^0(\mathbf{H}, C)\to H^1(\mathbf{H}, A)\subsetneq H^1(\mathbf{H}, B)$ whence by the same argument $C=0$. This proves the lemma.

The following is the core of ZEEMAN's comparison theorems for spectral sequences [10].

LEMMA 3.8: *Let* $f: \{E_2^{p,q}\Rightarrow H^{p+q}\}\to\{\bar{E}_2^{p,q}\Rightarrow\bar{H}^{p+q}\}$ *be a map of first quadrant spectral sequences of cohomological type. If* $H^n(f)$ *is an isomorphism for all* n *and* $E_2^{p,q}(f)$ *is an isomorphism for* $q<s$, *then*

(a) $E_2^{0,s}(f)$ *is an isomorphism*

(b) $E_2^{1,s}(f)$ *is injective.*

Proof: Let $\mathbf{Z}_r^{p,q}$, $B_r^{p,q}\subset E_2^{p,q}$ be defined recursively by

$$Z_r^{p,q}=\mathrm{Ker}\{Z_{r-1}^{p,q}\twoheadrightarrow E_{r-1}^{p,q}\xrightarrow{d_{r-1}}E_{r-1}^{p+r-1,q-r+2}\}\qquad Z_2^{p,q}=E_2^{p,q}$$

$$B_r^{p,q}/B_{r-1}^{p,q}=\mathrm{Im}\{E_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}\xrightarrow{d_{r-1}}E_{r-1}^{p,q}\}\qquad B_2^{p,q}=0$$

so that $E_r^{p,q}\simeq\mathbf{Z}_r^{p,q}/B_r^{p,q}$. By induction on r one simultaneously establishes that

$$q+r-1\leqslant s\Rightarrow Z_r^{p,q},\ B_r^{p,q},\ E_r^{p,q}\text{ are isomorphisms}\tag{1}$$

$$q<s\Rightarrow Z_r^{p,q},\ E_r^{p,q}\text{ are surjective},\tag{2}$$

where we have abbreviated $E_2^{p\,q}(f)$ to $E_2^{p\,q}$, etc. Using induction on r one obtains

$$p+q \leqslant s \Rightarrow Z_r^{p\,q},\ B_r^{p\,q},\ E_r^{p\,q} \text{ are isomorphisms}. \tag{3}$$

Let F_pH^n be the filtration on the abutment, so that $E_\infty^{p\,q}=F_pH^{p+q}/F_{p+1}H^{p+q}$. Using (2) and induction on q one shows that

$$E_\infty^{p\,q},\ F_pH^{p+q} \text{ are isomorphisms for } q<s \text{ and injections for } q=s. \tag{4}$$

If $p<r$ there is an exact sequence

$$0\to E_{r+1}^{p\,q}\to E_r^{p\,q}\xrightarrow{d_r} E_r^{p+r,\,q-r+1}$$

which by descending induction on r using (1), (2) and (4) may be used to prove

$$\text{If } p<r, \text{ then } E_r^{p\,q} \text{ is an isomorphisms for } q<s \text{ and an injection for } q=s. \tag{5}$$

In particular taking $p=1$, $r=2$ we have established part (b) of the lemma.

Note that $E_\infty^{0\,s}=H^s/F_1H^s$ is injective by (4) and surjective since H^s is an isomorphism. In virtue of the exact sequences

$$\begin{aligned}
&0\to E_{r+1}^{0\,s}\to E_r^{0\,s}\xrightarrow{d_r} B_{r+1}^{r,\,s-r+1}/B_r^{r,\,s-r+1}\to 0\\
&0\to B_{r+1}^{r,\,s-r+1}/B_r^{r,\,s-r+1}\to Z_{r+1}^{r,\,s-r+1}/B_r^{r,\,s-r+1}\to E_{r+1}^{r,\,s-r+1}\to 0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\simeq \text{ by (5)}\\
&0\to Z_{r+1}^{r,\,s-r+1}/B_r^{r,\,s-r+1}\to E_r^{r,\,s-r+1}\xrightarrow{d_r} E_r^{2r,\,s-2r+2}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\simeq \text{ by (1)}\qquad \simeq \text{ by (1)}
\end{aligned}$$

one sees by descending induction on r that

$$E_r^{0\,s} \text{ is an isomorphism for all } r \tag{6}$$

which proves part (a) and hence completes the proof of the lemma.

Proof of 3.6: Let $\mathbf{K}=\operatorname{Ker}\{\hat{G}\to\hat{H}\}$. If $\mathbf{U}$ is an open normal simplicial subgroup of $\boldsymbol{G}$, then the natural map of the exact sequence $1\to R\to G\to H\to 1$ into $1\to R/R\cap U\to G/U\to G/RU\to 1$ gives rise to a corresponding map of Serre spectral sequences, and hence on passage to the limit over U a map f of spectral sequences

$$\begin{array}{ccc} H^p(\hat{H},H^q(\mathbf{K}))\Rightarrow H^{p+q}(\hat{G}) \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ H^p(H,H^q(R))\Rightarrow H^{p+q}(G). \end{array} \tag{1}$$

Assume that the canonical map $H^q(\mathbf{K})\to H^q(R)$ is an isomorphism for $q<s$. As H is good $E_2^{p\,q}(f)$ is an isomorphism for $q<s$ and as G is good f induces an isomorphism on the abutment. Therefore by 3.8

$$\begin{aligned} H^0(\hat{H},H^s(\mathbf{K}))&\simeq H^0(H,H^s(R))\\ H^1(\hat{H},H^s(\mathbf{K}))&\hookrightarrow H^1(H,H^s(R)) \end{aligned}$$

Now since H is good and $\pi_0 H$ acts unipotently on $H^s(R)=\mathrm{Hom}(H_s(R, \mathbf{Z}/p), \mathbf{Z}/p)$, H may be replaced by $\hat{H}$ in the right side of these maps, so by 3.7 $H^s(\mathbf{K})\to H^s(R)$ is an isomorphism. Thus in the triangle

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathbf{K}) & \to & H^q(\hat{R}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & H^q(R) & \end{array}$$

the left vertical arrow is an isomorphism by induction on q and the right one is an isomorphism since R is good. Thus $\hat{R}\to\mathbf{K}$ induces an isomorphism on cohomology so is a weak equivalence by 2.9. Q.E.D.

Proof of main theorem 1.5: We show that $\pi_q(G)^\wedge \simeq \pi_q(\hat{G})$ for all simplicial groups G satisfying the hypotheses by induction on q. For $q=0$ it is clear since both groups represent maps of G into a constant simplicial pro-p-group so we assume $q>0$. By 3.2 we may replace G by a free simplicial group. Consider the exact sequences

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & \tilde{G} & \to G \to & \pi_0 G & \to & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & \to & \hat{G}^\sim & \to \hat{G} \to & \pi_0 \hat{G} & \to & 1\,. \end{array}$$

We apply 3.6 to the upper exact sequence. $\tilde{G}$ is a subgroup of a free simplicial group, hence is free; thus $\tilde{G}$, G, $\pi_0 G$ are all good. By hypotheses (iii) and iv) on G, $H^q(\tilde{G})=\mathrm{Hom}(H_q(\tilde{G}, \mathbf{Z}/p), \mathbf{Z}/p)$ is finite and $\pi_0 G$ acts unipotently on it for each q. Thus by 3.6 $\tilde{G}^\wedge \to \hat{G}^\sim$ is a weak equivalence.

As $\pi_0\tilde{G}=0$ there is a surjection $F\to\tilde{G}$, where F is a free contractible simplicial group, whose kernel R is of the weak homotopy type of ΩG. Consider the exact sequences

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & R & \to & F & \to & \tilde{G} \to 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \to & \mathbf{K} & \to & F^\wedge & \to & \tilde{G}^\wedge \to 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \to & \mathbf{K}' & \to & F^\wedge & \to & \hat{G}^\sim \to 1 \end{array}$$

and apply 3.6 to the upper exact sequence. This is legitimate because $H^*(R)=H^*(\Omega\tilde{G})$ is finite by a well-known argument of SERRE, because $\pi_0\tilde{G}=0$, and because R, F and $\tilde{G}$ are all free. Thus $\hat{R}\to\mathbf{K}$ and hence $\hat{R}\to\mathbf{K}'$ is a weak equivalence and we obtain the diagram

$$\begin{array}{ccccc} (\pi_q G)^\wedge & \xleftarrow{\sim} & (\pi_q \tilde{G})^\wedge & \xrightarrow{\sim} & (\pi_{q-1} R)^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \pi_{q-1}\hat{R} \\ & & & & \downarrow\wr \\ \pi_q \hat{G} & \xleftarrow{\sim} & \pi_q(\hat{G}^\sim) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{q-1}\mathbf{K}'\,. \end{array}$$

But R satisfies the hypotheses of the theorem. In effect $H_q(R, \mathbf{Z})$ and $H_q(\tilde{R}, \mathbf{Z})$ are finitely generated by SERRE, so $\pi_0 R = H_1(R, \mathbf{Z})$ is good, and also $\pi_0 R$ acts trivially on $H_*(\tilde{R}, \mathbf{Z})$. Thus by induction $(\pi_{q-1} R)^\wedge \simeq \pi_{q-1}\hat{R}$ and the theorem follows.

BIBLIOGRAPHY

[1] CURTIS, E.B., *Lower Central Series of Semisimplicial complexes*, Topology *2* (1963), 159–171.
[2] CURTIS, E.B., *Some Relations Between Homotopy and Homology*, Ann. of Math. *83* (1965), 386–413.
[3] GABRIEL, P. and ZISMAN, M., *Calculus of fractions and homotopy theory* (Springer, Berlin 1966).
[4] KAN, D.M., *On Homotopy Theory and c.s.s. Groups*, Ann. of Math. *68* (1958), 38–53.
[5] QUILLEN, D.G., *Homotopical Algebra* (Springer, 1967 [Lecture Notes in Mathematics, No. 43]).
[6] QUILLEN, D.G., *Spectral Sequences of a Double Semi-Simplicial Group*, Topology *5* (1966), 155–157.
[7] RECTOR, D.L., *An Unstable Adams Spectral Sequence*, Topology *5* (1966), 343–346.
[8] SERRE, J.-P., *Cohomologie Galoisienne* (Springer, 1964 [Lecture Notes in Mathematics, No. 5]).
[9] SERRE, J.-P., *Groupes d'homotopy et classes de groupes abelians*, Ann. of Math. *58* (1953), 258–294.
[10] ZEEMAN, E.C., *A proof of the Comparison Theorem for Spectral Sequences*, Proc. Camb. Phil. Soc. *53* (1957), 57–62.

Massachusetts Institute of Technology

Received December 18, 1967

Differential Structures on a Product of Spheres

R. De Sapio

1. Introduction

In this paper we give a classification under the relation of orientation preserving diffeomorphism, of all differential structures on a simply connected product of spheres $S^k \times S^p$ of dimension greater than five. In particular, we prove the following theorem.

Theorem 1. *Let M^n be a differential n-manifold of dimension greater than five that is homeomorphic to a product of spheres $S^k \times S^p$, where $2 \leqslant k \leqslant p$. Then there are homotopy spheres A^p and V^n such that M^n is diffeomorphic to $(S^k \times A^p) + V^n$. Furthermore, we have the following conclusions.*

(a) *If B^p and U^n are homotopy spheres such that M^n is also diffeomorphic to $(S^k \times B^p) + U^n$, then $S^k \times A^p$ and $S^k \times B^p$ are diffeomorphic. If, in addition, either $k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod 8$ or $k \geqslant p-3$, then V^n and U^n are diffeomorphic.*

(b) *If either $k \geqslant p-3$ or $p = 4, 5, 6, 7$, then there is one and only one homotopy n-sphere V^n such that M^n is diffeomorphic to $(S^k \times S^p) + V^n$.*

Here S^n denotes the unit n-sphere with its usual differential structure in euclidean $(n+1)$-space R^{n+1} and $+$ denotes the connected sum operation. Now let Θ_n denote the group of homotopy n-spheres and let Φ_p^{k+1} denote the subgroup of Θ_p consisting of these homotopy p-spheres that embed in R^{p+k+1} with a trivial normal bundle. Let $H_{p,k}$ denote the subset of Θ_p consisting of those homotopy p-spheres A^p such that $S^k \times A^p$ is diffeomorphic to $S^k \times S^p$. It is known that if $k \geqslant 2$, then $H_{p,k} = \Phi_p^{k+1}$. In the next section we prove the following.

Theorem 2. *Let A^p and B^p be homotopy p-spheres such that $p > 4$ and let k be an integer greater than one. Then $S^k \times A^p$ and $S^k \times B^p$ are diffeomorphic if and only if $A^p \equiv \pm B^p \bmod H_{p,k}$.*

This theorem follows from Lemmas 4, 5, and 6 of the next section. Theorems 1 and 2 combine to give a classification of differential structures on $S^k \times S^p$ in the case where either $k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod 8$ or $k \geqslant p-3$. In fact, let $C_{p,k}$ be the set obtained from the quotient group $\Theta_p / H_{p,k}$ by identifying $x \in \Theta_p / H_{p,k}$ with its inverse $-x$. Then Theorem 1 has the following corollary.

Corollary 1.1. *The diffeomorphism classes of n-manifolds $(n \geqslant 6)$ that are homeomorphic to $S^k \times S^p$ $(k \leqslant p)$ are in a one-to-one correspondence with the product $C_{p,k} \times \Theta_n$, provided that either $k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod 8$ or $k \geqslant p-3$.*

This one-to-one correspondence is given by Theorem 1. In particular, conclusion (a) of Theorem 1 asserts that the group Θ_{p+k} acts nontrivially *via* connected sum on the differential structure of M^n, provided that either $k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod 8$ or $k \geqslant p-3$. This is not always true in the remaining case where $k < p-3$ and $k \equiv 0, 1, 3, 7 \pmod 8$, although we do show here that Θ_{p+k} acts nontrivially on $S^k \times S^p$ in all cases (Lemma 2 below). In a subsequent paper we shall prove the following result.

THEOREM. *Let*

$$\tau_{p,k}: \theta_p \otimes \pi_k(SO(p-1)) \to \theta_{p+k}$$

denote the pairing of Milnor-Munkres-Novikov and let A^p and V^{p+k} be homotopy spheres. Then $(S^k \times A^p) + V^{p+k}$ is diffeomorphic to $S^k \times A^p$ if and only if there exists $\alpha \in \pi_k(SO(p-1))$ such that $V^{p+k} = \tau_{p,k}(A^n \otimes \alpha)$. In particular, if $k \geqslant p-3$, then $\tau_{p,k} = 0$.

Thus the differential structures on $S^k \times S^p$ can be classified in terms of $\Theta_p / H_{p,k}$ and the pairing $\tau_{p,k}$. We remark that the pairing $\tau_{p,k}$ corresponds to composition in the stable homotopy groups of spheres and is sometimes nontrivial. Therefore the complete classification in the case where $k < p-3$ and $k \equiv 0, 1, 3, 7 \pmod 8$ is more complicated than that given by Corollary 1.1.

We can make some remarks that relate to the structure of the groups $H_{p,k}$. Let bP_{p+1} denote the subgroup of Θ_p consisting of those homotopy p-spheres that bound parallelizable manifolds. It is known that $bP_{p+1} \subset \Phi_p^2$ and hence, since $\Phi_p^{k+1} = H_{p,k}$ for $k \geqslant 2$, it follows that $bP_{p+1} \subset H_{p,k} \subset H_{p,k+1}$, provided that $k \geqslant 2$. Theorem 1 asserts that $H_{p,k} = \Theta_p$ if $k \geqslant p-3$, although this is not true for $k < p-3$. In fact, if Σ^{16} represents the nonzero element in $\Theta_{16} \approx Z_2$, then according to [5, Corollary 1.5] $S^{12} \times \Sigma^{16}$ is not diffeomorphic to $S^{12} \times S^{16}$; that is, $H_{16,12} = 0$. Finally, it can be shown that $H_{p,k}/bP_{p+1}$ is isomorphic to the cokernel of the Hopf-Whitehead homomorphism $J: \pi_p(SO(k+1)) \to \pi_{p+k+1}(S^{k+1})$, provided that $2k > p-1$ and $p \neq 2^a - 2$ (c.f. [5, Th. 1.7]). This isomorphism is induced by the Pontrjagin-Thom construction and is of interest here since the groups bP_{p+1} have been determined in many cases.

We include here a result on the action of Θ_{k+p} on the total space E of a differential k-sphere bundle over a homotopy p-sphere. Precisely, $\pi: E \to A^p$ is a k-sphere bundle over A^p with the special orthogonal group $SO(k+1)$ as structural group such that the homeomorphisms which specify the local product structure are diffeomorphisms, and where the fibre is S^k.

PROPOSITION 1. *Each element of Θ_{k+p} acts nontrivially on the differential structure of the total space E of a differential k-sphere bundle over a homotopy p-sphere A^p, provided that $k < p-1$ and $k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod 8$.*

The proof of Theorem 1 is given in Section 3; following the proof there are some remarks on the case where $k = 1$ or $n < 6$. The results on the action of Θ_n are proved in the next section. All manifolds are assumed to be smooth of class C^∞, and oriented;

diffeomorphisms are assumed to be orientation preserving and of class C^∞. Finally, D^n denotes the unit n-disc with the standard differential structure in euclidean n-space R^n.

2. Products of Homotopy Spheres

We begin with the lemmas that are needed in proving the theorems.

LEMMA 1. *If A^p is a homotopy p-sphere, then $A^p \times D^k$ is diffeomorphic to $S^p \times D^k$, provided that $p \neq 3$ and $k \geqslant p-2$.*

REMARK. If $k \geqslant p+2 \geqslant 7$, then this is a result of Mazur.

Proof. If $p=1, 2$, then this is a classical result; if $p=4$, then this is a result of HIRSCH [4, Theorem 6]. Since A^p and S^p are diffeomorphic for $p=5, 6$ we can assume that $p \geqslant 7$. It follows from the theorems of HAEFLIGER [3] that A^p may be differentiably embedded in R^{p+k}, provided that $k \geqslant p-2$. Furthermore, it follows from [5, Th. 1.10] that the normal tube of this embedding is diffeomorphic to $A^p \times D^k$. But it is known that the normal tube of an embedded homotopy p-sphere in R^{p+k} is diffeomorphic to $S^p \times D^k$, provided that $k \geqslant 3$, and the lemma is proved.

LEMMA 2. *Let A^p and B^p be homotopy p-spheres and let V^{p+k} be a homotopy $(p+k)$-sphere, where $p+k \geqslant 6$. If $k < p-3$ and $k \equiv 0, 1, 3, 7$ (mod 8), then assume that $S^k \times B^p$ is diffeomorphic to $S^k \times S^p$. Then, if $(S^k \times A^p) + V^{p+k}$ is diffeomorphic to $S^k \times B^p$, then V^{p+k} is diffeomorphic to the standard $(p+k)$-sphere S^{p+k} (and hence $S^k \times A^p$ and $S^k \times B^p$ are diffeomorphic).*

This lemma is also true for $p+k=5$ since $\Theta_5 = 0$.

Proof. In the first place if $p=k \geqslant 3$, then the lemma follows from [1, Th. B]. If $k \geqslant p-3$, then Lemma 1 above implies that $S^k \times A^p$ and $S^k \times B^p$ are both diffeomorphic to $S^k \times S^p$, provided that $p \neq 3$. Thus if $k=p-1$, then Lemma 2 follows from [2, Lem. 1]. Therefore we can assume that $k < p-1$, which implies that $p \geqslant 4$. If $p=4$, then $k=2$ and there is nothing to prove since $\Theta_6 = 0$. Therefore assume that $p > 4$.

Let

$$h: (S^k \times A^p) + V^{p+k} \to S^k \times B^p$$

be a diffeomorphism. It is known that there is a diffeomorphism $f: S^{p-1} \to S^{p-1}$ such that A^p is diffeomorphic to $D_1^p \cup_f D_2^p$, the disjoint union of two copies D_1^p, D_2^p of the p-disc D^p indentified along the boundaries *via* the diffeomorphism f (that is, $x \in \partial D_2^p$ is identified with $f(x) \in \partial D_1^p$ and $D_1^p \cup_f D_2^p$ is given the orientation of D_2^p). Similarly, B^p is diffeomorphic to $D_1^p \cup_g D_2^p$, where $g: S^{p-1} \to S^{p-1}$ is a diffeomorphism. Thus we can write $S^k \times A^p$ as a disjoint union of two copies of $S^k \times D^p$, in the form

$$S^k \times A^p = (S^k \times D_1^p) \cup_{i \times f} (S^k \times D_2^p), \tag{1}$$

with points identified along $S^k \times S^{p-1}$ *via* the diffeomorphism $i \times f$, where $i: S^k \to S^k$ is the identity map. Similarly,

$$S^k \times B^p = (S^k \times D_1^p) \cup_{i \times g} (S^k \times D_2^p). \tag{2}$$

Now let $0 \in D_1^p$ denote the center of the p-disc D_1^p. The k-sphere $S^k \times 0$ is embedded in $S^k \times A^p$ and in $S^k \times B^p$. We can assume that the connected sum $(S^k \times A^p) + V^{p+k}$ is made far away from the sphere $S^k \times 0$ and hence $S^k \times 0$ is also embedded in $(S^k \times A^p) + V^{p+k}$. The next step is to show that we can assume that the diffeomorphism h is the identity on the k-sphere $S^k \times 0$. In fact, since $k < p-1$ h maps the homotopy class of $S^k \times 0$ in $(S^k \times A^p) + V^{p+k}$ onto either the homotopy class of $S^k \times 0$ in $S^k \times B^p$ or the negative of the homotopy class of $S^k \times 0$ in $S^k \times B^p$. In the latter case we can compose h with the (orientation preserving) diffeomorphism $\varrho \times i: S^k \times B^p \to S^k \times (-B^p)$, where $\varrho: S^k \to S^k$ is a diffeomorphism of degree -1 and $i: B^p \to -B^p$ is the identity map ($-B^p$ is the manifold B^p with the orientation reversed), to obtain a diffeomorphism $(\varrho \times i) \circ h: (S^k \times A^p) + V^{p+k} \to S^k \times (-B^p)$ that maps the homotopy class of $S^k \times 0$ in $(S^k \times A^p) + V^{p+k}$ into the homotopy class of $S^k \times 0$ in $S^k \times (-B^p)$. Thus we can assume that the restriction $h \mid S^k \times 0$ is homotopic to the inclusion $S^k \times 0 \subset S^k \times B^p$. It follows from the theorems of HAEFLIGER [3] that $h \mid S^k \times 0$ is diffeotopic to the inclusion $S^k \times 0 \subset S^k \times B^p$, and hence by application of the diffeotopy extension theorem we can assume that $h(u, 0) = (u, 0)$ for each $(u, 0) \in S^k \times 0$. By the tubular neighborhood theorem we may further suppose that $h(S^k \times D_1^p) = S^k \times D_1^p$ such that for each $(u, v) \in S^k \times D_1^p$, $h(u, v) = (u, v \cdot \alpha(u))$, where $\alpha: S^k \to SO(p)$ is a differentiable map and $v \cdot \alpha(u)$ denotes the action of $\alpha(u) \in SO(p)$ on $v \in D_1^p$. Now perform the spherical modification on $(S^k \times A^p) + V^{p+k}$ that removes the k-sphere $S^k \times 0$ with product structure $S^k \times D_1^p$. The following proposition implies that the result of this modification is V^{p+k}.

PROPOSITION 2. *Let $A^p = D_1^p \cup_f D_2^p$ be a homotopy p-sphere and let $\varphi: S^k \times D_1^p \subset S^k \times A^p$ be the inclusion. Then, the result of the spherical modification on $S^k \times A^p$ based on φ is always S^{k+p}.*

Proof. The result of the modification is

$$(D^{k+1} \times S^{p-1}) \cup_{i \times f} (S^k \times D_2^p), \tag{3}$$

which is clearly diffeomorphic to

$$S^{p+k} = (D^{k+1} \times S^{p-1}) \cup_i (S^k \times D^p) \tag{4}$$

(where $i: S^k \times S^{p-1} \to S^k \times S^{p-1}$ is the identity) by virtue of the map that sends $(u, v) \in S^k \times D^p$ into $(u, v) \in S^k \times D_2^p$ and $(u, v) \in D^{k+1} \times S^{p-1}$ into $(u, f(v)) \in D^{k+1} \times S^{p-1}$ (this diffeomorphism goes from (4) to (3)). Q.E.D.

Returning to the lemma we perform the corresponding modification (under h)

on $S^k \times B^p$ to remove the k-sphere $S^k \times 0$ with product structure $h(S^k \times D_1^p)$ in $S^k \times B^p$. From the latter modification we obtain the manifold

$$(D^{k+1} \times S^{p-1}) \cup_\psi (S^k \times D_2^p), \tag{5}$$

where $\psi = (h^{-1} \mid S^k \times S^{p-1}) \circ (i \times g)$ (see (2)), which is clearly diffeomorphic to V^{p+k} because of the way that this modification was defined (using h). We complete the proof of Lemma 2 by showing that (5) is diffeomorphic to S^{p+k}. This is done by constructing a diffeomorphism from (5) to (4) as follows, recalling that $k < p-1$. If $k < p-3$ and $k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod 8$, then $\pi_k(SO(p)) = 0$ and hence we can apply Proposition 2 to conclude that (5) is diffeomorphic to S^{p+k}. If $k = p-3$ or $p-2$ then by Lemma 1 we can assume that g is the identity; if $k < p-3$ and $k \equiv 0, 1, 3, 7 \pmod 8$, then by hypothesis $S^k \times B^p$ is diffeomorphic to $S^k \times S^p$ and we can again assume that g is the identity. Thus in these cases $\psi = h^{-1} \mid S^k \times S^{p-1}$ and we have the diffeomorphism that sends

$$(u, v) \in D^{k+1} \times S^{p-1} \quad \text{into} \quad (u, v) \in D^{k+1} \times S^{p-1}$$

and $(u, v) \in S^k \times D_2^p$ into

$$h(u, v) = (u, v \cdot \alpha(u)) \in S^k \times D^p.$$

The proof of Proposition 1 is similar to the preceding and is left to the reader.

The following lemma is a weakened form of Lemma 2 but removes the special assumption which was made there in the case where $k < p-3$ and $k \equiv 0, 1, 3, 7 \pmod 8$.

LEMMA 3. *Let A^p and B^p be homotopy p-spheres such that for some integer k, $A^p \times S^k$ and $B^p \times S^k$ are diffeomorphic up to a point. Then $A^p \times S^m$ and $B^p \times S^m$ are diffeomorphic for all $m \geqslant \max(k, 2)$.*

Proof. If $k \geqslant p-3$, then the lemma is a trivial consequence of Lemma 1. Thus we can assume that $k < p-3$. If $h: A^p \times S^k \to B^p \times S^k$ is a diffeomorphism up to a point, then we can compose h with the inclusion $B^p \times S^k \subset B^p \times D^{m+1}$ and we obtain a differentiable embedding $A^p \to B^p \times D^{m+1}$ with a trivial normal bundle. We show that the embedding $A^p \to B^p \times D^{m+1}$ is also a homotopy equivalence, by an elementary argument. In fact, let $y \in A^p$ and $z \in B^p$ such that the k-spheres $y \times S^k$ and $z \times S^k$ do not contain the singularity of h. Now $k < p-3$ and hence by standard arguments (theorems of HAEFLIGER and diffeotopy extension) we can assume that h maps $y \times S^k$ diffeomorphically onto $z \times S^k$. It follows that the induced homomorphism

$$h_*: \pi_p(A^p \times S^k) = \pi_p(A^p) + \pi_p(S^k) \to \pi_p(B^p \times S^k) = \pi_p(B^p) + \pi_p(S^k)$$

maps $\pi_p(S^k)$ isomorphically onto $\pi_p(S^k)$ and hence h_* maps the generator of $\pi_p(A^p)$ into a generator of $\pi_p(B^p)$ plus an element of $\pi_p(S^k)$. Consequently the composition $A^p \times S^k \to B^p \times S^k \subset B^p \times D^{m+1}$ maps the generator of $\pi_p(A^p)$ into a generator of $\pi_p(B^p \times D^{m+1})$ and it follows that the embedding $A^p \to B^p \times D^{m+1}$ is a homotopy

equivalence with a trivial normal bundle. We can apply [7, Th. 4.1] to conclude that $A^p \times D^{m+1}$ is diffeomorphic to $B^p \times D^{m+1}$, provided that $m \geqslant \max(k, 2)$.

The remainder of the present section is devoted to the study of the diffeomorphism classes of manifolds of the form $S^k \times A^p$, where A^p is an arbitrary homotopy p-sphere. Let $p \geqslant 4$ and $k \geqslant 2$ be a given pair of integers. Then two homotopy p-spheres A^p and B^p are called *k-equivalent* if and only if $S^k \times A^p$ and $S^k \times B^p$ are diffeomorphic. Thus the group Θ_p is divided into k-equivalence classes. It is clear that the k-equivalence class of an element $A^p \in \Theta_p$ contains its inverse $-A^p$ in the group Θ_p. Lemma 4 below asserts that the k-equivalence class of S^p is a subgroup of Θ_p. This subgroup is denoted by $H_{p,k}$.

LEMMA 4. *The set $H_{p,k}$ of those homotopy p-spheres A^p such that $S^k \times A^p$ is diffeomorphic to $S^k \times S^p$ forms a subgroup of Θ_p, provided that $p \neq 3$ and $k \geqslant 2$.*

This lemma follows from the next lemma. Lemma 5 implies that any k-equivalenc class is the union of cosets of the subgroup $H_{p,k}$ of the group Θ_p.

LEMMA 5. *Let A^p and B^p be homotopy p-spheres such that $A^p \in H_{p,k}$. Then $S^k \times (A^p + B^p)$ is diffeomorphic to $S^k \times B^p$.*

Proof. Since $A^p \in H_{p,k}$ it follows that A^p may be embedded in the interior of a $(p+k+1)$-disc in $D^{k+1} \times B^p$ with a trivial normal bundle. But B^p is embedded in $D^{k+1} \times B^p$ in the obvious way with a trivial normal bundle, and hence we can form the connected sum $A^p + B^p$ in $D^{k+1} \times B^p$ so that $A^p + B^p$ has a trivial normal bundle. Furthermore, the resulting embedding $A^p + B^p \to D^{k+1} \times B^p$ is a homotopy equivalence and hence by [7, Th. 4.1] $D^{k+1} \times (A^p + B^p)$ is diffeomorphic to $D^{k+1} \times B^p$, provided that $k \geqslant 2$. Q.E.D.

In general it does not seem likely that each k-equivalence class contains exactly one coset of $H_{p,k}$. If this is the case, then the k-equivalence classes are in a one-to-one correspondence with the quotient group $\Theta_p / H_{p,k}$; in particular, this would imply that $\Theta_p / H_{p,k}$ consists entirely of elements of order two. The next lemma is the best that we can do in this direction.

LEMMA 6. *If A^p and B^p are homotopy p-spheres such that $S^k \times A^p$ and $S^k \times B^p$ are diffeomorphic, then either $S^k \times (A^p + B^p)$ or $S^k \times (A^p + (-B^p))$ is diffeomorphic to $S^k \times S^p$, provided that $k \geqslant 2$.*

Proof. If $k \geqslant p-3$, then the lemma is a consequence of Lemma 1. Thus we can assume that $k < p-3$. The hypothesis implies that A^p may be embedded in $D^{k+1} \times B^p$ with a trivial normal bundle. Furthermore, it follows from an argument given in the proof of Lemma 3 that the embedding $A^p \to D^{k+1} \times B^p$ is a homotopy equivalence. Let us assume that the embedding maps the orientation class of A^p onto the orientation class of B^p in $D^{k+1} \times B^p$ (otherwise we replace B^p by $-B^p$). Now $-B^p$ is embedded in $D^{k+1} \times B^p$ in the obvious way with a trivial normal bundle and we can

assume that A^p and $-B^p$ are disjoint in $D^{k+1}\times B^p$. Thus we can form the connected sum $A^p+(-B^p)$ in $D^{k+1}\times B^p$ such that the resulting embedding $A^p+(-B^p)\to D^{k+1}\times B^p$ has a trivial normal bundle and is homotopically trivial. Now the engulfing result of [9, Chapter 7] applies to conclude that $A^p+(-B^p)$ is embedded in the interior of a $(p+k+1)$-disc in $D^{k+1}\times B^p$. But the normal tube of a homotopy p-sphere embedded in the interior of a $(p+k+1)$-disc is diffeomorphic to $D^{k+1}\times S^p$, provided that $k\geqslant 2$ and $p\neq 3$, 4, and hence it follows that $D^{k+1}\times(A^p+(-B^p))$ is diffeomorphic to $D^{k+1}\times S^p$ (if $p=3$ or 4, then apply [4, Th. 6]).

Lemma 6 implies that the k-equivalence class of an element $A^p\in\Theta_p$ is exactly the union of the cosets $A^p+H_{p,k}$ and $-A^p+H_{p,k}$. That is, each k-equivalence class consists of at most two cosets. Furthermore, a k-equivalence class consists of exactly one coset if and only if it contains an element A^p such that $A^p+H_{p,k}$ is of order two in the group $\Theta_p/H_{p,k}$. This completes the proof of Theorem 2.

3. Classification

Proof of Theorem 1. Since M^n is homeomorphic to $S^k\times S^p$, where $n\geqslant 6$ and $p\geqslant k\geqslant 2$, it follows that M^n is simply connected and $H_3(M^n;Z)$ has no 2-torsion. Therefore the "Hauptvermutung" of D. SULLIVAN [8] implies that there is a combinatorial equivalence

$$h: M^n\to S^k\times S^p, \tag{5}$$

where the combinatorial structures are compatible with the differential structures and $S^k\times S^p$ has the usual combinatorial structure. We now apply the obstruction theory of MUNKRES [6]. The application is particularly simple since we are dealing with a product of spheres. We note that the combinatorial equivalence h is a diffeomorphism mod the $n-1$ skeleton L_{n-1} of M^n; suppose that h is a diffeomorphism mod the $n-q$ skeleton L_{n-q} of M^n, where $1\leqslant q<k-1$. The obstruction to an approximation $g: M^n\to S^p\times S^k$ of h such that g is a diffeomorphism mod the $n-q-1$ skeleton L_{n-q-1}, is a simplicial $(n-q)$-cycle $\lambda_{n-q}h$ of L_{n-q} with coefficients in the group Γ^q (see [6, § 3]; g is called a smoothing of h), where Γ^m is the group of diffeomorphisms of S^{m-1} modulo those diffeomorphisms that are extendable to diffeomorphisms of D^m. If $\lambda_{n-q}h=0$, then the smoothing g exists according to [6, § 4]. Since $\Gamma^1=0$ it follows that the smoothing g does exist if $q=1$. Furthermore, if $\lambda_{n-q-1}g$ is homologous to zero in $H_{n-q-1}(L_{n-q};\Gamma^{q+1})$, then it follows from [6, § 5] that there is a smoothing f of h such that $\lambda_{n-q-1}f=0$. But $H_{n-q-1}(L_{n-q};\Gamma^{q+1})\approx H_{n-q-1}(M^n;\Gamma^{q+1})=0$ for $1\leqslant q<k-1$ and hence by induction there exists a map $g: M^n\to S^k\times S^p$ that is a diffeomorphism mod the $n-k$ skeleton of M^n. Thus the first obstruction to deforming h into a diffeomorphism is a well defined homology class γh (called the obstruction class) in $H_p(M^n;\Gamma^k)$. We first consider the case where $k<p$; then $H_p(M^n;\Gamma^k)\approx\Gamma^k$ and hence we can consider the obstruction class γh to be an element of Γ^k. Let

$\varphi: S^{k-1} \to S^{k-1}$ be a diffeomorphism that represents γh and let $N(\gamma h)$ denote the homotopy k-sphere $D_1^k \cup_\varphi D_2^k$. There is the combinatorial equivalence $j: S^k \to N(\gamma h)$ of degree $+1$, defined by writing $S^k = D_1^k \cup_i D_2^k$ and letting j be the identity on D_1^k and the radial extension of φ^{-1} on D_2^k, and hence we have a combinatorial equivalence $j \times i: S^k \times S^p \to N(\gamma h) \times S^p$, where i is the identity. It follows from [6, Def. 3.4] that the first obstruction $\gamma(j \times i)$ to deforming $j \times i$ to a diffeomorphism is $-\gamma h$. Furthermore, by [6, 3.8] the first obstruction to deforming the composition $(j \times i) \circ h: M^n \to N(\gamma h) \times S^p$ into a diffeomorphism is

$$\begin{aligned} \gamma((j \times i) \circ h) &= \gamma(j \times i) + \gamma h \\ &= -\gamma h + \gamma h \\ &= 0 \end{aligned}$$

and hence we can assume that there is a map

$$h': M^n \to N(\gamma h) \times S^p,$$

that is a diffeomorphism mod the k-skeleton of M^n. By Lemma 1 $N(\gamma h) \times S^p$ is diffeomorphic to $S^k \times S^p$ since $p > k$ (if $k = 3$, then $N(\gamma h)$ is diffeomorphic to S^3 since $\Gamma^3 = 0$, as is well known) and hence we have a map (also denoted by h') $h': M^n \to S^k \times S^p$ that is a diffeomorphism mod the k-skeleton of M^n. The first obstruction to deforming h' into a diffeomorphism is a class $\gamma h' \in H_k(M^n; \Gamma^p) \approx \Gamma^p$. Let $\psi: S^{p-1} \to S^{p-1}$ be a diffeomorphism that represents $\gamma h'$, let $N(\gamma h') = D_1^p \cup_\psi D_2^p$, and let $j': S^p \to N(\gamma h')$ be the combinatorial equivalence of degree $+1$ as defined above for $N(\gamma h')$. Then we have the combinatorial equivalence $i \times j': S^k \times S^p \to S^k \times N(\gamma h')$ and the first obstruction to smoothing $(i \times j') \circ h': M^n \to S^k \times N(\gamma h')$ is $\gamma(i \times j') + \gamma h'$, which is zero since $\gamma(i \times j') = -\gamma h'$. It follows that there is a map $h'': M^n \to S^k \times N(\gamma, h')$ that is a diffeomorphism mod a point of M^n. Under these circumstances it is known that there is a homotopy n-sphere V^n such that M^n is diffeomorphic to $(S^k \times N(\gamma, h')) + V^n$.

Now suppose that $k = p$. The first obstruction to deforming the combinatorial equivalence (5) into a diffeomorphism is a class $\gamma h \in H_k(M^n; \Gamma^k) \approx \Gamma^k \oplus \Gamma^k$; write $\gamma h = \gamma^1 \oplus \gamma^2$, where $\gamma^1, \gamma^2 \in \Gamma^k$, and let $\varphi_1, \varphi_2: S^{k-1} \to S^{k-1}$ be diffeomorphisms that represent γ^1, γ^2. As before we have the homotopy spheres $N(\gamma^1) = D_1^k \cup_{\varphi_1} D_2^k$, $N(\gamma^2) = D_1^k \cup_{\varphi_2} D_2^k$ and the combinatorial equivalences $j_1: S^k \to N(\gamma^1)$, $j_2: S^k \to N(\gamma^2)$. The first obstruction to smoothing $j_1 \times j_2: S^k \times S^k \to N(\gamma^1) \times N(\gamma^2)$ is the class $\gamma(j_1 \times j_2) = (-\gamma^1) \oplus (-\gamma^2)$ and hence the first obstruction to deforming the composition

$$(j_1 \times j_2) \circ h: M^n \to N(\gamma^1) \times N(\gamma^2)$$

is

$$\gamma(j_1 \times j_2) \circ h) = \gamma(j_1 \times j_2) + \gamma h = 0.$$

It follows that there is a map $h': M^n \to N(\gamma^1) \times N(\gamma^2)$ that is a diffeomorphism mod a point. Now a result of WALL applies to conclude that $N(\gamma^1) \times N(\gamma^2)$ and $S^k \times S^k$ are

diffeomorphic up to a point (in fact, see [1, Th. B]) and hence there is a homotopy $2k$-sphere V^n such that M^n is diffeomorphic to $(S^k \times S^k)+V^n$.

The proof of Theorem 1 is now completed by applying Lemmas 1 and 2.

In this theorem it is assumed that $2 \leqslant k \leqslant p$ and $n=p+k \geqslant 6$. We conclude with some remarks on the excluded cases.

CASE 1. $k=1$, $n=p+k \geqslant 6$. The Hauptvermutung of [8] does not apply in this case and so consider a differential n-manifold M^n that is combinatorially equivalent to $S^1 \times S^p$. We can apply the obstruction theory of [6] as was done in the proof of Theorem 1 to conclude that M^n is diffeomorphic to $(S^1 \times A^p)+V^n$, where A^p and V^n are homotopy spheres that are combinatorially equivalent to the standard spheres. Then by application of Lemma 2 we have the following theorem: *If M^n is a differential n-manifold that is combinatorially equivalent to $S^1 \times S^p$, where $n=p+1 \geqslant 6$, then there are homotopy spheres A^p and V^n such that M^n is diffeomorphic to $(S^1 \times A^p)+V^n$. If $S^1 \times A^p$ is diffeomorphic to $S^1 \times S^p$, then V^n is uniquely determined by M^n.* On the other hand, if we assume only that there is a homeomorphism h between M^n and $S^1 \times S^p$, then according to [8] there is an integer q such that the homeomorphism $h \times$ identity between $M^n \times R^q$ and $S^1 \times S^p \times R^q$ is homotopic to a combinatorial equivalence (R^q is euclidean q-space). One can try to smooth the combinatorial equivalence between $M^n \times R^q$ and $S^1 \times S^p \times R^q$ by applying [6].

CASE 2. $p+k \leqslant 6$. Since $\Gamma^q=0$ for $q \leqslant 6$, it follows from MUNKRES' obstruction theory that combinatorial equivalences can be smoothed to diffeomorphisms for manifolds of dimension $\leqslant 6$. Thus if M^n is combinatorially equivalent to $S^k \times S^p$, where $p+k \leqslant 6$, then M^n is diffeomorphic to $S^k \times S^p$.

REFERENCES

[1] R. DE SAPIO, *Embedding π-manifolds*, Ann. of Math. *82* (1965), 213–224.

[2] —, *Actions of θ_{2k+1}*, Michigan Math. J. *14* (1967), 97–100.

[3] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables de variétés dans variétés*, Comment. Math. Helv. *36* (1961), 47–82.

[4] M. W. HIRSCH, *On homotopy spheres of low dimension*, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), (Princeton University Press, Princeton 1965), pp. 199–204.

[5] W. C. HSIANG, J. LEVINE, and R. H. SZCZARBA, *On the normal bundle of a homotopy sphere embedded in euclidean space*, Topology *3* (1965), 173–181.

[6] J. MUNKRES, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*, Ann. of Math. *72* (1960), 521–554.

[7] S. SMALE, *On the structure of manifolds*, Amer. Math. J. *84* (1962), 387–399.

[8] D. SULLIVAN, *On the Hauptvermutung for manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. *73* (1967), 598–600.

[9] E. C. ZEEMAN, *Seminar on combinatorial topology* (mimeographed notes), Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1963, revised 1965).

University of California, Los Angeles

Received June 6, 1968

Locally Flat Imbeddings in the Metastable Range

JACK ALEXANDER LEES[1])

Introduction

With any imbedding f of a topological manifold M^n in the euclidean space E^q, there is associated the continuous map $\tilde{f}$ of $\tilde{M}=M\times M-\Delta_M$ in the unit sphere S^{q-1}, given by $\tilde{f}(x,y)=\dfrac{fx-fy}{\|fx-fy\|}$. The map $\tilde{f}$ is equivariant, that is, $\tilde{f}(x,y)=-\tilde{f}(y,x)$.

The following classification theorem has been proved by HAEFLIGER for differentiable manifolds and by WEBER for piecewise linear manifolds (in fact, for complexes). See [2], [6].

(1) Let $2q\geqslant 3(n+1)$ and suppose $F:\tilde{M}\to S^{q-1}$ is an equivariant map.

Then there is an imbedding $f:M\to E^q$ such that $\tilde{f}$ is homotopic through equivariant maps to F.

(2) Let $2q\geqslant 3(n+1)+1$ and suppose f and g are two imbeddings of M in E^q such that $\tilde{f}$ and $\tilde{g}$ are homotopic through equivariant maps.

Then f and g are isotopic, that is, there is a proper imbedding $H:M\times I\to E^q\times I$ commuting with projection on I such that $H(x,0)=(fx,0)$ and $H(x,1)=(gx,1)$.

In the differentiable and piecewise linear cases, the imbeddings and isotopies above are differentiable and piecewise linear, respectively.

The object of this paper is to prove a somewhat weaker form of the above theorem for topological manifolds and locally flat imbeddings. See Theorems 1 and 2. Here, $2q>3(n+1)$ is required in (1) and $2q>3(n+1)+1$ in (2); note, however, the remarks preceding Theorem 1. Further, the imbeddings f and g in the conclusion of (2) are concordant rather than isotopic, that is, the map H of (2) need not commute with projection on I.

The proofs of Theorems 1 and 2 depend on piecewise linear methods, and polyhedral imbedding theorems of CERNAVSKII and WEBER. Since topological manifolds are not assumed triangulable these methods are not applied directly, but are applied in coordinate neighborhoods which do have triangulations. The proofs then proceed by an induction on the number of coordinate neighborhoods.

1. Preliminary Results

Let M^n be a topological manifold. Unless otherwise specified M will be without boundary. A coordinate neighborhood in M is a pair (U,ψ) where U is an open set

[1]) The author was partially supported by NSF-GP-5609.

in M and $\psi: E^n \to U$ is a homeomorphism. The symbol $|\psi|_\alpha$ denotes the set $\psi\ C^n(\alpha)$ ($C^n(\alpha)$ is the cube $\{|x_i| \leqslant \alpha,\ i=1,\ldots n\}$ in E^n) but also implies that ψ is the homeomorphism. If A is a subspace of a topological space, $\bar{A}$ will denote the closure of A, $\mathring{A}$ the interior of A and $\dot{A}$ or ∂A the boundary of A.

Let M^n, Q^q be topological manifolds, possibly with boundary. Let $f: M \to Q$ be a proper map, that is, $f\mathring{M} \subset \mathring{Q}, f\dot{M} \subset \dot{Q}$. f is said to be locally flat if for each $x \in M$ there are neighborhoods U of fx and V of x in Q and M respectively with $f\,1-1$ on V, and a homeomorphism $h: (U, fV) \to (E^q, E^n)$ if $x \in \mathring{M}$, $h: (U, fV) \to (H^q, H^n)$ if $x \in \dot{M}$. Here H^n denotes the half-space $\{x_1 \geqslant 0\} \subset E^n$.

LEMMA 1. *Let T be a triangulation of $C^n(1)$ and K a subcomplex of T. Let O be an open subset of the topological manifold M^n and suppose ψ is a coordinate homeomorphism such that $\psi K \subset O$. Let f be a locally flat imbedding of O in E^q. Then the map $f(\psi \mid K)$ is locally flat on every open simplex of K.*

LEMMA 2. *Let M be a topological manifold and suppose ψ is a coordinate homeomorphism. Let f be a map of $|\psi|_1$ in E^q such that $f\psi$ is a piecewise linear imbedding of $C^n(1)$ in E^q, $q-n \geqslant 3$. Then $f \mid |\mathring{\psi}|_1$ is a locally flat imbedding of $|\mathring{\psi}|_1$ in E^q.*

Proof of Lemmas 1 and 2.

Proofs of these Lemmas are given in [3].

THEOREM of CERNAVSKII [1]. Let K be a compact polyhedron of dimension n with $2q > 3(n+1)$ and let $f: K \to E^q$ be a topological imbedding of K in E^q. Let f be locally flat on every open simplex of some triangulation T of the polyhedron K. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists an ε-homeomorphism $h: E^q \to E^q$ which is the identity outside an ε neighborhood of fK, where the homeomorphism $hf: K \to E^q$ is piecewise linear on the triangulation T.

If A is a topological space and Δ the diagonal in $A \times A$, let $\tilde{A}$ denote $A \times A - \Delta$. A map $F: \tilde{A} \to S^{q-1}$ will be called equivariant if it commutes with the natural involutions on $\tilde{A}$ and S^q, that is, $F(x, y) = -F(y, x)$ for $(x, y) \in \tilde{A}$. A homotopy through equivariant maps will be denoted by $\underset{\text{eq.}}{\simeq}$. If $f: A \to E^q$ is an imbedding, define $\tilde{f}: A \to S^{q-1}$ by $f(x, y) = \dfrac{fx - fy}{\|fx - fy\|}$.

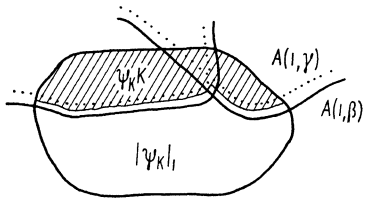
THEOREM OF WEBER [6]. Let T^n be a finite complex, $2q \geqslant 3(n+1)$. Let $F: \tilde{T} \to S^{q-1}$ be an equivariant map. Let $K \subset T$ be a subcomplex and let $f: K \to E^q$ be an imbedding such that $\tilde{f} \underset{\text{eq.}}{\simeq} F \mid \tilde{K}$. Then there is an imbedding $f': T \to E^q$ such that $\tilde{f}' \underset{\text{eq.}}{\simeq} F$ and $f' \mid K = f$.

2. Locally Flat Imbeddings of Topological Manifolds

Let $|\psi_1|, \ldots |\psi_k|$ be coordinate neighborhoods on a topological manifold M. If $\varrho > 0$, $1 \leqslant s \leqslant k$, let $A(s, \varrho) = |\mathring{\psi}_s|_\varrho \cup \cdots \cup |\mathring{\psi}_{k-1}|_\varrho$ and $B(s, \varrho) = |\mathring{\psi}_s|_\varrho \cup \cdots \cup |\mathring{\psi}_k|_\varrho$.

PROPOSITION 1. *Let M^n be a closed topological manifold, $2q>3(n+1)$, $n\geqslant 2$. Suppose $F:\tilde{M}\to S^{q-1}$ is an equivariant map. Let $\alpha<\beta\leqslant 1$, let $|\psi_1|,\ldots|\psi_k|$ be coordinate neighborhoods on M and suppose $f:A(1,\beta)\to E^q$ is a locally flat imbedding with $\tilde{f}\underset{\text{eq.}}{\simeq} F\mid \tilde{A}(1,\beta)$.*

Then there is a locally flat map $g:B(1,\gamma)\to E^q$ with $\alpha<\gamma<\beta$ and $g=f$ on $A(1,\gamma)$. Further, g is an imbedding of $|\psi_k|_\gamma$ in E^q with $\tilde{g}\mid|\tilde{\psi}_k|_\gamma\underset{\text{eq.}}{\simeq} F\mid|\tilde{\psi}_k|_\gamma$.



Proposition 1.

Proof of Proposition 1. Choose γ, $\alpha<\gamma<\beta$ and let T be a triangulation of $C(1)$ so fine that for any closed simplex σ of T, no $\psi_k\sigma$ meets both $|\psi_i|_\gamma$ and $|\psi_i|_\beta$ $i=1,\ldots(k-1)$.

Let $K=$ all $\sigma\in T$ such that $\psi_k\sigma$ does not meet $|\psi_k|_1-A(1,\beta)$. Note that $f(\psi_k\mid K)$ is an imbedding of K in E^q, locally flat on every open simplex of K by Lemma 1. By CERNAVSKII's Theorem, there is a homeomorphism h: $E^q\to E^q$ isotopic to the identity with $hf(\psi_k\mid K)$ a piecewise linear imbedding of K in E^q.

Now $\tilde{C}(1)\xrightarrow{\psi_k\times\psi_k}\tilde{M}\xrightarrow{F}S^{q-1}$ is an equivariant map.

Hence by WEBER's Theorem $hf(\psi_k\mid K)$ extends to a piecewise linear imbedding θ of $C(1)$ in E^q with $\tilde{\theta}\simeq F(\psi_k\times\psi_k)$.

Let g be defined by $\underset{\text{eq.}}{}$

$$f \text{ on } A(1,\gamma) \quad \text{and} \quad h^{-1}\theta\psi_k^{-1} \text{ on } |\psi_k|_\gamma.$$

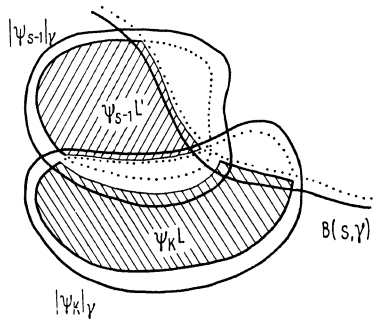
Then g is well defined. By Lemma 2, g is locally flat. Recall h is isotopic to the identity, thus

$$\tilde{g}\mid|\tilde{\psi}_k|_\gamma\underset{\text{eq.}}{\simeq}\widetilde{\theta\psi_k^{-1}}\mid|\tilde{\psi}_k|_\gamma\underset{\text{eq.}}{\simeq}F(\psi_k\times\psi_k)(\psi_k^{-1}\times\psi_k^{-1})\mid|\tilde{\psi}_k|_\gamma=F\mid|\tilde{\psi}_k|_\gamma.$$

This completes the proof of Proposition 1.

PROPOSITION 2. *Let M^n be a topological manifold, $2q>3(n+1)$, $n\geqslant 2$. Suppose $F:\tilde{M}\to S^{q-1}$ is an equivariant map. Let $\alpha<\gamma<1$, $1<s\leq k$ and suppose $g:B(1,\gamma)\to E^q$ is a locally flat map which is an imbedding on $A(1,\gamma)$ and $B(s,\gamma)$, with $F\mid\tilde{A}(1,\gamma)=\tilde{g}\mid\tilde{A}(1,\gamma)$ and $F\mid\tilde{B}(s,\gamma)\underset{\text{eq.}}{\simeq}\tilde{g}\mid\tilde{B}(s,\gamma)$. Then there are δ, g' with $\alpha<\delta<\gamma$ and g' a locally flat map of $B(1,\delta)$ in E^q with g' ambient isotopic to g on $A(1,\delta)$ and g' an imbedding of $B(s-1,\delta)$ in E^q such that $\tilde{g}'\mid\tilde{B}(s-1,\delta)\underset{\text{eq.}}{\simeq}F\mid\tilde{B}(s-1,\delta)$.*

We will prove Proposition 2 in section 4. Once this has been done, the main theorems of the paper follow; see Theorems 1 and 2 below. The strict inequality $2q>3(n+1)$ is required in order to apply CERNAVSKII's Theorem. However, R. H. BING has remarked that CERNAVSKII's result still holds when $2q\geqslant 3(n+1)$; see his mimeographed notes on "Radial Engulfing". If this is in fact the case, Propositions 1 and 2 and hence the main theorems below can be similarly improved.



Proposition 2.

THEOREM 1. *Let M^n be a closed topological manifold, $2q>3(n+1)$, $n\geqslant 2$. Suppose $F:\tilde{M}\to S^{q-1}$ is an equivariant map. Then there is a locally flat imbedding $f: M\to E^q$ with $\tilde{f}\underset{\text{eq.}}{\simeq} F$.*

Proof of Theorem 1. Let $|\psi_1|,\ldots|\psi_r|$ be coordinate neighborhoods on M such that $M\subset|\mathring{\psi}_1|_\alpha\cup\cdots\cup|\mathring{\psi}_r|_\alpha$ with $0<\alpha<1$. Now $F\circ(\psi_1\times\psi_1)$ is an equivariant map of $\tilde{C}(1)$ in S^{q-1}. By WEBER's Theorem, there is a piecewise linear imbedding θ of $C(1)$ in E^q with $\tilde{\theta}\underset{\text{eq.}}{\simeq} F\circ(\psi_1\times\psi_1)$. Then by Lemma 2 $f_1=\theta\psi_1^{-1}$ is a locally flat imbedding of $|\mathring{\psi}_1|_1$ in E^q with $\tilde{f}_1\underset{\text{eq.}}{\simeq} F\,|\,\tilde{|\mathring{\psi}_1|_1}$.

Now apply an inductive argument based on Propositions 1 and 2. Suppose that β, f_{k-1} have been defined with $\alpha<\beta\leqslant 1$ and f_{k-1} a locally flat imbedding of $A(1,\beta)$ in E^q with $\tilde{f}_{k-1}\underset{\text{eq.}}{\simeq} F\,|\,\tilde{A}(1,\beta)$. By Proposition 1, f_{k-1} can be extended to a locally flat map $g:B(1,\gamma)\to E^q$ with $\alpha<\gamma<\beta$ such that $\tilde{g}\,|\,\tilde{|\mathring{\psi}_k|}_\gamma\underset{\text{eq.}}{\simeq} F\,|\,\tilde{|\mathring{\psi}_k|}_\gamma$. By repeated application of Proposition 2 with $s=k,\ldots 2$, δ and f_k are obtained with $\alpha<\delta<\gamma$ and f_k a locally flat imbedding of $B(1,\delta)$ in E^q with $\tilde{f}_k\underset{\text{eq.}}{\simeq} F\,|\,\tilde{B}(1,\delta)$. This completes the inductive step. Thus there is a locally flat imbedding $f_r: M\to E^q$ with $\tilde{f}_r\underset{\text{eq.}}{\simeq} F$. The proof of Theorem 1 is completed by setting $f=f_r$.

LEMMA 3. *Let M be a topological manifold and let $h:\tilde{M}\times I\to S^{q-1}$ be an equivariant*

homotopy. Then there is an equivariant map H which makes the following diagram commutative for $i=0, 1$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M \times \{i\}} & \xrightarrow{h|\widetilde{M\times\{i\}}} & S^{q-1} \\ \cap & & \\ \widetilde{M \times I} & \xrightarrow{H} & \cap\, S^q \end{array}$$

Proof of Lemma 3. Let

$$H(x, t, x', t') = \left(h\left(x, x', \frac{t+t'}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}(t-t'), \sin\frac{\pi}{2}(t-t')\right).$$

Since

$$\|H(x, t, x', t')\|^2 = \left\|h\left(x, x', \frac{t+t'}{2}\right)\right\|^2 \cos^2\frac{\pi}{2}(t-t') + \sin^2\frac{\pi}{2}(t-t')$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{2}(t-t') + \sin^2\frac{\pi}{2}(t-t') = 1,$$

$H: \widetilde{M\times I} \to S^q \subset E^{q+1}$.

Since

$$H(x', t', x, t) = \left(h\left(x', x, \frac{t'+t}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}(t'-t), \sin\frac{\pi}{2}(t'-t)\right)$$

$$= \left(-h\left(x, x', \frac{t+t'}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}(t-t'), -\sin\frac{\pi}{2}(t-t')\right),$$

H is equivariant.

Note that $H(x, x', 0, 0)=(h(x, x', 0), 0)$ and $H(x, x', 1, 1)=(h(x, x', 1), 1)$. This completes the proof.

THEOREM 2. *Let M^n be a closed topological manifold, $2q>3(n+1)+1$, $n\geqslant 2$. Suppose f and g are two locally flat imbeddings of M in E^q and that $\tilde{f}\underset{\text{eq.}}{\simeq}\tilde{g}: \tilde{M}\to S^{q-1}$. Then f and g are concordant, that is, there is a proper locally flat imbedding $h: M\times I\to E^q\times I$ with $h(x, 0)=(fx, 0)$ and $h(x, 1)=(gx, 1)$.*

Proof of Theorem 2. Let $\varepsilon>0$, $0<\alpha<1$. Let $\ldots|\psi_{-m}|, \ldots|\psi_0|, |\psi_1|, \ldots|\psi_r|$ be a locally finite collection of coordinate neighborhoods on $M\times \mathring{I}$, such that $M\times\mathring{I}\subset\cdots\cup|\mathring{\psi}_{-m}|_\alpha\cup\cdots\cup|\mathring{\psi}_0|_\alpha\cup\cdots\cup|\mathring{\psi}_r|_\alpha$.

Further suppose that $M\times(0, \varepsilon]\cup[1-\varepsilon, 1)\subset\cdots\cup|\mathring{\psi}_{-m}|_\alpha\cup\cdots\cup|\mathring{\psi}_0|_\alpha$ and that $\cdots\cup|\mathring{\psi}_{-m}|_1\cup\cdots\cup|\mathring{\psi}_0|_1\subset M\times(0, 2\varepsilon]\cup[1-2\varepsilon, 1)$. By Lemma 3, since $\tilde{f}\simeq\tilde{g}: \tilde{M}\to S^{q-1}\subset S^q$, there is an equivariant map $F: \widetilde{M\times I}\to S^q$ with $F\,|\,\widetilde{M\times 0}\underset{\text{eq.}}{=}\tilde{f}$, and $F\,|\,\widetilde{M\times 1}=\tilde{g}$. Let $\Phi: \widetilde{M\times[0, 2\varepsilon]}\cup\widetilde{M\times[1-2\varepsilon, 1]}\to S^q$ be defined by $\tilde{f}$ on $\widetilde{M\times[0, 2\varepsilon]}$ and $\tilde{g}$ on $\widetilde{M\times[1-2\varepsilon, 1]}$. Now $F\,|\,\widetilde{M\times[0, 2\varepsilon]}\cup\widetilde{M\times[1-2\varepsilon, 1]}\underset{\text{eq.}}{\simeq}\Phi$ rel $\widetilde{M\times 0}\cup\widetilde{M\times 1}$ and by the homotopy extension property for $(M\times I, M\times([0, 2\varepsilon]\cup[1-2\varepsilon, 1]))$,

$F \simeq F'$ rel $\overline{M \times 0} \cup \overline{M \times 1}$ where $F' \mid \overline{M \times [0, 2\varepsilon]} \cup \overline{M \times [1-2\varepsilon, 1]} = \Phi$. Thus assume without loss of generality that $F \mid \overline{M \times [0, 2\varepsilon]} = \tilde{f}$ and $F \mid \overline{M \times [1-2\varepsilon, 1]} = \tilde{g}$. Let $h_0 : \cdots \cup |\mathring{\psi}_{-m}|_1 \cup \cdots \cup |\mathring{\psi}_0|_1 \to E^q \times \mathring{I}$ be defined by the restriction of $f \times \mathrm{id.}$ on $M \times (0, 2\varepsilon]$, $g \times \mathrm{id.}$ on $M \times [1-2\varepsilon, 1)$. Then h_0, F' satisfy the hypotheses of Proposition 4. By repeated application of arguments used to prove Theorem 1, a locally flat imbedding h_r of $M \times \mathring{I}$ in $E^q \times \mathring{I} \approx E^{q+1}$ is obtained, with $h_r \mid M \times (0, \varepsilon] = f \times \mathrm{id.}$ and $h_r \mid M \times [1-\varepsilon, 1) = g \times \mathrm{id.}$ Let $h : M \times I \to E^q \times I$ be defined by h_r on $M \times \mathring{I}$, $h(x, 0) = (fx, 0)$ and $h(x, 1) = (gx, 1)$. This completes the proof of Theorem 2.

3. Some Technical Results

We will first state some results from piecewise linear (p.l.) topology.

ZEEMAN'S GENERAL POSITION THEOREM [8]. Let $X_0 \subset X^n$, Y^k be polyhedra and Q^q a p.l. manifold with Y a subcomplex of Q.

Let $f : X \to Q$ be a p.l. imbedding such that $f(X - X_0) \subset \dot{Q}$. Then there is an arbitrarily small ambient p.l. isotopy sending f into g keeping $\dot{Q} \cup fX_0$ fixed, such that $\dim g(X - X_0) \cap Y \leqslant n + k - q$.

If $\dot{Q} = \phi$ and $f(\overline{X - X_0})$ does not meet the closed set C, the isotopy can also be chosen fixed on C. $g \mid X - X_0$ is said to be in general position with respect to Y.

Suppose X is a subcomplex of a p.l. manifold Q^q, with respect to a given triangulation. Let $N(X, Q'')$ be the closed simplicial neighborhood of X in the barycentric 2nd derived of Q.

Theorem of WHITEHEAD [7]. If $X \searrow 0$ (X collapses to a point), then $N(X, Q'')$ is a q-ball.

ZEEMAN'S Engulfing Theorem [8]. Let B be a p.l. q-ball and X^k a subcomplex of $\mathring{B}$. Then there exists a $k+1$ dimensional collapsible subspace $C \subset \mathring{B}$ with $X \subset C$.

Theorem of STALLINGS [5]. Let Q^q be a p.l. manifold without boundary, $q \geqslant 5$. Suppose Q is contractible and 1-connected at infinity. Then Q is p.l. homeomorphic to E^q.

LEMMA 4. *Let X be a polyhedron in E^q, $q \geqslant 5$. Suppose $X \subset B$ where B is an open subset of E^q, homeomorphic to E^q.*

Then $X \subset \mathring{B}'$ where $B' \subset B$ is a closed p.l. q-ball in E^q.

Proof of Lemma 4. As an open subset of E^q, B has a p.l. structure such that the inclusion $i : B \to E^q$ is a p.l. imbedding. Further, since B is homeomorphic to E^q, B is contractible and 1-connected at infinity. Hence by STALLING's Theorem, there is a p.l. homeomorphism $h : E^q \to B$.

Now $h^{-1}X$ is compact in E^q, hence is contained in the interior of a large standard closed q-ball Δ^q. Thus $X \subset h\mathring{\Delta}^q$, $h\Delta^q \subset B$. However, the inclusion of B in E^q is a p.l.

imbedding, hence $B'=ih\Delta^q$ is a closed p.l. q-ball p.l. imbedded in E^q satisfying the conclusion of the Lemma.

LEMMA 5. *Let X^k, Y^l be polyhedra with $l+k+1<q$, $2q>3(l+1)$, $q\geqslant 5$. Let B^q be a* p.l. *ball in E^q, with $X\subset \mathring{B}$.*

Suppose $f: Y\to E^q$ is a topological imbedding of Y in E^q, locally flat on every open simplex of Y, with $fY\cap X=\phi$.

Then there is a p.l. *ball $B_1^q\subset B\subset E^q$ with $X\subset \mathring{B}_1$ and $B_1\cap fY=\phi$.*

Proof of Lemma 5. *By* ZEEMAN's Engulfing Theorem, there is a collapsible C with $X\subset C\subset \mathring{B}$ and $\dim C\leqslant k+1$.

By CERNAVSKII's Theorem, there is a homeomorphism $h: E^q\to E^q$ fixed on X with $hf: Y\to E^q$ a p.l. imbedding, h so close to the identity that $h^{-1}C\subset \mathring{B}$.

By ZEEMAN's General Position Theorem, there is a homeomorphism $h': E^q\to E^q$ fixed on $hX=X$ with $h'hfY\cap C=\phi$, since $l+(k+1)<q$. h' can be chosen so close to the identity that $h^{-1}C\subset h\mathring{B}$. Write $g=h^{-1}h'^{-1}$ so that g is fixed on X, $fY\cap gC=\phi$, and $gC\subset \mathring{B}$.

Now let J be a triangulation of E^q with C as a subcomplex, so fine that if $N=N(C, J'')$, then $gN\subset \mathring{B}$ and $gN\cap fY=\phi$. By WHITEHEAD's Theorem, N is a p.l. q-ball. Note that $g^{-1}X=X\subset C\subset \mathring{N}$ so that $g\mathring{N}$ is an open topological q-ball in E^q containing X. By Lemma 4, there is a closed p.l. q-ball $B_1\subset E^q$ with $X\subset B_1$, $B_1\subset g\mathring{N}\subset B$. Note that $B_1\cap fY\subset gN\cap fY=\phi$. This concludes the proof of Lemma 5.

Let B^k, B^l, B^q be p.l. balls and let $\phi: B^k\cup B^l\to B^q$ be a proper p.l. map such that $\phi\mid B^k$ and $\phi\mid B^l$ are p.l. imbeddings, and $\phi\dot{B}^k\cap\phi\dot{B}^l=\phi$. Let $\tilde{\phi}:\partial(B^k\times B^l)\to S^{q-1}$ be defined by $\tilde{\phi}(x, y)=\dfrac{\phi x-\phi y}{\|\phi x-\phi y\|}$. Then an element $I(\phi\mid B^k, \phi\mid B^l)\,\varepsilon\pi_{k-1}(S^{q-l-1})$ is defined by WEBER such that the following propositions are true [6].

WEBER'S PROPOSITION 1. Let E denote the FREUDENTHAL suspension map. Then $(-1)^{q-l}E^lI(\phi\mid B^k, \phi\mid B^l)=$ the class of $\tilde{\phi}$ in $\pi_{k+l-1}(S^{q-1})$.

WEBER'S PROPOSITION 2. Suppose $I(\phi\mid B^k, \phi\mid B^l)=0$. By Proposition 1, $\tilde{\phi}\simeq 0$. Let Φ be an extension of $\tilde{\phi}$. Then if k, $l\leqslant n$ and $2q\geqslant 3(n+1)$ there is a proper isotopy $h_t: B^k\to B^q$ such that $h_0=\phi\mid B^k$, h_t is fixed on $\dot{B}^k$, $h_1B^k\cap\phi B^l=\phi$ and the map $\Phi_h:\partial(B^k\times B^l\times I)\to S^{q-1}$ defined as follows, is homotopic to 0.

$$\Phi_h\mid B^k\times B^l\times 0=\Phi$$

$$\Phi_h\mid \partial(B^k\times B^l)\times t=\frac{\phi x-h_t y}{\|\phi x-h_t y\|}$$

$$\Phi_h\mid B^k\times B^l\times 1=\frac{\phi x-h_1 y}{\|\phi x-h_1 y\|}.$$

4. Further Technical Results and the Proof of Proposition 2.

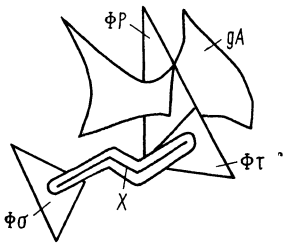
We must now separate the images of the double points of a locally flat map of the open manifold $B(1, \gamma)$ in E^q. We first establish the technical Proposition 3 and its corollary, which are based on the results of WEBER. Recall that in [6], WEBER distinguishes between "near" and "far" double points of a map of a given complex in E^q.

In the present case, the map of $B(1, \gamma)$ in E^q is locally an imbedding, thus the double points of this map are "far" points. Here, however, when we pull apart the images of these "far" points, we must not meet the images of other coordinate neighborhoods, which are only topologically imbedded.

As in [6], this is done by a succession of moves, each of which is the identity outside a ball in E^q. The effect of a move is to pull apart the images of two simplexes which lie in different coordinate neighborhoods; the corresponding ball is constructed so as to meet neither the images of simplexes which have already been pulled apart, nor the images of other topologically imbedded coordinate neighborhoods.

Suppose δ, γ and g are given with $0<\delta<\gamma$ and $g: B(s, \gamma) \to E^q$ a locally flat imbedding. Let H be a subcomplex of $C(\gamma)$, and let ψ be a coordinate neighborhood on M with $\psi H \subset B(s, \gamma)$. Write $A = \bar{A}(s, \delta) \cup \psi H$.

PROPOSITION 3. Let K^n be a finite complex whose simplexes are ordered so that a simplex follows all its faces. Let σ be the last simplex of K, suppose $St(\sigma, K)$ is full in K and let $K = L \cup \sigma$.



Proposition 3.

Let $\Phi: \tilde{K} \to S^{q-1}$ be an equivariant map and suppose there is a p.l. map $\phi: K \to E^q$ such that

1. $\phi \mid L$ is an imbedding.
2. $\phi \mid St(\sigma, K)$ is an imbedding.

Let $2q > 3(n+1)$, $n \geqslant 2$.

(A) Let $\tau \in L - St(\sigma, K)$, $P =$ all simplexes of L preceding τ.

Suppose $\phi\sigma \cap [\phi P \cup gA] = \phi$ and $\phi \mathring{\tau} \cap gA = \phi$. Let $J = \tilde{L} \cup (\sigma \times P) \cup (P \times \sigma)$ and

suppose $\tilde{\phi}: J \to S^{q-1}$ is given by $\tilde{\phi}(x, y) = \dfrac{\phi x - \phi y}{\|\phi x - \phi y\|}$ with $\tilde{\phi} = \Phi \mid J$. Then there is an ambient p.l. isotopy ϕ_t of $\phi \mid St(\sigma, K)$ fixed outside $\mathring{\sigma}$ with $\phi_t \sigma \cap [\phi P \cup gA] = \phi$ and $\phi_1 \sigma \cap \phi\tau = \phi$. Let $\phi': K \to E^q$ be given by ϕ on L, ϕ_1 on σ.

If $J' = \tilde{L} \cup (\sigma \times (P \cup \tau)) \cup ((P \cup \tau) \times \sigma)$ and $\tilde{\phi}': J' \to S^{q-1}$ is given by $\tilde{\phi}'(x, y) = \dfrac{\phi' x - \phi' y}{\|\phi' x - \phi' y\|}$ then there is an equivariant homotopy $h_t: J' \to S^{q-1}$ with $h_0 = \Phi \mid J'$, $h_1 = \tilde{\phi}'$, h_t fixed on $\tilde{L}$ and for $(x, y) \in (P \cup \tau) \times \sigma$, $h_t(x, y) = \dfrac{\phi x - \phi_t y}{\|\phi x - \phi_t y\|}$.

(B) Let K_0 be a subcomplex of K and suppose $\phi\sigma \cap gA = \phi$, $\phi\mathring{\sigma} \cap \phi K_0 = \phi$ and $\phi L \cap gA \subset \phi K_0$.

Let $J = \tilde{L} \cup (\sigma \times K_0) \cup (K_0 \times \sigma)$ and let $\tilde{\phi}: J \to S^{q-1}$ be given by $\tilde{\phi}(x, y) = \dfrac{\phi x - \phi y}{\|\phi x - \phi y\|}$ with $\tilde{\phi} = \Phi \mid J$.

Then there is an ambient p.l. isotopy ϕ_t of $\phi \mid St(\sigma, K)$ fixed outside $\mathring{\sigma}$ with $\phi_t \sigma \cap gA = \phi$, $\phi_t \mathring{\sigma} \cap \phi K_0 = \phi$ and $\phi_1 \sigma \cap \phi L = \phi_1 \mathring{\sigma}$. Thus $\phi': K \to E^q$ given by ϕ on L and ϕ_1 on σ is an imbedding.

If $\tilde{\phi}': \tilde{K} \to S^{q-1}$ is given by $\tilde{\phi}'(x, y) = \dfrac{\phi' x - \phi' y}{\|\phi' x - \phi' y\|}$, then there is an equivariant homotopy $h_t: \tilde{K} \to S^{q-1}$ with $h_0 = \Phi$, $h_1 = \tilde{\phi}'$, h_t fixed on $\tilde{L}$ and $h_t(x, y) = \dfrac{\phi x - \phi_t y}{\|\phi x - \phi_t y\|}$ on $K_0 \times \sigma$.

Proof of Proposition 3. Proposition 3. (B) follows from Proposition 3. (A) by an induction on the simplexes τ of $L - (K_0 \cup St(\sigma, K))$. The following is a proof of Proposition 3. (A).

3.1. There exists a p.l. ball $B^q \subset E^q$ which meets $\phi\sigma$, $\phi\tau$ in p.l. balls of dimension $\dim\sigma$, $\dim\tau$ respectively, properly imbedded in B and such that

$$\phi\sigma \cap \phi\tau \subset \mathring{B},\ B \cap [\phi P \cup \phi(St(\sigma, K) - \mathring{\sigma}) \cup gA] = \phi.$$

Proof of 3.1. Note that the hypothesis of Proposition 3 implies $\phi\sigma \cap \phi\tau \subset \phi\mathring{\sigma} \cap \phi\mathring{\tau}$. By ZEEMAN's General Position, there is a p.l. homeomorphism $k: E^q \to E^q$ isotopic to the identity fixed on $\phi(P \cup (St(\sigma, K) - \mathring{\sigma}))$ such that $\dim k\phi\sigma \cap \phi\tau \leqslant \dim\sigma + \dim\tau - q \leqslant 2n - q$, $k\phi\sigma \cap \phi\tau \subset k\phi\mathring{\sigma} \cap \phi\mathring{\tau}$ and k so close to the identity that $k\phi\sigma \cap gA = \phi$. Without loss of generality, replace ϕ by the map ϕ on L, $k\phi$ on σ. Thus assume $\dim\phi\sigma \cap \phi\tau \leqslant 2n - q$.

Let $S = \sigma \cap \phi^{-1}\phi\tau$, $S' = \tau \cap \phi^{-1}\phi\sigma$ so $\dim S \cup S' \leqslant 2n - q$. By ZEEMAN's Engulfing Theorem, there are Q, Q' with $S \subset Q \subset \mathring{\sigma}$, $S' \subset Q' \subset \mathring{\tau}$, $Q \searrow 0$, $Q' \searrow 0$ and $\dim Q \cup Q' \leqslant 2n - q + 1$. Let $X = \phi(Q \cup Q')$ so $\dim X \leqslant 2n - q + 1$, and let B^q_k be a p.l. q-ball in E^q with $X \subset \mathring{B}_k$.

Now by Lemma 1, $g(\psi_{k-1} \mid C(\delta))$ is a topological imbedding of $C(\delta)$ in E^q, locally flat on every open simplex of $C(\delta)$. If $s \leqslant k-1$, $X \cap g\psi_{k-1} C(\delta) = \phi$. Also $2q > 3(n+1)$ and so $(2n-q+1)+n+1 < q$. Thus by Lemma 5, there is a p.l. q-ball $B^q_{k-1} \subset E^q$ with $B_{k-1} \subset B_k$, $X \subset \mathring{B}_{k-1}$ and $B_{k-1} \cap g\psi_{k-1} C(\delta) = \phi$. If $s \leqslant k-2$, another application of Lemma 5 gives a p.l. q-ball $B^q_{k-2} \subset B_{k-1}$ with $X \subset \mathring{B}_{k-2}$, and $B_{k-2} \cap g\psi_{k-2} C(\delta) = \phi$. Continuing in this fashion, a sequence of p.l. q-balls $B_s \subset \cdots \subset B_{k-2} \subset B_{k-1}$ is obtained with $X \subset \mathring{B}_s$ and $B_s \cap g\bar{A}(s, \delta) = \phi$.

Again by Lemma 1, $g(\psi \mid H)$ is a topological imbedding of H in E^q, locally flat on every open simplex of H. Also $\phi Q \cap g\psi H = \phi$ and $\phi Q' \cap g\psi H = \phi$, hence $X \cap g\psi H = \phi$. Now apply Lemma 5 to find a p.l. q-ball $B^q_{s-1} \subset B_s$ with $X \subset \mathring{B}_{s-1}$ and $B_{s-1} \cap g\psi H = \phi$. Note $B_{s-1} \cap gA = \phi$.

Recall $\dim X \leqslant 2n-q+1$. Hence by ZEEMAN's Engulfing Theorem, there is a Q'', $X \subset Q'' \subset \mathring{B}_{s-1}$ with $Q'' \searrow 0$ and $\dim Q'' \leqslant 2n-q+2$. By ZEEMAN's General Position, there is a homeomorphism $h: E^q \to E^q$ of Q'' isotopic to the identity fixed on X such that hQ'' meets ϕK precisely in X. This is possible since $\dim Q'' + \dim K \leqslant 2n-q+2+n < q$. Further, h can be chosen so close to the identity that $hQ'' \subset \mathring{B}_{s-1}$. Thus assume without loss of generality that $Q'' \subset \mathring{B}_{s-1}$ and $Q'' \cap \phi K = X$.

Now let σ, τ and B_{s-1} be triangulated so that $\phi \mid \sigma \cup \tau$ is simplicial and so that if $B_\sigma = N(Q, \sigma'')$, $B_\tau = N(Q', \tau'')$ and $B = N(Q'', B''_{s-1})$, $B_\sigma \cap \dot{\sigma} = \phi$, $B_\tau \cap \dot{\tau} = \phi$ and $B \cap \phi(St(\sigma, K) - \mathring{\sigma}) = \phi$. Then B_σ, B_τ and B are proper p.l. balls and $\phi \mid B_\sigma$, $\phi \mid B_\tau$ are proper p.l. imbeddings of B_σ, B_τ in B. Since $B \subset B_{s-1}$, $B \cap gA = \phi$ as required. This completes the proof of 3.1.

Notice that $\phi\sigma \cap \phi\tau \subset \phi \mathring{B}_\sigma \cap \phi \mathring{B}_\tau$, and so $\tilde{\phi}: \sigma \times \tau - \mathring{B}_\sigma \times \mathring{B}_\tau \to S^{q-1}$ is well defined by $\tilde{\phi}(x, y) = \dfrac{\phi x - \phi y}{\|\phi x - \phi y\|}$.

3.2 Without loss of generality, assume $\tilde{\phi} = \Phi$ on $\sigma \times \tau - \mathring{B}_\sigma \times \mathring{B}_\tau$. For, $\Phi = \tilde{\phi}$ on $\partial(\sigma \times \tau)$ and by the annulus theorem of regular neighborhood theory [4], $\sigma \times \tau - \mathring{B}_\sigma \times \mathring{B}_\tau \approx \partial(\sigma \times \tau) \times I$ ($\approx$ denotes piecewise linear equivalence). Hence $\Phi \simeq \tilde{\phi}$ (Φ is homotopic to $\tilde{\phi}$) on $\sigma \times \tau - \mathring{B}_\sigma \times \mathring{B}_\tau$ rel $\partial(\sigma \times \tau)$. Now the homotopy extension property for $(\sigma \times \tau, \sigma \times \tau - \mathring{B}_\sigma \times \mathring{B}_\tau)$ shows that $\Phi \simeq \Phi'$ on $\sigma \times \tau$ rel $\partial(\sigma \times \tau)$ where $\Phi' \mid \sigma \times \tau - \mathring{B}_\sigma \times \mathring{B}_\tau = \tilde{\phi} \mid \sigma \times \tau - \mathring{B}_\sigma \times \mathring{B}_\tau$. Thus $\tilde{\phi} \mid \partial(B_\sigma \times B_\tau)$ extends over $B_\sigma \times B_\tau$, hence $\tilde{\phi} \mid \partial(B_\sigma \times B_\tau) \simeq 0$.

Now according to Proposition 1 of WEBER, $E^{\dim \tau} I(\phi \mid B_\sigma, \phi \mid B_\tau) = 0$, where $I(\phi \mid B_\sigma, \phi \mid B_\tau) \in \pi_{\dim \sigma - 1}(S^{q - \dim \tau - 1})$. By the classical suspension theorems, $E^{\dim \tau}$ is injective since $\dim \sigma - 1 \leqslant 2(q - \dim \tau - 1) - 2$. (Recall $2q > 3(n+1)$.) Hence $I(\phi \mid B_\sigma, \phi \mid B_\tau) = \phi$. Thus by WEBER's Proposition 2 there is a proper ambient isotopy $k_t: B_\sigma \to B$ such that $k_0 = \phi \mid B_\sigma$, k_t is fixed on $\dot{B}_\sigma$, $k_1 B_\sigma \cap B_\tau = \phi$ and the map $\Phi_h: \partial(B_\sigma \times B_\tau \times I) \to S^{q-1}$ defined as follows, is homotopic to 0.

$$\Phi_h \mid B_\sigma \times B_\tau \times 0 = \Phi$$

$$\Phi_h \mid \partial(B_\sigma \times B_\tau) \times t = \frac{\phi x - k_t y}{\|\phi x - k_t y\|}$$

$$\Phi_h \mid B_\sigma \times B_\tau \times 1 = \frac{\phi x - k_1 y}{\|\phi x - k_1 y\|}.$$

Extend k_t to an ambient isotopy ϕ_t of $St(\sigma, K)$ in E^q fixed outside $\mathring{\sigma}$ by $\phi_t = \phi$ outside B_σ. Further, the given extension of Φ_h to $B_\sigma \times B_\tau \times I$ extends to a homotopy $h_t: J' \to S^{q-1}$ with the required properties. This completes the proof of Proposition 3.

COROLLARY OF PROPOSITION 3. Let L^n, T^n be disjoint finite complexes ordered so that a simplex follows all its faces and let $\phi: L' \cup T \to E^q$ be a p.l. map. Suppose $\phi \mid L'$ and $\phi \mid T$ are imbeddings, $2q > 3(n+1)$ and $n \geqslant 2$.

Let $K \subset T$, $K' \subset L'$ be subcomplexes and suppose $\phi L' \cap \phi K = \phi$, $\phi L' \cap gA \subset \phi K'$, $\phi T \cap \phi K' = \phi$ and no simplex of $T - K$ meets $\phi^{-1} gA$.

Let $\Phi: \overline{L' \cup T} \to S^{q-1}$ be an equivariant map and suppose $\tilde{\phi}: \overline{T \cup K'} \to S^{q-1}$ is given by $\tilde{\phi}(x, y) = \dfrac{\phi x - \phi y}{\|\phi x - \phi y\|}$ with $\tilde{\phi} = \Phi \mid \overline{T \cup K'}$.

Then there is an ambient isotopy ϕ_t of $\phi \mid T$ fixed on K with $\phi_t T \cap \phi K' = \phi$, $\phi_t T \cap gA \subset \phi K$ and $\phi_1 T \cap \phi L' = \phi$. If $\phi': L' \cup T \to E^q$ is the imbedding given by ϕ on L' and ϕ_1 on T, let $\tilde{\phi}': \overline{L' \cup T} \to S^{q-1}$ be given by $\tilde{\phi}'(x, y) = \dfrac{\phi' x - \phi' y}{\|\phi' x - \phi' y\|}$. Then $\Phi \underset{\text{eq.}}{\simeq} \tilde{\phi}'$ by an equivariant homotopy h_t fixed on $\overline{L' \cup K}$ with $h_t(x, y) = \dfrac{\phi x - \phi_t y}{\|\phi x - \phi_t y\|}$ on $K' \times T$.

Proof of the Corollary. The Corollary follows from Proposition 3. (B) by induction on the simplexes σ of $T - K$.

We are now ready to prove Proposition 2, which is restated here for convenience.

PROPOSITION 2. Let M^n be a topological manifold, $2q > 3(n+1)$, $n \geqslant 2$. Suppose $F: \tilde{M} \to S^{q-1}$ is an equivariant map. Let $\alpha < \gamma < 1$, $1 < s \leqslant k$ and suppose $g: B(1, \gamma) \to E^q$ is a locally flat map which is an imbedding on $A(1, \gamma)$ and $B(s, \gamma)$, with $F \mid \tilde{A}(1, \gamma) = \tilde{g} \mid \tilde{A}(1, \gamma)$ and $F \mid \tilde{B}(s, \gamma) \underset{\text{eq.}}{\simeq} \tilde{g} \mid \tilde{B}(s, \gamma)$. Then there are δ, g' with $\alpha < \delta < \gamma$ and g' a locally flat map of $B(1, \delta)$ in E^q with g' ambient isotopic to g on $A(1, \delta)$ and g' an imbedding of $B(s-1, \delta)$ in E^q such that $\tilde{g}' \mid \tilde{B}(s-1, \delta) \underset{\text{eq.}}{\simeq} F \mid \tilde{B}(s-1, \delta)$.

Proof of Proposition 2. Choose $\delta, \alpha < \delta < \gamma$ and suppose T is a triangulation of $C(\delta)$ so fine that for each closed simplex σ of T

(1) No $\psi_k \sigma$ meets both $|\dot{\psi}_i|_\delta$ and $|\dot{\psi}_i|\gamma \quad i = 1, \ldots (k-1)$.

Let $K=$all $\sigma\in T$ such that $\psi_k\sigma$ does not meet $|\psi_k|_\delta - A(1,\gamma)$. Let $L=$all $\sigma\in T$ such that $\psi_k\sigma$ does not meet $\bar{A}(1,\delta)$. Note $T=K\cup L$ and $g\psi_k L\cap g\bar{A}(s,\delta)=\phi$.

Now suppose T' is a triangulation of $C(\delta)$ so fine that for each closed simplex σ of T'

(2) No $\psi_{s-1}\sigma$ meets both $|\psi_j|_\delta$ and $|\psi_j|_\gamma$ $j=s,\dots k$.

Let $H=$all $\sigma\in T'$ such that $\psi_{s-1}\sigma$ does not meet $|\psi_{s-1}|_\delta - B(s,\gamma)$. Let $L'=$all $\sigma\in T'$ such that $\psi_{s-1}\sigma$ does not meet $\bar{B}(s,\delta)$. Note $T'=H\cup L'$.

2.1. Without loss of generality, assume that $g(\psi_k \mid T)$ and $g(\psi_{s-1}\mid L')$ are p.l. imbeddings of T, L' in E^q.

Proof of 2.1. Notice that Lemma 1 implies that $g(\psi_k \mid T)$ is a topological imbedding of T in E^q, locally flat on every open simplex of T. Hence by CERNAVSKII's Theorem there is a homeomorphism $h:E^q\to E^q$ isotopic to the identity such that $hg(\psi_k \mid T)$ is a p.l. imbedding of T in E^q. Thus, without loss of generality, relabel so that $g(\psi_k \mid T)$ is a p.l. imbedding of T in E^q. Observe $g\psi_k L\cap g\bar{A}(s,\delta)$ is still empty.

Again by Lemma 1, $g(\psi_{s-1}\mid L')$ is a topological imbedding of L' in E^q, locally flat on every open simplex of L'. Choose δ^+, $\delta<\delta^+<\gamma$ so that $\bar{A}(1,\delta^+)$ does not meet $\psi_k L$. By CERNAVSKII's Theorem there is a homeomorphism $h:E^q\to E^q$ isotopic to the identity by an arbitrarily small isotopy fixed outside a neighborhood of $g\psi_{s-1}L'$, in particular fixed on $g(A(1,\gamma)-\bar{A}(1,\delta^+))\cup g\psi_k K$, with $hg\psi_{s-1}\mid L'$ a p.l. imbedding.

Define $g_1:B(1,\gamma)\to E^q$ by $g_1=hg$ on $A(1,\gamma)$ and $g_1=g$ on $|\psi_k|_\gamma - \bar{A}(1,\delta^+)$. Now g_1 is locally flat and $g_1=g$ on $\psi_k T$. Thus $g_1(\psi_{s-1}\mid L')$ and $g_1(\psi_k\mid T)$ are p.l. imbeddings of L' and T in E^q, and h can be chosen so close to the identity that $g_1\psi_k L\cap g_1\bar{A}(s,\delta)$ is still empty. Thus by relabeling, assume $g(\psi_{s-1}\mid L')$ and $g(\psi_k\mid T)$ are p.l. imbeddings of L' and T in E^q with $g\psi_k L\cap g\bar{A}(s,\delta)=\phi$. This completes the proof of 2.1.

2.2. Order the simplexes of T and L' so that each simplex follows all its faces and let $\phi:T\cup L'\to E^q$ be given by $g\psi_{s-1}$ on L' and $g\psi_k$ on T. Let $K'=H\cap L'$ and let $A=\bar{A}(s,\delta)\cup\psi_{s-1}H$. Then $\phi L'\cap\phi K=\phi$, $\phi L'\cap gA\subset\phi K'$, $\phi T\cap\phi K'=\phi$ and for any simplex σ of $T-K$, $\phi\sigma$ does not meet gA.

Let $\psi:L'\cup T\to M^n$ be given by ψ_{s-1} on L' and ψ_k on T, and let $\Phi':\overline{L'\cup T}\to S^{q-1}$ be defined by $F(\psi\times\psi)$. Since $F\mid\tilde{B}(s,\gamma)\underset{\text{eq.}}{\simeq}\tilde{g}\mid\tilde{B}(s,\gamma)$ and $\psi(T\cup K')\subset B(s,\gamma)$, $\Phi'\mid\overline{T\cup K'}\underset{\text{eq.}}{\simeq}\tilde{\phi}\mid\overline{T\cup K'}$. By the homotopy extension property for $(T\cup L', T\cup K')$, $\Phi'\underset{\text{eq.}}{\simeq}\Phi$ where $\Phi:\overline{L'\cup T}\to S^{q-1}$ is an equivariant map with $\Phi=\tilde{\phi}$ on $\overline{T\cup K'}$.

Now by the Corollary of Proposition 3 there is an ambient isotopy ϕ_t of $\phi\mid T$ fixed on K with $\phi_t T\cap\phi K'=\phi$, $\phi_t T\cap gA\subset\phi K$ and $\phi_1 T\cap\phi L'=\phi$. Further, if $\phi':L'\cup T\to E^q$ is the imbedding given by ϕ on L' and ϕ_1 on T and $\tilde{\phi}':\overline{L'\cup T}\to S^{q-1}$ is defined by $\tilde{\phi}'(x,y)=\dfrac{\phi' x-\phi' y}{\|\phi' x-\phi' y\|}$ then $\Phi\underset{\text{eq.}}{\simeq}\phi'$ rel $\overline{L'\cup K}$ with the homotopy of the

form $h_t(x, y)=\dfrac{\phi x-\phi_t y}{\|\phi x-\phi_t y\|}$ on $K'\times T$. Now define $g'\colon \bar{B}(1,\delta)\to E^q$ by

$$g \text{ on } \bar{A}(1,\delta) \quad \text{and by} \quad \phi'\psi_k^{-1} \text{ on } |\psi_k|_\delta.$$

Then g' is well defined and is locally flat on $B(1,\delta)$.

2.3. *g' is an imbedding on $B(s-1,\delta)$.*

Proof of 2.3. g' has no double points on $\psi_k K$. For,

$$g'\psi_k \mid K=\phi'\psi_k^{-1}\psi_k \mid K=\phi_1 \mid K=\phi \mid K=g\psi_k \mid K.$$

Now if $g\psi_k x=g\psi_j y$ with $j<k$, $x\in K$, note $\psi_k x=\psi_l z$ with $l<k$. Then $g\psi_l z=g\psi_j y$ implies $\psi_l z=\psi_j y$, $\psi_k x=\psi_j y$.

Now g' has no double points on $\bar{A}(s,\delta)$. For by the above remark, such a double point x would have a correspondent $x'\in\psi_k T-K\subset\psi_k L$. However, $g\psi_k L\cap g\bar{A}(s,\delta)=\phi$ as remarked in 2.1. Note also that $g\psi_k L\cap g\psi_{s-1}H=\phi$ since g is an imbedding on $B(s,\gamma)$. Thus $\phi L\cap gA=\phi$.

Since ϕ_1 imbeds T, $\phi_1 T\cap gA\subset\phi K$ and $\phi_1=\phi$ on K, $\phi_1 L\cap gA\subset\phi_1(K\cap L)=\phi(K\cap L)$ which does not meet gA. Thus $(\phi_1 L\cap gA)\cap gA=\phi$ and so $\phi_1 L\cap gA=\phi$. In particular, $g'\psi_k L\cap g'\bar{A}(s,\delta)=\phi$.

Further, g' has no double points on $|\psi_{s-1}|_\delta$. Again, such a double point x would have a correspondent $x'\in\psi_k L$. However, $\phi' L\cap\phi L'=\phi$ and by the above remarks $\phi' L\cap\phi H=\phi$, thus $g'\psi_k L\cap g\psi_{s-1}T'=\phi$.

Therefore g' has no double points on $A(s-1,\delta)$. Hence g' is an imbedding on $B(s-1,\delta)$.

2.4. $\tilde{g}' \mid \tilde{B}(s-1,\delta)\underset{\text{eq.}}{\simeq} F \mid \tilde{B}(s-1,\delta)$.

Proof of 2.4. Note that $\bar{B}(s-1,\delta)=\bar{A}(s-1,\delta)\cup|\psi_k|_\delta$, thus

$$\tilde{\bar{B}}(s-1,\delta)=\tilde{\bar{A}}(s-1,\delta)\cup[(|\psi_k|_\delta\times\bar{B}(s-1,\delta)\cup\bar{B}(s-1,\delta)\times|\psi_k|_\delta)-\Delta].$$

Let $g_t\colon \bar{B}(s,\delta)\to E^q$ be the ambient isotopy defined by $g_t=g$ on $\bar{A}(s,\delta)$ and $g_t=\phi_t\psi_k^{-1}$ on $|\psi_k|_\delta$.

Define an equivariant homotopy $H_t\colon \tilde{\bar{B}}(s-1,\delta)\to S^{q-1}$ as follows:

(a) $H_t(x,y)=\tilde{g}(x,y)$ for $(x,y)\in\tilde{\bar{A}}(s-1,\delta)$

(b) $H_t(x,y)=\dfrac{g_t x-g_t y}{\|g_t x-g_t y\|}$ for $(x,y)\in(|\psi_k|_\delta\times\bar{B}(s,\delta))-\Delta$

(c) $H_t(x,y)=\dfrac{g_t x-g y}{\|g_t x-g y\|}$ for $(x,y)\in(|\psi_k|_\delta\times\psi_{s-1}H)-\Delta$

(d) $H_t(x,y)=h_t(\psi_k^{-1}x,\psi_{s-1}^{-1}y)$ for $(x,y)\in(|\psi_k|_\delta\times\psi_{s-1}L')-\Delta$

Now (b), (c) agree, since $g_t = g$ on $\bar{B}(s, \delta) \cap \psi_{s-1} H$. (c), (d) agree, since if $(u, v) \in T \times (H \cap L') = T \times K'$,

$$\frac{g_t \psi_k u - g \psi_{s-1} v}{\|g_t \psi_k u - g \psi_{s-1} v\|} = \frac{\phi_t u - \phi v}{\|\phi_t u - \phi v\|} = h_t(u, v)$$

and (b), (d) agree, since $\psi_{s-1} L \cap \bar{B}(s, \delta) = \phi$. Note $\bar{A}(s-1, \delta) \cap |\psi_k|_\delta \subset \psi_k K$ and $g_t = g$ on $\psi_k K$. Thus (a), (b) and (a), (c) agree. Also, $h_t = \tilde{\phi}' = \tilde{\phi}$ on $K \times L'$ so (a), (d) agree. Thus H_t is well defined.

Observe $H_0 = \tilde{g}$ on (a), (b), (c) and $H_0 = \Phi(\psi^{-1} \times \psi^{-1})$ on (d). Recall that the homotopy $F \mid \tilde{B}(s, \gamma) \underset{\text{eq.}}{\simeq} \tilde{g} \mid \tilde{B}(s, \gamma)$ was extended to obtain a homotopy of F and $\Phi(\psi^{-1} \times \psi^{-1})$. Note that $\bar{B}(s-1, \delta) \subset \tilde{B}(s, \gamma) \cup \psi_{s-1} L'$. Thus $F \mid \tilde{\bar{B}}(s-1, \delta) \underset{\text{eq.}}{\simeq} H_0$. Also, $\tilde{g}' = H_1$. Thus $F \mid \tilde{B}(s-1, \delta) \underset{\text{eq.}}{\simeq} \tilde{g}' \mid \tilde{B}(s-1, \delta)$. This completes the proof of 2.4 and of Proposition 2.

BIBLIOGRAPHY

[1] A. V. Cernavskii, *Topological imbeddings of polyhedra in euclidean spaces*, Soviet Math. *6* (1965), 1606–1610.

[2] A. Haefliger, *Plongements différentiables dans le domaine stable*, Comment. Math. Helv. *37* (1962), 155–176.

[3] J. Lees, *Locally flat imbeddings of topological manifolds*, Ann. of Math., to appear.

[4] M. H. A. Newman, *On the superposition of n-dimensional manifolds*, J. Lond. Math. Soc. *2* (1927), 56–64.

[5] J. R. Stallings, *The piecewise linear structure of euclidean space*, Proc. Camb. Phil. Soc. *58* (1962), 481–488.

[6] C. Weber, *Plongments de polyèdres dans le domaine métastable*, Comment. Math. Helv. *42* (1967), 1–27.

[7] J. H. C. Whitehead, *Simplicial spaces, nuclei and m-groups*, Proc. Lond. Math. Soc. *45* (1939), 243–327.

[8] E. C. Zeeman, *Seminar on combinatorial topology*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris (mimeographed, 1963).

Received 18.I.1968/24.V.1968

On a Special Class of Hamiltonian Graphs

GARY CHARTRAND[1]) and HUDSON V. KRONK

One of the most basic questions asked about a graph (finite, undirected, without loops or multiple edges) is whether its structure is such that it can be traversed or traced in a certain manner. Undoubtedly, the two most important classes of graphs dealing with traversability are the eulerian graphs and the hamiltonian graphs. A graph G is *eulerian* if it has a closed path (called an eulerian path) containing every edge of G exactly once and every vertex of G at least once, while G is *hamiltonian* if it has a closed path containing every vertex of G exactly once, i.e.. if it has a hamiltonian cycle.

A graph G is said to be *randomly eulerian from a vertex* v if the following procedure always results in an eulerian path. Begin at the given vertex v and traverse any incident edge. On arriving at a vertex, choose any incident edge which has not yet been traversed. When no new edges are available the procedure terminates. These graphs have also been referred to as arbitrarily traversable from v and arbitrarily traceable from v and have been investigated by BÄBBLER [1], HARARY [3], and ORE [4].

This suggests the following concept. We define a graph G to be *randomly hamiltonian from the vertex* v if the following procedure always results in a hamiltonian cycle. Begin at the vertex v and proceed to any adjacent vertex. On arriving at a vertex, select any adjacent vertex not previously encountered. When no new vertices remain, then an edge exists between the final vertex chosen and v, and the procedure terminates. Thus in a graph G which is randomly hamiltonian from a vertex v, any path beginning at v can be extended to a hamiltonian cycle. Graphs which are randomly hamiltonian from every vertex were characterized in [2] and are called simply randomly hamiltonian graphs.

It is the object of this article to present a characterization of graphs which are randomly hamiltonian from a vertex, and thereby provide a classification of all such graphs.

It is convenient to introduce notation for several types of graphs which are encountered throughout the course of this article. The complete graph with p vertices is denoted by K_p, while C_p represents the cycle with $p \geq 3$ vertices. The complete bipartite graph $K(m, n)$ is the graph with $p=m+n$ vertices whose vertex set V can be partitioned as $V_1 \cup V_2$ such that $|V_1|=m$, $|V_2|=n$, and vertices u and v are adjacent if and only if $u \in V_i$ and $v \in V_j$, $i \neq j$. It was shown in [2] that a graph G with $p \geq 3$ vertices is randomly hamiltonian if and only if it is one of the graphs K_p, C_p, and $K(p/2, p/2)$.

[1]) Research supported in part by a Faculty Research Fellowship from Western Michigan University.

We express a graph G as $H+v$ provided v is a vertex of G adjacent to all other vertices of G, where then H is the graph obtained from G by the removal of v and all edges incident with v. For example, the graph C_n+v is often referred to as the wheel W_n. The graphs $K(3,3)+v$ and $W_5=C_5+v$ are illustrated in Figure 1. In each case, the graph is randomly hamiltonian from v.

$K(3,3)+v$ $W_5=C_5+v$

Figure 1
Two graphs which are randomly hamiltonian from the vertex v

Of course, if a graph G is randomly hamiltonian from a vertex, then G is hamiltonian and therefore has a hamiltonian cycle. Thus whenever we have a graph G with p vertices which is randomly hamiltonian from a vertex we assume the existance of a hamiltonian cycle C whose vertices are labeled cyclically $v_1, v_2, \ldots v_p$. Each edge of G then either belongs to C, and is called a *cycle edge* of G, or joins two nonconsecutive vertices of C and is called a *diagonal.*

If G is a graph which is randomly hamiltonian from some vertex (and which contains a hamiltonian cycle C labeled as earlier indicated), then any cycle of G containing exactly one diagonal of G is called an *outer cycle* of G. An *outer n-cycle* has length n, and an outer 3-cycle is also referred to as an *outer triangle.*

We now present the main result of the paper.

THEOREM. *A graph G is randomly hamiltonian from a vertex v if and only if G is randomly hamiltonian or $G=H+v$, where H is randomly hamiltonian.*

Proof. If G is a randomly hamiltonian graph containing a vertex v or if G is expressible as $H+v$, where H is randomly hamiltonian, then it is easily observed that G is randomly hamiltonian from v.

Conversely, let G be a graph with p vertices which is randomly hamiltonian from the vertex v. Thus G contains a hamiltonian cycle V whose vertices we label cyclically as $v=v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Suppose that G is not randomly hamiltonian so that G is none of the graphs K_p, C_p, $K(p/2, p/2)$. In particular, this implies that G contains diagonals so that G necessarily contains outer cycles. Hence the vertex v belongs to one or more outer cycles.

Let n be the length of the smallest outer cycle containing v. We first show that there exists an outer n-cycle containing v but in which v is not the endpoint of the associated diagonal. Suppose that the vertices of an outer n-cycle are $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Consider the path which commences at v_1, proceeds to v_n along the diagonal v_1v_n, and encounters in succession the vertices $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_p$. Since G is randomly hamiltonian from $v=v_1$ and v belongs to no outer k-cycle, $k<n$, the diagonal v_pv_{n-1} must be present in G. Hence v belongs to the outer n-cycle whose vertices are $v_p, v_1, \ldots, v_{n-1}$. In a similar way, one can show that if $v_{p-n+2}v_1$ is a diagonal of G, then $v_{p-n+3}v_2$ is a diagonal of G.

Thus we may assume the existence of an outer n-cycle whose vertices are $v_m, v_{m+1}, \ldots, v_p, v_1, \ldots v_{k-1}$, where $m=p-n+k$ and $3 \leqslant k \leqslant n$. We now show that the diagonals $v_{m-1}v_{k-2}$ and $v_{m+1}v_k$ are present in G in addition to v_mv_{k-1}. We begin a path at $v=v_1$ and proceed along C to $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_m$. Following along the diagonal v_mv_{k-1} to v_{k-1} and then taking $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}$, we see that $v_{m-1}v_{k-2}$ is a diagonal of G since G is randomly hamiltonian from v and v belongs to no outer t-cycle, $t<n$. Similarly, by applying the preceding arguments to the path $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_m, v_{m-1}, v_{m-2}, \ldots, v_k$, we observe that $v_{m+1}v_k$ is a diagonal of G.

We now prove that $n<5$, for suppose, to the contrary, that $n \geqslant 5$. We have already seen that exists an outer n-cycle whose vertices are $v_m, v_{m+1}, \ldots, v_p, v_1, \ldots, v_{k-1}$, where $m=p-n+k$ and $3 \leqslant k \leqslant n$, and, in addition, the edges $v_{m-1}v_{k-2}$ and $v_{m+1}v_k$ belong to G. Furthermore, since $n \geqslant 5$, v_1 is not adjacent to both v_m and v_{k-1}. Let us say that v_1 is not adjacent to v_{k-1}, the other case being handled analogously. We now construct a path which beins at $v=v_1$ and takes in succession $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_{m+1}$. We then proceed to v_k via the diagonal $v_{m+1}v_k$ and move along C in the order $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{m-1}$. On reaching v_{m-1}, we next take v_{k-2} (which is different from v), v_{k-1}, and then v_m. Since G is randomly hamiltonian from v, there exists either a vertex not yet encountered which is adjacent to v_m or the edge v_mv which completes a hamiltonian cycle. In either case, there exists an edge v_mu, where u is one of the vertices $v_{m+2}, v_{m+3}, \ldots, v_p, v_1, \ldots, v_{k-3}$, which determines an outer cycle containing v having length less than n, and this is a contradiction.

We now show that $n \neq 4$. To prove this, we assume $n=4$ so that v belongs to an outer 4-cycle but not an outer triangle. From what we have shown above, we may assume, without loss of generality, that v_p, v_1, v_2, v_3 are the vertices of an outer 4-cycle. Since G is randomly hamiltonian from $v=v_1$, the path $v_1, v_2, v_3, v_p, v_{p-1}, v_{p-2}, \ldots, v_4$, which contains all vertices of G, implies that v_1v_4 is an edge of G. The path $v_1, v_4, v_3, v_p, v_{p-1}, v_{p-2}, \ldots, v_5$ contains all the vertices of G with the exception of v_2; hence v_2v_5 is an edge of G. Next the path $v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_p, v_{p-1}, v_{p-2}, \ldots, v_6$ contains all the vertices of G and, as such, implies that v_1v_6 is an edge of G. Continuing inductively, it is now easily verified that all edges of the type v_1v_{2m} belong to G as do all edges of the type v_2v_{2m+1}. From this it now follows that every two vertices v_α

and v_β, where α and β are of opposite parity, are adjacent. To see this, let v_{2r} and v_{2s+1} be two non-consecutive vertices of C, where v_{2r} is different from v_2 and v_{2s+1} is not v_1. There are two cases to consider according to whether the path $v_{2r}, v_{2r+1}, \ldots, v_{2s+1}$ does or does not contain the vertex v. We treat here only the latter case, the former case being handled in a similar manner. We construct a path which begins at v_1, proceeds along a diagonal to v_{2s}, then along C to the vertices $v_{2s-1}, v_{2s-2}, \ldots, v_{2r+1}$, from where we move to v_2 by way of the diagonal v_2v_{2r+1}. Next we proceed to v_{2r-1} via the diagonal v_2v_{2r-1} and then take $v_{2r-2}, v_{2r-3}, \ldots, v_3, v_p, v_{p-1}, \ldots, v_{2s+1}$, which produces a path failing only to contain v_{2r}. Since G is randomly hamiltonian from v, the edge $v_{2r}v_{2s+1}$ must be present in G. Finally, we show that if α and β are of the same parity, then v_α and v_β are not adjacent. We consider here only the case where α and β are odd, the other case following similarly. Assume, to the contrary, that the vertices v_{2r+1} and v_{2s+1} are adjacent, where $2r+1<2s+1$, say. The path $v_1, v_{2s+2}, v_{2s+3}, \ldots, v_p, v_3, v_4, \ldots, v_{2r+1}, v_{2s+1}, v_{2s}, \ldots, v_{2r+2}$ fails only to contain the vertex v_2; thus v_2v_{2r+2} is an edge of G. From this we see that the path $v_1, v_p, v_{p-1}, \ldots, v_{2r+2}, v_2, v_{2r+1}, v_{2r}, \ldots, v_3$, which contains all vertices of G, implies that v_1v_3 is a diagonal of G. However, this contradicts the fact that v_1 belongs to no outer triangle. Hence, v_α and v_β are adjacent if and only if α and β are of opposite parity. This implies that p is even since v_1v_p is an edge of G. Furthermore, be letting $V_1=\{v_{2n} \mid n=1, 2, \ldots, p/2\}$ and $V_2=\{v_{2n-1} \mid n=1, 2, \ldots, p/2\}$, we see that G is the graph $K(p/2, p/2)$, which, as noted earlier, is randomly hamiltonian. However, this is a contradiction since it is contrary to our assumption that G is not randomly hamiltonian.

We now arrive at the conclusion that the only possible value is $n=3$; thus v belongs to an outer triangle. From methods similar to those we have already employed, it is immediately established that G contains the edges v_1v_3, v_2v_p, and v_1v_{p-1}. Thus v_1 is adjacent to each of the vertices v_2, v_3, and v_p. However, v_1 is necessarily adjacent to all other vertices of G, for if v_1v_k is an edge of G, $3\leqslant k<p-1$, then so too is v_1v_{k+1} an edge of G since the path $v_1, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_2, v_p, v_{p-1}, \ldots, v_{k+1}$ contains all vertices of G and therefore v_1 is adjacent to v_{k+1}. The result then follows by induction.

Hence we may express G as $H+v$. The only remaining detail now is to verify that H is randomly hamiltonian. In order to prove this, it is necessary to show that any path $u_1, u_2, \ldots, u_k$ of H can be extended to a hamiltonian cycle of H. Since v is adjacent to u_1: $v, u_1, u_2, \ldots, u_k$ is a path of G and can be extended to a hamiltonian cycle $v, u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{p-1}, v$ of G. However, v is also adjacent to u_2; thus $v, u_2, u_3, \ldots, u_{p-1}$ is also a path of G and can be extended to a hamiltonian cycle of G. This implies that $u_{p-1}u_1$ is an edge of G so that $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, u_1$ is a hamiltonian cycle of H. Hence H is randomly hamiltonian, completing the proof.

The preceding theorem now indicates that the only graphs with p vertices which are randomly hamiltonian from some vertex v are C_p, K_p, $K(p/2, p/2)$, $C_{p-1}+v$, and $K((p-1)/2, (p-1)/2)+v$. As one final observation, we state the following.

COROLLARY. *The number of vertices in a graph G with p vertices from which G is randomly hamiltonian is either* 0, 1, *or* p.

REFERENCES

[1] F. BÄBLER, *Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen*, Comment. Math. Helv. *27* (1953), 81–100.
[2] G. CHARTRAND and H. V. KRONK, *Randomly Traceable Graphs*, J. Soc. Indust. Appl. Math. (to appear).
[3] F. HARARY, *On Arbitrarily Traceable Graphs and Directed Graphs*, Scripta Math. *23* (1957), 37–41.
[4] O. ORE, *A Problem Regarding the Tracing of Graphs*, Elem. Math. *6* (1951), 49–53.

Western Michigan University
SUNY at Binghamton

Received January 24, 1968

On the Finsler and Doner-Tarski Arithmetical Hierarchies[1])

by HILBERT LEVITZ (New York University)

In [5], [1; pg. 64] FINSLER set up a transfinite sequence of binary operations $\{h_c\}$ [2]) on the ordinals. The first four operations are $h_0(a, b)=a+1$, $h_1(a, b)=a+b$, $h_2(a, b)=a\cdot b$, and $h_3(a, b)=a^b$. The hierarchy satisfies the recursion formula $h_{c+1}(a, b+1)=h_c(h_{c+1}(a, b), a)$; this generalizes the formulae $a+(b+1)=(a+b)+1$, $a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$, $a^{b+1}=a^b\cdot a$. DONER and TARSKI [3] have also set up a hierarchy $\{g_c\}$ [3]) of binary operations where each operation is related to the succeeding operation by this same recursion formula, and which, moreover, has a rather simple definition: $g_0(a, b)=a+b$, $g_c(a, b)=\bigcup_{d<b,\, e<c}[g_e(g_c(a, d), a)]$ for $c>0$. For every c and every $a\neq 0$, $g_c(a, x)$ is a continuous strictly increasing function of x. On the other hand, this can fail to be the case for $h_c(a, x)$ if c is a limit ordinal. Our basic result is that the Doner-Tarski hierarchy is *essentially* what one would get if one deleted from Finsler's hierarchy those operations whose subscript is a limit ordinal. We show also that this deletion does not diminish the representation power of the hierarchy in the sense that if $d=h_c(a, b)$ for some $a, b, c, <d$, then $d=g_{c'}(a', b')$ for some $a', b', c', <d$.

Let $\{f_c\}$ be the hierarchy of continuous increasing functions defined inductively by: $f_0(x)=\omega^x$, if $c\neq 0$ f_c enumerates in order those ordinals which are fixed points of f_s for all $s<c$ (existence proof given in [1]). The fixed points of the function $f_x(0)$ are called the *strongly critical epsilon numbers*. In [6] we showed that the least strongly critical epsilon number κ_0 is the least number greater then ω which is inaccessible by means of Finsler's hierarchy; by that we mean the least number $d>\omega$ such that $a, b, c, <d$ implies $h_c(a, b)<d$. Using the results announced in the above paragraph we will show that κ_0 plays the same role with respect to the Doner–Tarski hierarchy. FEFERMAN [4], SCHÜTTE [9], [10], and TAIT [11] have obtained results which show that κ_0 plays a significant role in ramified type theory.

DEFINITION. To each ordinal c we associate an ordinal c^* as follows: $c^*=c+1$ if $c=d+n$ where d is a limit ordinal and $0\leqslant n<\omega$, $c^*=c$ otherwise. It is easy to see that:

$$c^*+1=(c+1)^* \tag{1}$$

THEOREM 1. If $c\geqslant 4$ and $a\geqslant\omega$ then $g_{-1+c}(a, 1+b)=h_{c^*}(a, b)$.

---

[1]) This work was supported by a grant from the Office of Scientific Research of the United States Air Force.

[2]) We write $h_c(a, b)$ for Finsler's $\phi_c(b, a)$ (Note the interchange of the variables). Finsler's restriction that $a, b, c<\Omega_1$ can be lifted [1; pg. 64].

[3]) We write $g_c(a, b)$ for Doner-Tarski's $a0_c b$.

Proof: By transfinite induction on $\Omega_i c+b$. Our induction hypothesis is that $c\geqslant 4$ and $\Omega_i c'+b'<\Omega_i c+b$ implies that $g_{-1+c'}(a, 1+b')=h_{(c')^*}(a, b')$ for all $a\geqslant\omega$.[4] We must show under this assumption that $g_{-1+c}(a, 1+b)=h_{c^*}(a, b)$ for all $a\geqslant\omega$. Let $a\geqslant\omega$ be given:

CASE 1. $c=4$; using [3; 3(iii)] and [5; pg. 80] we get:

$$g_{-1+c}(a, 1+b)=g_3(a, 1+b)=a^{(a^b)}=h_4(a, b)=h_c(a, b)=h_{c^*}(a, b).$$

CASE 2. $c>4$;

CASE 2.1 $b=0$; using [3; 17(iii)] and [5; th. 9] we get:

$$g_{-1+c}(a, 1+b)=g_{-1+c}(a, 1)=a=h_{c^*}(a, 0)=h_{c^*}(a, b).$$

CASE 2.2 $b\neq 0$;

CASE 2.2.1 b is a limit ordinal; using [3; 17(vi)], our induction hyp. and the fact that $h_{c^*}(a, x)$ is a continuous increasing function of x [1; pg. 65] we get:

$$g_{-1+c}(a, 1+b)=\sup_{d<b} g_{-1+c}(a, 1+d)=\sup_{d<b} h_{c^*}(a, d)=h_{c^*}(a, b).$$

CASE 2.2.2 b is a successor ordinal $v+1$;

CASE 2.2.2.1 c is a successor ordinal $d+1$; then using [3; 17(iv)] and the fact that $a\geqslant\omega$ we get:

$$\begin{aligned} g_{-1+c}(a, 1+b) &= g_{-1+(d+1)}(a, 1+(v+1))=g_{(-1+d)+1}(a, (1+v)+1) \\ &= g_{-1+d}(g_{(-1+d)+1}(a, 1+v), a)=g_{-1+d}(g_{(-1+d)+1}(a, 1+v), 1+a). \end{aligned}$$

Now by [3; corr. 5(i)] we note that $g_{-1+d}(a, 1+v)\geqslant a\geqslant\omega$, so using successive applications of our induction hypothesis followed by (1), [5; pg. 6] and (1) again, we get:

$$\begin{aligned} g_{-1+d}(g_{(-1+d)+1}(a, 1+v), 1+a) &= h_{d^*}(g_{-1+(d+1)}(a, 1+v), a) \\ &= h_{d^*}(h_{(d+1)^*}(a, v), a)=h_{d^*}(h_{d^*+1}(a, v), a) \\ &= h_{d^*+1}(a, v+1)=h_{(d+1)^*}(a, b)=h_{c^*}(a, b). \end{aligned}$$

CASE 2.2.2.2. c is a limit ordinal; using [3; 17(v)] we get:

$$\begin{aligned} g_{-1+c}(a, 1+b) &= g_c(a, 1+(v+1))=g_c(a, (1+v)+1) \\ &= \sup_{d<c} g_d(g_c(a, 1+v), a)=\sup_{d<c} g_{-1+d}(g_c(a, 1+v), a) \\ &= \sup_{d<c} g_{-1+d}(g_{-1+c}(a, 1+v), a). \end{aligned}$$

---

[4] Our induction is up to Ω_i^2, where Ω_i is an initial ordinal and $a, b, c<\Omega_i$.

Now by [3; corr. 5(i)] and induction hyp. $\omega \leqslant g_{-1+c}(a, 1+v) = h_{c^*}(a, v)$ so

$$\sup_{d<c} g_{-1+d}(g_{-1+c}(a, 1+v), a) = \sup_{d<c} g_{-1+d}(h_{c^*}(a, v), a)$$
$$= \sup_{d<c} g_{-1+d}(h_{c^*}(a, v), 1+a).$$

Now by a further application of the induction hypothesis, Finsler's definition, and [5, pg. 6] we get:

$$\sup_{d<c} g_{-1+d}(h_{c^*}(a, v), 1+a) = \sup_{d<c} h_{d^*}(h_{c^*}(a, v), a)$$
$$= \sup_{d<c} h_d(h_{c^*}(a, v), a) = h_c(h_{c^*}(a, v), a) = h_c(h_{c+1}(a, v), a)$$
$$= h_{c+1}(a, v+1) = h_{c^*}(a, b) \quad \text{(Q.E.D.)}.$$

COROLLARY 1. *If* $a, b, c, < \kappa_0$ *then* $g_c(a, b) < \kappa_0$.

Proof: Follows from the main theorem together with the fact that Finsler's hierarchy has the same property [6, th. 3].

COROLLARY 2. *If* $x \geqslant 1$, *then*

$$f_c(-1+x) = \begin{cases} g_{2c+2}(\omega, \omega x) & \text{if } 1 \leqslant c < \omega \\ g_c(\omega, 1+x) & \text{if } c \text{ is a limit ordinal} \\ g_{a+2n}(\omega, \omega x) & \text{if } c = a+n \text{ where } a \text{ is a limit} \\ & \text{ordinal and } 1 \leqslant n < \omega \end{cases}$$

Proof: Follows from the main theorem together with [6, th. 1].

THEOREM 2. *If* $d > \omega$ *and* $d = h_c(a, b)$ *where* $a, b, c, < d$, *then* $d = g_u(v, w)$ *where* $u, v, w < d$.

Proof: By [6, th. 3] $d \neq f_d(0)$; but then by [8; (5.1)] $d = a+b$ where $a, b < d$ or $d = f_c(a)$ where $c, a < d$:

CASE 1. $d = a+b$ where $a, b < d$; then $d = g_0(a, b)$.

CASE 2. $d = f_c(a)$ where $c, a < d$; write $a = -1+b$ where $b \geqslant 1$:

CASE 2.1 $c \neq 0$; then d is an epsilon number, so $a < d$ implies $b < d$, $1+b < d$, and $\omega b < d$.

CASE 2.1.1 c is a limit ordinal; then by corollary 2:

$$c, 1+b, \omega < d = f_c(-1+b) = g_c(\omega, 1+b).$$

CASE 2.1.2 $c = e+n$ where e is a limit ordinal and $1 \leqslant n < \omega$; then by corollary 2:

$$e+2n, \omega, \omega b < d = f_c(-1+b) = g_{e+2n}(\omega, \omega b).$$

CASE 2.1.3 c is finite; then by corollary 2:

$$2c+2, \omega, \omega b < d = f_c(-1+b) = g_{2c+2}(\omega, \omega b).$$

CASE 2.2 $c=0$; now $a \geqslant 2$ because $\omega < d = f_0(a) = \omega^a$, thus by [3, 3(ii)] $d = f_2(\omega, a) > 2, a, \omega$. (Q.E.D.)

COROLLARY 3. *κ_0 (the least strongly critical epsilon number) is the least ordinal inaccessible by means of the Doner–Tarski hierarchy.*

Proof: κ_0 is inaccessible by corollary 1. That it is the least such number follows from the main theorem together with the result of [6] that κ_0 is the least ordinal greater than ω which is inaccessible by means of Finsler's hierarchy.

REFERENCES

[1] BACHMANN, H., *Transfinite Zahlen* (Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955 [Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgeb., Neue Folge, 1]).

[2] ———, *Vergleich und Kombination zweier Methoden von Veblen und Finsler zur Lösung des Problems der Ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen*, Comment. Math. Helv. *26* (1952), 55–62.

[3] DONER, J. and TARSKI, A., *An Extended Arithmetic of Ordinal Numbers*, Fund. Math. (to appear).

[4] FEFERMAN, S., *Systems of Predicative Analysis*, J. Symbolic Logic *29* (1964), 1–30.

[5] FINSLER, P., *Eine Transfinite Folge Arithmetischer Operationen*, Comment. Math. Helv. *25* (1951), 75–90.

[6] LEVITZ, H., *Über die Finslerschen höheren arithmetischen Operationen*, Comment. Math. Helv. *41* (1966–1967), 273–286.

[7] RUBIN, A. L. and RUBIN, J. E., *Extended Operations and Relations on the Class of Ordinal Numbers*, Abstract, Notices of Amer. Math. Soc. *15*, No. 1 (1968), 196.

[8] SCHÜTTE, K., *Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursive erklärte Funktionen*, Math. Ann. *127* (1954), 15–32.

[9] ———, *Predicative Well-Orderings*, in *Formal and Systems Recursive Functions*, edited by F. N. CROSSELY and M. A. E. DUMMETT (North Holland, Amsterdam 1965).

[10] ———, *Eine Grenze für die Beweisbarkeit der Transfiniten Induktion in der Verzweigten Typenlogik*, Archiv. f. math. Logic und Grundlagenforschung, *7* (1965), 45–60.

[11] TAIT, W. W., *Cut Elimination in Infinite Propositional Logic*, Abstract, J. Symbolic Logic, *31* (1966), 151–152.

[12] VEBLEN, O., *Continuous Increasing Functions of Finite and Transfinite Ordinals*, Trans. Amer. Math. Soc. *9* (1908), 280–292.

Received March 1, 1968

Strukturen auf Quotienten komplexer Räume

KLAUS-WERNER WIEGMANN (München)

In seiner Arbeit [6] hat CARTAN auf dem Quotienten X/R eines reduzierten komplexen Raumes X nach einer eigentlichen Äquivalenzrelation R die Struktur ${}_X\mathcal{O}/R$ betrachtet und bewiesen, daß $(X/R, {}_X\mathcal{O}/R)$ genau dann ein komplexer Raum ist, wenn X/R lokal-${}_X\mathcal{O}/R$-separabel ist (Main Theorem). Auch für komplexe Räume im Sinne von GRAUERT [9] läßt sich die *Quotientenstruktur* definieren (s. § **1**) und ein verschärftes Main Theorem beweisen (s. § **5**). ${}_X\mathcal{O}/R$ ist gewissermaßen eine maximale lokal-geringte Struktur auf X/R.

In der vorliegenden Arbeit werden noch andere lokal-geringte Strukturen auf Quotienten komplexer Räume betrachtet, definiert z.B. durch holomorphe Funktionen und Abbildungen, sogenannte *Spektralstrukturen* (s. § **2**) oder durch analytische Äquivalenzrelationen im Sinne von HOLMANN [13] (s. § **6**). Ergebnisse sind u.a.:

(a) *Ein komplexer Raum ist genau dann lokal-holomorph-separabel, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert* (s. § **3** und § **4**).

(b) *Jeder schwach-holomorph-konvexe komplexe Raum ist holomorph-konvex* (s. § **4**).

(c) *Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein komplexer Raum und $\mathcal{B}$ eine Garbe lokaler Unteralgebren von $\mathcal{A}$. Dann ist $(X, \mathcal{B})$ genau dann ein komplexer Raum, wenn $\mathcal{B}(U)$ abgeschlossen in $\mathcal{A}(U)$ ist für offenes $U \subset X$, und außerdem X lokal-$\mathcal{B}$-separabel und lokal-$\mathcal{B}$-regulär ist. Die angegebenen Bedingungen sind unabhängig* (s. § **5**).

(d) *Nicht alle komplexen Unterstrukturen auf einem komplexen Quotienten $(X/R, \mathcal{A}/R)$ werden durch analytische Äquivalenzrelationen auf $(X, \mathcal{A})$ induziert.*

Die Begriffe werden in § **0** definiert.

§ 0. Vorbemerkungen

Ein *geringter Raum* $(X, \mathcal{A})$ besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{A}$ von Ringen (oder Algebren) auf X. Ist M eine beliebige Teilmenge von X, so sei $\mathcal{A}_M$ der induktive Limes der Schnitte $\mathcal{A}(U) = \Gamma(U, \mathcal{A})$ über alle offenen Umgebungen U von M in X. Ist M offen, so gilt $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}(M)$. $\mathcal{A}_x := \mathcal{A}_{\{x\}}$ heißt *Halm* von $\mathcal{A}$ im Punkte $x \in X$. Die Elemente des Halmes werden *Keime* genannt.

Ein *lokal-geringter Raum* sei ein Paar $(X, \mathcal{A})$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{A}$ auf X von lokalen $\mathbf{C}$-Algebren $\mathcal{A}_x$, $x \in X$, das sind kommutative noethersche Algebren mit Eins über dem Körper der komplexen Zahlen, die genau ein maximales Ideal $\mathfrak{a}_x$ besitzen; die Verkettung $\mathbf{C} \to \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}_x/\mathfrak{a}_x$ soll

außerdem ein Isomorphismus sein. Jeder Halm $\mathscr{A}_x$ stimmt mit der direkten Summe $\mathfrak{a}_x \oplus \mathbf{C}$ überein. Einem Keim $\alpha \in \mathscr{A}_x$ wird als *Funktionswert*, $\alpha(x)$, sein Bild bei der Projektion $\mathscr{A}_x \to \mathbf{C}$ zugeordnet. Ein Schnitt $f \in \Gamma(U, \mathscr{A})$, U offene Teilmenge von X, definiert eine komplexwertige Funktion $U \to \mathbf{C}$, die wieder mit f bezeichnet werden soll: $f(x) \in \mathbf{C}$ sei der Wert des Keimes $f_x \in \mathscr{A}_x$, $x \in U$.

$\mathscr{A}_M$ für $M \subset X$ ist zwar stets eine $\mathbf{C}$-Algebra, aber i.a. nicht lokal, vgl. jedoch Hilfssatz 1, § **1**.

Die Quotientengarbe $\mathscr{A}_{\text{red}} := \mathscr{A}/\mathscr{N}$ einer lokal-geringten Struktur $\mathscr{A}$ modulo der Idealgarbe $\mathscr{N}$ der nilpotenten Elemente definiert wieder einen lokal-geringten Raum $(X, \mathscr{A}_{\text{red}})$, die *Reduktion* von $(X, \mathscr{A})$.

Morphismen $(X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ zwischen lokal-geringten Räumen sind Paare (ϕ, ϕ^*) stetiger Abbildungen

$$\phi: X \to Y \quad \text{und} \quad \phi^*: \phi^{-1}(\mathscr{B}) \to \mathscr{A};$$

dabei ist ϕ^* eine Familie *lokaler* Algebra-Homomorphismen

$$\phi_x^*: \mathscr{B}_{\phi(x)} \to \mathscr{A}_x (x \in X),$$

d.h. ϕ_x^* bildet $1_{\phi(x)} \in \mathscr{B}_{\phi(x)}$ auf $1_x \in \mathscr{A}_x$ und deshalb auch das maximale Ideal $\mathfrak{b}_{\phi(x)}$ von $\mathscr{B}_{\phi(x)}$ in das maximale Ideal $\mathfrak{a}_x$ von $\mathscr{A}_x$ ab. Jedes ϕ_x^* definiert somit einen Vektorraum-Homomorphismus

$$\delta\phi_x: \mathfrak{b}_{\phi(x)}/\mathfrak{b}_{\phi(x)}^2 \to \mathfrak{a}_x/\mathfrak{a}_x^2$$

der (ersten) *Cotangentialräume* $T_{\phi(x)}(Y, \mathscr{B})$ und $T_x(X, \mathscr{A})$. Der Morphismus (ϕ, ϕ^*) induziert außerdem Algebra-Homomorphismen der Schnitte

$${}^t\phi_U: \Gamma(U, \mathscr{B}) \to \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathscr{A})$$

für offenes $U \subset Y$, definiert durch Festlegen der Keime

$$[{}^t\phi_U(f)]_x := \phi_x^*(f_{\phi(x)}),$$

falls $f \in \Gamma(U, \mathscr{B})$ und $x \in \phi^{-1}(U)$. Der zum kanonischen Morphismus

$$(\mathrm{id}_X, \mathrm{red}): (X, \mathscr{A}_{\text{red}}) \to (X, \mathscr{A})$$

gehörende *Reduktions-Homomorphismus* sei

$${}^t\varrho_U: \Gamma(U, \mathscr{A}) \to \Gamma(U, \mathscr{A}_{\text{red}}).$$

$f \in \Gamma(U, \mathscr{A})$ und ${}^t\varrho_U(f) \in \Gamma(U, \mathscr{A}_{\text{red}})$ haben gleiche Funktionswerte.

Wir können für lokal-geringte Räume Eigenschaften wie in [27] definieren: Es sei F eine Menge globaler Schnitte auf $(X, \mathscr{A})$, $F \subset A := \Gamma(X, \mathscr{A})$. $(X, \mathscr{A})$ heißt dann

a) *F-ausbreitbar*, bzw.

b) (*schwach-*)*F-konvex*, bzw.

c) *F-separabel* oder

d) *F-vollständig*,

wenn die Abbildung $\phi: X \to \mathbf{C}^F$, $x \mapsto (f(x))_{f \in F}$, a) diskret, bzw. b) (fast-)eigentlich, bzw. c) injektiv oder d) injektiv und eigentlich ist. Wir sagen: X ist *lokal-F-...*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so daß $\phi \mid U$ die entsprechende Eigenschaft a)–d) hat.

Für Teilmengen K von X sei

$$\hat{K}_F := \bigcap_{f \in F} \{x \in X : |f(x)| \leqslant \sup |f(K)|\} \quad \text{und} \quad \hat{K} := \hat{K}_A .$$

$(X, \mathscr{A})$ ist genau dann (schwach-)F-konvex, wenn für jede kompakte Menge $K \subset X$ auch $\hat{K}_F$ kompakt ist (bzw. kompakte Zusammenhangskomponenten besitzt). Denn es gilt:

$$\hat{K}_F = \phi^{-1}\left(\prod_{f \in F} \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant \sup |f(K)|\}\right).$$

Wir sagen: $(X, \mathscr{A})$ ist *F-regulär*, wenn das Bild von F bei der Abbildung $\gamma_x : A \to \mathfrak{a}_x/\mathfrak{a}_x^2$, $f \mapsto (f - f(x))_x \bmod \mathfrak{a}_x^2$, den ganzen Tangentialraum aufspannt, für alle $x \in X$, d.h. es gilt: $T_x(X, \mathscr{A}) := \mathfrak{a}_x/\mathfrak{a}_x^2 = \gamma_x(\mathbf{C}[F])$.

$(X, \mathscr{A})$ heiße *lokal-$\mathscr{A}$-ausbreitbar* (bzw....), wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U existiert, so daß $(U, \mathscr{A} \mid U)$ ein $\Gamma(U, \mathscr{A})$-ausbreitbarer (bzw....) lokalgeringter Raum ist.

Komplexe Räume im Sinne von GRAUERT [9] und GROTHENDIECK [12] sind nach Definition lokal-geringte Räume. Ihre Reduktionen sind sogar komplexe Räume im Serreschen Sinn [23]. Wir setzen für komplexe Räume stets abzählbare Topologie voraus. Dann kann die Algebra $\Gamma(X, \mathscr{A})$ aller globalen Schnitte (=holomorphe Funktionen) auf einem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$ in kanonischer Weise zu einer *vollständigen* topologischen Algebra gemacht werden, so daß im reduzierten Fall, $\Gamma(X, \mathscr{A}_{\mathrm{red}}) \subset \Gamma(X, {}_X\mathscr{C})$, da $\mathscr{A}_{\mathrm{red}} \subset {}_X\mathscr{C}$, genau die Topologie der kompakten Konvergenz vorliegt, vgl. [7] und [9]. Morphismen zwischen komplexen Räumen werden *holomorphe Abbildungen* genannt. Jede holomorphe Abbildung $(\phi, \phi^*) : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ induziert einen *stetigen* Algebra-Homomorphismus

$$t_\phi : \Gamma(Y, \mathscr{B}) \to \Gamma(X, \mathscr{A}).$$

Jeder komplexe Raum $(X, \mathscr{A})$ ist lokal-$\mathscr{A}$-separabel, -regulär, -konvex, -vollständig. Doch sind die globalen Eigenschaften i.a. nicht erfüllt. Statt „A-ausbreitbar" ... wird meist „holomorph-ausbreitbar"... gesagt. Für „holomorph-vollständig" ist die Bezeichnung *Steinsch* üblich. Nach Theorem A ([5] und [9]) ist jeder Steinsche Raum holomorph-regulär. Ein F-regulärer komplexer Raum $(X, \mathscr{A})$ besitzt *lokale Koordinaten durch globale Funktionen* aus $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$, d.h. zu jedem Punkt $x \in X$ existieren eine Umgebung U und endlich viele Schnitte $f_1, \ldots, f_k \in F$, die eine Ein-

bettung (=injektive, eigentliche und reguläre Abbildung, vgl. [26]) $(U, \mathscr{A} \mid U) \to (\mathbf{C}^k, {}_k\mathscr{O})$ definieren. (Dabei sei ${}_k\mathscr{O}$ die gewöhnliche Garbe der holomorphen Funktionskeime des $\mathbf{C}^k$).

Jeder F-reguläre komplexe Raum ist deshalb F-ausbreitbar, sogar lokal-F-separabel. Für lokal-geringte Räume ist diese Aussage i.a. falsch:

BEISPIEL 1. Es sei $\mathscr{O} := {}_2\mathscr{O}$ die gewöhnliche Garbe der Holomorphie auf $X := \mathbf{C}^2$ und $p: X \to \mathbf{C}$ die Projektion auf die erste Koordinate $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Für offenes $U \subset X$ sei $\mathscr{B}(U)$ die Algebra aller holomorphen Funktionen $f \in \mathscr{O}(U)$, die auf jeder Faser $p^{-1}(p(x)) \cap U$, $x \in U$, konstant sind. Der (nach Hilfssatz 1, § **1**) lokal-geringte Raum $(X, \mathscr{B})$ ist $\Gamma(X, \mathscr{B})$-regulär, aber nicht (lokal-) $\Gamma(X, \mathscr{B})$-ausbreitbar, nicht einmal lokal-$\mathscr{B}$-ausbreitbar.

Nach GRAUERT [9] ist ein komplexer Raum $(X, \mathscr{A})$ genau dann Steinsch, wenn $(X, \mathscr{A}_{\mathrm{red}})$ diese Eigenschaft hat. Diese Äquivalenz ist für die allgemeineren Begriffe a), b) und c) nicht richtig, vgl. SCHUSTER [21]. GRAUERT [8] bewies auch, daß jeder holomorph-ausbreitbare und holomorph-konvexe Raum Steinsch ist, vgl. dazu § **4**, insbesondere Lemma 1.

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum und $F = \mathbf{C}[F] \subset A := \Gamma(X, \mathscr{A})$, so gilt für $\phi: X \to \mathbf{C}^F$, $x \mapsto (f(x))_{f \in F}$, und alle Mengen $K \subset X$:

$$\hat{K}_F = \phi^{-1}\Big(\prod_{f \in F} f(K)^\wedge\Big),$$

wobei $f(K)^\wedge \subset \mathbf{C}$ bzgl. $\Gamma(\mathbf{C}, {}_1\mathscr{O})$ zu bilden ist.

§ 1. Definition der Quotientenabbildung

Es seien X und Y topologische Räume. Eine surjektive und stetige Abbildung $p: X \to Y$ heißt (topologische) *Quotientenabbildung*, wenn eine Teilmenge U von Y genau dann offen ist, wenn sie ein offenes Urbild $p^{-1}(U) \subset X$ besitzt. Ist R die zu p gehörende Äquivalenzrelation auf X, so schreiben wir auch X/R statt Y. $p: X \to X/R$ heißt auch Projektion.

Ist $\mathscr{A}$ eine Garbe auf X, so definieren wir die Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ auf X/R durch $(p_0\mathscr{A})(U) := \mathscr{A}(p^{-1}(U))$ für offenes $U \subset X/R$. $(X/R, p_0\mathscr{A})$ ist ein geringter Raum, aber i.a. nicht lokal-geringt, auch wenn $(X, \mathscr{A})$ ein lokal-geringter Raum ist. Jeder Halm $(p_0\mathscr{A})_y$, $y \in Y$, ist in $\mathscr{A}_{p^{-1}(y)}$ enthalten. $(p_0\mathscr{A})_y$ und $\mathscr{A}_{p^{-1}(y)}$ stimmen überein, falls die Faser $p^{-1}(y)$ ein p-saturiertes Fundamentalsystem von Umgebungen besitzt. Das ist z.B. erfüllt, wenn p eigentlich ist. In jedem Fall induzieren die Homomorphismen

$$p_x^*: (p_0\mathscr{A})_{p(x)} \to \mathscr{A}_x \quad (x \in X)$$

einen Morphismus geringter Räume

$$(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (X/R, p_0\mathscr{A}).$$

Ist $(X, \mathscr{A})$ lokal-geringt, so definieren wir auf X/R die sogenannte *Quotientenstruktur* $\mathscr{A}/R$ als Untergarbe von $p_0\mathscr{A}$, bestehend aus denjenigen Elementen, die auf den Fasern von R konstante Funktionswerte haben:

$$\mathscr{A}/R(U) := \{f \in \mathscr{A}(p^{-1}(U)) \mid f: p^{-1}(y) \to \mathbf{C} \text{ ist konstant}, \quad y \in U\}.$$

Selbstverständlich können wir p_x^* auf $(\mathscr{A}/R)_{p(x)}$ beschränken, und $(p, p^*):(X, \mathscr{A}) \to (X/R, \mathscr{A}/R)$ ist ein Morphismus lokal-geringter Räume, denn es gilt:

HILFSSATZ 1. *Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein lokal-geringter Raum, $M \subset X$ beliebig. Dann ist*

$$B := \{f \in \mathscr{A}_M \mid f: M \to \mathbf{C},\ x \mapsto f_x(x) \text{ ist konstant}\}$$

eine lokale Algebra mit dem maximalen Ideal

$$\mathfrak{b} := \{f \in B \mid f_x(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in M\}.$$

B ist die große lokale Unteralgebra von $\mathscr{A}_M$. –

Beweis. B ist eine Algebra über $\mathbf{C}$, und $\mathfrak{b}$ ist ein Ideal in B. Für jedes $x \in M$ ist $\tau_x: B \to \mathscr{A}_x, f \mapsto f_x$, ein Algebra-Homomorphismus. Ist $\mathfrak{a}_x$ das maximale Ideal in $\mathscr{A}_x$, so gilt:

$$\begin{aligned}\tau_x^{-1}(\mathfrak{a}_x) &= \{f \in B: f_x \in \mathfrak{a}_x\} = \{f \in B: f_x \in \operatorname{Kern}(\mathscr{A}_x \to \mathscr{A}_x/\mathfrak{a}_x = \mathbf{C})\} \\ &= \{f \in B: f_x(x) = f(x) = 0\} \\ &= \{f \in B: f(x') = 0 \quad \text{für alle} \quad x' \in M\} = \mathfrak{b}.\end{aligned}$$

Da $\mathbf{C} \subset B$ und $\mathbf{C} \subset \mathscr{A}_x$ sowie $\tau_x(\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathbf{C}$ gilt, ist $B \to \mathbf{C}, f \mapsto f_x \bmod \mathfrak{a}_x$, ein surjektiver Homomorphismus mit Kern $= \mathfrak{b}$, d.h. $B/\mathfrak{b} = \mathbf{C}$, $\mathfrak{b}$ ist maximales Ideal in B. Ist B_0 eine beliebige lokale Unteralgebra von $\mathscr{A}_M$, dann bildet $B_0 \to \mathscr{A}_x, f \mapsto f_x$, für jedes $x \in M$ das maximale Ideal $\mathfrak{b}_0$ von B_0 in $\mathfrak{a}_x$ ab, d.h. $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}$ und $B_0 = \mathfrak{b}_0 \oplus \mathbf{C} \subset \mathfrak{b} \oplus \mathbf{C} = B$; q.e.d. –

Die Situation $(p, p^*):(X, \mathscr{A}) \to (X/R, p_0\mathscr{A})$ wollen wir verallgemeinern und definieren: Ein Morphismus

$$(p, p^*):(X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$$

(lokal-)geringter (bzw. komplexer) Räume $(X, \mathscr{A})$ und $(Y, \mathscr{B})$ heißt (lokal-)geringte (bzw. holomorphe) *Quotientenabbildung*, wenn $p: X \to Y$ eine topologische Quotientenabbildung ist mit $\mathscr{B} \subset p_0\mathscr{A}$. Im lokal-geringten und deshalb auch im komplexen Fall gilt wegen Hilfssatz 1 für die von p definierte Äquivalenzrelation R auf X: $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}/R$. $\mathscr{A}/R$ ist eine maximale lokal-geringte Struktur auf X/R. Setzt man wie LIEB [16] voraus, daß die Strukturgarbe eines lokal-geringten Raumes eine Garbe stetiger Funktionskeime ist, das ist z.B. für reduzierte komplexe Räume richtig, so ist die Quotientengarbe die größte geringte Struktur auf dem topologischen Quotienten, für die die Projektion ein Morphismus lokal-geringter Räume ist.

Auf Quotienten X/R wollen wir also nicht nur die Garbe $\mathscr{A}/R$ betrachten, sondern beliebige Garben von lokalen Unteralgebren $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}/R$ zulassen. Ist $(X/R, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum, so ist X/R lokal-$\mathscr{B}$-vollständig, insbesondere lokal-$\mathscr{B}$-separabel

und lokal-$\mathscr{B}$-regulär; für offene Mengen $U \subset X/R$ ist $\mathscr{B}(U)$ abgeschlossen in $\mathscr{A}(p^{-1}(U)) = (p_0\mathscr{A})(U)$.

DEFINITION. Ist $(X, \mathscr{A})$ ein geringter Raum, so heißt eine Untergarbe $\mathscr{B}$ von $\mathscr{A}$ *abgeschlossen*, wenn alle Schnittmengen $\mathscr{B}(U)$ für offenes $U \subset X$ abgeschlossen in $\mathscr{A}(U)$ sind. –

$\mathscr{A}/R$ ist eine abgeschlossene Untergarbe von $p_0\mathscr{A}$. Abgeschlossene Garben von lokalen Unteralgebren $\mathscr{B} \subset p_0\mathscr{A}$, für die X/R lokal-$\mathscr{B}$-separabel und lokal-$\mathscr{B}$-regulär ist, wollen wir *R-Garben* nennen. Aus Hilfssatz 1 folgt, daß jede in der Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ enthaltene komplexe Struktur auf X/R eine R-Garbe ist. Es soll untersucht werden, inwiefern diese Aussage über *komplexe Unterstrukturen* umkehrbar ist, vgl. § **5**.

DEFINITION. Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum, so heißt eine Garbe $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ von Unteralgebren eine *komplexe Unterstruktur* auf X, wenn auch $(X, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum ist. $\mathscr{A}$ ist eine *Verfeinerung* von $\mathscr{B}$ in der Terminologie von GRAUERT-REMMERT.

Ist $(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (X/R, \mathscr{A}/R)$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so stimmt $\mathscr{A}/R$ mit der Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ genau dann überein, wenn R *einfach* ist. Denn ist $\mathscr{A}/R = p_0\mathscr{A}$, so folgt nach einem Lemma von CARTAN-STEIN, vgl. etwa [27], daß für jeden Steinschen Teil $U \subset X/R$ die Funktionen aus $\Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A})$ die Zusammenhangskomponenten der Fasern von p trennen. Wegen $\Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A}) = \Gamma(U, \mathscr{A}/R)$ sind aber die Funktionswerte der Schnitte auf $p^{-1}(y)$, $y \in U$, konstant. Ist andererseits p eine einfache Abbildung, so ist jede Faser $p^{-1}(y)$, $y \in X/R$, eine kompakte und zusammenhängende analytische Menge; deshalb hat jeder Schnitt einer Umgebung $p^{-1}(U)$ von $p^{-1}(y)$ mit Werten in $\mathscr{A}$ konstante Funktionswerte auf den Fasern von p, d.h. $p_0\mathscr{A} \subset \mathscr{A}/R$.

Für $\mathscr{A}/R = p_0\mathscr{A}$ ist der von (p, p^*) induzierte Algebra-Monomorphismus ${}^t p: \Gamma(X/R, \mathscr{A}/R) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ sogar surjektiv. Die Umkehrung ist falsch, wie einfache Gegenbeispiele zeigen.

CARTAN beweist mit dem Main Theorem [6], daß eine eigentliche Äquivalenzrelation R auf einem *reduzierten* komplexen Raum $(X, \mathscr{O})$ genau dann einen komplexen Quotienten $(X/R, \mathscr{O}/R)$ definiert, wenn X/R lokal-$\mathscr{O}/R$-separabel ist. Wir werden diese Aussage für nicht notwendig reduzierte Räume beweisen und zeigen, daß es genügt, lokal-$\mathscr{O}/R$-ausbreitbar vorauszusetzen, vgl. § **5**. Doch zunächst folgen weitere Vorbereitungen.

§ 2. Durch holomorphe Funktionen und Abbildungen definierte Äquivalenzrelationen

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum, so definiert jede Teilmenge F von $A := \Gamma(X, \mathscr{A})$ eine Äquivalenzrelation, die mit F bezeichnet werden soll: F identifiziert Punkte aus

X, wenn sie durch keine Funktion aus F getrennt werden. Die Menge F definiert dieselbe Äquivalenzrelation auf X wie die von ihr erzeugte Unteralgebra $\mathbf{C}[F]$ in A, aber auch wie ihre abgeschlossene Hülle $\overline{F}$ in A bzgl. der durch den komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$ induzierten Topologie. (Zum Beweis genügt es, die Reduktion $(X, \mathscr{A}_{\text{red}})$ und die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\Gamma(X, \mathscr{A}_{\text{red}}) \subset \Gamma(X, {}_X\mathscr{C})$ zu betrachten).

Nach § **1** definiert jede Äquivalenzrelation R auf X eine Unteralgebra $B = \Gamma(X/R, \mathscr{A}/R)$ von A. Die von B induzierte Äquivalenzrelation auf X ist i.a. von R verschieden, wie an einfachen Beispielen zu sehen ist.

Wie in [11], [16] und [27] geben wir für beliebiges $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ eine geringte Struktur $\mathscr{S}_F$ auf $Y := X/F$ an. $p: X \to Y$ bezeichne die Projektion, der zugehörige Algebra-Isomorphismus sei ${}^t p: \Gamma(Y, p_0\mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$.

Für offenes U in Y sei $\mathscr{S}_F(U)$ die Algebra aller Schnitte aus $\mathscr{A}(p^{-1}(U))$, die in einer Umgebung jeder Faser $p^{-1}(y)$, $y \in U$, in eine konvergente Potenzreihe

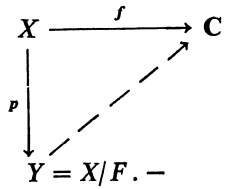
$$\sum a_{i_1 \dots i_k} (f_1 - f_1(y))^{i_1} \dots (f_k - f_k(y))^{i_k}$$

mit $f_1, \dots, f_k \in F$ entwickelt werden können. $\mathscr{S}_F$ heißt *Spektralstruktur* bzgl. $(X, \mathscr{A})$ und F. Es gilt $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{A}/F \subset p_0\mathscr{A}$. $(Y, \mathscr{S}_F)$ ist ein ${}^t p^{-1}(F)$-separabler und ${}^t p^{-1}(F)$-regulärer lokal-geringter Raum, insbesondere ist Y lokal-$\mathscr{S}_F$-separabel und lokal-$\mathscr{S}_F$-regulär (deshalb lokal-$\mathscr{A}/F$-separabel): $\mathscr{S}_F$ ist eine F-Garbe auf $Y = X/F$. Ist $(Y, \mathscr{S}_F)$ ein komplexer Raum, so enthält $\Gamma(Y, \mathscr{S}_F)$ das ${}^t p$-Urbild ${}^t p^{-1}(\overline{\mathbf{C}[F]})$ der abgeschlossenen Hülle der von F in A erzeugten Unteralgebra. In [27, Quotientensatz] wurde bereits gezeigt:

Besitzt eine Faser $p^{-1}(y)$, $y \in Y$, eine saturierte F-konvexe Umgebung, so ist $(Y, \mathscr{S}_F)$ in einer Umgebung von y ein komplexer Raum.

Man sieht, daß diese Voraussetzung für alle Punkte aus Y erfüllt ist, wenn F eine eigentliche Äquivalenzrelation auf X definiert (z.B. wenn X ein F-konvexer oder F-separabler Raum ist, vgl. § **4**). Wir formulieren das Ergebnis als

SATZ 1. *Es sei $\mathscr{S}_F$ die Spektralstruktur bzgl. eines komplexen Raumes $(X, \mathscr{A})$ und einer Teilmenge F von $\Gamma(X, \mathscr{A})$, $p: X \to Y := X/F$ die Projektion auf den Quotienten und ${}^t p: \Gamma(Y, p_0\mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ der zugehörige Algebra-Isomorphismus. Definiert F eine eigentliche Äquivalenzrelation, so ist $(Y, \mathscr{S}_F)$ ein ${}^t p^{-1}(F)$-separabler und ${}^t p^{-1}(F)$-regulärer komplexer Raum mit $\Gamma(Y, \mathscr{S}_F) \supset {}^t p^{-1}(\overline{\mathbf{C}[F]})$. Die Abbildung $(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{S}_F)$ ist eine eigentliche holomorphe Quotientenabbildung. Jede Funktion $f \in F$ kann über $(Y, \mathscr{S}_F)$ faktorisiert werden:*



Als Verallgemeinerung wollen wir *Zerlegungen* von Äquivalenzrelationen auf komplexen Räumen betrachten, die durch globale Funktionen definiert werden. Sind R und S Äquivalenzrelationen auf einem topologischen Raum X, so heißt S eine *Zerlegung* von R, wenn jede Faser von S die Vereinigung von Zusammenhangskomponenten einer Faser von R ist. Eine spezielle Zerlegung ist die zu R gehörende einfache Äquivalenzrelation.

Ist $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ auf einem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$ vorgegeben und $\tilde{F}$ eine Zerlegung der Äquivalenzrelation F, so kann auch auf dem Quotienten $X/\tilde{F}$ eine Spektralstruktur $\mathscr{S}_{\tilde{F}}$ definiert werden. Aber $(X/F, \mathscr{S}_{\tilde{F}})$ wird i.a. kein komplexer Raum, selbst wenn $\tilde{F}$ eine eigentliche Äquivalenzrelation auf X ist.

BEISPIEL 2. Es sei $(\mathbf{C}, \mathscr{O})$ die Gaußsche Ebene mit der gewöhnlichen komplexen Struktur, z die Koordinatenfunktion und $F := \mathbf{C}[z^2] \subset \Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{O})$. Die zu F gehörende einfache Relation F' ist trivial also eigentlich. Trotzdem ist $\mathscr{S}_{F'}$ keine komplexe Struktur auf $\mathbf{C}$, denn nach Definition gilt:

$$\mathscr{S}_{F',x} = \begin{cases} \mathscr{O}_x & \text{für alle } x \neq 0 \\ \mathbf{C}[\langle z^2 \rangle] & \text{für } x = 0 \end{cases},$$

d.h. keine Umgebung U von 0 ist $\Gamma(U, \mathscr{S}_{F'})$-separabel. – Wir beweisen allerdings in § **4** und § **6**, daß $(X/\tilde{F}, \mathscr{A}/\tilde{F})$ ein komplexer Raum ist für eigentliches $\tilde{F}$.

Eine endliche Menge $F = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ definiert eine holomorphe Abbildung $\phi : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbf{C}^n, {}_n\mathscr{O})$. Die Spektralgarbe $\mathscr{S}_F$ auf X/F besteht dann aus *zurückgenommenen* Taylorreihen. Wird X/F mit $\phi(X)$ identifiziert (das ist möglich, wenn ϕ semi-eigentlich ist, vgl. Hilfssatz 2*.), so gilt:

$$(+) \qquad \mathscr{S}_F = ({}_n\mathscr{O}/\mathrm{Ann}_{{}_n\mathscr{O}_0} \mathscr{A}) \mid \phi(X).$$

Eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ topologischer Räume heißt nach KUHLMANN [15] *semi-eigentlich*, wenn zu jedem Punkt $y \in Y$ eine Umgebung $U_y \subset Y$ und eine kompakte Menge $K_y \subset X$ existieren, so daß für alle $y' \in \phi(X) \cap U_y$ gilt: $\phi^{-1}(y') \cap K_y \neq \emptyset$. Sind X und Y lokal-kompakte Räume, so ist $\phi : X \to Y$ genau dann semi-eigentlich, wenn zu jeder kompakten Menge $L \subset Y$ eine kompakte Menge $K \subset X$ existiert mit $L \cap \phi(X) \subset \phi(K)$. Eine Äquivalenzrelation R auf X heißt semi-eigentlich, wenn die Projektion $p : X \to X/R$ eine semi-eigentliche Abbildung ist.

Nicht alle holomorphen Abbildungen sind semi-eigentlich, z.B. $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, y)$. Jede eigentliche Abbildung ist semi-eigentlich.

Die Situation (+) wollen wir nun verallgemeinern:

Es sei $(h, h^*) : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ eine holomorphe Abbildung, R die auf X durch h definierte Äquivalenzrelation. Der Quotient X/R und das Bild $h(X)$ stimmen i.a. nur mengentheoretisch überein. Führen wir auf X/R die feinste Topologie T' ein, so daß $p : X \to X/R$ stetig wird, so ist $T' \subset \mathfrak{P}(X/R) = \mathfrak{P}(h(X))$ eine Obermenge der von Y auf

$h(X)$ induzierten Topologie T: Die Quotiententopologie T' ist feiner als die Relativtopologie T. Es gilt $T=T'$ genau dann, wenn jede abgeschlossene und bzgl. p saturierte Menge in X ein abgeschlossenes h-Bild in Y besitzt. Diese Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn h eine semi-eigentliche Abbildung ist.

Wir wählen nun eine offene Steinsche Überdeckung $\mathfrak{U}:=(U_i)_{i\in I}$ von Y, so daß jedes $(U_i, \mathscr{B} \mid U_i)$ in einen $\mathbf{C}^{n_i}$ eingebettet werden kann. Diese Realisierung wird durch Funktionen $f_{i1},\ldots,f_{in_i}\in\mathscr{A}(V_i)$, $V_i:=h^{-1}(U_i)$, beschrieben:

$$(f_{i1},\ldots,f_{in_i})=:f_i:(V_i,\mathscr{A}\mid V_i)\to(\mathbf{C}^{n_i},{}_{n_i}\mathscr{O}),$$

$\mathscr{B}\mid U_i={}_{n_i}\mathscr{O}/{}_i\mathscr{J}\mid U_i$, so daß ${}_i\mathscr{J}\subset\operatorname{Kern} f_i^*$ und $f_i(V_i)=h(X)\cap U_i$.

Mittels der $F_i:=\{f_{i1},\ldots,f_{in_i}\}\subset\Gamma(V_i,\mathscr{A})$ definieren wir auf X/R die geringte *Spektralstruktur* $\mathscr{S}_{h,\mathfrak{U}}$:

$$\mathscr{S}_{h,\mathfrak{U}}\mid U_i\cap h(X):=\mathscr{S}_{F_i}.$$

$\mathscr{S}_{F_i}$ ist definiert auf V_i/F_i, das mengentheoretisch mit $U_i\cap h(X)$ übereinstimmt. Es gilt: $\mathscr{S}_{F_i,y}=\mathscr{S}_{F_j,y}$, falls $y\in U_i\cap U_j\cap h(X)$. Denn aus der Konstruktion folgt:

$$\mathscr{S}_{F_i,y}=\operatorname{Bild} f^*_{i,f_i(x)}=\operatorname{Bild} h_y^*=\operatorname{Bild} f^*_{j,f_j(x)}=\mathscr{S}_{F_j,y}$$

Das gilt für alle $x\in h^{-1}(y)$.

Nach dem Homomorphiesatz ist Bild $h_y^*=\mathscr{B}_y/\operatorname{Kern} h_y^*$; andererseits ist $\operatorname{Kern} h_y^*=(\operatorname{Ann}_{\mathscr{B}} h_0\mathscr{A})_y$. Ist also h eigentlich und somit $\operatorname{Ann}_{\mathscr{B}} h_0\mathscr{A}=:\mathscr{K}$ eine kohärente Idealgarbe in $\mathscr{B}$ ([9], [22]) mit Nullstellenmenge $h(X)$, so ist $(h(X),\mathscr{B}/\mathscr{K}\mid h(X))=(X/R,\mathscr{S}_h)$ ein komplexer Raum, vgl. CARTAN [6, Theorem 2]).

Auf gleiche Weise folgt, daß $\mathscr{S}_{h,\mathfrak{U}}$ unabhängig von der Wahl der Überdeckung $\mathfrak{U}$ ist. Wir dürfen also $\mathscr{S}_h$ für die Spektralgarbe schreiben. Ist $h=(h_1,\ldots,h_n):X\to\mathbf{C}^n$, so stimmt diese Definition mit der früheren überein: $\mathscr{S}_h=\mathscr{S}_{\{h_1,\ldots,h_n\}}$.

Nun betrachten wir eine Familie $h=(h_k)_{k\in K}$ holomorpher Abbildungen $h_k:(X,\mathscr{A})\to(Y_k,\mathscr{B}_k)$. R sei die von h auf X definierte Äquivalenzrelation, $p:X\to Y:=X/R$ die Projektion. Mengentheoretisch gilt wieder:

$$h(X)=X/R\subset\prod_{k\in K}Y_k.$$

$\mathfrak{U}_k:=(U_{ki})_{i\in I}$ sei eine offene Steinsche Überdeckung von Y_k, $k\in K$. $V_{ki}:=h_k^{-1}(U_{ki})\subset X$ mit $\bigcup_{i\in I}V_{ki}=X$ und $f_{ki1},\ldots,f_{kin_{ki}}\in\mathscr{A}(V_{ki})$ seien wie vorher gewählt. $\mathfrak{U}:=(\mathfrak{U}_k)_{k\in K}$. Für offenes $U\subset Y$ sei $\mathscr{S}_{h,\mathfrak{U}}(U)$ die Algebra aller $\alpha\in\mathscr{A}(p^{-1}(U))$, so daß für alle $y\in U$ der Keim $\alpha_{p^{-1}(y)}$ in einer Umgebung der Faser $p^{-1}(y)$ in eine konvergente Potenzreihe $\sum a_{\nu_1\ldots\nu_n}f_1^{\nu_1}\ldots f_n^{\nu_n}$ entwickelt werden kann, wobei $f_1,\ldots,f_n\in\bigcup_{k\in K}\{f_{kil}:y\in V_{ki}$ und $l=1,\ldots,n_{ki}\}$.

Dann gilt wieder $\mathscr{S}_{h,\mathfrak{U}}=\mathscr{S}_{h,\mathfrak{U}'}$ für beliebige Überdeckungsfamilien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$, so daß wir wieder nur $\mathscr{S}_h$ für die von h erzeugte *Spektralstruktur* auf X/R schreiben

dürfen. Ist h eine Abbildungsfamilie mit den Bildräumen $Y_k = \mathbf{C}$, $k \in K$, so stimmt $\mathscr{S}_h$ mit der früher definierten Garbe $\mathscr{S}_F$ überein, falls F die h entsprechende Teilmenge von $\Gamma(X, \mathscr{A})$ ist.

HILSSATZ 2. *Sind fast alle Y_k holomorph-vollständig, so ist Y lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel und lokal-$\mathscr{S}_h$-regulär.* –

Beweis. Zu jedem Punkt $y_0 \in Y = X/R \subset \Pi Y_k$ existiert nach Voraussetzung eine Umgebung mit $\mathrm{pr}_k(U) \subset U_{k\,i_k}$ für ein $U_{k\,i_k} \in \mathfrak{U}_k$. Die Menge der zugehörigen Schnitte sei

$$F := \bigcup_{k \in K} \{f_{k\,i_k 1} \mid V : 1 = 1, \ldots, n_{k\,i_k}\},$$

für $V := p^{-1}(U)$. Dann gilt $\mathscr{S}_h \mid U = \mathscr{S}_F$, q.e.d. –

HILFSSATZ 2*. *Ist die von h auf X erzeugte Relation R semi-eigentlich, so ist $Y = X/R$ lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel.* –

Beweis. $h : X \to \Pi Y_k$ ist nach Voraussetzung semi-eigentlich. Also gibt es zu jedem Punkt $y \in h(X) = Y$ eine offene Umgebung $U_y \subset Y$ und eine kompakte Menge $K_y \subset X$ mit $h^{-1}(y') \cap K_y \neq \emptyset$ für alle $y' \in U_y$. Die Quotiententopologie auf Y stimmt hier mit der Relativtopologie überein.

Nach CARTAN [6, Lemma] kann die Relation R auf K_y schon durch endlich viele Abbildungen aus h beschrieben werden, d.h. es existiert eine holomorphe Abbildung

$$f = (h_{k_1}, \ldots, h_{k_r}) : X \to Z := Y_{k_1} \times \cdots \times Y_{k_r},$$

so daß $f^{-1}(f(x)) = h^{-1}(h(x))$ für alle $x \in h^{-1}(U_y)$ gilt. Die Elemente von $\mathscr{S}_f(h^{-1}(U_y))$ trennen die Fasern $h^{-1}(y')$, $y' \in U_y$. Andererseits ist $\mathscr{S}_{f,y'}$ in $\mathscr{S}_{h,y'}$ enthalten für alle $y' \in U_y$, d.h. Y ist lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel, q.e.d. –

Die Spektralgarben $\mathscr{S}_{\tilde{h}}$ von Zerlegungen der Relation einer Familie h werden analog definiert. Es gelten auch mit Satz 1 verwandte Aussagen, die wir nach einigen Vorbereitungen zeigen werden, vgl. § **5**.

§ 3. Holomorph-separable und holomorph-konvexe Räume

Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein F-separabler komplexer Raum mit $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$. Dann ist $X/F = X$, und F ist eine eigentliche Äquivalenzrelation auf X, d.h. $(X, \mathscr{S}_F)$ ist nach Satz 1 ein F-regulärer und F-separabler komplexer Raum mit $\Gamma(X, \mathscr{S}_F) = \overline{\mathbf{C}[F]} \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$. Für $F = \Gamma(X, \mathscr{A})$ erhalten wir eine Aussage, die LIEB [16, Satz 3] für reduziertes X bewies:

SATZ 2. *Auf jedem holomorph-separablen komplexen Raum existiert eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra.* –

Für $A = \Gamma(X, \mathscr{A})$ ist $\mathscr{S} := \mathscr{S}_A$ echt in $\mathscr{A}$ enthalten, wenn $(X, \mathscr{A})$ nicht holomorph-

regulär ist, d.h. es existiert ein Punkt $x \in X$ mit $n := \operatorname{emdim}_x(X, \mathscr{S}) < \operatorname{emdim}_x(X, \mathscr{A}) = :m$. Wir realisieren eine Umgebung U von x jeweils minimal:

$$(U, \mathscr{S}) \subset Z \subset \mathbf{C}^n \quad (U, \mathscr{A}) \subset W \subset \mathbf{C}^m$$
$$\mathscr{S} = {}_Z\mathscr{O}/\mathscr{F} \mid U \qquad \mathscr{A} = {}_W\mathscr{O}/\mathscr{G} \mid U$$
$$U \cong \{z \in Z : \mathscr{F}_z \neq {}_Z\mathscr{O}_z\} \cong \{w \in W : \mathscr{G}_w \neq {}_W\mathscr{O}_w\}.$$

Aus der $\Gamma(X, \mathscr{S})$-Regularität folgt gerade, daß Schnitte $f_1, \ldots, f_n \in A = \Gamma(X, \mathscr{A}) = \Gamma(X, \mathscr{S})$ existieren mit

$$\mathscr{F} = \operatorname{Ann}_{z\mathscr{O}}(f_1, \ldots, f_n)_0(\mathscr{S} \mid U) \subset {}_Z\mathscr{O}.$$

Für $\mathscr{G}$ kann man allerdings solche Schnitte nicht finden. LIEB [16] hat für den reduzierten Fall eine Folgerung zu Satz 2 angegeben:

COROLLAR 1. *Ist $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ für einen konplexem Raum $(X, \mathscr{A})$ gegeben, so daß $\mathscr{A}/F$ eine komplexe Struktur auf X/F ist, so ist auch $(X/F, \mathscr{S}_F)$ ein komplexer Raum.* –

Beweis. Es sei $p : X \to X/F$ die Projektion und ${}^tp : \Gamma(X/F, p_0\mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ der zugehörige Algebra-Isomorphismus. Dann ist $F^* := {}^tp^{-1}(F)$ in $\Gamma(X/F, \mathscr{A}/F)$ enthalten und trennt die Punkte von X/F. Wegen Satz 2 ist nun $(X/F, \mathscr{S}_{F^*})$ ein komplexer Raum, $\mathscr{S}_{F^*}$ und $\mathscr{S}_F$ stimmen aber nach Definition überein, q.e.d. –

BEISPIEL 3. Wir betrachten $(\mathbf{C}, \mathscr{O})$, $\mathscr{O} := {}_1\mathscr{O}$, z sei die Koordinatenfunktion. Die aus den Polynomen z^2, z^3 aus $\Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{O})$ bestehende Menge F trennt die Punkte von $\mathbf{C}$, und $(\mathbf{C}, \mathscr{S}_F)$ ist deshalb ein komplexer Raum. Es gilt:

$$\mathscr{S}_{F,x} = \begin{cases} \{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu T^\nu \in \mathscr{O}_0 \quad \text{mit} \quad a_1 = 0\} & \text{falls } x = 0 \\ \mathscr{O}_x & \text{falls } x \neq 0 \end{cases},$$

d.h. $(\mathbf{C}, \mathscr{S}_F)$ ist die *Neilsche Parabel.* –

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein F-konvexer komplexer Raum, so ist $(X/F, \mathscr{S}_F)$ ein ${}^tp^{-1}(F)$-konvexer und ${}^tp^{-1}(F)$-separabler komplexer Raum, insbesondere Steinsch. Der Spezialfall $F = A$ liefert die Existenz des Remmertschen Quotienten [20] auch im nichtreduzierten Fall: Aus $A = {}^tp\Gamma(Y, \mathscr{S}_A) = {}^tp\Gamma(Y, p_0\mathscr{A})$ folgt $\Gamma(Y, \mathscr{S}_A) = \Gamma(Y, p_0\mathscr{A})$. Die holomorphe Abbildung

$$(p, p^*) : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{S}_A),$$

$Y := X/A$, ist eigentlich, also ist $p_0\mathscr{A}$ nach GRAUERT [9] eine kohärente $\mathscr{S}_A$-Modul-Garbe auf Y. Weil $(Y, \mathscr{S}_A)$ Steinsch ist, gibt es nach Theorem A ([5], [9]) endlich viele Schnitte $h_1, \ldots, h_m \in \Gamma(Y, p_0\mathscr{A})$, die jeden Halm $(p_0\mathscr{A})_y$ über $\mathscr{S}_{A,y}$ erzeugen, $y \in Y$:

$$(p_0\mathscr{A})_y = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{S}_{A,y} h_{i,y} \subset \mathscr{S}_{A,y}.$$

Da andererseits $\mathscr{S}_A \subset \mathscr{A}/A \subset p_0\mathscr{A}$ gilt, stimmen alle drei Garben überein: p hat

zusammenhängende Fasern. Dazu vgl. man auch [27, Lemma von CARTAN-STEIN]. Es gilt also:

SATZ 3. *Zu jedem holomorph-konvexen komplexen Raum* $(X, \mathscr{A})$ *existiert ein Steinscher Raum* $(Y, \mathscr{B})$ *und eine surjektive, einfache und eigentliche holomorphe Abbildung* $(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$, *die einen Isomorphismus* ${}^t p: \Gamma(Y, \mathscr{B}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ *der holomorphen Funktionenalgebren induziert.* (p, p^*) *ist eine Quotientenabbildung: Y ist der Quotient von X nach der durch* $\Gamma(X, \mathscr{A})$ *definierten Äquivalenzrelation, und* $\mathscr{B}$ *stimmt mit der Bildgarbe* $p_0 \mathscr{A}$ *überein. Jede holomorphe Funktion auf X kann über Y faktorisiert werden.* –

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein F-konvexer Raum, $F \subset A = \Gamma(X, \mathscr{A})$, so erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & (X, \mathscr{A}) & \\ {\scriptstyle p_A}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_F} \\ (X/A, \mathscr{S}_A) & \xrightarrow{\phi} & (X/F, \mathscr{S}_F), \end{array}$$

wobei ϕ eine diskrete holomorphe Abbildung ist, weil die Fasern von p_A mit den Zusammenhangskomponenten der Fasern von p_F übereinstimmen.

BEISPIEL 4. Es sei $(X, \mathscr{A})$ holomorph-konvex und endlich-dimensional; dann gibt es etwa nach [2], [18], [26, Trennungssatz] und [27, Satz von BISHOP] endlichviele Schnitte $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathscr{A}) =: A$, die eine eigentliche und maximal-(punkte-)trennende holomorphe Abbildung $(X, \mathscr{A}) \to (\mathbf{C}^n, {}_n\mathcal{O})$ definieren. X ist F-konvex ($F := \{f_1, \ldots, f_n\} \subset A$), und es gilt: $X/F = X/A$, $\mathscr{S}_A = \mathscr{A}/A = \mathscr{A}/F$. Allerdings sind $\mathscr{S}_F$ und $\mathscr{S}_A$ i.a. verschieden. –

Nun beweisen wir:

SATZ 1*. *Es sei* $(X, \mathscr{A})$ *ein komplexer Raum,* $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ *und* F' *die einfache Zerlegung der Äquivalenzrelation F auf X; ist dann* F' *eigentlich, so ist* $(X/F', \mathscr{A}/F')$ *ein komplexer Raum.* –

Bemerkung. Nach CARTAN [6, Beweis zu Theorem 3] ist jede *einfache* Äquivalenzrelation auf einem lokal-kompakten Raum schon eigentlich, wenn sie kompakte Fasern hat. Für nichteinfache Relationen ist diese Aussage falsch. Gegenbeispiel: Die Projektion von

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x\, y = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$$

auf die erste Koordinate induziert eine solche Relation auf X.

Beweis von Satz 1*. Es genügt zu zeigen, daß jede Faser $p^{-1}(p(x))$, $x \in X$, der

Projektion $p: X \to X/F'$ eine Umgebung U besitzt, so daß $(U, \mathscr{A} \mid U)$ holomorph-konvex ist, vgl. Satz 3. Wir beweisen sogar mehr:

HILFSSATZ 3. *Ist $\tilde{F}$ eine beliebige eigentliche Zerlegung von F und $q: X \to X/\tilde{F}$ die Projektion, so besitzt jede Faser $p^{-1}(p(x))$ eine holomorph-konvexe Umgebung U mit $U \cap q^{-1}(q(x)) = p^{-1}(p(x))$.* –

Beweis. F' ist eigentlich. Wir wählen eine relativ-kompakte Umgebung V von $p(x)$, so daß $p^{-1}(p(x)) = p^{-1}(V) \cap q^{-1}(q(x))$ ist – das ist möglich, weil $p(q^{-1}(q(x))$ in X/F' diskret ist –, außerdem endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in F$, die die Äquivalenzrelation F' auf $p^{-1}(V)$ beschreiben. Nach einem topologischen Satz, vgl. STEIN [24, Hilfssatz 3] definieren deshalb die f_i eine eigentliche (holomorphe) Abbildung einer Umgebung $U \subset p^{-1}(V)$ von $p^{-1}(x)$ in einen Polyzylinder des $\mathbf{C}^r$. U kann p-saturiert gewählt werden, weil p eigentlich ist, und ist holomorph-konvex, wie verlangt wurde. Hilfssatz 3 ist bewiesen.

Beispiele zu Satz 1* liefern lokal-holomorph-separable oder auch schwach-holomorph-konvexe komplexe Räume, die wir im folgenden Abschnitt betrachten wollen.

§ 4. Lokal-holomorph-separable und schwach-holomorph-konvexe Räume

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum, $F \subset A = \Gamma(X, \mathscr{A})$ und X etwa a) F-ausbreitbar, b) F-regulär, c) lokal-F-separabel oder d) schwach-F-konvex, so hat die zu F gehörende einfache Äquivalenzrelation F' auf X kompakte Fasern und ist deshalb eigentlich, $(X/F', \mathscr{A}/F')$ ist ein komplexer Raum. In den Fällen a), b) und c) gilt sogar $X/F' = X$ und $\mathscr{A} = \mathscr{A}/F'$. Für b) und c) ist $\mathscr{S}_{F'}$ eine komplexe Unterstruktur auf $(X, \mathscr{A})$. Es gilt $F \subset \Gamma(X, \mathscr{S}_{F'})$, und $(X, \mathscr{S}_{F'})$ ist F-regulär. Wir erhalten die folgende Verschärfung von Satz 2:

SATZ 2*. *Ein komplexer Raum ist genau dann lokal-holomorph-separabel, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert.* –

Beweis. Ist $(X, \mathscr{A})$ lokal-A-separabel für $A := \Gamma(X, A)$, so definiert die einfache Relation A' gerade die Identität auf X. $\mathscr{S}_{A'}$ ist eine holomorph-reguläre Unterstruktur. Die andere Beweisrichtung ist klar.

Der Begriff *schwach-holomorph-konvex* wurde von BISHOP [2] für *partially analytic spaces* eingeführt. In einer Besprechung dieser Arbeit in den Mathematical Reviews 23A, p. 184 (1962) bemerkt GRAUERT, daß die Eigenschaften holomorph-konvex und schwach-holomorph-konvex für (reduzierte) komplexe Räume *nicht-trivial übereinstimmen*. Wir wollen hier die Äquivalenz für beliebige komplexe Räume beweisen:

SATZ 4. *Jeder schwach-holomorph-konvexe Raum ist holomorph-konvex.* –

Zunächst zeigen wir die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von GRAUERT [8]:

LEMMA 1. *Ein schwach-holomorph-konvexer und holomorph-ausbreitbarer komplexer Raum ist holomorph-vollständig.* –

Es genügt, diese Aussage für den reduzierten Fall zu beweisen, weil ein Raum genau dann Steinsch ist, wenn seine Reduktion Steinsch ist, vgl. [9].

X sei also ein schwach-holomorph-konvexer und holomorph-ausbreitbarer (reduzierter) komplexer Raum, $A:=\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$. Etwa nach [25, Satz 1.2] brauchen wir nur zu beweisen, daß zu jeder kompakten Menge $K\subset X$ eine A-konvexe Umgebung U existiert. Denn dann kann X durch holomorph-konvexe und holomorph-ausbreitbare (also nach [8] holomorph-vollständige) offene Teilmengen X_ν ausgeschöpft werden, so daß X_ν jeweils holomorph-konvex bzgl. $X_{\nu+1}$ ist, $\nu=1, 2, \ldots$.

Die Vereinigung L aller Zusammenhangskomponenten von $\hat{K}$, die K treffen, ist kompakt. Das folgt aus

HILFSSATZ 4. *Es sei R ein lokal-kompakter Raum, $M\subset R$ eine abgeschlossene Menge mit kompakten Komponenten M_i $(i\in I)$. Dann ist die Vereinigung L derjenigen M_i, die eine vorgegebene kompakte Menge $K\subset R$ treffen, ebenfalls kompakt.* –

Beweis. $\tilde{R}=R\cup\{\infty\}$ sei die Kompaktifizierung von R. Mit M wäre auch L kompakt. Es sei also M nicht kompakt. Dann stimmt die abgeschlossene Hülle $\tilde{M}$ von M bzgl. $\tilde{R}$ mit $M\cup\{\infty\}$ überein. Sei M_∞ die ∞ enthaltene Komponenten von $\tilde{M}$. Da die M_i kompakt sind, ist $\tilde{M}_i=M_i\subset\tilde{R}$ und $\tilde{M}\backslash M_i$ sowohl offen als auch abgeschlossen in M, d.h. nach [4, Chap. I, § 11, n° 5]:

$$\{\infty\}\subset M_\infty\subset\bigcap_{i\in I}(\tilde{M}\backslash M_i)=\tilde{M}\backslash\bigcup_{i\in I}M_i=\tilde{M}\backslash M=\{\infty\}.$$

Somit ist $\{\infty\}$ gleich dem Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen $N\subset\tilde{M}$ mit $\infty\in N$, wobei o.B.d.A. $N\subset\tilde{R}\backslash K$ vorausgesetzt werden darf. Also besitzt ∞ in $\tilde{R}$ eine offene Umgebung U mit $\partial U\cap M=\emptyset$ und $U\cap K=\emptyset$, etwa $U:=N\cup\cup[\tilde{R}\backslash(\tilde{M}\cup K)]$. $\tilde{R}\backslash U=R\backslash U$ ist kompakt in R und enthält L, nach Konstruktion. Hilfssatz 4 ist bewiesen. –

Wir wählen eine Umgebung V von L, deren Rand ∂V kompakt ist und $\hat{K}$ nicht trifft. Zu jedem Punkt $x\in\partial V$ existiert dann ein $f\in A$ mit $|f(x)|>\sup|f(K)|$. Diese Bedingung ist sogar für eine Umgebung von x erfüllt. Deshalb gibt es endlich viele Funktionen $f_1,\ldots,f_l\in A$ und eine reelle Zahl $\varepsilon>0$ mit

$$\max_{1\leqslant i\leqslant l}|f_i(x)|>\varepsilon>\max_{1\leqslant i\leqslant l}\sup|f_i(K)|$$

für alle $x\in\partial V$. Wir setzen

$$U:=\{x\in V:|f_i(x)|<\varepsilon\quad\text{für alle}\quad i=1,\ldots,l\}$$

und

$$W:=\{z\in\mathbf{C}^l:|z_i|<\varepsilon\quad\text{für alle}\quad i=1,\ldots,l\}.$$

Dann ist die holomorphe Abbildung $(f_1,\ldots,f_l)\colon U\to W$ eigentlich. U ist die gesuchte Umgebung von K, q.e.d.

Beweis von Satz 4. Es sei $(X,\mathscr{A})$ ein schwach-holomorph-konvexer (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum und A' die von $A=\Gamma(X,\mathscr{A})$ definierte einfache Äquivalenzrelation auf X. Nach Satz 1* ist $\mathscr{B}:=\mathscr{A}/A'$ eine komplexe Struktur auf $Y:=X/A'$. $(Y,\mathscr{B})$ ist sogar schwach-holomorph-konvex und holomorph-ausbreitbar, weil die holomorphe Abbildung $(q,q^*)\colon(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ eigentlich sowie surjektiv und der zugehörige Homomorphismus ${}^tq\colon\Gamma(Y,\mathscr{B})\to\Gamma(X,\mathscr{A})$ bijektiv ist. Nach Lemma 1 ist $(Y,\mathscr{B})$ Steinsch, insbesondere holomorph-konvex, q.e.d.

Übrigens stimmt $\mathscr{B}$ wieder mit der Bildgarbe $q_0\mathscr{A}$ überein, vgl. Satz 3.

§ 5. Topologische Äquivalenzrelationen

Wir beweisen nun die folgende Verallgemeinerung des Main Theorem von CARTAN [6] für komplexe Räume im Sinne von GRAUERT:

THEOREM. *Es sei R eine eigentliche Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X,\mathscr{A})$. Dann ist $(X/R,\mathscr{A}/R)$ genau dann ein komplexer Raum, wenn X/R lokal-$\mathscr{A}/R$-ausbreitbar ist.* –

Beweis. Die angegebene Bedingung ist gewiß notwendig. Es genügt also zu zeigen, daß $(X/R,\mathscr{A}/R)$ ein komplexer Raum ist, wenn jeder Punkt $y\in X/R$ eine Umgebung U besitzt, so daß $(U,\mathscr{A}/R\mid U)$ ein $\Gamma(U,\mathscr{A}/R)$-ausbreitbarer (lokal-geringter) Raum ist.

Zunächts zeigen wir mit einem bei CARTAN [6] beschriebenen Trick von GROTHENDIECK, vgl. auch [12]:

SATZ 5. *Ist R eine eigentliche Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X,\mathscr{A})$, so ist $\mathscr{A}/R$ für jede komplexe Struktur $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}/R$ auf X/R eine kohärente $\mathscr{B}$-Garbe.* –

Beweis von Satz 5. Es sei $p\colon X\to Y:=X/R$ die Projektion und $p_x^*\colon\mathscr{B}_{p(x)}\to\mathscr{A}_x\,(x\in X)$ die Beschränkung des natürlichen Homomorphismus $\mathscr{A}_{p^{-1}(p(x))}\to\mathscr{A}_x$. Dann ist $(p,p^*)\colon(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
(X,\mathscr{A}) & \xleftarrow[\mathrm{pr}_i]{} & (R,\mathscr{R}) & \subset & (X\times X,\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \\
\downarrow{\scriptstyle p} & \swarrow{\scriptstyle g} & \downarrow{\scriptstyle p\times p} & & \downarrow{\scriptstyle p\times p} \\
(Y,\mathscr{B}) & \xrightarrow{\sim\ d} & (D,\mathscr{D}) & \subset & (Y\times Y,\mathscr{B}\hat{\otimes}\mathscr{B})
\end{array}$$

Dabei bezeichnet $\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}$ die kanonische Struktur auf $X\times X$. „$\hat{\otimes}$" bezieht sich auf das analytische Tensorprodukt, vgl. NAGATA [17, § 47]: $(\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B})_{(x,x')}:=\mathscr{A}_x\hat{\otimes}\mathscr{B}_{x'}$. D sei die Diagonale von $Y\times Y$, $\mathscr{D}:=(\mathscr{B}\hat{\otimes}\mathscr{B}/\mathscr{K})\mid D$ diejenige Struktur auf D, für die $(Y,\mathscr{B})$ und $(D,\mathscr{D})$ mittels der Diagonalabbildung $d: Y\to Y\times Y$ biholomorph äquivalent sind, $\mathscr{K}:=\operatorname{Kern} d^*$. Das Urbild $(p\times p)^{-1}(D)$ stimmt mit dem Graphen der Äquivalenzrelation $R\subset X\times X$ überein. Es sei $\mathscr{R}:=(\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}/\mathscr{I})\mid R$ für die vom Bild $(p\times p)^*\mathscr{K}$ erzeugte Idealgarbe $\mathscr{I}\subset\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}$. Bei GROTHENDIECK [12] wird $(R,\mathscr{R})$ das *Faserprodukt* von X über Y genannt und mit $X\times_Y X$ bezeichnet, genauer $(X,\mathscr{A})\times_{(Y,\mathscr{B})}(X,\mathscr{A})$. pr_i sei die Beschränkung (auf R) der holomorphen Projektion von $X\times X$ auf die i-te Koordinate $(i=1,2)$. $g:=d^{-1}\cdot(p\times p)=p\cdot\mathrm{pr}_i$ und p sind eigentliche holomorphe Abbildungen. Deshalb erhalten wir mit den Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ und $g_0\mathscr{R}$ nach GRAUERT [9] kohärente $\mathscr{B}$-Modul-Garben (von Algebren) auf Y. Jedes pr_i definiert einen $\mathscr{B}$-Modul-Garben-Homomorphismus $u_i: p_0\mathscr{A}\to g_0\mathscr{R}$. Für $u:=u_1-u_2$ gilt:

$$\mathscr{B}\subset\operatorname{Kern} u\subset\mathscr{A}/R\subset p_0\mathscr{A}.$$

$\mathscr{A}/R$ stimmt sogar mit dem u-Urbild der nilpotenten Elemente $\mathscr{N}$ von $g_0\mathscr{R}$ überein. $\mathscr{N}$ ist aber die 0-te Bildgarbe der nilpotenten Elemente aus $\mathscr{R}$. Deshalb sind $\mathscr{N}$ und $\mathscr{A}/R=u^{-1}(\mathscr{N})$ kohärente $\mathscr{B}$-Garben auf Y, vgl. [9] und [22]. Damit ist Satz 5 bewiesen. Betrachten wir hier die identische Äquivalenzrelation, so erhalten wir den folgenden Spezialfall (und eine Umkehrung):

Sei $(X,\mathscr{B})$ ein komplexer Raum und $\mathscr{A}$ eine Garbe von lokalen Oberalgebren, $\mathscr{A}\supset\mathscr{B}$. Dann ist $(X,\mathscr{A})$ genau dann ein komplexer Raum, wenn $\mathscr{A}$ eine kohärente $\mathscr{B}$-Garbe ist. –

Die Notwendigkeit der Kohärenz können wir direkt zeigen, weil die induzierte holomorphe Abbildung $(X,\mathscr{A})\to(X,\mathscr{B})$ eigentlich und $\mathscr{A}$ als Bildgarbe $id_0\mathscr{A}$ nach GRAUERT [9] kohärent ist. Die Umkehrung folgt nach HOUZEL (vgl. Séminaire Henri Cartan 1960/61): $(X,\mathscr{A})=\operatorname{Specan}(\mathscr{A})$. Unter den Voraussetzungen des Theorems gilt:

COROLLAR 2. *$(X/R,\mathscr{A}/R)$ ist genau dann ein komplexer Raum, wenn auf X/R irgendeine komplexe Struktur $\mathscr{B}$ existiert, so daß die Projektion $p: X\to X/R$ zu einer holomorphen Abbildung $(p,\bar{p}):(X,\mathscr{A})\to(X/R,\mathscr{B})$ ergänzt werden kann.* –

Beweis. Es sei wieder $Y:=X/R$. Wir können o.E.d.A. $\mathscr{B}$ als Untergarbe von $\mathscr{A}/R$ und $\bar{p}=p^*\mid\mathscr{B}$ annehmen, denn $\mathscr{I}:=\operatorname{Ann}_{\mathscr{B}} p_0\mathscr{A}$ ist nach [9] und [22] eine kohärente Idealgarbe in $\mathscr{B}$ mit Nullstellenmenge $p(X)=Y$, und es gilt für alle $y\in Y$:

$$\mathscr{I}_y=\operatorname{Kern}(\mathscr{B}_y\xrightarrow{\bar{p}_y}\mathscr{A}_{p^{-1}(y)}).$$

Also ist $\mathscr{B}':=\mathscr{B}/\mathscr{I}$ eine komplexe Struktur auf Y mit $\mathscr{B}'\subset p_0\mathscr{A}$ und (wegen Hilfssatz 1) $\mathscr{B}'\subset\mathscr{A}/R$. Y ist lokal-$\mathscr{B}$-separabel, also auch lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel, d.h. zu jedem Punkt $y\in Y$ existiert eine Umgebung U, so daß $F:=\Gamma(U,\mathscr{A}/R)$ die Punkte von

U trennt. Als Teilmenge von $\Gamma(V, \mathscr{A})$ definiert F auf $V:=p^{-1}(U)$ die Äquivalenzrelation R. Deshalb ist F eine eigentliche Relation auf V und $(U, \mathscr{S}_F)$ ist nach Satz 1 ein komplexer Raum mit $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{A}/R \mid U$. Nach Satz 5 ist $\mathscr{A}/R \mid U$ eine kohärente $\mathscr{S}_F$-Garbe.

Für offene $U_1 \subset U_2 \subset Y$ gilt $\Gamma(U_2, \mathscr{A}/R) \mid U_1 \subset \Gamma(U_1, \mathscr{A}/R)$ und $\mathscr{S}_{\Gamma(U_2, \mathscr{A}/R)} \mid U_1 \subset \mathscr{S}_{\Gamma(U_1, \mathscr{A}/R)}$. Deshalb kann U so klein gewählt werden, daß $(U, \mathscr{S}_F)$ Steinsch ist. Wegen $F=\Gamma(U, \mathscr{A}/R)=\Gamma(U, \mathscr{S}_F)$ folgt aus Theorem A, daß $\mathscr{S}_F$ und $\mathscr{A}/R \mid U$ übereinstimmen. Damit ist Corollar 2 bewiesen.

Zum Beweis des Theorems setzen wir zunächst mehr voraus, nämlich daß $Y=X/R$ lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel ist. Zu jedem Punkt $y \in Y$ wählen wir eine geignete Umgebung U, so daß $F:=\Gamma(U, \mathscr{A}/R)$ die Punkte trennt. Die Relation F auf $p^{-1}(U)$, F als Teilmenge von $\Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A})$ betrachtet, ist eigentlich, weil sie dort mit R übereinstimmt. Deshalb ist $(U, \mathscr{S}_F)$ nach Satz 1 ein komplexer Raum mit $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{A}/R \mid U$. Hieraus folgt wegen Corollar 2, daß $\mathscr{A}/R$ eine komplexe Struktur auf X/R ist.

SATZ 1**. *Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum und $\tilde{F}$ eine Zerlegung der von einer Funktionenmenge $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ definierten Äquivalenzrelation. Ist dann $\tilde{F}$ eigentlich, so ist $(X/\tilde{F}, \mathscr{A}/\tilde{F})$ ein komplexer Raum.* –

Der Beweis dieses Satzes folgt aus dem bereits bewiesenen abgeschwächten Theorem, wenn wir zeigen, daß $X/\tilde{F}$ lokal-$\mathscr{A}/\tilde{F}$-separabel ist. Nach Hilfssatz 3 wird eine Faser $q^{-1}(y)$, $y \in X/\tilde{F}$, der Projektion $q: X \to X/\tilde{F}$ durch eine endliche disjunkte Vereinigung $U=\bigcup U_i$ holomorph-konvexer Umgebungen U_i der Zusammenhangskomponenten von $q^{-1}(y)$ überdeckt. Diese Vereinigung ist endlich, weil $\tilde{F}$ eine eigentliche Äquivalenzrelation ist. U kann außerdem q-saturiert gewählt werden, durch eventuelle Verkleinerung: $U=q^{-1}(V)$ für offenes V in $X/\tilde{F}$ mit $y \in V$. $\Gamma(V, \mathscr{A}/\tilde{F})$ trennt die Punkte von V nach Konstruktion: Satz 1** ist bewiesen.

Nun ist der Beweis des Theorems einfach: $Y=X/R$ ist lokal-$\mathscr{A}/R$-ausbreitbar. Deshalb können wir zu jedem Punkt $y \in Y$ eine Umgebung U wählen, so daß die von $F:=\Gamma(U, \mathscr{A}/R)$ definierte einfache Äquivalenzrelation $\tilde{F}$ auf U trivial ist. $\tilde{F}$ definiert auf $p^{-1}(U)$ eine Zerlegung der Äquivalenzrelation $F \subset \Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A})$ und ist wegen $\tilde{F}=R \mid p^{-1}(U)$ eigentlich. Deshalb ist $\mathscr{A}/R \mid U=\mathscr{A}/\tilde{F}$ eine komplexe Struktur auf U, nach Satz 1**, q.e.d. –

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, daß das Theorem nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen (vgl. etwa LIEB [16, Satz 7] auf semi-eigentliche Äquivalenzrelationen ausgedehnt werden kann:

BEISPIEL 5. Die Projektion $p: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ auf die erste Koordinate ist eine semi-eigentliche holomorphe Abbildung. Auf $\mathbf{C}^2$ wählen wir die komplexe Struktur $\mathscr{A}:={}_2\mathscr{O} \dot{\oplus}\, {}_2\mathscr{O}$ im Sinne von FORSTER [7], s. auch Bemerkung (3) im Anschluß an Satz 6. Ist R die von p auf dem $\mathbf{C}^2$ definierte Äquivalenzrelation, so ist $\mathbf{C}^2/R=\mathbf{C}$ zwar lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel. $\mathscr{A}/R$ ist jedoch keine komplexe Struktur auf $\mathbf{C}$. –

Wie bereits erwähnt wurde, wollen wir auf Quotienten X/R auch Untergarben von $\mathscr{A}/R$ mit speziellen Eigenschaften untersuchen. Der allgemeine Fall kann sofort auf die triviale Äquivalenzrelation auf X zurückgeführt werden, weil gilt:

SATZ 6. *Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum und $\mathscr{B}$ eine Garbe lokaler Unteralgebren von $\mathscr{A}$. Dann ist $(X, \mathscr{B})$ genau dann ein komplexer Raum, wenn gilt: $\mathscr{B}$ ist abgeschlossen, X ist lokal-$\mathscr{B}$-separabel und lokal-$\mathscr{B}$-regulär.* –

Daß die Eigenschaft lokal-$\mathscr{B}$-ausbreitbar statt lokal-$\mathscr{B}$-separabel nicht ausreicht, wurde bereits in § **2**, Beispiel 2, gezeigt.

Bemerkung. Die drei in Satz 6 angegebenen Voraussetzungen sind unabhängig:

(1) Es sei $(\mathbf{C}, \mathscr{O})$ die komplexe Ebene mit der gewöhnlichen Struktur, $\mathscr{I}_x := \{p \in \mathbf{C}[z-x] : p(x)=0\}$ ist ein Primideal im Polynomring $\mathbf{C}[z]=\mathbf{C}[z-x]$. Deshalb ist die Lokalisierung

$$\mathbf{C}[z]_{\mathscr{I}_x} := \left\{ \frac{p}{q} \in \text{Quotientenring von } \mathbf{C}[z] : q \notin \mathscr{I}_x \right\}$$

eine *lokale* Unteralgebra von $\mathscr{O}_x = \mathbf{C}[\langle z-x \rangle]$. Für offenes $U \subset \mathbf{C}$ sei $\mathscr{B}(U) := \{f \in \mathscr{O}(U) : f_x \in \mathbf{C}[z]_{\mathscr{I}_x} \text{ für alle } x \in U\}$.

$\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ ist eine *nicht abgeschlossene* Garbe von lokalen Unteralgebren. Wegen $\mathbf{C}[z] \subset \Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{B}) =: B$ ist X sowohl B-separabel als auch B-regulär, also insbesondere *lokal-$\mathscr{B}$-separabel* und *-regulär*. (Es genügt natürlich, die Garbe $\mathscr{O}$ nur in einem Punkt aus X abzuändern).

(2) In § **0** (Beispiel 1) wurde auf dem $\mathbf{C}^2$ eine *abgeschlossene* Garbe $\mathscr{B} \subset {}_2\mathscr{O}$ von *lokalen* Unteralgebren angegeben, so daß der Raum $(\mathbf{C}^2, \mathscr{B})$ zwar *lokal-$\mathscr{B}$-regulär*, aber *nicht lokal-$\mathscr{B}$-separabel* ist (nicht einmal lokal-$\mathscr{B}$-ausbreitbar).

(3) Ist R eine Algebra und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, so wird $R_0 := R \times \mathfrak{a}$ mit komponentenweiser Skalarmultiplikation und Addition sowie der Multiplikation

$$(r, a) \cdot (r_1, a_1) := (r r_1, r a_1 + r_1 a)$$

ebenfalls eine Algebra, die mit $R \dot{\oplus} \mathfrak{a}$ bezeichnet wird, vgl. etwa [7] und [17]. Ist R eine lokale Algebra mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{r}$, so ist auch $R \dot{\oplus} \mathfrak{r}$ eine lokale Algebra mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{a}$. Es gilt:

$$\mathfrak{r}_0^2 = \mathfrak{r}^2 \oplus \mathfrak{r}\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_0/\mathfrak{r}_0^2 = \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2 \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{r}\mathfrak{a}.$$

Nun sei $(\mathbf{C}, \mathscr{O})$ die komplexe Ebene mit der üblichen Struktur, $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von $\mathscr{O}_x$, $x \in \mathbf{C}$. Für offenes $U \subset \mathbf{C}$ sei $\mathscr{I}(U)$ das Ideal aller Schnitte $f \in \mathscr{O}(U)$, deren Keime $f_{1/n}$ in $(\mathfrak{m}_{1/n})^n$ liegen, falls $1/n \in U$, $n \in \mathbf{N}$.

$\mathscr{I}(U)$ ist abgeschlossen in $\mathscr{O}(U)$. Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt, daß $\mathscr{I}(U)=0$ für alle offenen Umgebungen U von $0 \in \mathbf{C}$. Nach FORSTER [7, Satz 2.3] ist $\mathscr{A} := \mathscr{O} \dot{\oplus} \mathscr{O}$ eine komplexe Struktur auf $\mathbf{C}$. $\mathscr{B} := \mathscr{O} \oplus \mathscr{I}$ ist eine *abge-*

schlossene Garbe von *lokalen* Unteralgebren von $\mathscr{A}$. $\mathbf{C}$ ist *lokal-$\mathscr{B}$-separabel* (sogar $\Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{B})$-separabel wegen $\mathscr{O} \cong \mathscr{O} \dot{\oplus} 0 \subset \mathscr{B}$). Allerdings ist $\mathbf{C}$ (im Nullpunkt) *nicht lokal-$\mathscr{B}$-regulär*: Für jede Umgebung U von $0 \in \mathbf{C}$ ist $\mathscr{B}(U) = \mathscr{O}(U) \dot{\oplus} 0$. Deshalb erzeugen die Schnitte aus $\mathscr{B}(U)$ nur den Unterraum $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus 0$ des Tangentialraums $T_x(\mathbf{C}, \mathscr{B}) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \mathscr{I}_x/\mathfrak{m}_x \cdot \mathscr{I}_x$, $x \in U$. Aber es gilt:

$$\mathscr{I}_{1/n}/\mathfrak{m}_{1/n} \cdot \mathscr{I}_{1/n} = (\mathfrak{m}_{1/n})^n/(\mathfrak{m}_{1/n})^{n+1} \neq 0,$$
$$\text{und} \quad 1/n \in U \quad \text{für fast alle} \quad n \in N.$$

Beweis von Satz 6. Die drei Bedingungen sind gewiß notwendig. Ist X lokal-$\mathscr{B}$-separabel, so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U, so daß die zu $F := \Gamma(U, \mathscr{B}) \subset \Gamma(U, \mathscr{A})$ gehörende Äquivalenzrelation F die Punkte von U trennt. Also ist $(U, \mathscr{S}_F)$ nach Satz 1 ein komplexer Raum, und da $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ abgeschlossen ist, gilt: $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{B} \mid U \subset \mathscr{A} \mid U$. Nach Satz 5 ist $\mathscr{A} \mid U$ eine kohärente $\mathscr{S}_F$-Garbe auf U, und deshalb ist $\mathscr{B}_x$ ein endlicher $\mathscr{S}_{F,x}$-Modul für alle $x \in U$. Hieraus folgt, daß $\mathscr{B}_x$ ein analytischer Ring über $\mathbf{C}$ ist, vgl. NAGATA [17, § **47**]; denn es gilt:

Ein lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ ist genau dann ein analytischer Ring über $K := R/\mathfrak{m}$, wenn R ein endlicher Modul über einem Unterring ist, der ein konvergenter Potenzreihenring in endlich vielen analytisch unabhängigen Elementen über K ist.

Der Beweis folgt aus dem Normalisierungssatz [17, Theorem (45.5)].

Hieraus erhalten wir noch nicht, daß $\mathscr{B}$ eine komplexe Struktur auf X ist. Die Eigenschaft lokal-$\mathscr{B}$-regulär wurde noch nicht verwendet: U wird so klein gewählt, daß $(U, \mathscr{B} \mid U)$ ein F-regulärer lokal-geringter Raum ist, d.h. die kanonische Abbildung $F \to T_x(U, \mathscr{B})$ ist surjektiv für alle $x \in U$. Deshalb induziert die Injektion $\mathscr{S}_{F,x} \subset \mathscr{B}_x$ einen surjektiven Vektorraum-Homomorphismus

$$T_x(U, \mathscr{S}_F) \to T_x(U, \mathscr{B}).$$

Hieraus folgt $\mathscr{B} \mid U = \mathscr{S}_F$, weil nach ANDREOTTI gilt:

LEMMA 2. *Es seien $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ und $(R, \mathfrak{m})$ analytische Ringe, $\phi: R_0 \to R$ ein (lokaler) Homomorphismus, $\tilde{\phi}: \mathfrak{m}_0 \to \mathfrak{m}$ und $\delta\phi: \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die von ϕ induzierten Abbildungen. Dann sind ϕ, $\tilde{\phi}$ und $\delta\phi$ surjektiv, wenn einer dieser Homomorphismen surjektiv ist.* –

Zum Beweis vgl. [1], [10] und [19].

Bemerkung. Es sei $\mathscr{B}$ eine komplexe Unterstruktur auf $(X, \mathscr{A})$. Dann gilt:

(a) $\mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B}) = \{x \in X: \mathscr{B}_x \neq \mathscr{A}_x\}$ ist eine analytische Menge.

(b) Ist $(X, \mathscr{A})$ reduziert, so ist $\mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ niederdimensional.

(c) Ist außerdem $(X, \mathscr{B})$ normal, so ist $\mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ leer, d.h. $\mathscr{A} = \mathscr{B}$. –

Beweis. (a) $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ und deshalb $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ sind kohärente $\mathscr{B}$-Modul-Garben auf X. Darum ist $\mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ analytisch, etwa nach GRAUERT [9].

Nun sei $(X, \mathscr{A})$ reduziert. Ist dann $\mathscr{B}_x$ normal, so stimmen $\mathscr{B}_x$ und $\mathscr{A}_x$ überein.

Wir erhalten:

$$\{x \in X : \mathscr{B}_x \text{ singulär}\} \supset \{x \in X : \mathscr{B}_x \text{ nicht normal}\} \supset \mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B}).$$

Hieraus folgt (b) und (c).

Die beiden letzten Aussagen werden falsch, wenn nur vorausgesetzt wird, daß $(X, \mathscr{B})$ reduziert ist; denn es gibt nichtreduzierte komplexe Oberstrukturen, etwa $\mathscr{B} \dot{\oplus} \mathscr{M}$ für jede kohärente $\mathscr{B}$-Modul-Garbe $\mathscr{M}$ auf X, vgl. FORSTER [7]. Wir wählen als $\mathscr{A} := \mathscr{B} \dot{\oplus} \mathscr{B}$. Dann ist $\mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B}) = X$.

COROLLAR 3. *Es sei R eine beliebige Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$, $p: X \to X/R$ die Projektion und $(X/R, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum für eine Garbe $\mathscr{B} \subset p_0 \mathscr{A}$ von Unteralgebren. Dann sind alle in $\mathscr{B}$ enthaltenen R-Garben komplexe Strukturen auf X/R. Ist R außerdem eigentlich, so ist $(X/R, \mathscr{A}/R)$ ein komplexer Raum, und genau die R-Garben liefern komplexe Unterstrukturen auf $(X/R, \mathscr{A}/R)$.* –

Der Beweis folgt aus dem Theorem und Satz 6.

SATZ 1^+. *Es sei h eine Familie holomorpher Abbildungen auf einem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$. R sei die zugehörige Äquivalenzrelation auf X, $\tilde{R}$ eine Zerlegung von R und $\mathscr{S}_h$ bzw. $\mathscr{S}_{\tilde{h}}$ die Spektralstruktur auf den Quotienten X/R bzw. $X/\tilde{R}$. Ist R bzw. $\tilde{R}$ eigentlich, so ist $(X/R, \mathscr{S}_h)$ bzw. $(X/\tilde{R}, \mathscr{A}/\tilde{R})$ ein komplexer Raum. Jede Abbildung aus h kann über die induzierte holomorphe Abbildung $p: (X, \mathscr{A}) \to (X/R, \mathscr{S}_h)$ faktorisiert werden.* –

Der Beweis folgt für $(X/R, \mathscr{S}_h)$ bzw. $(X/\tilde{R}, \mathscr{A}/\tilde{R})$ aus dem Theorem und Satz 6 mittels:

HILFSSATZ 2^+. *X/R ist lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel und -regulär, bzw. $X/\tilde{R}$ ist lokal-$\mathscr{S}_{\tilde{h}}$-ausbreitbar, also lokal-$\mathscr{A}/\tilde{R}$-ausbreitbar.* –

Beweis. Zu jedem Punkt $y_0 \in X/R$ wählen wir eine relativ-kompakte Umgebung $V \subset X/R$. Da auch $U := p^{-1}(V)$ relativ-kompakt ist, gibt es eine *endliche* Familie $f \subset h$ mit der Eigenschaft

$$\text{Bild } \delta f_x = \text{Bild } \delta h_x \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Dabei ist Bild δh_x der von der Vereinigung aller Bild $\delta h_{i,x}$ $(h_i \in h)$ aufgespannte Untervektorraum von $T_x(X, \mathscr{A})$. Die holomorphe Abbildung f kann nach Hilfssatz 2* o.E. so gewählt werden, daß sie auf U die Äquivalenzrelation R definiert. Dann ist

$$\mathscr{S}_f \mid V = \mathscr{S}_{\Gamma(V, \mathscr{S}_f)} \subset \mathscr{S}_h \mid V \subset (\mathscr{A}/R) \mid V,$$

d.h. $(V, \mathscr{S}_f \mid V)$ – wegen Satz 1 – und $(V, \mathscr{A}/R \mid V)$ – wegen Corollar 2 – sind komplexe Räume. Außerdem gilt für die Tangentialräume $T_y(V, \mathscr{S}_h) = T_y(V, \mathscr{S}_f)$ für alle y aus V. Deshalb folgt – wie im Beweis von Satz 6 – $\mathscr{S}_h \mid V = \mathscr{S}_f \mid V$.

Den zweiten Teil von Hilfssatz 2^+ beweist man genauso.

§ 6. Analytische Äquivalenzrelationen

In [13, § 4] hat HOLMANN den Begriff der analytischen Äquivalenzrelation auf reduzierten komplexen Räumen eingeführt. Für den allgemeinen Fall gab B. KAUP [14] die Definition folgendermaßen an: Eine analytische Äquivalenzrelation auf $(X, \mathscr{A})$ ist ein komplexer Unterraum $(R, \mathscr{R}) \subset (X \times X, \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A})$, der unter dem Symmetrie-Automorphismus $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ invariant ist, und dessen Träger R der Graph einer mengentheoretischen Äquivalenzrelation auf X ist.

Der lokal-geringte Quotient von $(X, \mathscr{A})$ nach der analytischen Relation $(R, \mathscr{R})$ wird so definiert: R induziert den topologischen Quotienten $Y := X/R$. Das Diagramm (*) in § **5** kann also ohne komplexe Strukturen auf Y, D und $Y \times Y$ betrachtet werden. Auch der Homomorphismus

$$u(\mathscr{R}) = u_1 - u_2 : p_0 \mathscr{A} \to g_0 \mathscr{R}$$

ist definiert. Dann ist Kern $u(\mathscr{R})$ die von HOLMANN und B. KAUP betrachtete lokal-geringte Struktur auf Y, und es folgt; vgl. [14]:

COROLLAR 4. *Ist $(R, \mathscr{R})$ eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$, so ist der Quotient $(X/R, \operatorname{Kern} u(\mathscr{R}))$ genau dann ein komplexer Raum, wenn X/R lokal-$\operatorname{Kern} u(\mathscr{R})$-separabel ist.* –

Beweis. Wegen $\mathscr{B} := \operatorname{Kern} u(\mathscr{R}) \subset \mathscr{A}/R$, vgl. Hilfssatz 1, ist X/R lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel. Also ist $\mathscr{A}/R$ nach dem Theorem eine komplexe Struktur auf X/R. Da u stetig ist, ist $\mathscr{B}$ eine abgeschlossene Untergarbe von $\mathscr{A}/\mathscr{R}$, d.h. $\mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})} \subset \mathscr{B} \mid U$ für alle offenen $U \subset X/R$. Für kleines U ist $(U, \mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})})$ ein komplexer Raum und Steinsch, $\mathscr{B} \mid U$ ist eine kohärente $\mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})}$-Garbe mit $\Gamma(U, \mathscr{B}) = \Gamma(U, \mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})})$, d.h. wegen Theorem A gilt $\mathscr{B} \mid U = \mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})}$; q.e.d.

Bei fester Relation R sei $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ die von einer (symmetrischen) analytischen Struktur $\mathscr{R}$ auf R induzierten Quotientengarbe auf $Y := X/R$: $\mathscr{H}(\mathscr{R}) = \operatorname{Kern} u(\mathscr{R})$.

Ist andererseits $(Y, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum mit $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}/R$, so sei $\mathscr{R}(\mathscr{B})$ die mittels des Diagramms (*) auf R definierte komplexe Struktur („Faserprodukt").

Dann gilt wegen $\mathscr{B} \subset \mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{B})) \subset \mathscr{A}/R$:

(a) $(Y, \mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{B})))$ ist ein komplexer Raum.

(b) $\mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{A}/R)) = \mathscr{A}/R = \mathscr{H}(\mathscr{R}_{\mathrm{red}})$.

Verschiedene analytische Äquivalenzrelationen mit gleichem Träger können durchaus denselben Quotienten induzieren:

BEISPIEL 6. Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein Doppelpunkt, etwa $X = \{0\} \subset \mathbf{C}$ und $\mathscr{A} := \mathscr{O}/\mathfrak{m}^2 = \mathbf{C} \dot{\oplus} \mathbf{C}$. Dabei sei $\mathfrak{m} := {}_1\mathfrak{m}_0$ das maximale Ideal in $\mathscr{O} := {}_1\mathscr{O}_0$. $\mathfrak{m}$ stimmt mit dem von T erzeugten Ideal in $\mathbf{C}[\langle T \rangle]$ überein. Ist R die triviale Relation auf X ($X = X/R$ und

$p=\mathrm{id}_X$), so gilt $\mathscr{A}/R=p_0\mathscr{A}=\mathscr{A}$. Außerdem erhalten wir:

$$\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}=\mathbf{C}[\langle T_1, T_2\rangle]/\tilde{\mathfrak{m}},\ \tilde{\mathfrak{m}}:=(T_1^2, T_2^2)\subsetneq {}_2\mathfrak{m}^2,$$
$${}_2\mathfrak{m}:=(T_1, T_2)\subset\mathbf{C}[\langle T_1, T_2\rangle]={}_2\mathcal{O}_0.$$

Auf dem Graphen $R=X\times X=\{(0,0)\}\subset\mathbf{C}^2$ definieren wir folgende Strukturen:

$$\mathscr{R}_0:=\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}/0=\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A},$$
$$\mathscr{R}_1:=\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}/({}_2\mathfrak{m}^2/\tilde{\mathfrak{m}})\neq\mathscr{R}_0,\quad\text{da}\quad\tilde{\mathfrak{m}}\neq{}_2\mathfrak{m}^2.$$

Trotzdem gilt: $\mathrm{Kern}u(\mathscr{R}_0)=\mathrm{Kern}u(\mathscr{R}_1)$. Der angegebene Raum liefert aber auch ein Beispiel dafür, daß verschiede Quotientenstrukturen $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ auf X/R auftreten können: Für $\mathscr{R}_{\mathrm{red}}=\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}/({}_2\mathfrak{m}/\tilde{\mathfrak{m}})=\mathbf{C}$ gilt $\mathrm{Kern}u(\mathscr{R}_{\mathrm{red}})=\mathscr{A}\neq\mathbf{C}$.

Übrigens ist für alle eigentlichen analytischen Äquivalenzrelationen $(R,\mathscr{R})$ die Beziehung $\mathrm{Kern}u(\mathscr{R}_{\mathrm{red}})=\mathscr{A}/R$ richtig, auch wenn $\mathscr{A}/R$ keine komplexe Struktur auf X/R ist.

Um zu beweisen, daß nicht alle komplexen Unterstrukturen auf dem Quotienten $(X/R, \mathscr{A}/R)$ als $\mathrm{Kern}u(\mathscr{R})$ im Sinne von Corollar 4 dargestellt werden können, zeigen wir:

HILFSSATZ 5. *Es sei R eine eigentliche Relation auf dem komplexen Raum $(X,\mathscr{A})$ und $\mathscr{B}$ eine komplexe Unterstruktur auf $(X/R, \mathscr{A}/R)$, so daß $\mathscr{B}=\mathrm{Kern}u(\mathscr{R})$ gilt für eine (symmetrische) komplexe Struktur $\mathscr{R}$ auf R $(R,\mathscr{R})\subset(X\times X, \mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A})$. Dann gilt auch $\mathscr{B}=\mathrm{Kern}u(\mathscr{R}(\mathscr{B}))$.* –

Der Beweis folgt aus der universellen Eigenschaft des Faserprodukts $(X,\mathscr{A})\times_{(X/R,\mathscr{B})}(X,\mathscr{A})=(R,\mathscr{R}(\mathscr{B}))$, vgl. GROTHENDIECK [12]; denn die Behauptung ist äquivalent mit $\mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{H}(\mathscr{R})))=\mathscr{H}(\mathscr{R})$ für alle symmetrischen Unterräume $(R,\mathscr{R})\subset(X\times X, \mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A})$, die den Graphen von R als Träger besitzen.

Nun kommen wir zum angekündigten

BEISPIEL 7. Es sei $(\mathbf{C},\mathcal{O})$ die gewöhnliche komplexe Ebene mit der Koordinate z. Dann ist die Spektralstruktur $\mathscr{S}:=\mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3, z^4]}$ eine komplexe Unterstruktur:

$$\mathscr{S}_0=\{\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu\in\mathcal{O}_0: a_1=a_2=a_5=0\}\subset\mathcal{O}_0.$$

$(\mathbf{C}^2, {}_2\mathcal{O})=(\mathbf{C}\times\mathbf{C}, \mathcal{O}\hat{\otimes}\mathcal{O})$ habe die Koordinaten x, y. Dann ist $\mathscr{S}\hat{\otimes}\mathscr{S}=\mathscr{S}_{\mathbf{C}[x^3, x^4, y^3, y^4]}\subset{}_2\mathcal{O}$ wieder eine Unterstruktur:

$$(\mathscr{S}\hat{\otimes}\mathscr{S})_{(0,0)}=\{\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty}a_{\nu\mu}x^\nu y^\mu\in{}_2\mathcal{O}_{(0,0)}: a_{\nu\mu}=0\quad\text{für alle}\quad\nu,\mu=1,2,5\}.$$

Die Diagonalabbildung $(d, d^*):(\mathbf{C},\mathscr{S})\to(\mathbf{C}^2, \mathscr{S}\hat{\otimes}\mathscr{S})$ induziert folgenden Homo-

morphismus

$$d_0^*: (\mathscr{S} \hat{\otimes} \mathscr{S})_{(0,0)} \to \mathscr{S}_0,$$

$$\sum_{\nu,\mu \neq 1,2,5}^{\infty} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \mapsto \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Big(\sum_{\nu+\mu=\lambda} a_{\nu\mu} \Big) z^\lambda,$$

d.h. $\operatorname{Kern} d^* = (x^3 - y^3, x^4 - y^4) \subset (\mathscr{S} \hat{\otimes} \mathscr{S})_{(0,0)} \subset {}_2\mathscr{O}_{(0,0)}$.

Nun betrachten wir den Homomorphismus

$$v: \mathscr{O}_0 \to {}_2\mathscr{O}_{(0,0)}, \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x^\nu - y^\nu).$$

$\mathscr{I}$ sei das von $\operatorname{Kern} d^*$ in ${}_2\mathscr{O}_{(0,0)}$ erzeugte Ideal. Dann ist $\mathscr{R}(\mathscr{S}) := {}_2\mathscr{O}/\mathscr{I}$ die zur Quotientenabbildung

$$(\mathbf{C}, \mathscr{O}) \to (\mathbf{C}, \mathscr{S})$$

gehörende (symmetrische) komplexe Struktur auf $\mathbf{C} \times \mathbf{C} = R$, und es gilt: $v^{-1}(\mathscr{I}) = \operatorname{Kern} u(\mathscr{R}(\mathscr{S})) =: \mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{S}))$. Andererseits gehört das Element $z^5 \in \mathscr{O}_0$ zu $v^{-1}(\mathscr{I})$, denn

$$v(z^5) = x^5 - y^5 = (x+y)(x^4 - y^4) - xy(x^3 - y^3) \in \mathscr{I},$$

Aber $z^5 \notin \mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3, z^4]}$. Wir erhalten:

$$\mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3, z^4]} \subsetneq \mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3, z^4, z^5]} = \mathscr{H}\big(\mathscr{R}(\mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3, z^4]})\big) \subsetneq \mathscr{O}.$$

Nach Hilfssatz 5 ist damit die Behauptung bewiesen.

LITERATUR

[1] Andreotti, A. und H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France *90*, 193–259 (1962).

[2] Bishop, E., *Mappings of Partially Analytic Spaces*, Amer. J. Math. *83*, 209–242 (1961).

[3] Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1953), chap. 1–5.

[4] ———, *Topologie générale* (Hermann, Paris 1951), chap. 1–10.

[5] Cartan, H., *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, in *Coll. sur les fonctions de plusieurs variables* (CBRM, Brussel 1953), pp. 41–55.

[6] ———, *Quotients of Complex Analytic Spaces*, in *Contr. to Function Theory* (Bombay 1960), pp. 1–15.

[7] Forster, O., a) *Beiträge zur algebraischen Theorie der holomorph-vollständigen komplexen Räume*, Habilitationschrift (München 1964). b) *Uniqueness of Topology in Stein Spaces*, in *Proc. of Symp. on Function Algebras, at New Orleans 1965* (Scott-Foresman Chicago 1966), pp. 157–163. c) *Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln*, Math. Z. *97*, 376–405 (1967).

[8] Grauert, H., *Charakterisierung der holomorph-vollständigen Räume*, Math. Ann. *129*, 233–259 (1955).

[9] ———, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. I.H.E.S. *5*, 233–292 (1960).

[10] ———, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. *146*, 331–368 (1962).

[11] ———, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. *91*, 377–391 (1963).

[12] GROTHENDIECK, A., *Techniques de construction en géométrie analytique*, I–X (Séminaire Henri Cartan 1960/61).
[13] HOLMANN, H., *Komplexe Räume mit komplexen Transformationsgruppen*, Math. Ann. *150*, 327–360 (1963).
[14] KAUP, B., Dissertation (Fribourg 1967).
[15] KUHLMANN, N., *Über holomorphe Abbildungen komplexer Räume*, Arch. Math. *15*, 81–90 (1964).
[16] LIEB, I., *Über komplexe Räume und komplexe Spektren*, Invent. math. *1*, 45–58 (1966).
[17] NAGATA, M., *Local Rings* (Interscience Publ., New York 1962).
[18] NARASIMHAN, R., *Imbedding of Holomorphically Complete Complex Spaces*. Amer. J. Math. *82*, 917–934 (1960).
[19] ———, *Levi Problem for Complex Spaces*, II. Math. Ann. *146*, 195–216 (1962).
[20] REMMERT, R., a) *Sur les espaces analytiques holomorphiquement separables et holomorphiquement convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris *243*, 118–121 (1956). b) Habilitationsschrift (Münster 1957). c) *Reduction of Complex Spaces*, Princeton Seminars on Analytic Functions, vol. *1*, Sem. I (1960).
[21] SCHUSTER, H. W., *Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume*. Dissertation (München 1968).
[22] SERRE, J.-P., *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math. *61*, 197–278 (1955).
[23] ———, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier *6*, 1–42 (1955/56).
[24] STEIN, K., *Analytische Zerlegungen komplexer Räume*, Math. Ann. *132*, 63–93 (1956).
[25] ———, *Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume*, Arch. Math. *7*, 354–361 (1956).
[26] WIEGMANN, K.-W., *Einbettungen komplexer Räume in Zahlenräume*, Invent. math. *1*, 229–242 (1966).
[27] ———, *Über Quotienten holomorph-konvexer komplexer Räume*, Math. Z. *97*, 251–258 (1967).

Mathematisches Institut
der Universität München

Eingegangen den 30. Mai 1968

Ein Satz über orthogonal abgeschlossene Unterräume

von E. OGG

Einleitung

Seien k ein kommutativer Körper, E ein k-Vektorraum und $\Phi: E\times E\to k$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Viele unter den allereinfachsten Fragen zur „linearen Algebra" eines Paares (E, Φ) sind noch unbeantwortet im Falle unendlicher (algebraischer) Dimension von E. Wir beweisen in diesem Beitrag den folgenden

SATZ: *E sei eingebettet in einen Vektorraum $\bar{E}$ mit orthogonaler Basis bezüglich $\bar{\Phi}: \bar{E}\times\bar{E}\to k$. $\bar{\Phi}$ sowie $\bar{\Phi}|_{E\times E}=\Phi$ seien nicht ausgeartet. Ist F ein festes lineares Komplement von G bezüglich $E(F\oplus G=E)$, dann existiert ein Komplement F_0 von G in E derart, dass $F_0\subset F^{\perp\perp}$ (der Biorthogonalraum von F in E) und $F_0^{\perp_E\perp_E}\cap E=F_0$.*

Als Anwendung zu totalisotropen Unterräumen $F(F\subset F^{\perp})$ eines Raumes E mit orthogonaler Basis erhalten wir das

KOROLLAR 1: *Sei E ein Raum mit orthogonaler Basis bezüglich der nicht ausgearteten Bilinearform Φ. Besitzt der Unterraum G von E ein totalisotropes Komplement F in E, dann besitzt G auch ein orthogonal abgeschlossenes, totalisotropes Komplement in E.*

Schliesslich ergibt sich aus dem Beweis auch noch das KOROLLAR 2: *(E, Φ) sei wie im Korollar 1. Für jeden Unterraum F von E gilt:* $\dim F^{\perp\perp}=\dim F$.

Die letzte Behauptung ist falsch, wenn man die Voraussetzung über die Existenz einer für Φ orthogonalen Basis von E fallen lässt. Wir verweisen noch auf die Arbeiten [2] und speziell für die Anwendungen zum Korollar 1 auf [1]. Dem Beweise des Satzes schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Gegeben sei ein Vektorraum E mit $(e_\iota)_{\iota\in J}$ als Basis. Zu jedem $x=\sum_\iota \xi_\iota e_\iota\in E$ betrachten wir die endliche Indexmenge $M_x=\{\iota\in J\mid\xi_\iota\neq 0\}$.

LEMMA: *Ist H ein linearer Unterraum von E, dann existiert eine Basis $(h_\kappa)_{\kappa\in I}$ von H mit $M_{h_\kappa}\not\subset\bigcup_{\substack{\nu\in I\\ \nu\neq\kappa}} M_{h_\nu}$ für alle $\kappa\in I$.*

Beweis: Der Indexmenge J fügen wir einen neuen Index $\mathcal{O}$ hinzu. $J_0=J\cup\{\mathcal{O}\}$ sei wohlgeordnet, und $\mathcal{O}$ sei das kleinste Element. Wir definieren eine Abbildung $\mu: E\to J_0$ wie folgt: Jedem $x\in H$ und $x\neq 0$ ordnen wir den grössten Index in M_x zu. $\mu(0)=\mathcal{O}$. Ist $x\notin H$ und $M_x\cap\mu(H)\neq\emptyset$, dann sei $\mu(x)$ der grösste Index in $M_x\cap\mu(H)$. Im Falle $M_x\cap\mu(H)=\emptyset$ setzen wir $\mu(x)=\mathcal{O}$.

Wir beweisen zunächst: Zu jedem festen $x\in E$ gibt es ein x' mit $x'\equiv x(H)$ und

$\mu(x')=\mathcal{O}$. Ist $\mu(x)=\mathcal{O}$, dann kann $x'=x$ gesetzt werden. Sei also $\mu(x)\neq\mathcal{O}$. Dann existiert ein $y_1\in H$ mit $\mu(x)=\mu(y_1)$. Wir bilden $x_1=x-\lambda_1 y_1$, wobei wir λ_1 so wählen können, dass $\mu(x)\notin M_{x_1}$, d.h. $\mu(x_1)<\mu(x)$. Ist $\mu(x_1)=\mathcal{O}$, dann setzen wir $x'=x_1$. Im Falle $\mu(x_1)\neq\mathcal{O}$ kann das Verfahren fortgesetzt werden. Das Verfahren muss nach endlich vielen Schritten abbrechen, denn sonst gäbe es in J_0 eine nicht abbrechende, absteigende Folge $\mu(x)>\mu(x_1)>\mu(x_2)>\cdots$, die kein kleinstes Element besitzt. Dies widerspricht aber der Wohlordnung von J_0. Für ein gewisses n muss also $\mu(x_n)=\mathcal{O}$ sein, wobei $x_n=x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i$ und $y_i\in H$. Somit ist $x_n\equiv x(H)$, und wir können $x'=x_n$ setzen.

Wir zeigen nun: Zu jedem $\kappa\in\mu(H)$ und $\kappa\neq\mathcal{O}$ existiert ein $z\in H$ mit $\mu(z)=\kappa$ und $M_z\cap\{\iota\in\mu(H)\mid\iota<\kappa\}=\emptyset$. $H_\kappa=\{y\in H\mid\mu(y)<\kappa\}$ ist ein linearer Unterraum von H. Sei $z'\in H$ mit $\mu(z')=\kappa$. Indem wir die obige Überlegung auf H_κ und z' anwenden, erhalten wir ein z mit $z\equiv z'(H_\kappa)$ und $M_z\cap\mu(H_\kappa)=\emptyset$, und es ist $\mu(z)=\mu(z')=\kappa$. Zu jedem $\kappa\in I=\mu(H)\setminus\{\mathcal{O}\}$ bilden wir $A_\kappa=\{y\in H\mid\mu(y)=\kappa,\ \iota\notin M_y$ für alle $\iota\in\mu(H)$ und $\iota<\kappa\}$. $A_\kappa\neq\emptyset$. Nach dem Auswahl-axiom kann in jedem A_κ ein h_κ gewählt werden. Diese h_κ haben die Eigenschaft, dass $\iota\notin M_{h_\kappa}$ für alle $\iota\in\mu(H)$, $\iota\neq\kappa$ und $\mu(h_\kappa)=\kappa$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $(h_\kappa)_{\kappa\in I}$ eine Basis von H ist. $(h_\kappa)_{\kappa\in I}$ ist jedenfalls linear unabhängig. Sei $x\in H$ beliebig und $H_0=k(h_\kappa)_{\kappa\in I}$. $H_0\subset H$. Nach obiger Überlegung existiert ein x' mit $x'\equiv x(H_0)$ und $M_{x'}\cap\mu(H_0)=\emptyset$. Wäre $x'\neq 0$, dann hätte man $\mu(x')\in M_{x'}$ und somit $M_{x'}\cap\mu(H_0)=M_{x'}\cap\mu(H)\neq\emptyset$. Dies ergibt einen Widerspruch. Also ist $x'=0$, d.h. $x\in H_0$. Q.E.D.

Beweis des Satzes: Sei $(e_\iota)_{\iota\in J}$ eine Basis von $\bar{E}$, $(f_\kappa)_{\kappa\in K}$ eine Basis von F und $H=F^{\perp\perp}\cap G$. Wir wählen in H eine Basis $(h_\iota)_{\iota\in I}$ wie im Hilfssatz. Es ist dann also $\mu(h_\iota)=\iota$, $\mu(H\setminus\{0\})=I\subset J$, $\nu\notin M_{h_\iota}$ für alle $\nu\in I$ und $\nu\neq\iota$. Wir setzen nun $f'_\kappa=f_\kappa-\sum_\iota\lambda_{\kappa\iota}h_\iota$. Da $\bar{\Phi}(e_\nu,h_\nu)\neq 0$, können die $\lambda_{\kappa\iota}$ so gewählt werden, dass $\bar{\Phi}(e_\nu,f'_\kappa)=\bar{\Phi}(e_\nu,f_\kappa)-\lambda_{\kappa\nu}\bar{\Phi}(e_\nu,h_\nu)=0$ für alle $\nu\in I$. Dabei ist $\lambda_{\kappa\nu}\neq 0$ nur für endlich viele $\nu\in I$. Sei $F_0=k(f'_\kappa)_{\kappa\in K}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der f_κ von den h_ι ist $(f'_\kappa)_{\kappa\in K}$ eine Basis von F_0 und $F_0\cap G=(0)$. Ferner ist $F_0\oplus G=E$ und $F_0\subset F^{\perp\perp}$.

Wir behaupten jetzt: $F_0^{\perp E^{\perp E}}\cap E=F_0$. Man hat $F_0\subset F^{\perp E^{\perp E}}\cap E$, $F_0^{\perp}\subset F_0^{\perp E}$ und daher $F_0^{\perp E^{\perp E}}\subset F_0^{\perp\perp E}$, $F_0^{\perp E^{\perp E}}\cap E\subset F_0^{\perp\perp E}\cap E=F_0^{\perp\perp}\subset F^{\perp\perp}$. Sei $x\in F_0^{\perp E^{\perp E}}\cap E$. Wäre $x\notin F_0$, dann gäbe es eine Zerlegung $x=x_1+x_2$ mit $x_1\in F_0$, $x_2\in G$, $x_2\neq 0$. Da $x_2\in H\setminus\{0\}$, wäre $\mu(x_2)=\iota_0\in I$, also $\bar{\Phi}(e_{\iota_0},x_2)\neq 0$. Andererseits ist $\bar{\Phi}(e_{\iota_0},f'_\kappa)=0$ für alle $\kappa\in K$. Es ist $e_{\iota_0}\in F_0^{\perp E}$, somit $x_2\notin F_0^{\perp E^{\perp E}}$, $x\notin F_0^{\perp E^{\perp E}}\cap E$. Dies ist ein Widerspruch. Q.E.D.

Das *Korollar* 2 folgt aus dem Beweise des Satzes, wobei E und $\bar{E}$, und damit Φ und $\bar{\Phi}$ zusammenfallen. Für jedes $\nu\in I$ ist $\Phi(e_\nu,h_\nu)\neq 0$. Da $h_\nu\in F^{\perp\perp}$, existiert ein $\kappa\in K$ mit $\Phi(e_\nu,f_\kappa)\neq 0$, d.h. zu jedem $\nu\in I$ gibt es ein $\kappa\in K$ mit $\lambda_{\kappa\nu}\neq 0$. Andererseits gibt es zu jedem $\kappa\in K$ höchstens endlich viele ν mit $\lambda_{\kappa\nu}\neq 0$. Ist $\dim F=\operatorname{card}K\geqslant\aleph_0$, dann gilt also: $\operatorname{card}I\leqslant\operatorname{card}K\cdot\aleph_0=\operatorname{card}K$. Wegen $F^{\perp\perp}=F^{\perp\perp}\cap(F\oplus G)=F\oplus(F^{\perp\perp}\cap G)$

$= F \oplus H$ ist $\dim F^{\perp\perp} = \operatorname{card} K + \operatorname{card} I = \operatorname{card} K$ und daher $\dim F^{\perp\perp} = \dim F$. Für endlichdimensionale Unterräume ist diese Beziehung wohlbekannt.

Das *Korollar* 1 ergibt sich aus der Bemerkung, dass für ein totalisotropes F der Unterraum $F^{\perp\perp}$ ebenfalls totalisotrop ist. Denn aus $F \subset F^{\perp}$ folgt $F^{\perp\perp} \subset (F^{\perp})^{\perp\perp} = (F^{\perp\perp})^{\perp}$.

LITERATUR

[1] GROSS, H. und V. H. MILLER, *Continuous Forms in Infinite Dimensional Spaces*, Comment. Math. Helv. *42* (1967), 132–170.

[2] KAPLANSKY, I., *Forms in Infinite-Dimensional Spaces* An. Acad. Brasil. Ci. *22* (1950), 1–17.

Eingegangen den 19. März 1968

Welding Riemann Surfaces and Transmission Problems with Shifts

by DONALD ORTH[1,2])

I. A real, 2-dimensional C^∞ manifold X is called an H-manifold whenever there is a coordinate system on X for which $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ is either biholomorphic or bianti-holomorphic on $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ for every pair φ_1, φ_2. A closed subset S of X is called a C^{1+a} 1-complex on X if S is locally a star of C^{1+a} curves and is equipped with its minimal simplicial structure ([6], [7]); S is not necessarily oriented. From the bordered H-manifold $\overline{X}$ relative to X and S ([6], [7]). Intuitively this is done by cutting X along S and attaching to each resulting piece those 1-simplices of S which lie along it. Let pr be the projection of $\overline{X}$ onto X, $\overline{X}_\beta = \mathrm{pr}^{-1}(S)$, and $\{\sigma_\lambda^1 : \lambda \in \Lambda\}$ the 1-simplices of a simplicial structure on $\overline{X}_\beta$ for which $\mathrm{pr}(\sigma_\lambda^1)$ is a C^{1+a} curve on X for every $\lambda \in \Lambda$ (or equivalently, the projection of this simplicial structure onto S refines the minimal structure on S). Let $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ be a bijective map such that

$$\text{(i)} \qquad \varphi(\lambda) \neq \lambda;$$

$$\text{(ii)} \qquad \varphi \circ \varphi(\lambda) = \lambda$$

for every $\lambda \in \Lambda$. Let $\alpha_\lambda : \sigma_\lambda^1 \to \sigma_{\varphi(\lambda)}^1$ be a C^{1+a} homeomorphism such that

$$\alpha_{\varphi(\lambda)} \circ \alpha_\lambda = \text{identity},$$

again for every $\lambda \in \Lambda$. Form the quotient space X^α from $\overline{X}$ by identifying two points $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}_\beta$ whenever there are finitely many maps $\alpha_{\lambda_1}, \ldots, \alpha_{\lambda_n}$ for which $\alpha_{\lambda_n} \circ \cdots \circ \alpha_{\lambda_1}(\bar{x}) = \bar{y}$. Let $\chi : \overline{X} \to X^\alpha$ be the quotient map. It will be assumed throughout that $\chi^{-1}(x)$ is a finite set for every $x \in X^\alpha$. X^α is then a smooth manifold. A condition on the maps $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ will be given and shown to be both necessary and sufficient in order that

(a) X^α can be given a unique H-structure for which

$$\chi \circ \mathrm{pr}^{-1} : X \backslash S \to X^\alpha \backslash \chi(\overline{X}_\beta)$$

is an H-homeomorphism (X^α is then said to be obtained uniquely from X by welding);

(b) $S^\alpha = \chi(\overline{X}_\beta)$ is a $C^{1+a'}$ 1-complex on X^α for some $a' \leqslant a$.

This condition is described as follows. For simplicity, suppose that every point on S and S^α has order > 1 ([6]); the case when S or S^α has points of order $= 1$ will be discussed later. Let $\overline{X}_j, j \in J$ denote the connected components of $\overline{X}$ and pr_j the map $\mathrm{pr} \mid \overline{X}_j$. The H-coordinate system on $\overline{X}$ can always be chosen so that for any

---

[1]) The results in this paper are contained in the author's doctoral dissertation written under the direction of H. RÖHRL at the University of California, San Diego.

[2]) This research was partially sponsored by the Air Force Office of Scientific Research, Office of Aerospace Research, USAF, under AFOSR Grant No. AF-AFOSR-920-65.

coordinate neighborhood U of a point in $\overline{X}_j \cap \overline{X}_\beta$ and its corresponding coordinate $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}(U)$ is a wedge in $\mathbf{C}$ with tip at the origin and $\psi = \varphi \circ \mathrm{pr}_j \circ \bar{\varphi}^{-1}$ is angle preserving on $\bar{\varphi}(U)$, where φ is a coordinate in an open set on X containing $\mathrm{pr}_j(U)$. For any vertex x of $\overline{X}_\beta$ and σ_λ^1 containing $x = \bar{\varphi}_2 \circ \alpha_\lambda^1 \alpha_\lambda \circ \bar{\varphi}_1^{-1}$ ($\bar{\varphi}_1$ and $\bar{\varphi}_2$ are coordinates at x and $\alpha_\lambda(x)$ respectively) is a map from the ray $\{te^{i\zeta}: 0 \leqslant t < M\}$ onto the ray $\{te^{i\eta}: 0 \leqslant t < N\}$. Define $\alpha_\lambda''(t)$ by the rule $\alpha_\lambda'(te^{i\zeta}) = \alpha_\lambda''(t)\, e^{i\eta}$; $(d\alpha_\lambda''/dt)(0)$ exists and is nonzero. Denote $(d\alpha_\lambda''/dt)(0)$ by $\dot{\alpha}_\lambda(x)$; $\dot{\alpha}_\lambda(x)$ depends on the choice of coordinates. Choose an oriented coordinate neighborhood of every point in S^α which is the image under χ of a vertex of $\overline{X}_\beta$; this orientation induces one on a coordinate neighborhood of every vertex x of $\overline{X}_\beta$ and thereby an orientation on a piece of each of the two 1-simplices containing x. x is the initial point of one piece and the terminal point of the other. Denote the 1-simplex whose piece has x as initial point by σ_x^1 and by α_x the map α_λ whose domain is σ_x^1. For each vertex x of $\overline{X}_\beta$ the product $\prod\{\dot{\alpha}_y(y): \chi(y) = \chi(x)\}$ is independent of the choice of coordinates. The condition referred to above is that for every vertex $x \in \overline{X}_\beta$

$$\prod\{\dot{\alpha}_y(y): \chi(y) = \chi(x)\} = 1\,. \tag{1}$$

The condition is the same as (1) at a vertex x if we choose σ_x^1 to be the simplex whose piece has y as its terminal point for every y for which $\chi(y) = \chi(y)$, and so is also independent of the above choice of oriented coordinate neighborhoods.

Using the welding procedure and the results of [6], it can be shown that there is a large class of transmission problems with shifts generalizing those in the sense of HASEMAN and CARLEMAN such that for each member of this class there is an associated holomorphic fibre bundle over a corresponding welded Riemann surface for which the solution space of the problem is functorally isomorphic to the space of global holomorphic sections in the associated bundle. Known results about holomorphic fibre bundles on Riemann surfaces can then be used to describe the solution spaces.

Finally, the welding and transmission problems on holomorphic families of Riemann surfaces are discussed.

Notation. A C^a map is one which is Hölder continuous with index a. It is C^{1+a} if it is continuously differentiable with C^a first partials. It is C_0^{1+a} if it is C^{1+a} with nowhere zero first partials. All curves are smooth, so a C^{1+a} curve is one described by a C_0^{1+a} map. $G(K)$ denotes the disc in $\mathbf{C}$ with center the origin and radius K, while $\ell(\zeta, K)$ is the ray $\{t\exp(i\zeta): 0 \leqslant t < K\}$. $D(K)$ and $\bar{D}(K)$ denote wedges of the form $\{w: |w| < K,\ \zeta < \arg w < \eta\}$ and $\{w: |w| < K,\ \zeta \leqslant \arg w \leqslant \eta\}$ respectively. $\mathbf{C}^+ = \{w: \mathrm{Im}\, w \geqslant 0\}$, $\mathbf{C}^- = \mathbf{C} \backslash \mathrm{Int}\, \mathbf{C}^+$.

§ 1. The Local Problem

Let $\overline{X}$ be the disjoint union $\cup\{\bar{D}_\mu(K_\mu): \mu = 1, \ldots, n\}$; clearly $\overline{X}_\beta = \cup\{b\,dy_{G(K_\mu)} \bar{D}_\mu(K_\mu): \mu = 1, \ldots, n\}$. Let α_μ be a C_0^{1+a} homeomorphism of $\ell(\eta_\mu, K_\mu)$

onto $\ell(\zeta_{\mu+1}, K_{\mu+1})$. Form X^α relative to $\overline{X}_\beta$ and $\{\alpha_\mu, \alpha_\mu^{-1}: \mu = 1, \ldots, n\}$. X^α and S^α have properties (a) and (b) of the introduction if and only if

1°) there is a region G in $\mathbf{C}$ and a star of simple, $C^{1+a'}$ curves ([6]) $\{\mathscr{C}_\mu: \mu = 1, \ldots, n\}$ at some point $w_0 \in G$ which divides G into n simply-connected domains G_μ, where $bdy_G G_\mu = \mathscr{C}_{\mu-1} \cup \mathscr{C}_\mu$;

2°) there exist $C^{1+a'}$ homeomorphisms $A_\mu: \overline{D}_\mu(K_\mu) \to Cl_G G_\mu$ which are biholomorphic on $D_\mu(K_\mu)$ and satisfy

(i) $A_\mu(0) = w_0$

(ii) $A_{\mu+1}^{-1} \circ A_\mu = \alpha_\mu$ on $\ell(\eta_\mu, K_\mu)$; [3])

3°) (uniqueness) if G_μ^*, $\mathscr{C}^*$, A_μ^* also satisfy 1° and 2°, then there is a homeomorphism $\mathscr{L}: G \to G^*$ for which both $\mathscr{L}$ and $\mathscr{L}^{-1}$ are H-maps and $A_\mu = \mathscr{L} \circ A_\mu^*$ for every μ.

X^α and S^α are said to have properties (a) and (b) *locally* if there is an open neighborhood V of $\chi(0)$ in X^α for which $X^\alpha \cap V$ and $S^\alpha \cap V$ have properties (a) and (b).

In order to prove the necessity of condition (1) for the local problem, let α_μ' be the real-valued function defined by

$$\alpha_\mu(t \exp(i\eta_\mu)) = \alpha_\mu'(t) \exp(i\zeta_{\mu+1}).$$

Define $\zeta^{-1} = \sum_{\mu=1}^{n} (\eta_\mu - \zeta_\mu)$; a single-valued branch g_μ of $w^{2\pi\zeta}$ can be defined on each wedge $\overline{D}_\mu(K_\mu)$. Now

$$A_\mu^* = A_\mu \circ g_\mu^{-1}: g_\mu(\overline{D}_\mu(K_\mu)) \to G_\mu$$

is biholomorphic on $g_\mu(D_\mu(K_\mu))$ and therefore $C^{1+a'}$ on $g_\mu(\overline{D}_\mu(K_\mu))$; A_μ^* is also angle preserving at the origin and so $(d/dw)\, A_\mu^*$ exists on $g_\mu(\overline{D}_\mu(K_\mu))$ and is nowhere zero. These facts are Kellogg's theorem ([3], [9]). It follows that $(d/dw)\,(A_\mu^*)^{-1}$ exists and is nonzero on $Cl_G G_\mu$. Now

$$(A_{\mu+1}^*)^{-1} \circ A_\mu^* = g_{\mu+1} \circ A_{\mu+1}^{-1} \circ A_\mu \circ g_\mu^{-1} = g_{\mu+1} \circ \alpha_\mu \circ g_\mu^{-1} \quad [3])$$

and so

$$\prod_{\mu=1}^{n} \left|\frac{d}{dt}\alpha_\mu'(0)\right| = \prod \left|\frac{d}{dt} g_{\mu+1} \circ \alpha_\mu \circ g_\mu^{-1}\right|^{2\pi\zeta}$$

$$= \prod \left|\frac{d}{dt} A_{\mu+1}^{*-1} \circ A_\mu^*(0)\right|^{2\pi\zeta} = \prod \left|\frac{d}{dw} A_{\mu+1}^{*-1}(0)\right|^{2\pi\zeta} \cdot \left|\frac{d}{dw} A_\mu^*(0)\right|^{2\pi\zeta} = 1;$$

(d/dt) means the following. The above maps, e.g. $(A_{\mu+1}^*)^{-1} \circ A_\mu^*$, are maps from one ray through the origin to another and so define real-valued functions of the real variable t just as α_μ defines α_μ'. It is these functions which are differentiated with respect to t. This proves the necessity of the condition.

[3]) Indices are taken modulo n.

Now assume that

$$\prod_{\mu=1}^{n} \left| \frac{d}{dt} \alpha'_\mu(0) \right| = 1; \tag{1'}$$

since for $\alpha^*_\mu = g_{\mu+1} \circ \alpha_\mu \circ g_\mu^{-1}$ we have

$$\prod_{\mu=1}^{n} \left| \frac{d}{dt} \alpha^{*\prime}_\mu(0) \right|^{2\pi\zeta} = \prod_{\mu=1}^{n} \left| \frac{d}{dt} \alpha'_\mu(0) \right| = 1 = \prod_{\mu=1}^{n} \left| \frac{d}{dt} \alpha^{*\prime}_\mu(0) \right|,$$

there is no loss in generality in assuming that $\zeta^{-1} = 2\pi$. Of course the wedges may be rotated so that $\eta_\mu = \zeta_{\mu+1}$.

(1.1) LEMMA. *If a_μ are positive numbers for which $\prod_{\mu=1}^{n} a_\mu = 1$ $(n>1)$, then there are positive numbers $c_1, \ldots, c_n$ satisfying $c_{\mu+1}^{-1} \cdot a_\mu \cdot c_\mu = 1$ for all μ.*

Proof. Obvious.

Let c_μ be the constants determined in the lemma for $a_\mu = |(d/dt)\, \alpha'_\mu(0)|$, and denote also by c_μ the constant map on $\mathbf{C}$ with value c_μ. The maps $\alpha^*_\mu = c_{\mu+1}^{-1} \circ \alpha_\mu \circ c_\mu$ satisfy $|(d/dt)\, \alpha^{*\prime}_\mu(0)| = 1$, and so there is no loss in generality in assuming that $|(d/dt)\, \alpha'_\mu(0)| = 1$. In fact, since the functions α'_μ are increasing, we may assume that

$$\frac{d}{dt} \alpha'_\mu(0) = 1. \tag{2}$$

Finally, it may be assumed that there is μ and ν with $\mu \neq \nu$ and $\zeta_\nu = \zeta^\mu + \pi$. For if not, choose a ζ_μ and let $\zeta_0 = \zeta_\mu + \pi$; $\ell(\zeta_0, K_\nu)$ is contained in some $D_\nu(K_\nu)$. Form $\overline{\overline{D_\nu(K_\nu)}}$ relative to $\ell(\zeta_0, K_\nu)$ and let $\bar{D}_1(K_\nu) \cup \bar{D}_2(K_\nu) = \overline{\overline{D_\nu(K_\nu)}}$, while α is the unique welding correspondence between $\bar{D}_1(K_\nu)$ and $\bar{D}_2(K_\nu)$ which induces in the obvious way the identity map on $\ell(\zeta_0, K_\nu)$. Take all other welding correspondences as before. Condition (2) is then satisfied by the new system of welding correspondences $\{\alpha_\mu : \mu = 1, \ldots, n\} \cup \{\alpha\}$, so if (2) is sufficient for the existence of a local weld then X^α formed relative to $\{\alpha_\mu : \mu = 1, \ldots, n\}$ and $\tilde{X}^\alpha$ formed relative to $\{\alpha_\mu : \mu = 1, \ldots, n\} \cup \{\alpha\}$ are H-isomorphic in an open neighborhood of $\chi(0)$. This is a direct result of the choice of α.

Consequently, the sufficiency of (1) for the existence of a local weld is proved once we have proved the following proposition.

Let the wedges $D_\mu(K_\mu)$, $\mu = 1, \ldots, n$ be such that $\eta_\mu = \zeta_{\mu+1}$ and denote $\ell(\zeta_\mu, K_\mu)$ by $\ell_\mu(K_\mu)$. Let $\alpha_\mu : \ell_\mu(K_\mu) \to \ell_\mu(K_{\mu+1})$ be a homeomorphism such that $\alpha_\mu(0) = 0$.

(1.2) PROPOSITION. *Let $\overline{X} = \cup \bar{D}_\mu(K_\mu)$ with welding correspondences α_μ as above which are C_0^{1+a} on $\ell_\mu(K_\mu)$. Then $\overline{X}$ can be welded locally if*

1° *there exists p and q, $1 \leqslant p < q \leqslant n$ such that $\zeta_p = \zeta_q + \pi$;*

2° *$(d/dt)\, \alpha'_\mu(0) = 1$ for every $\mu = 1, \ldots, n$.*

Note that assumption 1° requires that $n \geqslant 2$.

The procedure for proving this proposition will be to weld each of the chains

$\{\bar{D}_p(K_p),\ldots,\bar{D}_{q-1}(K_{q-1})\}$ and $\{\bar{D}_q(K_q),\ldots,\bar{D}_n(K_n),\ldots,\bar{D}_{p-1}(K_{p-1})\}$ so that the results are half discs, and then to weld these two half discs. The chains are welded by welding two wedges at a time, which in turn can be reduced to welding two half discs. Thus the proof of proposition (1.2) for $n>2$ reduces essentially to the proof for $n=2$. This special case will follow from known results about quasiconformal mapping.

For $n=2$ we may take $\bar{D}_1(K_1)$ (resp. $\bar{D}_2(K_2)$) to be the upper (resp. lower) half disc of $G(K_1)$ (resp. $G(K_2)$). The maps α_1 and α_2^{-1} together define a C_0^{1+a} map α from $\mathrm{bdy}_{\mathbf{C}^+}\bar{D}_1(K_1)$ onto $\mathrm{bdy}_{\mathbf{C}^-}D_2(K_2)$ for which $(d/dt)\,\alpha'(0)=1$. For ease of notation we will suppress the constants K_ν in the notation $\bar{D}_\nu(K_\nu)$.

The procedure for finding A_1 and A_2 satisfying 2° above is due to C. BLANC ([2]; also see [4]). The map

$$P(x,y)=\alpha(x)+i(\alpha(x+y)-\alpha(x)),\qquad w=x+iy$$

is defined and is a C_0^{1+a} homeomorphism on $V\cap\bar{D}_1$ for some open neighborhood V of the origin. Since α is a C_0^{1+a} map, $P(x,y)$ is a quasiconformal map ([8]). $P(x,y)$ satisfies $P(x,0)=\alpha(x)$ and $P^{-1}(x,y)=\alpha^{-1}(x)+i(\alpha^{-1}(x+y)-\alpha^{-1}(x))$. $P^{-1}(x,y)$ is also quasiconformal and satisfies the usual Beltrami equation for

$$\mu(x,y)=(-1+i)\left[\frac{d\alpha^{-1}}{dt}(x+y)-\frac{d\alpha^{-1}}{dt}(x)\right]\cdot\left[\frac{d\alpha^{-1}}{dt}(x+y)+\frac{d\alpha^{-1}}{dt}(x)+i\left\{\frac{d\alpha^{-1}}{dt}(x+y)-\frac{d\alpha^{-1}}{dt}(x)\right\}\right]^{-1}.$$

Define

$$\mu^*(x,y):=\begin{cases}\mu(x,y), & \in V^*\cap D_1\\ 0, & \notin V^*\cap D_1;\end{cases}\tag{3}$$

clearly $\mu^*(x,y)$ is well-defined for some open neighborhood V^* of 0, and is a C^a function on V^*. It is known ([1]) that there is then a C^{1+a} homeomorphism A on an open neighborhood V' of 0 satisfying the Beltrami equation

$$A_{\bar{w}}=\mu^*A_w;$$

now $A\circ P$ and A are 1-quasiconformal homeomorphisms on $U\cap D_1$ and $U\cap D_2$ respectively and therefore biholomorphic maps, where $U=V\cap V'\cap V^*$. Moreover, $\mathscr{C}=A\mid bdy_{\mathbf{C}^-}\bar{D}_2$ is a C^{1+a} simple curve and $A^{-1}\circ(A\circ P)\mid bdy_{\mathbf{C}^+}\bar{D}_1=\alpha$. The uniqueness of the weld follows from [4], theorem 1 and so proposition (1.2) is proved for $n=2$.

It should be noted that $(d/dt)\,\alpha(0)=1$ has not been used, but rather only the fact that $(d/dt)\,\alpha_1(0)=(d/dt)\,\alpha_2^{-1}(0)\neq 0$ so that α_1 and α_2^{-1} together define a C_0^{1+a} map α. Therefore proposition (1.2) for $n=2$ will provide for a general H-manifold X the

local weld at points on $\overline{X}_\beta$ which are not vertices of the given simplicial structure on $\overline{X}_\beta$. What $(d/dt)\,\alpha(0)=1$ does mean is that for any two biholomorphic A_1 and A_2 defining the local weld in (1.2) for $n=2$,

$$\frac{d}{dw} A_1(0) = \frac{d}{dw} A_2(0).$$

This is the basic fact which allows us to weld piece by piece when $n>2$.

In order to prove (1.2) for $n>2$, we first weld the wedges $\overline{D}_p(K_p)$ and $\overline{D}_{p+1}(K_{p+1})$ and then prepare the result for welding to $\overline{D}_{p+2}(K_{p+2})$. Extend $\overline{D}_p(K_p)$ and $\overline{D}_{p+1}(K_{p+1})$ to half discs with bounding line segments $\ell'_p(K_p)\,(=\{t\cdot\exp(i\zeta_p): -K'_p \leqslant t \leqslant {}'_pK\})$ and $\ell'_p(K_{p+1})$ respectively, and extend α_p to a C_0^{1+a} homeomorphism α_p of $\ell'_p(K_p)$ onto $\ell'_p(K_{p+1})$. There is an open neighborhood U_p of $\chi(0)$ in X^α for which the two half discs have properties (a) and (b) on $\chi^{-1}(U_p)$ for the welding correspondence α_p. Let A'_{p+1} and A'_p denote the biholomorphic welding maps, the domains of A'_p and A'_{p+1} being subsets of the half discs containing $\overline{D}_p(K_p)$ and $\overline{D}_{p+1}(K_{p+1})$ respectively. The curve $A_{p+1} \mid l_{p+1}(K_{p+1}) \cap \chi^{-1}(U_p)$ is C^{1+a}; this follows from Kellogg's theorem. Extend this curve from $A'_{p+1}(0)$ through the image set $A_p(\chi^{-1}(U_p)) \cup A'_{p+1}(\chi^{-1}(U_p))$ to its boundary in a simple, C^{1+a} way so that it does not intersect $A'_p(\overline{D}_p(K_p) \cap \chi^{-1}(U_p)) \cup A'_{p+1}(\overline{D}_{p+1}(K_{p+1}) \cap \chi^{-1}(U_p))$ except at $A'_{p+1}(0) = A'_p(0)$. Let R_p be the region in $\mathbf{C}$ bounded by this extended curve and the boundary of the image set and containing $A'_p(\chi^{-1}(U_p)) \cup A'_{p+1}(\chi^{-1}(U_p))$. Map this region by biholomorphic f_p onto a bounded half disc whose bounding line segment is a finite segment of $\ell'_{p+1}(\infty)$, which does not intersect $D_{p+2}(K_{p+2})$, and such that $f_p \circ A'_p(0) = f_p \circ A'_{p+1}(0) = 0$ while the image of the above extended curve is on $\ell'_{p+1}(\infty)$ (a slightly smaller U_p may have to be chosen for this last part). Let $B_p = f_p \circ A'_p$, $B_{p+1} = f_p \circ A'_{p+1}$; since $(d/dw)\,A'_p(0) = (d/dw)\,A'_{p+1}(0)$, f_p may also be normalized by the condition

$$\left|\frac{d}{dw} B_p(0)\right| = \left|\frac{d}{dw} B_{p+1}(0)\right| = 1.$$

Now weld $B_p(\overline{D}_p(K_p) \cap \chi^{-1}(U_p)) \cup B_{p+1}(\overline{D}_{p+1}(K_{p+1}) \cap \chi^{-1}(U_p))$ to $\overline{D}_{p+2}(K_{p+2})$ in exactly the same way for the welding correspondence $\alpha_{p+1} \circ B_{p+1}^{-1}$. Denote the resulting welding maps by B'_{p+1} and B_{p+2}, the domains of B'_{p+1} and B_{p+2} containing $B_{p+1}(\overline{D}_{p+1}(K_{p+1}) \cap \chi^{-1}(U_{p+1}))$ and $D_{p+2}(K_{p+2}) \cap \chi^{-1}(U_{p+1})$ respectively, where $U_{p+1} \subseteq U_p$ is also an open neighborhood of $\chi(0)$ in X^α. Continue this process until in an open neighborhood U_{q-2} of $\chi(0)$ in X^α the wedges $\overline{D}_p(K_p) \cap \chi^{-1}(U_{q-2})$ through $\overline{D}_{q-2}(K_{q-2}) \cap \chi^{-1}(U_{q-2})$ have been welded together, and then determine the neighborhood $U_{q-1} \subseteq U_{q-2}$ and the welding maps A''_{q-2} and A'_{q-1} of the next weld. Because of condition 1° of the proposition and the fact that all maps so far determined are angle-preserving at the origin, the C^{1+a} extension of the curve $A'_{q-1} \mid \ell_{q-1}(K_{q-1}) \cap$

$\cap \chi^{-1}(U_{q-1})$ will be taken to be $A''_{q-2} \circ B'_{q-3} \circ \cdots \circ B'_{p+1} \circ B_p \mid \ell_{p-1}(K_{p-1}) \cap \chi^{-1}(U_{q-1})$. Determine the map f_{q-1} as before with its proper normalization. The final result of welding the chain $\{\bar{D}_p(K_p), \ldots, \bar{D}_{q-1}(K_{q-1})\}$ is then a half-disc $\bar{\bar{\mathscr{D}}}_1(K'_{q-1})$ with bounding line segment $\ell'_{q-1}(K'_{q-1}) = \ell'_{q-1}(K'_{q-1})$ for some positive number K'_{q-1}.

Now weld the chain $\{\bar{D}_q(K_q), \ldots, \bar{D}_n(K_n), \ldots, \bar{D}_{p-1}(K_{p-1})\}$ in exactly the same way, starting with $\bar{D}_q(K_q)$ and $\bar{D}_{q+1}(K_{q+1})$. Use analogous notation throughout, i.e. the notation for the mappings, constants, etc. is determined by substituting q for p in the previous ones. Again, the result is a half disc $\bar{\bar{\mathscr{D}}}_2(K'_{p-1})$ with bounding line segment $\ell'_{p-1}(K'_{p-1}) = \ell'_{q-1}(K'_{p-1})$ for some positive number K'_{p-1}.

The final step is to weld these two half discs with the welding correspondence $\alpha: \ell'_{p-1}(K'_{q-1}) \to \ell'_{p-1}(K'_{p-1})$ given by

$$\beta = \alpha \mid \ell_{p-1}(K'_{q-1}) = B_{p-1} \circ \alpha_{p-1}^{-1} \circ B_p^{-1} \circ B_{p+1}'^{-1} \circ \cdots \circ B_{q-2}'^{-1},$$

while

$$\gamma = \alpha \mid \ell_{q-1}(K'_{q-1}) = B'_{p-2} \circ \cdots \circ B'_q \circ \alpha_{q-1} \circ B_{q-1}^{-1}.$$

Clearly both β and γ are C_0^{1+a} maps on their respective domains. Moreover, by condition 2° of the proposition and the chosen normalization of the maps f, one has $(d/dt)\,\beta'(0) = (d/dt)\,\gamma'(0) = 1$. Therefore α is a C_0^{1+a} map. Weld the half discs, V being the open neighborhood of $\chi(0)$ in X^α for this local weld and Γ_1, Γ_2 being the welding maps, where the domains of Γ_1 and Γ_2 are $\bar{\bar{\mathscr{D}}}_1(K'_{q-1}) \cap \chi^{-1}(V)$ and $\bar{\bar{\mathscr{D}}}_2(K'_{p-1}) \cap \cap \chi^{-1}(V)$ respectively.

The welding maps A_μ, $\mu = 1, \ldots, n$ of 2°) are then given by

$$\begin{aligned}
A_p &= \Gamma_1 \circ B'_{q-2} \circ \cdots \circ B'_{p+1} \circ B_p \mid \bar{D}_p(K_p) \cap \chi^{-1}(V) \\
A_{p+1} &= \Gamma_1 \circ B'_{q-2} \circ \cdots \circ B'_{p+1} \circ B_{p+1} \mid \bar{D}_{p+1}(K_{p+1}) \cap \chi^{-1}(V) \\
&\vdots \\
A_{q-2} &= \Gamma_1 \circ B'_{q-2} \circ B_{q-2} \mid \bar{D}_{q-2}(K_{q-2}) \cap \chi^{-1}(V) \\
A_{q-1} &= \Gamma_1 \circ B_{q-1} \mid \bar{D}_{q-1}(K_{q-1}) \cap \chi^{-1}(V);
\end{aligned}$$

The A_q through A_{p-1} are given by replacing Γ_1 with Γ_2 and interchanging p and q in the above formulas. Each A_μ is biholomorphic on the interior of its domain; a straightforward computation shows that the equations 2°) (ii) are satisfied. That each curve $\mathscr{C}_\mu = A_\mu \mid \ell_\mu(K_\mu) \cap \chi^{-1}(V)$ is C^{1+a} follows from the constructions in the proof and repeated applications of Kellogg's theorem. The uniqueness of the weld follows in a straightforward way from the uniqueness in the case $n=2$, and so the proof of proposition (1.2) is complete.

Remark. It has been shown that the general local welding problem is solved by reducing it to the situation of proposition (1.2). If the original welding correspondences are C_0^{1+a} maps, the reduced ones are $C_0^{1+a'}$ for some $a' \leqslant a$, and as seen from the proof of (1.2), S^α will be a star of $C^{1+a'}$ curves in a neighborhood of $\chi(0)$. It is easy

to show that a' may be given by

$$a' = a \cdot \min\left(1, (2\pi\zeta)^{-1}\right).$$

In fact, in terms of a given a, this is the maximum value of a' which will work.

§ 2. The General Case

The global welding problem is essentially done, since the problems of existence and uniqueness of the weld and whether or not S^α is a $C^{1+a'}$ 1-complex on X^α are local ones.[4]) The only question remaining is the form of the condition (1) on the welding correspondences at vertices x of the simplicial structure on $\overline{X}_\beta$ for which either $\mathrm{pr}\,x$ is of order 1 in S or $\chi(x)$ has order 1 in S^α. The easiest way to give the condition in these cases is to allow "generalized" wedges as coordinate neighborhoods at vertices of $\overline{X}_\beta$ and in the local welding problem of § 1. A generalized wedge is a space $\overline{G}$ formed from a disc G in $\mathbf{C}$ with center 0 and a ray T originating at 0 and passing through ∂G; $\mathrm{Int}\,\overline{G}$ is holomorphically isomorphic to $G\backslash T$. Everything can be done as before as long as one is careful on the boundary of the generalized discs. The welding condition is essentially the same as (1) whenever x is such that $\mathrm{pr}\,x$ has order 1 and $\chi(x)$ has order >1. If $\chi(x)$ has order 1, or equivalently if $\alpha_x(x)=x$, let $\alpha'_x=\bar{\varphi}\circ\alpha_x\circ\bar{\varphi}^{-1}$, $\bar{\varphi}$ a coordinate at x in $\overline{X}$. Then $(d/dt)\,\alpha''_x(x)$ is independent of the choice of $\bar{\varphi}$, and in this case the welding condition is

$$\frac{d}{dt}\alpha''_x(x) = 1. \tag{1}$$

Summing up, we have

(2.1) THEOREM. *Let X be an H-manifold and $S\subseteq X$ a C^{1+a} 1-complex on X. Let $\{\sigma^1, \alpha_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ be defined as above and form X^α. Then X^α can be given a unique H-structure so that*

(i) *$\chi\circ\mathrm{pr}^{-1}: X\backslash S\to X^\alpha\backslash S^\alpha$ is an H-isomorphism;*

(ii) *S^α is a $C^{1+a'}$ 1-complex on X^α for some $a'\leqslant a$,*

if and only if for every vertex x of the simplicial structure on $\overline{X}_\beta$,

$$\prod\{\dot{\alpha}_y(y) : \chi(y) = \chi(x)\} = 1.$$

Remark. If in the welding problem S is a C^{n+a} 1-complex ($n>1$), one may ask for conditions under which S^α would be a $C^{n+a'}$ 1-complex for some $a'\leqslant a$. The technique used here does not provide such conditions because the function $\mu^*(x, y)$

[4]) The Hölder index a' is locally determined. It can happen that no global Hölder constant on S^α exists.

defined in formula (3) is only of class C^a no matter how smooth the welding correspondence α is.

The application of theorem (2.1) to transmission problems with shifts requires that both X and X^α be Riemann surfaces, i.e. orientable H-manifolds. If X is a Riemann surface and X^α an H-manifold, it is useful to describe the orientability of X^α in terms of so-called welding signatures on $\overline{X}_\beta$.

Let $x \in \overline{X}_j$, $\mathrm{pr}_j := \mathrm{pr} \mid \overline{X}_j$, and φ a coordinate at $\mathrm{pr}\,\tilde{x}$; $\varphi \circ \mathrm{pr}_j$ is then a coordinate at x. If $x \in \overline{X}_\beta$, let f be a biholomorphic map of $\varphi \circ \mathrm{pr}_j(U)$ onto a wedge with tip at the origin, f being angle-preserving on $\overline{X} \cap U$ und U a sufficiently small coordinate neighborhood of x. This describes the H-structure on $\overline{X}$ as in the introduction, and in fact gives $\overline{X}$ the structure of a bordered Riemann surface. Denote the wedge at $x \in \overline{X}_\beta$ by D_x, and suppose that x is a vertex of the simplicial structure on $\overline{X}_\beta$. Consider the set $\{D_y : \chi(y) = \chi(x)\}$. In order to put this set of wedges in the correct position for the local weld in § 1, some of them must be "turned over", i.e. mapped onto themselves by what is essentially the complex conjugation map $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\gamma(w) = \bar{w}$. There is of course no unique way of determining which wedges will or will not be mapped by γ, but for each such choice one has welding signatures $\tilde{\sigma}(x)$, where $\tilde{\sigma}(x) = 1$ if D_x is mapped by γ and $\tilde{\sigma}(x) = 0$ otherwise. If $x \in \overline{X}_\beta$ is not a vertex, say $x \in \mathrm{Int}\,\sigma^1_\lambda$, an orientation on X induces by way of pr orientations on σ^1_λ and $\sigma^1_{\varphi(\lambda)}$. If α_λ reverses these orientations, define $\tilde{\sigma}(x)$ and $\tilde{\sigma}(\alpha_\lambda(x))$ to both have value 0 or both have value 1, while if α_λ preserves orientation, define one to have value 0 and the other 1.

(2.2) THEOREM. *If X is a Riemann surface and X^α an H-manifold, obtained from X by welding, then $\overline{X}^\alpha$ can be given the structure of a Riemann surface if and only if welding signatures on $\overline{X}_\beta$ may be chosen so as to have constant value $\tilde{\sigma}(j)$ on each $\overline{X}_\beta \cap \overline{X}_j$, in which case the complex structure on X^α can be chosen so that $\chi_j := \chi \mid \mathrm{Int}\,\overline{X}_j$ is biholomorphic if $\tilde{\sigma}(j) = 0$ and biantiholomorphic if $\tilde{\sigma}(j) = 1$.*

Proof. Obvious.

Another topological property of the welded H-manifold X^α is the following

(2.3) THEOREM. *X^α is compact if and only if X is compact.*

§ 3. Welding Holomorphic Families of Riemann Surfaces

Let $\omega : \mathfrak{B} \to M$ be a holomorphic mapping of the complex manifold $\mathfrak{B}$ onto the complex manifold M. ω is called a *holomorphic family of Riemann surfaces* if for every $v \in \mathfrak{B}$ there is an open neighborhood U of v in $\mathfrak{B}$ and a biholomorphic map ψ_U of U onto $G \times \omega(U)$ such that if pr_2 denotes the projection $(w, x) \to x$, then $\omega = \mathrm{pr}_2 \circ \psi_U$; G is the unit disc $|w| < 1$ in $\mathbf{C}$. Let S be a closed subset of $\mathfrak{B}$ which is *locally a star of $C^{1+a(x)}$ curves depending holomorphically on $x \in M$* ([6]). Define a simplicial structure on S so that

(i) the restriction to each surface in the family is a simplicial structure as before;

(ii) the set of simplices of codimension 2 is a complex submanifold of $\mathfrak{V}$.

S together with such a structure is called a $C^{1+a(x)}$ *complex on* $\mathfrak{V}$ *of codimension* 1 *depending holomorphically on* $x \in M$. Let $\{\sigma_\lambda^1 : \lambda \in \Lambda\}$ be the simplices of codimension 1 and $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ as before. The welding correspondences $\alpha_\lambda : \sigma_\lambda^1 \to \sigma_{\varphi(\lambda)}^1$ are $C^{1+a(x)}$ maps depending holomorphically on $x \in M$ ([6]) satisfying

$$\omega \circ \mathrm{pr} \circ \alpha_\lambda(v) = \omega \circ \mathrm{pr}(v)$$

for all $v \in \sigma_\lambda^1$, where pr is the projection map $\bar{\bar{\mathfrak{V}}} \to \mathfrak{V}$.

The local welding situation for holomorphic families of Riemann surfaces is essentially as follows. Let P be a polycylinder in $\mathbf{C}^n$, $I = \{t : 0 \leqslant t < 1\}$, and $I' = \{t : -1 < t < 1\}$. In $D \times P$ we are given the family of curves $S(\mathscr{C}_\nu(t, z)) = (a(z) + b_\nu(z)\, t, z)$, where $(t, z) \in I \times P$, $a, b_\nu : P \to \mathbf{C}$ are holomorphic and the b_ν are nowhere zero, and for every pair $1 \leqslant \nu, \mu \leqslant n$ with $\mu \neq \nu$, $b_\nu(z) \neq b_\mu(z)$ for all $z \in P$. The welding correspondences α_ν are homeomorphisms of $S(\mathscr{C}_\nu)$ onto itself such that

1° $\alpha_\nu \mid \mathscr{C}_\nu(I \times \{z\}) \times \{z\}$ is a $C_0^{1+a(z)}$ map of $\mathscr{C}_\nu(I \times \{z\}) \times \{z\}$ onto itself for every $z \in P$;

2° $\alpha_\nu \mid S(\mathscr{C}_\nu(\{t\} \times P))$ is holomorphic for every $t \in I$.

The results of § 1 carry over to this situation with only minor adjustments in the proofs. For example, consider the case $n = 2$ and $\arg b_1(z) = \arg b_2(z) + \pi$ for all $z \in P$. For each $z \in P$ define the affine transformation $\mathscr{L}_z(w) = a(z) + b_1(z)\, w$, and let $\mathscr{L} : \mathbf{C} \times P \to \mathbf{C}$ be the holomorphic map $\mathscr{L}(w, z) = \mathscr{L}_z(w)$. Define the map β of $I' \times P$ onto itself by

$$\beta(t, z) = \begin{cases} (\mathscr{L}_z^{-1}\ \mathrm{pr}_1 \circ \alpha_1(\mathscr{L}(t, z), z), z), & t \geqslant 0 \\ (\mathscr{L}_z^{-1}\ \mathrm{pr}_1 \circ \alpha_2^{-1}(\mathscr{L}(t, z), z), z), & t < 0. \end{cases}$$

Clearly there is β' such that

$$\beta(t, z) = (\beta'(t, z), z);$$

since β' is real-valued and holomorphic in z it is constant in z, i.e. there is a C_0^{1+a} map $\gamma : I' \to I'$ so that $\gamma(t) = \beta'(t, z)$. Then if A_1' and A_2' are the local welding maps for γ determined in § 1, clearly $A_\nu(w, z) = (\mathscr{L}(A_\nu'(w), z), z)$ $(\nu = 1, 2)$ are local welding maps for this special parameterized case.

The global welding problem for a holomorphic family of Riemann surfaces $\omega : \mathfrak{V} \to M$ and a $C^{1+a(z)}$ complex S of codimension 1 depending holomorphically on $x \in M$ requires more than simple adjustments in the proofs, however. In order to use the results of the local welding problem as it is presented above, one must as in § 2 be able to map coordinate neighborhoods of points $v \in \bar{\bar{\mathfrak{V}}}_\beta$ biholomorphically onto "holomorphic families of wedges". If $\dim M = 0$, which is the situation of § 2, this can always be done. But when $\dim M > 0$ there are restrictions.

Let $\mathscr{C}:\partial G\times P\to\mathbf{C}$ be a family of simple closed $C^{1+a(z)}$ curves depending holomorphically on $z\in P$ and denote by Ω_z the bounded region in $\mathbf{C}$ for which $\partial\Omega_z=\mathscr{C}(\partial G\times\{z\})$. There is no loss in generality in assuming that for some $z^\circ\in P$, $\mathscr{C}\mid\partial G\times\{z^\circ\}$ is the boundary value of a biholomorphic map of G onto Ω_{z°.

(3.1) PROPOSITION. *Let $\mathscr{C}:\partial G\times P\to\mathbf{C}$ be as above. In order that there exist a map $f:G\times P\to\mathbf{C}$ satisfying*

(i) *f is holomorphic;*

(ii) *$f\mid G\times\{z\}$ is a biholomorphic map of G onto Ω_z for every $z\in P$,*

it is both necessary and sufficient that $\mathscr{C}$ be the boundary value of a map $\mathscr{C}:G\times P\to\mathbf{C}$ satisfying (i) *and* (ii).

Proof. ([5]).

By an *analytic complex on $\mathfrak{V}$ of codimension* 1 *depending holomorphically on $x\in M$* we mean a $C^{1+a(x)}$ complex S as above for which every $v\in\bar{\bar{\mathfrak{V}}}_\beta$ has a coordinate neighborhood in $\bar{\bar{\mathfrak{V}}}$ biholomorphically equivalent to a holomorphic family of wedges. In view of proposition (3.1) this means that S must be locally a star of analytic curves depending holomorphically on $x\in M$ and satisfy further conditions at the simplices of codimension 2 in the minimal simplicial structure on S.

If $\mathfrak{V}^\alpha$ is a complex manifold obtained by welding and S^α is a $C^{1+a'(x)}$ complex of codimension 1 depending holomorphically on $x\in M$, then $\omega^\alpha:\mathfrak{V}^\alpha\backslash S^\alpha\to M$ is a holomorphic family of Riemann surfaces, where

$$\omega^\alpha(v^\alpha)=\omega(\mathrm{pr}\circ\chi^{-1}(v^\alpha)),$$

and since $\omega\circ\mathrm{pr}\circ\alpha_\lambda(v)=\omega\circ\mathrm{pr}(v)$ for all $v\in\sigma_\lambda^1$ and all $\lambda\in\Lambda$, ω^α has a unique holomorphic extension to $\omega^\alpha:\mathfrak{V}^\alpha\to M$ which is also a holomorphic family of Riemann surfaces.

One remark about notation. Let $\alpha''(t,z)$ be defined analogously to $\alpha''(t)$ in the introduction for a point $v\in\bar{\bar{\mathfrak{V}}}_\beta$. Then $\dot{\alpha}_v(v)$ will now denote $(\partial/\partial t)\,\alpha''(0,z)$ where $(0,z)$ is the coordinate of v.

(3.2) THEOREM. *Let $\omega:\mathfrak{V}\to M$ be a holomorphic family of Riemann surfaces, S an analytic complex on $\mathfrak{V}\to M$ of codimension* 1 *depending holomorphically on $x\in M$, and $\{\alpha_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ a set of $C_0^{1+a(x)}$ welding correspondences depending holomorphically on $x\in M$. Suppose that there are welding signatures $\{\tilde{\sigma}(\bar{v}):\bar{v}\in\bar{\bar{\mathfrak{V}}}_\beta\}$ satisfying $\tilde{\sigma}(\bar{v})=0$ for all $\bar{v}\in\bar{\bar{\mathfrak{V}}}_\beta$. Then*

1° *$\omega^\alpha:\mathfrak{V}^\alpha\to M$ is a holomorphic family of Riemann surfaces obtained uniquely from $\omega:\mathfrak{V}\to M$, hence*

$$\chi\circ\mathrm{pr}^{-1}:\mathfrak{V}\backslash S\to\mathfrak{V}^\alpha\backslash S^\alpha$$

is biholomorphic; and

2° *S^α is a $C^{1+a'(x)}$ complex of codimension* 1 *depending holomorphically on $x\in M$ for some $a'(x)\leqslant a(x)$*

if and only if at every point v in some simplex of codimension 2 of the given simplicial structure on $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_\beta$,

$$\prod \{\dot{\alpha}_y(y): \chi(y) = \chi(v)\} = 1\,.$$

Remark. Suppose that S is a family of simple, closed $C^{1+a(x)}$ curves depending holomorphically on $x \in M$ and denote the welding correspondences by α_1 and α_2. $\alpha_\nu' = \mathrm{pr} \circ \alpha_\nu \circ (\mathrm{pr} \mid \sigma_\nu^1)^{-1}$ is a map of S onto itself ($\nu = 1, 2$) such that $\alpha_1' = \alpha_2'^{-1}$; if α_1' is the boundary value of a biholomorphic map $\alpha_1' : U \to \mathfrak{B}$ for some open neighborhood U of σ_1^1 in $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, then the conclusions of theorem (3.2) hold. In general, the analyticity condition on the complex S in theorem (3.2) can be replaced by analyticity conditions on the welding correspondences. Moreover, the analyticity condition on S implies that each $\mathrm{pr}\,\sigma_\lambda^1$ is a pseudoconvex hypersurface in $\mathfrak{B}$, but nowhere strongly pseudoconvex. On the other hand, one has

(3.3) THEOREM. *If* $\mathrm{pr}\,\sigma_\lambda^1$ *is a strongly pseudoconvex hypersurface on* $\mathfrak{B}$ *and the conclusions of theorem* (3.2) *are true, then* $\mathrm{pr} \circ \alpha_\lambda \circ (\mathrm{pr} \mid \sigma_\lambda^1)^{-1}$ *is the boundary value of a biholomorphic map* $\mathrm{pr}\, U_\lambda \to \mathfrak{B}$ *for some open neighborhood* U_λ *of either* $\mathrm{Int}\,\sigma_\lambda^1$ *or* $\mathrm{Int}\,\sigma_{\lambda'}^1$ *on* $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, *where* λ' *is that unique index satisfying* $\lambda' \neq \lambda$ *and* $\mathrm{pr}\,\sigma_\lambda^1 = \mathrm{pr}\,\sigma_{\lambda'}^1$.

II. Let X be a Riemann surface, S a C^{1+a} 1-complex on X and $\{\sigma_\lambda^1, \alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ welding data as in chapter I. satisfying the condition (1). Suppose that there are welding signatures $\{\tilde{\sigma}(\bar{x}) : \bar{x} \in \overline{X}_\beta\}$ which have constant value $\tilde{\sigma}(j)$ on each connected component $\overline{X}_j$ of $\overline{X}$. X^α is then a Riemann surface. Form $\overline{\overline{(X^\alpha)}}$ relative to X^α and S^α with the projection $\mathrm{pr}^\alpha : \overline{\overline{(X^\alpha)}} \to X^\alpha$ and denote it by $\overline{X}^\alpha$. Both $\overline{X}$ and $\overline{X}^\alpha$ are bordered Riemann surfaces for which $\mathrm{pr} : \mathrm{Int}\,\overline{X} \to X$ and $\mathrm{pr}^\alpha : \mathrm{Int}\,\overline{X}^\alpha \to X^\alpha$ are holomorphic maps. Clearly there is a homeomorphism $A : \overline{X} \to \overline{X}^\alpha$ such that $\mathrm{pr}^\alpha \circ A = \chi$; both A and A^{-1} are C^{1+a} maps. According to (2.2), the complex structure on X^α, and thereby on $\overline{X}^\alpha$, can be chose so that $A \mid \mathrm{Int}\,\overline{X}_j$ is either biholomorphic or biantiholomorphic according to whether $\tilde{\sigma}(j) = 0$ or 1.

Let $\beta : \overline{X}_\beta \to \overline{X}_\beta$ and $\beta^\alpha : \overline{X}_\beta^\alpha \to \overline{X}_\beta^\alpha$ be the successor maps defined in [6] and define $\beta_\lambda = A^{-1} \circ \beta^\alpha \circ A$, $\beta_\lambda : \overline{X}_\beta \to \overline{X}_\beta$. For every $\bar{x} \in \overline{X}_j \cap \overline{X}_\beta$, define $j' = \beta_\lambda(j, \bar{x})$ to be that index for which $\beta_\lambda(\bar{x}) \in \overline{X}_{j'}$. A coherent set of signatures $\sum_\alpha = \{\sigma_{x^\alpha} : x^\alpha \in S^\alpha\}$ on the $C^{1+a'}$ 1-complex S^α ([6]) induces in the obvious way a set of signatures $\{\sigma(\bar{x}^\alpha) : \bar{x}^\alpha \in \overline{X}_\beta^\alpha\}$ on $\overline{X}_\beta^\alpha$. Define the signatures $\{\sigma_\alpha(\bar{x}) : \bar{x} \in \overline{X}_\beta\}$ on $\overline{X}_\beta$ by the rule $\sigma_\alpha(\bar{x}) = \sigma(A(\bar{x}))$.

Let L be a complex Lie group and $f : \overline{X}_\beta \to L$ a Hölder continuous map. f is said to be *compatible with the welding data* if for every $\lambda \in \Lambda$ and every $\bar{x} \in \sigma_\lambda^1$ $f(\bar{x}) = f(\alpha_\lambda(\bar{x}))$; if so, f induces the Hölder continuous map $f^\alpha : S^\alpha \to L$ by the rule $f(\bar{x}) = f^\alpha(\chi(\bar{x}))$. f is said to be *compatible with* $\sum_\alpha$ if $f^\alpha(x^\alpha)^{|\sigma x^\alpha|} \equiv e$ on S^α, e being the unit of L.

§ 4. The Haseman Problem

Given

1) a Riemann surface X, a C^{1+a} 1-complex S on X, welding data $\{\sigma_\lambda^1, \alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ as in chapter I satisfying condition (1) and corresponding welding signatures $\{\sigma(\bar{x}) : \bar{x} \in \overline{X}\}$, and a coherent set of signatures $\sum_\alpha$ on S^α;

2) a complex Lie group L which acts as a complex automorphism group on the complex space F, where F has an antiholomorphic involution ι;

3) a Hölder continuous map $f: \overline{X}_\beta \to L$ which is compatible with both $\sum_\alpha$ and the welding data,

the Haseman problem is to find holomorphic maps $s_j : \operatorname{Int} \overline{X}_j \to F$ for each j such that

a) s_j has a continuous extension to $\overline{X}_j$;

b) for every $\lambda \in \Lambda$ and every $x \in \sigma_\lambda^1$,

$$\tilde{\iota^{\sigma(\alpha_\lambda(x))}} \circ s_{\beta\lambda(j,x)}(\alpha_\lambda(x)) = f(x)^{\sigma\alpha(x)}\, \tilde{\iota^{\sigma(x)}} \circ s_j(x). \tag{4}$$

(4.1) THEOREM. *If the welding signatures have constant value $\tilde{\sigma}(j)$ on each $\overline{X}_j$ there is then a holomorphic fibre bundle $\hat{\mathfrak{F}} \to X^\alpha$ over the welded Riemann surface X^α with structure group L and fibre F and an isomorphism from the space of global holomorphic sections in $\hat{\mathfrak{F}}$ onto the space of solutions of the above Haseman problem. This isomorphism is functorial in the obvious sense.*

Proof. Let $s_j^\alpha = \tilde{\iota^{\sigma(j)}} \circ s_j \circ A^{-1}$ for every j. $s_j^\alpha : \overline{X}_j^\alpha \to \mathrm{F}$ is continuous, $s_j^\alpha \mid \operatorname{Int} \overline{X}_j^\alpha$ is holomorphic, and for every $x^\alpha \in \overline{X}_\beta^\alpha$

$$s^\alpha_{\beta^\alpha(j,x^\alpha)}(\beta^\alpha x^\alpha) = f^\alpha(\mathrm{pr}^\alpha x^\alpha)^{\sigma(x^\alpha)}\, s_j^\alpha(x^\alpha). \tag{5}$$

Clearly there is an isomorphism from the space of solutions of the Haseman problem (4) onto the space of solutions of the Riemann-Privalov problem (5). The theorem now follows from the results in [6].

When L is the general linear group $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ and $F = \mathbf{C}^q$ another form of the Haseman problem can be solved. Given

1) a Riemann surface X, a simple closed C^{1+a} curve S on X together with a C_0^{1+a} homeomorphism α' of S onto itself. α' induces the C_0^{1+a} homeomorphism $\alpha : \overline{X}_2 \cap \cap \overline{X}_\beta \to \overline{X}_1 \cap \overline{X}_\beta$ in the obvious way ($\overline{X}_1$ and $\overline{X}_2$ are the two connected components of $\overline{X}$) for which there are welding signatures $\tilde{\sigma}(1)$ and $\tilde{\sigma}(2)$;

2) the involution $\iota : \mathbf{C}^q \to \mathbf{C}^q$ is the map γ which sends each entry of $z \in \mathbf{C}^q$ into its complex conjugate;

3) a continuous map $f_2 : S \to \mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$, Hölder continuous $g_2 : S \to \mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ and $q \times q$ matrices of functions f_1, f_3, g_1, g_3 for which $\gamma^{\tilde{\sigma}(1)} \circ f_1$, $\gamma^{\tilde{\sigma}(1)} \circ f_3$, $\gamma^{\tilde{\sigma}(2)} \circ g_1$, $\gamma^{\tilde{\sigma}(2)} \circ g_3$ are meromorphic matrices in an open neighborhood U of S whose determinants are not identically zero,

the problem is to find holomorphic maps $s_j: \operatorname{Int} \overline{X}_j \to \mathbf{C}^q$ which have angular boundary values almost everywhere on $\overline{X}_j \cap \overline{X}_\beta$ (i.e., boundary values taken along nontangential paths to $\overline{X}_j \cap \overline{X}_\beta$) and satisfy for almost all $\bar{x} \in \overline{X}_2 \cap \overline{X}_\beta$ the equation

$$(f_1 f_2 f_3)(\operatorname{pr} \alpha(\bar{x}))\, \gamma^{\sigma(1)} \circ s_1(\alpha(\bar{x})) = (g_1 g_2 g_3)(\operatorname{pr} \bar{x})\, \gamma^{\tilde{\sigma}(2)} \circ s_2(\bar{x}). \tag{6}$$

As before, we will associate with (6) a holomorphic cocycle with values in $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ on the welded Riemann surface X^α by considering an associated problem on X^α of the Riemann-Privalov type. In order to avoid inconvenient notation this associated problem will also be given on X. Given

1) X, S, α, $\tilde{\sigma}(1)$, $\tilde{\sigma}(2)$ as above;

2) $\iota = \gamma$ as above;

3) f_2, g_2 as above and f_ν, g_ν ($\nu = 1, 3$) are $q \times q$ matrices of functions satisfying

i) there is an open neighborhood U of S such that f_ν (resp. g_ν) is a meromorphic matrix on $\operatorname{pr} \overline{X}_1 \cap U \backslash S$ (resp. $\operatorname{pr} \overline{X}_2 \cap U \backslash S$) whose determinant is not identically zero;

ii) $\gamma^{\tilde{\sigma}(1)} \circ f_\nu \circ \operatorname{pr} \circ \chi_1^{-1}$ and $\gamma^{\tilde{\sigma}(2)} \circ g_\nu \circ \operatorname{pr} \circ \chi_2^{-1}$ extend to meromorphic matrices in an open neighborhood of S^α,

the problem is to find s_1, s_2 as above so that for almost all $\bar{x} \in \overline{X}_2 \cap \overline{X}_\beta$

$$(f_1 f_2 f_3)(\operatorname{pr} \bar{x}) \cdot s_1(\beta \bar{x}) = (g_1 g_2 g_3)(\operatorname{pr} \bar{x}) \cdot s_2(\bar{x}). \tag{7}$$

Since S is a simple closed C^{1+a} curve there is an open neighborhood V of S which is schlichtartig, and so by the Koebe mapping theorem there is a biholomorphic map v of V into a domain in the 1 dimensional projective space $\mathbf{P}^1$. Clearly this can be done so that $v(S)$ does not contain the point at infinity. Moreover, $v(S)$ is a simple closed C^{1+a} curve in $\mathbf{P}^1$. Let G_j' be a continuous map of $v(V \cap \operatorname{pr} \overline{X}_j)$ into $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ ($j = 1, 2$) whose restriction to $\operatorname{Int} v(V \cap \operatorname{pr} \overline{X}_j)$ is holomorphic and such that for all $t \in v(S)$, $G_1'(t) = g_2(v^{-1}(t)) \cdot G_2'(t)$. The existence of such maps is known ([6] or [11], § 127). Since $G_1'(t)^{-1} f_2(v^{-1}(t))\, G_1'(t)$ is continuous, it is known ([10], [12]) that there are holomorphic maps $\overline{X}_j': \operatorname{Int} v(V \cap \operatorname{pr} \overline{X}_j) \to \mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ with angular boundary values almost everywhere on $v(S)$ which are in $L_p(S)$ for every $p > 1$ and satisfy almost everywhere on $v(S)$ the equation $X_2'(t) = G_1'(t)^{-1} \cdot f_2(v^{-1}(t)) \cdot G_1'(t)\, X_1'(t)$. Let $G_j = G_j' \circ v$, $X_j'' = X_j' \circ v$.

Two cases must be considered. Either (1) α is the boundary value of a biholomorphic map $\alpha: \operatorname{Int} \operatorname{pr} \overline{X}_2 \cap V$ or (2) it is not. In the first case f_1 extends to a meromorphic matrix in an open neighborhood of S. Let $V' \subseteq V$ be an open neighborhood of S so that on $V' \backslash S$ f_1, f_3, g_1, and g_3 are holomorphic matrices with values in $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$. Define $Y_2 = f_1 \cdot X_2''$ if α is as in (1) and $Y_2 = X_2''$ otherwise. Let $Y_1 = f_3^{-1} \cdot X_1''$, $F_1 = G_1$ and $F_2 = g_3^{-1} \cdot G_2$, and let $\operatorname{Int} \operatorname{pr} \overline{X}_j = U_j$, $V' = U_3$. Then $g_{13} = F_1 \cdot Y_1$, $g_{23} = F_2 \cdot Y_2$ is a holomorphic $U = \{U_\nu : \nu = 1, 2, 3\}$-cocycle with values in $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ and defines the holomorphic vectorbundle $\hat{W} \to X$.

(4.2) THEOREM. *Suppose that* $g_1=1$ *and*

(1) *if* α *is the boundary value of a biholomorphic map* $\alpha:\operatorname{Int}\operatorname{pr}\overline{X}_2\cap V\to X$ *for some open neighborhood* V *of* S, *then* $f_\nu G_1=G_1 f_\nu$ $(\nu=1, 3)$;

(2) *if* α *is not as in* (1), *then* $f_1=1$ *and* $f_3 G_1=G_1 f_3$.

Then there is an injection from the space of global holomorphic (resp. meromorphic) sections in $\hat{W}$ *to the space of holomorphic (resp. meromorphic) solutions of problem* (7). *If* f_1, f_3 *and* g_3 *have values in* $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ *and it is required that the boundary values of a solution* $\{s_1, s_2\}$ *of* (7) *satisfy*

$$s_j\circ\chi_j^{-1}\circ v^{-1}\mid v(S)\in L_p(v(S))$$

for all $p>1$ *and* $j=1, 2$, *this map is bijective.*

Proof. The proof is the same as that of theorem (4.1) in [6], using known properties of X_1'' and X_2''.

Suppose now that f_2 is Hölder continuous. It may then be required that the solutions s_1, s_2 satisfy

(A_1) s_1 and s_2 have continuous extensions to $\overline{X}_1$ and $\overline{X}_2$ respectively.

We will also require the following property.

(A_2) Let $\{x_1,\ldots, x_k\}$ be the smallest set of points on S (in the sense of inclusion) such that f_1, f_3 and g_3 have values in $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$ on $S\backslash\{x_1,\ldots, x_k\}$. Then $f_1(\operatorname{pr}\bar{x})f_2(x_\mu)$ $f_3(\operatorname{pr}\bar{x})s_1(\bar{x})$ and $g_1(\operatorname{pr}\bar{x})g_2(x_\mu)g_3(\operatorname{pr}\bar{x})s_2(\bar{x})$ should have continuous extensions to $\overline{X}_1\cap\operatorname{pr}^{-1}(U_\mu)$ and $\overline{X}_2\cap\operatorname{pr}^{-1}(U_\mu)$ respectively for an open neighborhood U_μ of x_μ, $\mu=1,\ldots, k$.

Just as in theorem (4.2), the correspondence between the space of global holomorphic sections in $\hat{W}$ and the space of holomorphic solutions of problem (7) is not in general surjective. For example, let $X=\mathbf{P}^1$, $S=\{w:|w|=1\}$, $\alpha=$identity, $q=1, f_1=g_1=f_2=g_2=1$ and $f_3=g_3=(w-1)^{-1}$. Then $s_1=s_2=1$ is a solution of (7), but $s_1, s_2, s_3=(w-1)^{-1}$ is a meromorphic, not a holomorphic, section in $\hat{W}$. However, unlike theorem (4.2) the correspondence is also not in general injective. To see this, take all data as in the above example except for f_3 and g_3 and set $f_3=w-1$, $g_3=1$. Then $\{s_1=(w-1)^{-1}, s_2=s_3=1\}$ is a holomorphic section in $\hat{W}$, but $\{s_1, s_2\}$ is not a solution of (7) in the above sense because it does not satisfy (A_1). This situation is rectified by adjusting the cocycle which defines $\hat{W}$.

Let $n_{\mu,\varrho}$ be the integers such that for any meromorphic section $\{s_1, s_2, s_3\}$ in $\hat{W}$, the ϱ*th* component of s_3 has a singularity of order $\geqslant n_{\mu,\varrho}$ at x_μ for every $\varrho=1,\ldots, q$ if and only if s_1 and s_2 have continuous extensions to $\overline{X}_1\cap\operatorname{pr}^{-1}U_\mu$ and $\overline{X}_2\cap\operatorname{pr}^{-1}U_\mu$ respectively for some open neighborhood U_μ of x_μ. The $n_{\mu,\varrho}$ are easily computed in terms of the orders of the singularities of the components of $\tilde{\gamma}^{\sigma(1)}\circ f_\nu\circ\operatorname{pr}\circ\chi_1^{-1}$ and $\tilde{\gamma}^{\sigma(2)}\circ g_3\circ\operatorname{pr}\circ\chi_2^{-1}$, $\nu=1, 3$. Let h_ϱ be a meromorphic function on U_3 with divisor

$\sum_{\mu=1}^{k} n_{\mu,\varrho} x_\mu$, $h=h_1\oplus\cdots\oplus h_q$ and $\tilde{g}_{13}=g_{13}h$, $\tilde{g}_{23}=g_{23}h$. The cocycle $\tilde{g}_{ij}$ defines the holomorphic vectorbundle $\tilde{W}\to X$.

(4.3) COROLLARY. *Suppose that in problem* (7) f_ν *and* g_ν $(\nu=1, 3)$ *satisfy the hypothesis of* (4.2) *and furtheremore that* f_2 *is Hölder continuous. Then there is an isomorphism from the space of global holomorphic (resp. meromorphic) sections in the vectorbundle* $\tilde{W}\to X$ *onto the space of holomorphic (resp. meromorphic) solutions of problem* (7) *which satisfy the conditions* (A_1) *and* (A_2) *above.*

§ 5. The Carleman Problem

Given

1) a bordered Riemann surface X whose boundary is a C^{1+a} 1-complex with simplicial structure $\{\sigma_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$;

2) a homeomorphism $\alpha: bdyX\to bdyX$ which preserves this simplicial structure and for which $\alpha_\lambda=\alpha \mid \mathrm{Int}\sigma_\lambda^1$ is a C_0^{1+a} map for every $\lambda\in\Lambda$ and satisfies the *Carleman condition* $\alpha\circ\alpha=$identity. If α_λ is orientation preserving (resp. reversing) we write $\alpha_\lambda=\alpha_\lambda^+$ (resp. $\alpha_\lambda=\alpha_\lambda^-$);

3) a complex Lie group L with antiholomorphic involution $\iota: L\to L$ which acts as a complex automorphism group on the abelian complex Lie group L_1, which also has an antiholomorphic involution $\iota_1: L_1\to L_1$, such that ι and ι_1 are automorphisms satisfying

$$\iota_1(\ell\cdot\ell_1)=\iota(\ell)\cdot\iota_1(\ell_1) \quad \text{for all} \quad \ell\in L, \ell_1\in L_1;$$

4) a Hölder continuous map $f: bdyX\to L$ satisfying the *Carleman condition*

$$\begin{array}{lll} (+) & f(x)=\iota_1\circ f(\alpha(x))^{-1} & \text{for all } x\in\sigma_\lambda^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^+ \\ (-) & f(x)=f(\alpha(x))^{-1} & \text{for all } x\in\sigma_\lambda^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^-, \end{array}$$

the Carleman problem is to find a holomorphic map $s: \mathrm{Int}X\to L_1$ which has a continuous extension to X and satisfies

$$\begin{array}{ll} s(\alpha(x))=f(x)\,\iota_1\circ s(x) & \text{for all } x\in\sigma_\lambda^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^+ \\ s(\alpha(x))=f(x)\,s(x) & \text{for all } x\in\sigma_\lambda^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^-, \end{array} \tag{8}$$

$\lambda\in\Lambda$.

Let $X_1=X, X_2=X$ as sets but with opposite structures and $\overline{X}$ equal the disjoint union $X_1\cup X_2$. The simplicial structure $\{\sigma_\lambda^1 : \lambda\in\Lambda\}$ on $bdyX_1$ defines a similar structure on $bdy\,X_2$ in the obvious way and thereby one on $\overline{X}_\beta=bdyX_1\cup\cup bdyX_2$ which will be denoted by $\{\sigma_\varrho^1 : \varrho\in P\}$. There is a natural involution γ of $\overline{X}$ onto itself which maps X_1 onto X_2 and X_2 onto X_1, is antiholomorphic on $\overline{X}\backslash\overline{X}_\beta$, and continuous on $\overline{X}$. Define the bijections $\varphi:\Lambda\to\Lambda$ by $\alpha(\sigma_\lambda^1)=\sigma_{\varphi(\lambda)}^1$ and $\psi: P\to P$ by

1. if there exists $\lambda\in\Lambda$ for which $\sigma_\lambda^1=\sigma_\varrho^1$, then $\gamma\circ\alpha(\sigma_\varrho^1)=\sigma_{\psi(\varrho)}^1$;

2. if there exists $\lambda\in\Lambda$ for which $\sigma_\lambda^1=\gamma(\sigma_\varrho^1)$, then $\alpha^{-1}\circ\gamma(\sigma_\varrho^1)=\sigma_{\psi(\varrho)}^1$.

Correspondingly, for each $\varrho\in P$ define the C_0^{1+a} homeomorphism $\alpha_\varrho:\sigma_\varrho^1\to\sigma_{\psi(\varrho)}^1$ by the rules

1′. if there exists $\lambda\in\Lambda$ for which $\sigma_\lambda^1=\sigma_\varrho^1$, then $\alpha_\varrho=\gamma\circ\alpha_\lambda$;

2′. if there exists $\lambda\in\Lambda$ for which $\sigma_\lambda^1=\gamma(\sigma_\varrho^1)$, then $\alpha_\varrho=\alpha_\lambda^{-1}\circ\gamma$.

Define the Hölder continuous map $\tilde{f}:\overline{X}_\beta\to L$ as follows:

1°. if for σ_ϱ^1 there is $\sigma_\lambda^1=\sigma_\varrho^1$, then

$$\tilde{f}(\bar{x})=\begin{cases}\iota\circ f(\bar{x}) & \text{for all } \bar{x}\in\sigma_\varrho^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^+\\ f(\bar{x}) & \text{for all } \bar{x}\in\sigma_\varrho^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^-;\end{cases}$$

2°. if for σ_ϱ^1 there is $\sigma_\lambda^1=\iota(\sigma_\varrho^1)$, then

$$\tilde{f}(\bar{x})=\begin{cases}\iota\circ f(\alpha_\varrho(\bar{x})) & \text{for all } \bar{x}\in\sigma_\varrho^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^+\\ f(\alpha_\varrho(\bar{x})) & \text{for all } \bar{x}\in\sigma_\varrho^1 \text{ if } \alpha_\lambda=\alpha_\lambda^-.\end{cases}$$

Define the signatures $\{\sigma(\bar{x}):\bar{x}\in\overline{X}_\beta\}$ by the rule

$$\sigma(\bar{x})=\begin{cases}1, & \bar{x}\in b\,dy\,X_1\\ -1, & \bar{x}\in b\,dy\,X_2\end{cases}$$

and the welding signatures $\{\tilde{\sigma}(\bar{x}):\bar{x}\in\overline{X}_\beta\}$ by

$$\tilde{\sigma}(\bar{x})=\begin{cases}0, & \bar{x}\in b\,dy\,X_1 \text{ or } \bar{x}\in b\,dy\,X_2\cap\sigma_\varrho^1 \text{ and } \alpha_\varrho=\alpha_\varrho^+\\ 1, & \bar{x}\in b\,dy\,X_2\cap\sigma_\varrho^1 \text{ and } \alpha_\varrho=\alpha_\varrho^-;\end{cases}$$

$\tilde{\sigma}(x)$ is well-defined since it is constant on each connected component of $\overline{X}_\beta$.

Finally, let $\beta(1)=2$ and $\beta(2)=1$ and consider the Haseman problem to find holomorphic maps $s_\nu:\operatorname{Int}X_\nu\to L_1$ with continuous extensions to X_ν ($\nu=1,2$) such that for every $x\in\overline{X}_\beta$

$$\iota_1^{\tilde{\sigma}(\alpha_\varrho(x))}\circ s_{\beta(\nu)}(\alpha_\varrho(x))=\tilde{f}(x)^{\sigma(x)}\,\iota_1^{\sigma(x)}\circ s_\nu(x), \quad \text{where } x\in\sigma_\varrho^1. \tag{9}$$

(5.1) THEOREM. *Suppose that α is such that either $\alpha_\lambda=\alpha_\lambda^+$ for all $\lambda\in\Lambda$ or $\alpha_\lambda=\alpha_\lambda^-$ for all $\lambda\in\Lambda$. Then every solution s of the Carleman problem* (8) *defines a solution of the Haseman problem* (9), *namely $\{s_1=s,\ s_2=\iota_1\circ s\circ\gamma\}$. On the other hand, if $\{s_1,s_2\}$ is a solution of* (9), *then $s=s_1+\iota_1\circ s_2\circ\gamma$ is a solution of* (8).

Proof. Verification.

Let $\mathscr{L}_1$ (resp. $\mathscr{L}_2$) be the space of solutions of problem (8) (resp. (9)) and $\chi_1:\mathscr{L}_1\to\mathscr{L}_2$, $\chi_2:\mathscr{L}_2\to\mathscr{L}_1$ the maps described in (5.1). χ_1 is an injection. χ_2 is not bijective, and so there is in general nothing equivalent to (4.1) for the Carleman problem. However, the existence of global holomorphic sections in the fibre bundle $\hat{\mathfrak{F}}\to X^\alpha$ described by problem (9) implies the existence of solutions of the Carleman problem (8).

If $L_1 = \mathbf{C}^q$ and L is a complex Lie subgroup of the complex affine group $GA(q, \mathbf{C})$, it makes sense to define χ_2 by the rule $\{s_1, s_2\} \to \frac{1}{2}(s_1 + \iota_1 \circ s_2 \circ \gamma)$. Theorem (5.1) remains valid and moreover, $\chi_2 \circ \chi_1 = \text{identity}$. If $\hat{W} \to X^\alpha$ is the holomorphic vector-bundle associated with the holomorphic affine bundle $\hat{\mathfrak{F}} \to X^\alpha$ which corresponds to the homogeneous Carleman problem (see [6]) and $\mathcal{O}(\hat{W})$ is the sheaf of germs of holomorphic sections in $\hat{W}$, then from (5.1) and [6], theorem (5.1) one has

(5.2) THEOREM. *$\mathscr{L}_1$ is either empty or* $\dim_{\mathbf{R}} \mathscr{L}_1 = \dim_{\mathbf{C}} H^\circ(X^\alpha, \mathcal{O}(\hat{W}))$.

Remarks. 1. It is clear that one can study Carleman problems corresponding to the various forms of problem (6) discussed in § 4. Moreover, because of the results in § 3 and [6], the Haseman and Carleman problems can also be analysed when given on a holomorphic family of Riemann surfaces with appropriate S, welding data (i.e., shifts) and transmission map f.

2. As in [6], known properties of the space of global holomorphic sections in a global holomorphic fibre bundle can be used to describe the solution spaces of the various problems discussed here. The results in [6] carry over to the Haseman and Carleman problems when modified in the obvious ways to take into account the fact that the correspondences in the various theorems of § 4 and § 5 are not necessarily bijective.

REFERENCES

[1] L. BERS, *Riemann Surfaces*, Lecture notes, New York University (1957–58).

[2] C. BLANC, *Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes*, Comment. Math. Helv. *9*, (1934), 193–216; 335–368.

[3] O. D. KELLOGG, *Harmonic functions and Greens Integral*, Trans. Amer. Math. Soc. *13* (1912), 109–132.

[4] K. OIKAWA, *Welding of Polygons and the Type of Riemann Surfaces*, Kodai Math. Sem. Rep. *13* (1961), 37–52.

[5] D. ORTH, *Conformal Mappings Depending Holomorphically on a Parameter*, Tech. Rep. under Contract Nonr 2216 (28) (NR-043-332).

[6] H. RÖHRL, *Über das Riemann-Privalovsche Randwertproblem*. Math. Ann. *151* (1963), 365–423.

[7] ———, *Ω-degenerate Singular Integral Equations and Holomorphic Affine Bundles over Compact Riemann Surfaces*, I, Comment. Math. Helv. *38* (1963) 84–120.

[8] L. I. VOLKOVISKII, *Quasiconformal Mapping and the Problem of Conformal Pasting*. Ukrain. Mat. Z. *3* (1951), 39–51.

[9] S. WARSCHAWSKI, *Über einen Satz von O. D. Kellogg*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse *1932*, 73–86.

[10] G. F. MANDZHAVIDZE and B. V. KHVEDELIDZE, *On the Problem of Riemann-Privalov with Continuous Coefficient*. Dokl. Akad. Nauk. Mat. *123* (1958), 791–794.

[11] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations* (Noordhoff, Groningen 1953).

[12] I. B. SIMONENKO, *The Boundary Problem of Riemann with Continuous Coefficients*, Dokl. Akad. Nauk. Math. *124* (1959), 278–281.

University of California at San Diego,

Princeton University, Fine Hall
Princeton, New Jersey, U.S.A. 08540

Received April 10, 1968

Marinescu-Räume

von HANS JARCHOW (Zürich)

0. Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht eine Klasse von Limesvektorräumen, die bei der Begründung einer Differentialrechnung für lokalkonvexe Räume eine wichtige Rolle spielt, siehe H. H. KELLER [8], [9]. Diese Räume wurden unter dem Namen „pseudotopologische Vereinigungen lokalkonvexer Räume" bereits von G. MARINESCU [11] eingeführt, wir wollen sie *Marinescu-Räume* nennen.

Im ersten Kapitel skizzieren wir die Theorie der Limesräume nach H. R. FISCHER [5]. Wichtig ist vor allem der Begriff des induktiven Limes von Limesräumen. Das zweite Kapitel behandelt Limesvektorräume. Der Begriff des Marinescu-Raumes wird eingeführt, und das Tensorprodukt von Limesvektorräumen (Marinescu-Räumen) wird projektiv zu einem Limesvektorraum (Marinescu-Raum) gemacht. Im letzten Kapitel werden Räume stetiger linearer und multilinearer Abbildungen zwischen Marinescu-Räumen nach einem aus [8] abgeleiteten Verfahren mit Marinescu-Limitierungen versehen. Wir zeigen, dass alle von H. H. KELLER in [9] gestellten Forderungen erfüllt sind, so dass eine gewisse berechtigte Hoffnung besteht, sogar eine Differentialrechnung für Marinescu-Räume begründen zu können.

1. Limesräume

1.1 *Allgemeine Begriffe*

Dieser Abschnitt enthält Begriffe und Aussagen aus der Theorie der Limesräume, die später benötigt werden. Eine ausführlichere Darstellung findet man bei H. R. FISCHER [5] oder J. WLOKA [12].

Für eine nichtleere Menge M sei $\mathfrak{P}(\mathscr{F}(M))$ die Potenzmenge der Menge $\mathscr{F}(M)$ aller Filter auf M. Eine *Limitierung* λ auf M ist eine Abbildung $\lambda: M \to \mathfrak{P}(\mathscr{F}(M))$, die für jedes $x \in M$ folgende Eigenschaften besitzt:

$$\text{(L 1)} \quad \Phi \in \lambda(x), \quad \psi \in \mathscr{F}(M), \quad \Phi \subset \psi \Rightarrow \psi \in \lambda(x).$$

$$\text{(L 2)} \quad \Phi \in \lambda(x), \quad \psi \in \lambda(x) \Rightarrow \Phi \cap \psi \in \lambda(x).$$

$$\text{(L 3)} \quad \dot{x} \in \lambda(x).$$

$\dot{x}$ ist der von $x \in M$ erzeugte triviale Ultrafilter in M. Das Paar (M, λ) heisst ein *Limesraum*, die Filter aus $\lambda(x)$ heissen *konvergent* gegen $x \in M$. Genügt eine Menge von Filtern in M den Axiomen (L 1) und (L 2), so heisst sie ein *Filterideal*.

Der Limesraum (M, λ) (die Limitierung λ) heisst *separiert*, wenn in M jeder Filter

gegen höchstens einen Punkt konvergiert. Das ist genau dann der Fall, wenn für $(x, y) \in M \times M$ aus $x \neq y$ stets folgt: $\lambda(x) \cap \lambda(y) = \emptyset$.

Jeder *topologische Raum* $(X, \mathscr{T})$ ist in natürlicher Weise ein Limesraum (X, λ): Für jedes $x \in X$ besteht das Filterideal $\lambda(x)$ gerade aus allen Oberfiltern des $\mathscr{T}$-Umgebungsfilters von x in X. Wir werden Topologien immer mit den zugehörigen Limitierungen identifizieren.

(M, λ) und (N, μ) seien Limesräume. Eine Abbildung $f: M \to N$ heisst (λ, μ)-*stetig* im Punkte $x \in M$, wenn aus $\Phi \in \lambda(x)$ immer $f(\Phi) \in \mu(f(x))$ folgt. Damit definiert man wie üblich Begriffe wie (λ, μ)-Stetigkeit (global) und (λ, μ)-Homöomorphie. Wir sagen auch, f sei stetig bzw. ein Homöomorphismus, wenn klar ist, um welche Limitierungen es sich handelt. Gilt $M = N$, so schreiben wir $\mu \leqslant \lambda$ oder $\lambda \geqslant \mu$ (μ *gröber* als λ oder λ *feiner* als μ), wenn die Identität von M eine (λ, μ)-stetige Abbildung ist. $\mu \leqslant \lambda$ gilt genau dann, wenn $\lambda(x) \subset \mu(x)$ für jedes $x \in M$.

Gegeben seien nun eine nichtleere Menge M, eine Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen $(A \neq \emptyset)$ und zu jedem $a \in A$ zwei Abbildungen $g_a: M_a \to M$ und $f_a: M \to M_a$. Unter allen Limitierungen auf M, für die jedes g_a stetig ist, gibt es eine feinste λ^0, und unter allen Limitierungen auf M, für die jedes f_a stetig ist, gibt es eine gröbste λ_0. Wir nennen λ^0 die *finale Limitierung* von $(g_a)_{a \in A}$ und λ_0 die *initiale Limitierung* von $(f_a)_{a \in A}$. Für ein $x \in M$ wird das Filterideal $\lambda^0(x)$ erzeugt von $\dot{x}$ und allen Filtern der Form $g_a(\psi_a)$ mit $\psi_a \in \lambda_a(y_a)$ und $y_a \in g_a^{-1}(x)$, $a \in A$. Dagegen konvergiert ein Filter Φ auf M genau dann bezüglich λ_0 gegen ein $x \in M$, wenn $f_a(\Phi) \in \lambda_a(f_a(x))$ für jedes $a \in A$ gilt. Ist (X, ϱ) ein weiterer Limesraum, so ist eine Abbildung $f: M \to X$ genau dann (λ^0, ϱ)-stetig, wenn für jedes $a \in A$ die Komposition $f \circ g_a$ eine (λ_a, ϱ)-stetige Abbildung ist. Eine Abbildung $g: X \to M$ ist hingegen genau dann (ϱ, λ_0)-stetig, wenn für jedes $a \in A$ die Komposition $f_a \circ g$ eine (ϱ, λ_a)-stetige Abbildung ist. Sind alle λ_a Topologien, so ist λ_0 stets eine Topologie. Dies muss für λ^0 nicht wahr sein.

Man erhält hieraus durch Spezialisierung den Begriff der *Quotientenlimitierung* auf dem Quotienten M/R für einen Limesraum (M, λ) und eine Äquivalenzrelation R auf M, ferner den Begriff des *Limesunterraumes* eines gegebenen Limesraumes und schliesslich den Begriff der *Produktlimitierung* $\prod_{a \in A} \lambda_a$ auf dem kartesischen Produkt $\prod_{a \in A} M_a$ einer nichtleeren Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen. Für $x = (x_a)_{a \in A} \in \prod M_a$ wird dabei $(\prod \lambda_a)(x)$ erzeugt von allen Produktfiltern $\prod_{a \in A} \Phi_a$ mit $\Phi_a \in \lambda_a(x_a)$. Es ist $\prod \lambda_a$ genau dann separiert, wenn jede der Limitierungen λ_a separiert ist. Ist (N, μ) Limesunterraum des Limesraumes (M, λ), so nennen wir μ oft auch die von λ auf N *induzierte Limitierung*. Für Einzelheiten und Beweise sei auf H. R. FISCHER [5] verwiesen.

1.2 *Induktiver und projektiver Limes*

(M, λ) und (N, μ) seien Limesräume, M sei Teilmenge von N. Ist die Inklusion

$M \to N$ eine (λ, μ)-stetige Abbildung, so schreiben wir

$$(M, \lambda) \prec (N, \mu).$$

Wir betrachten eine nichtleere Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen, deren Indexmenge A durch eine Ordnungsrelation „$\leqslant$" gerichtet ist und verlangen:

$$\textbf{(IND)} \quad ((a, a') \in A \times A, \quad a \leqslant a') \Rightarrow (M_a, \lambda_a) \prec (M_{a'}, \lambda_{a'}).$$

Die finale Limitierung λ auf $M := \bigcup_{a \in A} M_a$ der Familie der Einbettungen $M_a \to M$, $a \in A$, heisst der *induktive Limes* von $(\lambda_a)_{a \in A}$ und wird bezeichnet mit

$$\lambda = \operatorname{ind}_{a \in A} \lambda_a.$$

Wenn wir in Zukunft den soeben geschilderten Sachverhalt meinen, werden wir dies immer durch die Schreibweise

$$(M, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A} (M_a, \lambda_a)$$

ausdrücken.

Ist speziell $A = \mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und ist (M_n, λ_n) Limesunterraum von (M_{n+1}, λ_{n+1}) für jedes $n \in \mathbf{N}$, so heisst $\lambda = \operatorname{ind}_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n$ der *strikte induktive Limes* der Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Sind in $(M, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A} (M_a, \lambda_a)$ alle λ_a Topologien, so muss deswegen λ noch keine Topologie sein; siehe etwa [8] oder (2.2) dieser Arbeit. Man beachte, dass wir in der Kategorie der Limesräume arbeiten!

In $(M, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A} (M_a, \lambda_a)$ bezeichnen wir die Inklusionsabbildungen $M_a \to M$ mit i_a, $a \in A$. Die konvergenten Filter von (M, λ) sind wie folgt charakterisiert (siehe [5]):

1.2.1 SATZ: *Ein Filter Φ auf M konvergiert genau dann bezüglich* $\operatorname{ind}_{a \in A} \lambda_a$ *gegen $x \in M$, wenn es ein $a \in A$ und einen Filter Φ_a auf M_a gibt, so dass gilt:*

$$\text{(I)} \ x \in M_a, \quad \text{(II)} \ \Phi_a \in \lambda_a(x), \quad \text{(III)} \ i_a(\Phi_a) = \Phi.$$

Wegen (III) ist Φ_a Basis von Φ in M, mindestens ein Element aus Φ liegt also in M_a! Mit Hilfe dieses Satzes zeigt man (siehe [5]):

1.2.2 SATZ: *Der induktive Limes* $\operatorname{ind}_{a \in A} \lambda_a$ *ist genau dann separiert, wenn jede der Limitierungen λ_a separiert ist.*

Wir zeigen weiter, dass die universelle Eigenschaft von $\operatorname{ind}_{a \in A} \lambda_a$ sogar punktweise gilt:

1.2.3 LEMMA: *Ist (N, μ) ein Limesraum, so ist eine Abbildung $f: M \to N$ genau dann (λ, μ)-stetig in $x \in M$, wenn die Restriktion f_a von f auf M_a (λ_a, μ)-stetig ist in x für jedes $a \in A$, für welches $x \in M_a$ gilt.*

Beweis: Es sei A' die Menge aller $a\in A$, für welche $x\in M_a$ gilt. f_a sei (λ_a, μ)-stetig in x für jedes $a\in A'$. Zu $\Phi\in\lambda(x)$ gibt es nach (1.2.1) ein $a\in A'$ und einen Filter Φ_a auf M_a mit $\Phi_a\in\lambda_a(x)$, so dass Φ_a Basis von Φ in M ist. Wegen $f(\Phi)=f_a(\Phi_a)\in\mu(f(x))$ ist f stetig in x.

Über die Stetigkeit von Abbildungen mit Werten in induktiven Limites von Limesräumen lässt sich in Verallgemeinerung des entsprechenden Resultats aus [8] folgendes aussagen:

1.2.4 LEMMA: *Gegeben seien* $(M, \lambda)=\operatorname{ind}_{a\in A}(M_a, \lambda_a)$ *und ein topologischer Raum* (N, τ). *Eine Abbildung* $g: N\to M$ *ist genau dann* (τ, λ)*-stetig in* $x\in N$, *wenn es ein* $a\in A$ *sowie eine Umgebung* U *von* x *in* (N, τ) *gibt, so dass gilt:*

(1) $g(U)\subset M_a$.

(2) *Die durch* g *bestimmte Abbildung* $g_U: U\to M_a$ *ist* (τ_U, λ_a)*-stetig in* $x\in U$; *dabei ist* τ_U *die von* τ *auf* U *induzierte Topologie.*

Beweis: Wenn (1) und (2) erfüllt sind, so ist g (τ, λ)-stetig in x, weil U Umgebung ist von x in (N, τ). Ist umgekehrt g (τ, λ)-stetig in x und $\mathscr{U}_x$ der Umgebungsfilter von x in (N, τ), so gibt es wegen $g(\mathscr{U}_x)\in\lambda(g(x))$ ein $a\in A$ und einen Filter Φ_a auf M_a, so dass $g(x)\in M_a$, $\Phi_a\in\lambda_a(g(x))$ und Φ_a Basis von $g(\mathscr{U}_x)$ in M ist. Für mindestens ein $U\in\mathscr{U}_x$ ist also $g(U)\subset M_a$, und der von $\mathscr{U}_x$ auf U induzierte Filter liefert unter g_U eine Basis von $g(\mathscr{U}_x)$ in M, q.e.d.

In der Kategorie der Limesräume ist die Bildung des induktiven Limes nur vertauschbar mit der Bildung endlicher kartesischer Produkte:

1.2.5 SATZ: $((M_a, \lambda_a))_{a\in A}$ *sei eine endliche Familie von Limesräumen, und für jedes* $a\in A$ *sei* $(M_a, \lambda_a)=\operatorname{ind}_{b_a\in B_a}(M_{b_a}, \lambda_{b_a})$ *ein induktiver Limes. Dann gilt:*

$$\Big(\prod_{a\in A} M_a, \prod_{a\in A}\lambda_a\Big)=\operatorname{ind}_{b\in B}\Big(\prod_{a\in A} M_{b_a}, \prod_{a\in A}\lambda_{b_a}\Big).$$

Darin ist $B:=\prod_{a\in A} B_a$ *und* $b:=(b_a)_{a\in A}$.

Beweis: Wir setzen $M:=\prod_{a\in A} M_a$, $M_b:=\prod_{a\in A} M_{b_a}$, $\lambda:=\prod_{a\in A}\lambda_a$ und $\lambda_b:=\prod_{a\in A}\lambda_{b_a}$. Auf B definieren wir durch $(b_a)\leqslant(b'_a):\Leftrightarrow(b_a\leqslant b'_a\ \forall a\in A)$ eine Ordnungsrelation „$\leqslant$". Dann ist $(B, \leqslant)$ gerichtet, und man überlegt sich leicht, dass $\lambda^I:=\operatorname{ind}_{b\in B}\lambda_b$ auf M existiert. Über die universelle Eigenschaft von Produktlimitierungen folgt $\lambda\leqslant\lambda^I$. Man erhält $\lambda^I\leqslant\lambda$, wenn man für beliebiges $x=(x_a)\in M$ einen Produktfilter $\Phi=\prod_{a\in A}\Phi_a\in\lambda(x)$ betrachtet, $\Phi_a\in\lambda_a(x_a)\ \forall a\in A$. Zu jedem $a\in A$ gibt es ein $b_a\in B_a$ und einen Filter Φ_{b_a} auf M_{b_a}, so dass $x_a\in M_{b_a}$, $\Phi_{b_a}\in\lambda_{b_a}(x_a)$ und Φ_a von Φ_{b_a} erzeugt wird. Es ist $\prod_{a\in A}\Phi_{b_a}\in\lambda_b(x)$ Basis von Φ in M, also $\Phi\in\lambda^I(x)$, weil A endlich vorausgesetzt wurde!

Die Bildung des induktiven Limes ist bei Limesräumen vertauschbar mit der Quotientenbildung:

1.2.6 SATZ: *Gegeben seien* $(M, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$ *und eine Äquivalenzrelation* R *in* M. *Für jedes* $a \in A$ *sei* R_a *die von* R *auf* M_a *induzierte Äquivalenzrelation. Sind* μ *bzw.* μ_a *die Quotientenlimitierungen auf* M/R *bzw.* M_a/R_a, *so gilt:*

$$(M/R, \mu) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(M_a/R_a, \mu_a).$$

Beweis: Die Existenz einer Limitierung $\mu^I = \operatorname{ind}_{a \in A} \mu_a$ auf M/R ist trivial. $\mu^I \leqslant \mu$ folgt aus der universellen Eigenschaft von λ, und $\mu \leqslant \mu^I$ folgt aus der universellen Eigenschaft von μ_a für jedes $a \in A$.

Die hier angegebene Definition des induktiven Limes ist nicht die allgemeinste, die möglich ist. Sie reicht für unsere Zwecke jedoch aus. Eine allgemeinere Definition findet man z.B. bei H. R. FISCHER [5].

Wir benötigen noch den Begriff des *projektiven Limes von Limesräumen.* Zu seiner Definition gehen wir wieder aus von einer Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen, deren Indexmenge $A (\neq \emptyset)$ durch eine Ordnungsrelation „$\leqslant$" gerichtet ist. Wir verlangen:

(PROJ) *Für jedes* $(a, a') \in A \times A$ *mit* $a \leqslant a'$ *existiert eine* $(\lambda_{a'}, \lambda_a)$*-stetige Abbildung* $h_{aa'}: M_{a'} \to M_a$, *so dass gilt:*
Für $a \leqslant a' \leqslant a''$ *ist* $h_{aa''} = h_{aa'} \circ h_{a'a''}$, $a, a', a'' \in A$. *Für jedes* $a \in A$ *ist* h_{aa} *die Identität von* M_a.

Die Restriktion der natürlichen Projektion $\prod_{a \in A} M_a \to M_a$ auf

$$M := \{(x_a)_{a \in A} \mid x_a \in M_a; \quad x_a = h_{aa'}(x_{a'}) \quad \text{für} \quad a \leqslant a'\}$$

soll h_a heissen. Für $a \leqslant a'$ ist dann $h_a = h_{aa'} \circ h_{a'}$. Die initiale Limitierung λ von $(h_a)_{a \in A}$ auf M heisst der *projektive Limes* von $(\lambda_a)_{a \in A}$, wir wollen ihn mit

$$\lambda = \operatorname*{proj}_{a \in A} \lambda_a$$

bezeichnen. *In Zukunft soll die Schreibweise*

$$(M, \lambda) = \operatorname*{proj}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$$

immer als Abkürzung für den soeben geschilderten Sachverhalt dienen. Wir können zumeist auf eine ausdrückliche Angabe des definierenden Abbildungssystems verzichten. Unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des projektiven Limes ergibt sich:

1.2.7 SATZ: *In* $(M, \lambda) = \operatorname{proj}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$ *ist* λ *identisch mit der von* $(\prod_{a \in A} M_a, \prod_{a \in A} \lambda_a)$ *auf* M *induzierten Limitierung.*

Ist also λ_a separiert für jedes $a \in A$, so ist $\operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a$ separiert. Sind alle λ_a Topologien, so ist auch $\operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a$ eine Topologie. $\operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a$ ist eine metrisierbare Topologie, wenn A abzählbar ist und alle λ_a metrisierbare Topologien sind.

2. Marinescu-Räume

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung von Begriffen und Aussagen aus der Theorie der Limesvektorräume, die wir später benötigen. Anschliessend betrachten wir induktive und projektive Limites von Limesvektorräumen und führen den Begriff des Marinescu-Raumes ein. Auf dem Tensorprodukt von Limesvektorräumen und speziell von Marinescu-Räumen definieren wir schliesslich projektiv verträgliche Limitierungen und beweisen einige ihrer Eigenschaften.

2.1 *Limesvektorräume*

Unter einem *Vektorraum* (abgekürzt *VR*) soll hier stets ein solcher über dem Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen verstanden werden. Ein *Limesvektorraum* oder *limitierter Vektorraum* (abgekürzt *LVR*) ist ein Limesraum (E, λ) bestehend aus einem VR E und einer Limitierung λ auf E, so dass die algebraischen Operationen in E stetig sind. Dabei trägt $\mathbf{R}$ seine natürliche Topologie $\tau_{\mathbf{R}}$. Den Nullumgebungsfilter in $(\mathbf{R}, \tau_{\mathbf{R}})$ bezeichnen wir mit $\mathbf{V}$. Die Limitierung λ des LVR (E, λ) nennen wir *verträglich* oder eine *VR-Limitierung*. λ ist translationsinvariant, durch das Ideal $\lambda(0)$ also bereits bestimmt. *Eine lineare Abbildung von einem LVR in einen anderen ist also genau dann stetig, wenn sie stetig ist im Nullpunkt.*

Die Frage nach der Verträglichkeit von Limitierungen auf Vektorräumen wird durch folgenden Satz beantwortet (s. [5]):

2.1.1 SATZ: *Eine Limitierung λ auf einem VR E ist genau dann eine VR-Limitierung, wenn sie translationsinvariant ist und den folgenden Bedingungen genügt:*

$$(1)\quad \lambda(0) + \lambda(0) \subset \lambda(0). \qquad (2)\quad r \cdot \lambda(0) \subset \lambda(0) \forall r \in \mathbf{R}.$$
$$(3)\quad \mathbf{V} \cdot \lambda(0) \subset \lambda(0). \qquad (4)\quad \mathbf{V} \cdot x \in \lambda(0) \forall x \in E.$$

Insbesondere ist jeder topologische Raum in natürlicher Weise ein LVR. Sind weiter E ein VR, $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ eine LVR-Familie und $(u_a)_{a \in A}$ eine Familie linearer Abbildungen $u_a: E \to E_a$, so ist die initiale Limitierung von $(u_a)_{a \in A}$ auf E eine VR-Limitierung. Das kartesische Produkt einer LVR-Familie ist also ein LVR, jeder lineare Limesunterraum eines LVR ist ein LVR. Ist noch (E, λ) ein LVR und H ein linearer Teilraum von E, so ist auch die Quotientenlimitierung von E/H eine VR-Limitierung. Sie ist sogar eine Topologie, wenn λ eine Topologie ist.

In dieser Arbeit soll für „lokalkonvex" immer die Abkürzung *lc.* verwendet

werden. Ist (E, λ) ein LVR, so gibt es unter allen lc. Topologien auf E, welche gröber sind als λ, eine feinste $\kappa(\lambda)$. Sie heisst die zu λ *assoziierte lokalkonvexe Topologie.* Eine definierende Seminormenfamilie für $\kappa(\lambda)$ bilden z.B. alle für λ stetigen Seminormen von E. Die konvexen Mengen des Filters $\bigcap\{\Phi\in\lambda(0)\}$ bilden eine Nullumgebungsbasis in $(E, \kappa(\lambda))$. Es ist $\kappa(\lambda)$ genau dann separiert, wenn es zu jedem $x\in E$ mit $x\neq 0$ eine konvexe Menge V_x in $\bigcap\{\Phi\in\lambda(0)\}$ gibt, so dass $x\notin V_x$, vgl. auch [6]. Der folgende Satz findet sich in [5]:

2.1.2 SATZ: *Eine lineare Abbildung von einem LVR (E, λ) in einen lc. VR (F, κ_F) ist genau dann (λ, κ_F)-stetig, wenn sie $(\kappa(\lambda), \kappa_F)$-stetig ist.*

Der Operator κ ist vertauschbar mit der Bildung kartesischer Produkte von *endlich* vielen LVR:

2.1.3 SATZ: *Für LVR (E_1, λ_1) und (E_2, λ_2) gilt stets*

$$\kappa(\lambda_1 \times \lambda_2) = \kappa(\lambda_1) \times \kappa(\lambda_2).$$

Beweis: $\kappa(\lambda_1)\times\kappa(\lambda_2)\leqslant\kappa(\lambda_1\times\lambda_2)$ folgt aus der $(\lambda_1\times\lambda_2, \lambda_i)$-Stetigkeit der Projektionen $E_1\times E_2\to E_i$, $i=1, 2$. Umgekehrt sind die Inklusionsabbildungen $E_i\to E_1\times E_2$ linear und $(\lambda_i, \lambda_1\times\lambda_2)$-stetig, also auch $(\kappa(\lambda_i), \kappa(\lambda_1\times\lambda_2))$-stetig. $\kappa(\lambda_1\times\lambda_2)\leqslant\kappa(\lambda_1)\times\kappa(\lambda_2)$ ergibt sich, wenn man $(E_1\times E_2, \kappa(\lambda_1)\times\kappa(\lambda_2))$ identifiziert mit der lc. direkten Summe der $(E_i, \kappa(\lambda_i))$.

Ist (E, λ_E) ein LVR und F ein linearer Teilraum von E, so ist die assoziierte lokalkonvexe Topologie der von λ_E auf F induzierten Limitierung jedenfalls feiner als die von $\kappa(\lambda_E)$ auf F induzierte Topologie. Gleichheit kann aber nicht behauptet werden, vgl. die Bemerkung im Anschluss an (2.2.3). Aus der Separiertheit von $\kappa(\lambda_E)$ folgt aber wenigstens immer die Separiertheit von $\kappa(\lambda_F)$, wobei λ_F die von λ_E induzierte Limitierung ist.

2.2 *Induktiver und projektiver Limes*

Es seien $(A, \leqslant)$ eine gerichtete Halbordnung und $((E_a, \lambda_a))_{a\in A}$ eine mit A indizierte LVR-Familie. Für $(a, a')\in A\times A$ und $a\leqslant a'$ sei $(E_a, \lambda_a)\prec(E_{a'}, \lambda_{a'})$. Wir wollen stillschweigend voraussetzen, dass Inklusionen bei Vektorräumen immer linear sein sollen. Dann ist $E:=\bigcup_{a\in A} E_a$ in natürlicher Weise ein VR, und $\lambda:=\operatorname{ind}_{a\in A}\lambda_a$ ist eine VR-Limitierung von E. Diesen Sachverhalt denken wir uns von nun an immer als gegeben, wenn wir die Schreibweise

$$(E, \lambda) = \operatorname*{ind}_{a\in A}(E_a, \lambda_a)$$

für LVR benutzen. – Sind alle λ_a VR-Topologien, so heisst (E, λ) in Anlehnung an G. MARINESCU [11] eine *pseudotopologische Vereinigung* oder kurz ein *PTV-Raum.*

Sind alle λ_a lokalkonvexe Topologien, so nennen wir (E, λ) einen *Marinescu-Raum* und λ eine *Marinescu-Limitierung*.

Nach (1.2.5) ist nur die Bildung des endlichen kartesischen Produktes von LVR vertauschbar mit der Bildung induktiver Limites von LVR. Wir werden aus diesem Grunde in der Kategorie der Marinescu-Räume eine weitere Produktlimitierung einführen. – Nach (1.2.6) ist die Bildung des induktiven Limes von Limesvektorräumen vertauschbar mit der Quotientenbildung nach linearen Unterräumen. Es folgt (vergleiche die Anmerkung im Anschluss an (2.1.1)), dass jeder Quotient eines Marinescu-Raumes (PTV-Raumes) nach einem linearen Teilraum in natürlicher Weise wieder ein Marinescu-Raum (PTV-Raum) ist.

Für einen Marinescu-Raum $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ können wir den *lokalkonvexen induktiven Limes* von $(\kappa_a)_{a \in A}$ auf E bilden, vgl. etwa [3] und [10]. Wir wollen ihn in dieser Arbeit mit

$$\kappa = \operatorname*{cind}_{a \in A} \kappa_a$$

bezeichnen und für den ganzen Raum entsprechend

$$(E, \kappa) = \operatorname*{cind}_{a \in A} (E_a, \kappa_a)$$

schreiben. Mit Hilfe des Begriffes der assoziierten lokalkonvexen Topologie findet man leicht folgenden Satz (vgl. auch [5], [12]):

2.2.1 SATZ: *Ist* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$, *so gilt:*

$$\operatorname*{cind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a) = \kappa\left(\operatorname*{ind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a)\right) = \kappa\left(\operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a\right) \leqslant \operatorname*{ind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a) \leqslant \operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a .$$

Daraus ergibt sich mit (1.2.5) und (2.1.3):

2.2.2 KOROLLAR: *Für* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *und* $(F, \mu) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \mu_b)$ *gilt*:

$$\left(\operatorname*{cind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a)\right) \times \left(\operatorname*{cind}_{b \in B} \kappa(\mu_b)\right) = \operatorname*{cind}_{(a, b) \in A \times B} \left(\kappa(\lambda_a) \times \kappa(\mu_b)\right).$$

2.2.3 SATZ: *Gegeben seien* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *und ein linearer Teilraum* F *von* E. *Es seien* μ *die von* λ *auf* F *induzierte Limitierung,* μ_a *die von* λ_a *auf* $F_a := F \cap E_a$ *induzierte Limitierung,* $a \in A$. *Dann gilt:*

$$(F, \mu) = \operatorname*{ind}_{a \in A} (F_a, \mu_a).$$

Beweis: Die Existenz von $\operatorname{ind}_{a \in A} \mu_a$ und $\mu \leqslant \operatorname{ind}_{a \in A} \mu_a$ sind leicht zu zeigen. Jeder Filter $\Phi \in \mu(0)$ ist Basis eines Filters $\psi \in \lambda(0)$. Zu ψ gibt es ein $a \in A$ und ein ψ_a, Filter auf E_a, welcher Basis von ψ in E ist und $\psi_a \in \lambda_a(0)$ erfüllt. ψ besitzt also eine Basis Φ_a in F_a, und es gilt $\Phi_a \in \mu_a(0)$. Es ist Φ_a Basis von Φ in F.

Dieser Satz gilt offenbar auch, wenn (E, λ) ein induktiver Limes von Limesräumen (E_a, λ_a) ist und man für F eine nichtleere Teilmenge von E nimmt. Dann ist $\mu = \operatorname{ind}_{a \in A'} \mu_a$, wobei A' die Menge aller $a \in A$ mit $F_a = F \cap E_a \neq \emptyset$ ist.

Für den lc. induktiven Limes ist (2.2.3) nicht mehr richtig. Es gibt Beispiele, bei denen die von $\kappa(\lambda)$ auf F induzierte Topologie echt gröber ist als $\kappa(\mu)$; vgl. G. KOETHE [10], Gegenbeispiel No. 5.

2.2.4 KOROLLAR: *Jeder lineare Limesunterraum eines Marinescu-Raumes (PTV-Raumes) ist ein Marinescu-Raum (PTV-Raum).*

Ist jetzt $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ eine nichtleere Familie von Marinescu-Räumen $(E_a, \lambda_a) = \operatorname{ind}_{b_a \in B_a}(E_{b_a}, \kappa_{b_a})$ (analog für PTV-Räume), so existiert auf $E := \prod_{a \in A} E_a$ neben der Produktlimitierung $\lambda_L := \prod_{a \in A} \lambda_a$ noch die Marinescu-Limitierung $\lambda_M := \operatorname{ind}_{b_a \in B} (\prod_{a \in A} \kappa_{b_a})$ mit $B := \prod_{a \in A} B_a$. Trivialerweise gilt $\lambda_L \leqslant \lambda_M$. Wir beweisen mit (1.2.4):

2.2.5 SATZ: *E, λ_L und λ_M seien wie oben definiert. Ist (G, λ_G) ein Marinescu-Raum, so ist eine lineare Abbildung $u: G \to E$ genau dann (λ_G, λ_L)-stetig, wenn sie (λ_G, λ_M)-stetig ist.*

Beweis: Es genügt, $\lambda_G = \kappa_G$ lokalkonvex vorauszusetzen. Für $a \in A$ sei $\mathrm{pr}_a: E \to E_a$ die kanonische Projektion. Ist u dann (κ_G, λ_L)-stetig, so gibt es nach (1.2.4) zu jedem $a \in A$ ein $b_a \in B_a$, so dass $\mathrm{pr}_a \circ u$ als eine (κ_G, κ_{b_a})-stetige Abbildung $G \to E_{b_a}$ aufgefasst werden kann: Nullumgebungen in topologischen VR sind ja absorbierend. Für ein $(b_a) \in B$ kann also u mit einer $(\kappa_G, \prod_{a \in A} \kappa_{b_a})$-stetigen Abbildung $G \to \prod_{a \in A} E_{b_a}$ identifiziert werden, womit bereits alles gezeigt ist.

Sei jetzt noch A durch eine Ordnungsrelation „$\leqslant$" gerichtet. Zu jedem $(a, b) \in A \times A$ mit $a \leqslant b$ sei eine (λ_b, λ_a)-stetige Abbildung h_{ab} von E_b in E_a definiert, so dass $(\tilde{E}, \lambda) = \operatorname{proj}_{a \in A} (E_a, \lambda_a)$ bezüglich der h_{ab} existiert. $(\tilde{E}, \lambda)$ ist ein LVR, wenn alle h_{ab} linear sind, und das wollen wir immer stillschweigend voraussetzen, wenn wir projektive Limites von LVR bilden. Nach (1.2.7) ist $(\tilde{E}, \lambda)$ linearer Limesunterraum von (E, λ_L). Sei μ die von λ_M auf $\tilde{E}$ induzierte Limitierung. Nach (2.2.4) ist μ eine Marinescu-Limitierung. Sie ist offensichtlich die gröbste unter allen Marinescu-Limitierungen von $\tilde{E}$, welche feiner sind als λ. Aus den allgemeinen Eigenschaften induzierter Limitierungen und (2.2.5) folgt:

2.2.6 KOROLLAR: *Die Kategorie der Marinescu-Räume besitzt projektive Limites.*

Weil wir für Marinescu-Räume stets nur den projektiven Limes in der Kategorie der Marinescu-Räume bilden werden, benutzen wir auch hier die Schreibweise

$$\mu = \operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a \quad \text{und} \quad (\tilde{E}, \mu) = \operatorname{proj}_{a \in A} (E_a, \lambda_a).$$

Mit Hilfe von (1.2.4) verallgemeinern wir einige Aussagen aus [8]:

2.2.7 LEMMA: *Sind* (E_1, τ_1) *und* (E_2, τ_2) *topologische VR und* $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \lambda_b)$ *ein induktiver Limes, so ist eine bilineare Abbildung* $u: E_1 \times E_2 \to F$ *genau dann* $(\tau_1 \times \tau_2, \lambda_F)$*-stetig im Nullpunkt, wenn es ein* $b \in B$ *gibt, so dass* $u(E_1 \times E_2) \subset F_b$ *und die von u bestimmte Abbildung* $E_1 \times E_2 \to F_b$ $(\tau_1 \times \tau_2, \lambda_b)$*-stetig ist im Nullpunkt.*

Beweis: Man verwendet (1.2.4) und die Tatsache, dass Nullumgebungen in topologischen VR absorbierend sind.

(2.2.7) gilt natürlich analog auch für lineare Abbildungen. Diese sind aber bereits stetig, wenn sie stetig sind im Nullpunkt. Man erhält folgende Verallgemeinerung des entsprechenden Resultates aus [8]:

2.2.8 KOROLLAR: *Gibt es auf* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *eine VR-Topologie, welche feiner ist als* λ*, so ist* $E_a = E$ *für mindestens ein* $a \in A$.

Mit (2.2.7) können wir ausserdem beweisen:

2.2.9 SATZ: *Eine bilineare Abbildung zwischen Marinescu-Räumen (PTV-Räumen) ist genau dann stetig, wenn sie stetig ist im Nullpunkt.*

Beweis: $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \tau_a)$, $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \tau_b')$ und $(G, \lambda_G) = \operatorname{ind}_{c \in C}(G_c, \tau_c'')$ seien PTV-Räume. Die bilineare Abbildung $u: E \times F \to G$ sei $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig in $(0, 0)$. Dann ist nach (1.2.3) für jedes $(a, b) \in A \times B$ die Restriktion u_{ab} von u auf $E_a \times F_b$ im Nullpunkt $(\tau_a \times \tau_b', \lambda_G)$-stetig. Für ein gewisses $c \in C$ kann u_{ab} nach (2.2.7) identifiziert werden mit einer im Nullpunkt und damit global $(\tau_a \times \tau_b', \tau_c'')$-stetigen bilinearen Abbildung $E_a \times F_b \to G_c$. Daraus aber folgt die $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-Stetigkeit von u.

Man kann sogar beweisen, dass bilineare Abbildungen von PTV-Räumen in beliebige LVR genau dann stetig sind, wenn sie im Nullpunkt stetig sind. Ein derartiger Satz wird hier jedoch nich benötigt, weshalb wir auf den Beweis verzichten.

Jeder induktive Limes von Marinescu-Räumen (PTV-Räumen) ist ein Marinescu-Raum (PTV-Raum). Das ist der Inhalt des folgenden Satzes von J. WLOKA [12]:

2.2.10 SATZ: $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *sei ein induktiver Limes von PTV-Räumen* $(E_a, \lambda_a) = \operatorname{ind}_{b_a \in B_a}(E_{b_a}, \tau_{b_a})$. *Für jedes* $a \in A$ *sei* $A \cap B_a = \emptyset$, *und für* $a \neq a'$ *sei* $B_a \cap B_{a'} = \emptyset$. *Dann ist auch* (E, λ) *ein PTV-Raum:*

$$(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{b \in B}(E_b, \tau_b).$$

Dabei ist $B := \bigcup_{a \in A} B_a$ *durch* $b \leqslant b' :\Leftrightarrow (E_b, \tau_b) \prec (E_{b'}, \tau_{b'})$ *gerichtet.*

Für eine nichtleere LVR-Familie $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ bildet man nach H. R. FISCHER [5] folgendermassen eine VR-Limitierung auf der direkten Summe $E := \bigoplus_{a \in A} E_a$: A^* sei die Menge der endlichen Teilmengen von A. Für $A_0 \in A^*$ bilden wir den LVR $(E_{A_0}, \lambda_{A_0}) :=$

$(\prod_{a\in A_0} E_a, \prod_{a\in A_0} \lambda_a)$. Dann ist λ_{A_0} die feinste VR-Limitierung auf E_{A_0}, so dass für jedes $a\in A_0$ die Inklusion $E_a \to E_{A_0}$ stetig ist. Fassen wir die E_{A_0} auf als lineare Teilräume von E, so ist $E = \bigcup_{A_0\in A^*} E_{A_0}$, und für $A_0, A_1 \in A^*$ folgt $(E_{A_0}, \lambda_{A_0}) \prec (E_{A_1}, \lambda_{A_1})$ aus $A_0 \subset A_1$. Die VR-Limitierung $\lambda = \operatorname{ind}_{A_0\in A^*} \lambda_{A_0}$ auf E heisst die *direkte Summe* der VR-Limitierungen λ_a und wird mit $\bigoplus_{a\in A} \lambda_a$ bezeichnet.

2.2.11 SATZ: *Eine lineare Abbildung von* $(\bigoplus_{a\in A} E_a, \bigoplus_{a\in A} \lambda_a)$ *in einen LVR* (G, λ_G) *ist genau dann* $(\oplus\lambda_a, \lambda_G)$*-stetig, wenn für jedes* $a\in A$ *ihre Restriktion auf* E_a (λ_a, λ_G)*-stetig ist.*

Damit ist λ_a die feinste VR-Limitierung auf $\oplus E_a$, so dass alle Inklusionsabbildungen $E_a \to \oplus E_a$ stetig sind. Für jede LVR-Familie $((E_a, \lambda_a))_{a\in A}$ ist also insbesondere die Einbettung $\oplus E_a \to \prod E_a$ eine $(\oplus\lambda_a, \prod\lambda_a)$-stetige Abbildung.

Aus der Konstruktion von $\bigoplus_{a\in A} \lambda_a$ als induktiver Limes ergibt sich eine Reihe von Folgerungen. Zunächst erhält man aus (1.2.2):

2.2.12 KOROLLAR: $\bigoplus_{a\in A} \lambda_a$ *ist genau dann separiert, wenn jede der VR-Limitierungen* λ_a *separiert ist.*

(2.1.3) und (2.2.1) liefern:

2.2.13 KOROLLAR: *Die lc. Topologie* $\kappa(\bigoplus_{a\in A} \lambda_a)$ *auf* $\bigoplus_{a\in A} E_a$ *ist die lc. direkte Summe der lc. Topologien* $\kappa(\lambda_a)$.

Aus (2.2.3) folgt:

2.2.14 KOROLLAR: *In der (nichtleeren) LVR-Familie* $((E_a, \lambda_a))_{a\in A}$ *sei zu jedem* $a\in A$ *ein linearer Limesunterraum* (F_a, μ_a) *von* (E_a, λ_a) *gegeben.* $(\oplus F_a, \oplus\mu_a)$ *ist linearer Limesunterraum von* $(\oplus E_a, \oplus\lambda_a)$.

Weiter erhalten wir aus (2.2.10):

2.2.15 KOROLLAR: *Für jede (nichtleere) Familie* $((E_a, \lambda_a))_{a\in A}$ *von Marinescu-Räumen (PTV-Räumen) ist* $(\bigoplus_{a\in A} E_a, \bigoplus_{a\in A} \lambda_a)$ *ein Marinescu-Raum (PTV-Raum).*

Schliesslich ergibt sich aus (2.2.8):

2.2.16 KOROLLAR: *Gibt es auf* $\bigoplus_{a\in A} E_a$ *eine VR-Topologie feiner als die Limitierung der direkten Summe* $\bigoplus_{a\in A} \lambda_a$, *so ist* $E_a \neq \{0\}$ *nur für höchstens endlich viele* $a\in A$ *erfüllt.*

Für eine (nichtleere) Familie $((E_a, \tau_a))_{a\in A}$ *topologischer* VR ist also $\bigoplus_{a\in A} \tau_a$ genau dann eine Topologie, wenn $E_a \neq \{0\}$ nur für höchstens endlich viele $a\in A$ erfüllt ist.

Abschliessend beweisen wir:

2.2.17 SATZ: $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *ist linear homöomorph zu einem limitierten Quotienten der direkten Summe* $(\bigoplus_{a \in A} E_a, \bigoplus_{a \in A} \lambda_a)$ *nach einem linearen Teilraum von* $\bigoplus_{a \in A} E_a$.

Beweis: $i_a: E_a \to E$ und $j_a: E_a \to \bigoplus E_a$ seien die Inklusionsabbildungen, $a \in A$. Wir definieren $q: \bigoplus E_a \to E$ durch $q(\sum_{a \in A} j_a(x_a)) := \sum_{a \in A} i_a(x_a)$; dabei sind nur jeweils endlich viele x_a von Null verschieden. q ist linear und surjektiv wegen $E = \bigcup_{a \in A} i_a(E_a)$. Für jedes $a \in A$ ist $q \circ j_a$ (λ_a, λ_E)-stetig, also ist q $(\oplus \lambda_a, \lambda_E)$-stetig. λ_Q sei die Quotientenlimitierung auf $Q := \bigoplus E_a / q^{-1}(0)$. Zu q gibt es eine wohlbestimmte lineare (λ_Q, λ_E)-stetige Bijektion $r: Q \to E$ mit $q = r \circ p$, wobei $p: \bigoplus E_a \to Q$ die natürliche Projektion ist. r^{-1} ist (λ_E, λ_Q)-stetig, weil $r^{-1} \circ i_a = p \circ j_a$ für jedes $a \in A$ eine (λ_a, λ_Q)-stetige Abbildung ist.

Nach der Bemerkung am Anfang dieses Abschnittes gilt aber auch die Umkehrung: Jeder Quotient einer direkten Summe von LVR nach einem linearen Teilraum ist unter der Quotientenlimitierung ein induktiver Limes von LVR.

2.3 *Tensorprodukte von Limesvektorräumen und Marinescu-Räumen*

Für Limesvektorräume (E, λ_E) und (F, λ_F) bilden wir auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$ die finale Limitierung λ^* der kanonischen bilinearen Abbildung $\varphi: E \times F \to E \otimes F$. Für $z \in \varphi(E \times F)$ wird $\lambda^*(z)$ erzeugt von allen Filtern der Form $\Phi \otimes \psi := \varphi(\Phi \times \psi)$ mit $\Phi \in \lambda_E(x)$, $\psi \in \lambda_F(y)$ und $x \otimes y = z$. Gehört aber $z \in E \otimes F$ nicht zu $\varphi(E \times F)$, so ist $\lambda^*(z) = \{\dot{z}\}$.

2.3.1 LEMMA: *Das Filterideal* $\lambda^*(0)$ *hat folgende Eigenschaften:*

$$(1) \quad r \cdot \lambda^*(0) \subset \lambda^*(0) \forall r \in \mathbf{R}.$$
$$(2) \quad \mathbf{V} \cdot \lambda^*(0) \subset \lambda^*(0).$$
$$(3) \quad \mathbf{V} \cdot z \in \lambda^*(0) \forall z \in \varphi(E \times F).$$

Beweis: Es sei $\Phi^* = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i + \Phi_i) \otimes (y_i + \psi_i)$ mit $\Phi_i \in \lambda_E(0)$, $\psi_i \in \lambda_F(0)$ und $x_i \otimes y_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Für festes i ist dann sicher einer der Vektoren x_i, y_i der Nullvektor. Ist z.B. $x_i = 0$, so ist $r \cdot (\Phi_i \otimes (y_i + \psi_i)) = (r \cdot \Phi_i) \otimes (y_i + \psi_i) \in \lambda^*(0)$, weil $r \cdot \Phi_i \in \lambda_E(0)$, $r \in \mathbf{R}$. Analog ist $\mathbf{V} \cdot (\Phi_i) \otimes (y_i + \psi_i) \in \lambda^*(0)$, weil $\mathbf{V} \cdot \Phi_i \in \lambda_E(0)$. Daraus folgt $r \cdot \Phi^* \in \lambda^*(0)$ für jedes $r \in \mathbf{R}$ und $\mathbf{V} \cdot \Phi^* \in \lambda^*(0)$. Für $z = x \otimes y \in \varphi(E \times F)$ ist schliesslich $\mathbf{V} \cdot z = (\mathbf{V} \cdot x) \otimes y \in \lambda^*(0)$, weil $\mathbf{V} \cdot x \in \lambda_E(0)$.

Wir bilden das System Γ der endlichen Summen von Filtern aus $\lambda^*(0)$ und dann das von Γ erzeugte Filterideal $(\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ in $E \otimes F$. Dieses enthält den trivialen Ultrafilter $\dot{0}$ und erfüllt wieder die Bedingungen (1)–(3) aus (2.3.1). Man kann aber noch (3) ersetzen durch

$$(3') \qquad \mathbf{V} \cdot z \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0) \forall z \in E \otimes F.$$

Es lässt sich ja ein $z \in E \otimes F$ stets schreiben als $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ mit $x_i \in E$, $y_i \in F$, und es gilt

$$\sum \mathbf{V} \cdot (x_i \otimes y_i) \subset \mathbf{V} \cdot (\sum x_i \otimes y_i) = \mathbf{V} \cdot z .$$

Seien $\Phi = \bigcap_{i=1}^{m} \Phi_i$ und $\psi = \bigcap_{j=1}^{n} \psi_j$ aus $(\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ mit $\Phi_i, \psi_j \in \Gamma$. Dann ist $\Phi_i + \psi_j \in \Gamma$ für jedes Paar (i, j), also

$$\Phi + \psi = \bigcap_{i,j} (\Phi_i + \psi_j) \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0).$$

Definieren wir $(\lambda_E \otimes \lambda_F)(z) := z + (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ für jedes $z \in E \otimes F$, so erhalten wir nach (2.1.1) eine VR-Limitierung $\lambda_E \otimes \lambda_F$ auf $E \otimes F$. Nach Konstruktion ist $\lambda^*(0) \subset (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$; für $z \in E \otimes F$ und $z \notin \varphi(E \times F)$ ist trivialerweise $\lambda^*(z) \subset (\lambda_E \otimes \lambda_F)(z)$. Sei $z \in \varphi(E \times F)$ und $\Phi \in \lambda^*(z)$ von der Form $\Phi = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i + \Phi_i) \otimes (y_i + \psi_i)$ mit $\Phi_i \in \lambda_E(0)$, $\psi_i \in \lambda_F(0)$ und $x_i \otimes y_i = z$. Wir schreiben $\Phi = z + \bigcap_i \Omega_i$ und haben $\Phi \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(z)$, weil $\Omega_i := x_i \otimes \psi_i + \Phi_i \otimes y_i + \Phi_i \otimes \psi_i \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$. Daher ist $\lambda^*(z) \subset (\lambda_E \otimes \lambda_F)(z)$ für jedes $z \in E \otimes F$, und wir haben die $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_E \otimes \lambda_F)$-Stetigkeit der Abbildung φ.

Es seien (G, λ_G) ein weiterer LVR, $u: E \times F \to G$ eine bilineare Abbildung und $\hat{u}: E \otimes F \to G$ ihre assoziierte lineare Abbildung $(\hat{u} \circ \varphi = u)$. Ist $\hat{u}$ $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetig, so ist natürlich u $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig. Ist umgekehrt u $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$ und $\Phi \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ von der Form $\Phi = \bigcap_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{ij} \otimes \psi_{ij})$ mit $\Phi_{ij} \in \lambda_E(x_{ij})$, $\psi_{ij} \in \lambda_F(y_{ij})$ und $x_{ij} \otimes y_{ij} = 0$, so ist $\hat{u}(\Phi) = \bigcap_i \sum_j u(\Phi_{ij} \times \psi_{ij}) \in \lambda_G(0)$, also ist $\hat{u}$ $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetig.

Wir fassen unsere Resultate zusammen:

2.3.2 SATZ: *Sind (E, λ_E) und (F, λ_F) LVR, so gibt es unter allen VR-Limitierungen auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$, für welche die kanonische bilineare Abbildung $\varphi: E \times F \to E \otimes F$ stetig ist, eine feinste. Wir bezeichnen sie mit $\lambda_E \otimes \lambda_F$.*

Das Filterideal $(\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ wird erzeugt von allen endlichen Summen von Filtern aus $\lambda^*(0)$, wo λ^* die finale Limitierung von φ auf $E \otimes F$ ist.

Ist (G, λ_G) ein beliebiger LVR, so ist eine bilineare Abbildung $u: E \times F \to G$ genau dann $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig, wenn ihre assoziierte lineare Abbildung $\hat{u}: E \otimes F \to G$ $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetig ist.

Die Zuordnung $u \mapsto \hat{u}$ vermittelt also einen linearen Isomorphismus des Raumes $\mathscr{L}(E, F; G)$ aller bilinearen $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetigen Abbildungen $E \times F \to G$ auf den Raum $\mathscr{L}(E \otimes F, G)$ aller linearen $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetigen Abbildungen $E \otimes F \to G$.

Es folgt ferner, dass u genau dann $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig ist, wenn u diese Eigenschaft in jedem Punkt von $\varphi^{-1}(0)$ besitzt. Ob die globale Stetigkeit von u aber bereits aus der Stetigkeit im Nullpunkt folgt, ist nicht bekannt. Man vergleiche hierzu jedoch (2.2.9) und die daran anschliessende Bemerkung.

In Anlehnung an A. GROTHENDIECK [7] nennen wir $\lambda_E \otimes \lambda_F$ das *projektive Tensorprodukt* der VR-Limitierungen λ_E und λ_F. Folgende Eigenschaften projektiver Tensorprodukte von VR-Limitierungen erhält man unmittelbar aus (2.3.2):

2.3.3 SATZ: *Für LVR* $(E, \lambda_E), (F, \lambda_F)$ *und* (G, λ_G) *sind* $(E \otimes F, \lambda_E \otimes \lambda_F)$ *und* $(F \otimes E, \lambda_F \otimes \lambda_E)$ *sowie* $(E \otimes (F \otimes G), \lambda_E \otimes (\lambda_F \otimes \lambda_G))$ *und* $((E \otimes F) \otimes G, (\lambda_E \otimes \lambda_F) \otimes \lambda_G)$ *in kanonischer Weise linear homöomorph.*

2.3.4 SATZ: $u_i : E_i \to F_i$ *seien lineare* (λ_i, μ_i)*-stetige Abbildungen zwischen LVR* (E_i, λ_i) *und* (F_i, μ_i), $i = 1, 2$. *Dann ist ihr Kronecker-Produkt* $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ *stetig für die projektiven Tensorproduktlimitierungen.* $u_1 \otimes u_2$ *ist ein linearer Homöomorphismus, wenn dies für* u_1 *und* u_2 *gilt.*

2.3.5 SATZ: *Jeder LVR* (E, λ_E) *ist in kanonischer Weise linear homöomorph zu* $(\mathbf{R} \otimes E, \tau_{\mathbf{R}} \otimes \lambda_E)$.

Beweis: Zu zeigen ist die Homöomorphie des kanonischen Isomorphismus $r \otimes x \mapsto r \cdot x$ von $\mathbf{R} \otimes E$ auf E. Die Stetigkeit ist klar, weil in jedem LVR die Skalarmultiplikation stetig ist. Für $\Phi \in \lambda_E(0)$ ist $\mathrm{i} \otimes \Phi \in (\tau_{\mathbf{R}} \otimes \lambda_E)(0)$, also ist auch die durch $x \mapsto 1 \otimes x$ bestimmte inverse Abbildung von E auf $\mathbf{R} \otimes E$ stetig.

Für LVR (E, λ_E) und (F, λ_F) ist also $\mathscr{L}(E, \mathbf{R}) \otimes \mathscr{L}(F, \mathbf{R})$ auffassbar als linearer Teilraum von $\mathscr{L}(E, F; \mathbf{R})$.

Die Bildung von $\lambda_E \otimes \lambda_F$ ist verträglich mit der Bildung induktiver Limites von Limesvektorräumen:

2.3.6 SATZ: *Für* $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *und* $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \lambda_b')$ *existiert* $\lambda^{\otimes} = \operatorname{ind}_{(a,b) \in A \times B} (\lambda_a \otimes \lambda_b')$ *auf* $E \otimes F$, *und es gilt*

$$\lambda^{\otimes} = \lambda_E \otimes \lambda_F .$$

Beweis: Die Existenz von $\lambda^{\otimes}$ folgt aus $E \otimes F = \bigcup_{A \times B} (E_a \otimes F_b)$ und $(E_a \otimes F_b, \lambda_a \otimes \lambda_b') \prec (E_{a'} \otimes F_{b'}, \lambda_{a'} \otimes \lambda_{b'}')$ für $(a, b) \leqslant (a', b')$. Die Gleichheit $\lambda^{\otimes} = \lambda_E \otimes \lambda_F$ folgt aus der universellen Eigenschaft des induktiven Limes $\lambda^{\otimes}$ einerseits und der universellen Eigenschaft von $\lambda_E \otimes \lambda_F$ andererseits.

Wir zeigen damit, dass die Bildung von $\lambda_E \otimes \lambda_F$ mit der Bildung der direkten Summe bei LVR verträglich ist:

2.3.7 SATZ: *Für beliebige (nichtleere) LVR-Familien* $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ *und* $((F_b, \mu_b))_{b \in B}$ *ist die kanonische Abbildung*

$$\eta : (\bigoplus_A E_a) \otimes (\bigoplus_B F_b) \to \bigoplus_{A \times B} (E_a \otimes F_b)$$

ein linearer $((\oplus \lambda_a) \otimes (\oplus \mu_b), \oplus (\lambda_a \otimes \mu_b))$*-Homöomorphismus.*

Beweis: Wegen (2.3.6) genügt es, die Behauptung für endliche direkte Summen

(endliche kartesische Produkte) zu beweisen. Sei also $A=\{1,\ldots,n\}$ und o.B.d.A. $B=\{1\}$. Setze $F:=F_1$ und betrachte die kanonischen Abbildungen $\eta: \prod E_i\otimes F\to \prod (E_i\otimes F)$ und $g:\prod E_i\times F\to\prod (E_i\times F)$. Aus der Stetigkeit von g folgt die Stetigkeit von η. Bezeichnen wir mit $t_i: E_i\to\prod E_i$ die natürlichen Einbettungen, so definiert das System $(t_i\otimes id_F)_1\leqslant i\leqslant n$ stetiger linearer Abbildungen $E_i\otimes F\to\prod E_i\otimes F$ eindeutig eine stetige lineare Abbildung $\vartheta: \prod (E_i\otimes F)\to\prod E_i\otimes F$. Es ist $\vartheta=\eta^{-1}$.

Für *lokalkonvexe VR* (E,κ_E) und (F,κ_F) hat man auf $E\otimes F$ neben der *projektiven Tensorproduktlimitierung* $\kappa_E\otimes\kappa_F$ noch die von A. GROTHENDIECK in [7] eingeführte *projektive Tensorprodukttopologie*, die wir mit $\kappa_E\underset{c}{\otimes}\kappa_F$ bezeichnen wollen. Sie ist die feinste lc. Topologie auf $E\otimes F$, so dass $\varphi: E\times F\to E\otimes F$ stetig ist. Für Einzelheiten siehe [7].

Wir wissen nicht, ob $\kappa_E\otimes\kappa_F$ und $\kappa_E\underset{c}{\otimes}\kappa_F$ identisch sind, vermuten jedoch, dass $\kappa_E\underset{c}{\otimes}\kappa_F$ i.a. nicht einmal eine Topologie ist. Wir können nur den folgenden Satz beweisen:

2.3.8 SATZ: *Für lokalkonvexe VR* (E,κ_E) *und* (F,κ_F) *ist*

$$\kappa(\kappa_E\otimes\kappa_F)=\kappa_E\underset{c}{\otimes}\kappa_F.$$

Beweis: Aus $\kappa_E\underset{c}{\otimes}\kappa_F\leqslant\kappa_E\otimes\kappa_F$ folgt $\kappa_E\underset{c}{\otimes}\kappa_F\leqslant\kappa(\kappa_E\otimes\kappa_F)$. Aus der $(\kappa_E\times\kappa_F, \kappa_E\otimes\kappa_F)$-Stetigkeit von φ folgt die $(\kappa_E\times\kappa_F, \kappa(\kappa_E\otimes\kappa_F))$-Stetigkeit und damit $\kappa(\kappa_E\otimes\kappa_F)\leqslant\kappa_E\underset{c}{\otimes}\kappa_F$.

2.3.9 SATZ: *Sind* $(E,\lambda_E)=\operatorname{ind}_{a\in A}(E_a,\kappa_a)$ *und* $(F,\lambda_F)=\operatorname{ind}_{b\in B}(F_b,\kappa_b)$ *Marinescu-Räume, so gibt es unter allen Marinescu-Limitierungen auf* $E\otimes F$, *für welche* $\varphi: E\to E\otimes F$ *stetig ist, eine feinste* λ^M.

Für jeden Marinescu-Raum (G,λ_G) *gilt: Eine bilineare Abbildung* $u: E\times F\to G$ *ist genau dann* $(\lambda_E\times\lambda_F,\lambda_G)$*-stetig, wenn ihre assoziierte lineare Abbildung* $\hat{u}: E\otimes F\to G$ (λ^M,λ_G)*-stetig ist.*

Beweis: Man zeigt genau wie in (2.3.6), dass $\operatorname{ind}_{A\times B}(\kappa_a\underset{c}{\otimes}\kappa'_b)$ auf $E\otimes F$ existiert. Dieser induktive Limes ist gerade unser gesuchtes λ^M, wie aus den universellen Eigenschaften induktiver Limites und projektiver Tensorprodukttopologien sofort folgt.

Für lokalkonvexe VR (G,κ_G) und (H,κ_H) ist die projektive Tensorprodukttopologie $\kappa_G\underset{c}{\otimes}\kappa_H$ nach (2.2.7) sogar die feinste Marinescu-Limitierung auf $G\otimes H$, für welche $G\times H\to G\otimes H$ stetig ist. Wir schreiben aus diesem Grunde für Marinescu-Räume (E,λ_E) und (F,λ_F) für die Limitierung λ^M aus (2.3.9) $\lambda_E\underset{c}{\otimes}\lambda_F$.

Aus der Konstruktion von $\lambda_E\underset{c}{\otimes}\lambda_F$ folgt mit (2.2.1) und (2.3.8):

2.3.10 KOROLLAR: *Für Marinescu-Räume* (E,λ_E) *und* (F,λ_F) *besitzen die beiden*

Tensorproduktlimitierungen $\lambda_E \otimes \lambda_F$ *und* $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F$ *dieselbe assoziierte lokalkonvexe Topologie.*

Diese ist aber nicht notwendig mit $\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F)$ identisch, siehe unten!

Wenn (E, λ_E) und (F, λ_F) Limesvektorräume mit $E \neq \{0\}$ und $F \neq \{0\}$ sind, so folgt aus der Separiertheit von $\lambda_E \otimes \lambda_F$ immer die Separiertheit von λ_E und λ_F. Denn ist z.B. λ_E nicht separiert, $\Phi \in \lambda_E(x) \cap \lambda_E(0)$ mit $x \neq 0$ also möglich, so ist $\Phi \otimes \psi \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0) \cap (\lambda_E \otimes \lambda_F)(x \otimes y)$ für jedes $y \in F$ und jeden Filter $\psi \in \lambda_F(y)$. Also ist auch $\lambda_E \otimes \lambda_F$ nicht separiert. Es ist jedoch eine offene Frage, ob aus der Separiertheit von λ_E und λ_F auch die Separiertheit von $\lambda_E \otimes \lambda_F$ folgt. Allerdings gilt:

2.3.11 SATZ: *Für Marinescu-Räume* (E, λ_E) *und* (F, λ_F) *mit* $E \neq \{0\}$ *und* $F \neq \{0\}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) λ_E *und* λ_F *sind separiert.*

(2) $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F$ *ist separiert.*

(3) $\lambda_E \otimes \lambda_F$ *ist separiert.*

Beweis: (1)$\Leftrightarrow$(2), weil diese Aussagen nach [7] für lc. VR gleichwertig sind und (1.2.2) gilt. (2)$\Rightarrow$(3) folgt wegen $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F \leqslant \lambda_E \otimes \lambda_F$. Aus der oben gemachten Bemerkung folgt schliesslich: (3)$\Rightarrow$(1).

2.3.12 SATZ: *Es seien* $(E_i, \lambda_i) = \operatorname{ind}_{a_i \in A_i} (E_{a_i}, \kappa_{a_i})$, $i = 1, 2$, *Marinescu-Räume. Auf* $E_1 \otimes E_2$ *gibt es genau dann eine VR-Topologie feiner als* $\lambda_1 \underset{c}{\otimes} \lambda_2$, *wenn es auf jedem* E_i *eine VR-Topologie feiner als* λ_i *gibt.*

Beweis: Auf $E_1 \otimes E_2$ gibt es genau dann eine VR-Topologie feiner als $\lambda_1 \underset{c}{\otimes} \lambda_2$, wenn $E_{a_1} \otimes E_{a_2} = E_1 \otimes E_2$ für ein $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ erfüllt ist. Das ist jedoch genau dann wahr, wenn $E_{a_1} = E_1$ und $E_{a_2} = E_2$ gilt, wenn es also auf E_1 und E_2 VR-Topologien feiner als λ_1 bzw. λ_2 gibt.

Lässt eine der Marinescu-Limitierungen λ_1, λ_2 also keine feinere VR-Topologie zu, so sind $\lambda_1 \underset{c}{\otimes} \lambda_2$ und $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ keine Topologien.

(E_1, λ_1) und (E_2, λ_2) seien beliebige LVR. Es liegt die Vermutung nahe, dass die zu $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ assoziierte lc. Topologie auf $E_1 \otimes E_2$ gerade $\kappa(\lambda_1) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_2)$ ist. Trivialerweise gilt $\kappa(\lambda_1) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_2) \leqslant \kappa(\lambda_1 \otimes \lambda_2)$, das Gleichheitszeichen ist jedoch schon für Marinescu-Räume falsch. Würde es nämlich gelten, so könnte man folgern, dass für einen lc. VR (F, κ_F) eine bilineare Abbildung $E_1 \times E_2 \to F$ genau dann $(\lambda_1 \times \lambda_2, \kappa_F)$-stetig ist, wenn sie $(\kappa(\lambda_1) \times \kappa(\lambda_2), \kappa_F)$-stetig ist. In (3.2.4) werden wir zeigen, dass diese Aussage für Marinescu-Räume nicht richtig sein muss. In dem dort angegebenen Gegenbeispiel ist übrigens auch $\kappa(\lambda_1 \otimes \lambda_2) \not\leqslant \kappa(\lambda_1) \otimes \kappa(\lambda_2)$.

Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen kann man jedoch die Stetigkeit

linearer und bilinearer Abbildungen zwischen Marinescu-Räumen vollständig mit Hilfe der assoziierten lc. Topologien zu den vorliegenden Limitierungen ausdrücken. In Anlehnung an die bekannte Terminologie bei lc. Räumen führen wir dazu die folgenden Bezeichnungen ein:

(E, λ_E) sei ein Marinescu-Raum, wobei $\lambda_E = \operatorname{ind}_{n \in \mathbf{N}} \kappa_n$ ein strikter induktiver Limes einer Folge $(\kappa_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von lc. Topologien ist. Sind alle κ_n Fréchet-Topologien oder Normtopologien oder Banach-Topologien, so nennen wir (E, λ_E) einen *LF-Raum*, einen *LN-Raum* oder einen *LB-Raum*. Man beachte aber, dass es sich um Limesvektorräume handelt.

A. GROTHENDIECK beweist in [7], Intr. IV, dass eine lineare Abbildung von einem Fréchet-Raum (E, κ_E) in einen LF-Raum $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{n \in \mathbf{N}}(F_n, \kappa_n)$ genau dann $(\kappa_E, \kappa(\lambda_F))$-stetig ist, wenn es ein $n \in \mathbf{N}$ gibt, so dass $u(E) \subset F_n$ gilt und die durch u bestimmte Abbildung $E \to F_n$ (κ_E, κ_n)-stetig ist. Offenbar genügt es, nur die Metrisierbarkeit der lc. Topologie κ_E zu verlangen. Mit dieser Aussage beweisen wir:

2.3.13 SATZ: *In den Marinescu-Räumen* $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E, \kappa_a)$ *und* $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \kappa_b')$ *seien die lc. Topologien* κ_a *und* κ_b' *metrisierbar. Für jeden LF-Raum* $(G, \lambda_G) = \operatorname{ind}_{n \in \mathbf{N}}(G_n, \kappa_n'')$ *gilt:*

Eine bilineare Abbildung $u: E \times F \to G$ *ist genau dann* $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$*-stetig, wenn sie* $(\lambda_E \times \lambda_F, \kappa(\lambda_G))$*-stetig ist.*

Beweis: Aus der $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-Stetigkeit von u folgt natürlich die $(\lambda_E \times \lambda_F, \kappa(\lambda_G))$-Stetigkeit. Für die Umkehrung beachten wir, dass mit κ_a und κ_b' auch $\kappa_a \underset{c}{\otimes} \kappa_b'$ metrisierbar ist. Sei also u $(\lambda_E \times \lambda_F, \kappa(\lambda_G))$-stetig. Dann ist für jedes $(a, b) \in A \times B$ die Restriktion u_{ab} von u auf $E_a \times F_b$ eine $(\kappa_a \times \kappa_b', \kappa(\lambda_G))$-stetige bilineare Abbildung. Es gibt dann ein $n \in \mathbf{N}$, so dass die zu u_{ab} assoziierte lineare Abbildung $\hat{u}_{ab}$ mit einer $(\kappa_a \underset{c}{\otimes} \kappa_b', \kappa_n'')$-stetigen linearen Abbildung $E_a \otimes F_b \to G_n$ identifiziert werden kann. Daraus folgt die $(\kappa_a \times \kappa_b', \lambda_G)$-Stetigkeit von u_{ab} für jedes $(a, b) \in A \times B$ und damit die $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-Stetigkeit von u.

Speziell gilt (2.3.13) für bilineare Abbildungen zwischen LF-Räumen. Ausserdem gilt sie natürlich analog für lineare Abbildungen. Für solche hat man zusammen mit (2.1.2):

2.3.14 SATZ: *Eine lineare Abbildung von einem Marinescu-Raum* $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ *mit metrisierbaren Topologien* κ_a *in einen LF-Raum* (F, λ_F) *ist genau dann* (λ_E, λ_F)*-stetig, wenn sie* $(\kappa(\lambda_E), \kappa(\lambda_F))$*-stetig ist.*

(2.3.14) gilt insbesondere für lineare Abbildungen zwischen LF-Räumen.

Aus [7] übernehmen wir einen weiteren Satz (§ 1, n° 3, Korollar der Proposition 6):

2.3.15 SATZ: $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ *sei ein Marinescu-Raum, so dass* $\kappa(\lambda_E)$ *separiert ist.* (F, κ_F) *sei ein lc. VR. Ist* (F, κ_F) *normierbar oder A abzählbar und* (F, κ_F) *ein (DF)-Raum, so gilt:*

$$\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa_F = \operatorname{cind}_{a \in A} (\kappa_a \underset{c}{\otimes} \kappa_F).$$

Die Definition von (DF)-Räumen findet man z.B. in [10]. Wir benötigen hier aber nur, dass für einen LN-Raum (G, λ_G) die assoziierte lokalkonvexe Topologie $\kappa(\lambda_G)$ vom Typ (DF) ist.

2.3.16 SATZ: *Für LN-Räume* $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{i \in \mathbf{N}}(E_i, \kappa_i)$ *und* $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{j \in \mathbf{N}}(F_j, \kappa_j')$ *gilt:*

$$\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F) = \kappa(\lambda_E \otimes \lambda_F).$$

Beweis: Verwendet werden (2.3.15), (2.2.1) und (2.3.10):

$$\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F) = \operatorname{cind}_{i \in \mathbf{N}} (\kappa_i \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F)) = \kappa(\operatorname{ind}_{i \in \mathbf{N}} (\operatorname{cind}_{j \in \mathbf{N}} (\kappa_i \underset{c}{\otimes} \kappa_j'))) = \kappa(\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F)$$
$$= \kappa(\lambda_E \otimes \lambda_F).$$

2.3.17 KOROLLAR: *Sind* (E, λ_E) *und* (F, λ_F) *LN-Räume und* (G, κ_G) *ein lc. VR, so ist eine bilineare Abbildung* $E \times F \to G$ *genau dann* $(\lambda_E \times \lambda_F, \kappa_G)$*-stetig, wenn sie* $(\kappa(\lambda_E) \times \kappa(\lambda_F), \kappa_G)$*-stetig ist.*

Und zusammen mit (2.3.13) erhalten wir daraus:

2.3.18 KOROLLAR: *Sind* (E, λ_E) *und* (F, λ_F) *LN-Räume und* (G, λ_G) *ein LF-Raum, so ist eine bilineare Abbildung* $E \times F \to G$ *genau dann* $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$*-stetig, wenn sie* $(\kappa(\lambda_E) \times \kappa(\lambda_F), \kappa(\lambda_G))$*-stetig ist.*

(2.3.18) gilt insbesondere für bilineare Abbildungen zwischen LB-Räumen.

Die hier für den Fall von zwei Limesvektorräumen (Marinescu-Räumen) durchgeführte Konstruktion von VR-Limitierungen auf dem Tensorprodukt der vorgelegten Räume kann ohne weiteres auf eine beliebige endliche Familie von Limesvektorräumen (Marinescu-Räumen) übertragen werden. Es gelten dann weiterhin alle Aussagen dieses Abschnittes.

3. Marinescu-Limitierungen auf Räumen stetiger multilinearer Abbildungen

Für separierte lc. VR (E, κ_E) und (F, κ_F) hat H. H. KELLER (vgl. [8] und [9]) den Raum $\mathscr{L}^n(E, F)$ aller stetigen n-fach linearen Abbildungen $E^n \to F$ mit einer Marinescu-Limitierung versehen, die gewisse, für die Begründung einer Differentialrechnung wünschenswerte Eigenschaften besitzt. Ohne Schwierigkeiten kann man bei dieser Konstruktion E^n durch ein kartesisches Produkt $\prod_{i=1}^{n} E_i$ beliebiger separierter lc.

VR (E_i, κ_i) ersetzen. Auf dem Raum $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ der stetigen n-fach linearen Abbildungen $\prod E_i \to F$ gibt es stets eine Marinescu-Limitierung mit den gewünschten Eigenschaften.

Sind die E_i nicht normierbar, so ist diese Limitierung keine Topologie, und es gibt auf $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ auch keine VR-Topologie, welche alle geforderten Eigenschaften hat. Die Begründung einer Differentialrechnung für lc. VR scheint also im Rahmen der lc. VR nicht ohne weiteres möglich zu sein. Die Tatsache, dass man durch ein Ausweichen auf Marinescu-Räume jedoch weiterkommen kann, lässt die Vermutung zu, dass man allgemeiner in der Kategorie der Marinescu-Räume eine Differentialrechnung begründen könnte, wenn es gelänge, für Marinescu-Räume (F, λ_F), (E_i, λ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, den Raum $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ der stetigen n-fach linearen Abbildungen $\prod E_i \to F$ mit einer Marinescu-Limitierung zu versehen, welche allen Forderungen aus [9] genügt.

Wir konstruieren diese Limitierung zunächst im Falle $n=1$ und übertragen sie dann mit Hilfe des Tensorproduktes auf Räume stetiger multilinearer Abbildungen.

3.1 *Die Limitierung* Λ^{EF}

Für *beliebige* LVR (E, λ_E) und (F, λ_F) seien $\mathscr{L}(E, F)$ der Raum aller (λ_E, λ_F)-stetigen linearen Abbildungen $E \to F$ und $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$ der Raum aller $(\kappa(\lambda_E), \kappa(\lambda_F))$-stetigen linearen Abbildungen $E \to F$. Wegen (2.1.2) ist $\mathscr{L}(E, F)$ immer linearer Teilraum von $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$. Gleichheit hat man z.B. im Falle $E = \mathbf{R}$, weil dann $\mathscr{L}(\mathbf{R}, F)$ aus allen linearen Abbildungen $\mathbf{R} \to F$ besteht. Gilt $\lambda_F = \kappa(\lambda_F)$ oder sind (E, λ_E) und (F, λ_F) LF-Räume, so hat man ebenfalls $\mathscr{L}(E, F) = \hat{\mathscr{L}}(E, F)$, vgl. (2.3.14).

Auf $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$ konstruiert man nach [8] wie folgt eine Marinescu-Limitierung, vgl. auch [11]:

Es seien S_E bzw. S_F definierende Seminormenfamilien in $(E, \kappa(\lambda_E))$ bzw. $(F, \kappa(\lambda_F))$, davon S_E gerichtet. Eine lineare Abbildung $u: E \to F$ ist genau dann $(\kappa(\lambda_E), \kappa(\lambda_F))$-stetig, wenn es eine Abbildung $t: S_F \to S_E$ gibt, so dass

$$|u|_{q, t(q)} := \sup \{ |u(x)|_q \mid x \in E, |x|_{t(q)} \leqslant 1 \} < \infty \; \forall \, q \in S_F .$$

($|x|_{t(q)} := t(q)(x)$, usw.). Mit S_E ist die Menge T aller Abbildungen $S_F \to S_E$ in natürlicher Weise gerichtet. Für jedes $t \in T$ ist

$$\hat{\mathscr{L}}_t(E, F) := \{ u \in \hat{\mathscr{L}}(E, F) \mid |u|_{q, t(q)} < \infty \; \forall \, q \in S_F \}$$

ein linearer Teilraum von $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$; die $\hat{\mathscr{L}}_t(E, F)$ überdecken $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$. Für $(t, q) \in T \times S_F$ definiert die Zuordnung $u \mapsto |u|_{q, t(q)}$ eine Seminorm s_q in $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$; die Familie $\{ s_q \mid q \in S_F \}$ ist dann definierende Seminormenfamilie für eine lc. Topologie $\hat{\kappa}_t$ von $\hat{\mathscr{L}}_t(E, F)$. Für $t \leqslant t'$ ist noch $(\hat{\mathscr{L}}_t(E, F), \hat{\kappa}_t) \prec (\hat{\mathscr{L}}_{t'}(E, F), \hat{\kappa}_{t'})$, so dass der induktive

Limes

$$\hat{\Lambda}^{EF} := \operatorname*{ind}_{t \in T} \hat{\kappa}_t$$

auf $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$ existiert. Die Marinescu-Limitierung $\hat{\Lambda}^{EF}$ ist separiert, wenn $\kappa(\lambda_F)$ separiert ist. Sie wird durch $\kappa(\lambda_E)$ und $\kappa(\lambda_F)$ eindeutig bestimmt und ist nicht etwa abhängig von der speziellen Wahl der definierenden Seminormenfamilien S_E und S_F. Die von $\hat{\Lambda}^{EF}$ auf $\mathscr{L}(E, F)$ induzierte Limitierung bezeichnen wir mit Λ^{EF}. Sie ist nach (2.2.4) ebenfalls eine Marinescu-Limitierung. Aus [8], Satz 9, folgt:

3.1.1 SATZ: *Für LVR $(E, \lambda_E), (F, \lambda_F)$ und (G, λ_G) ist die kanonische Abbildung $\pi: \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G) \to \mathscr{L}(E, G)$ $(\Lambda^{EF} \times \Lambda^{FG}, \Lambda^{EG})$-stetig.*

3.1.2 KOROLLAR: *Es seien $(E, \lambda), (E_1, \lambda_1)$ und (E_2, λ_2) LVR, so dass $(E_1, \lambda_1) \prec (E_2, \lambda_2)$. Dann sind die kanonischen Abbildungen $\mathscr{L}(E, E_1) \to \mathscr{L}(E, E_2)$ und $\mathscr{L}(E_2, E) \to \mathscr{L}(E_1, E)$ $(\Lambda^{EE_1}, \Lambda^{EE_2})$-stetig bzw. $(\Lambda^{E_2E}, \Lambda^{E_1E})$-stetig.*

Unter einer *Limesalgebra* verstehen wir einen Limesraum (A, λ) bestehend aus einer **R**-Algebra A und einer Limitierung λ auf A, so dass die algebraischen Operationen von A stetig sind.

3.1.3 KOROLLAR: *Für jeden LVR (E, λ_E) ist $(\mathscr{L}(E, E), \Lambda^{EE})$ eine Limesalgebra.*

3.2 *Die Limitierung Δ^{EF}*

In diesem Abschnitt seien $(E, \lambda_E) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ und $(F, \lambda_F) = \operatorname*{ind}_{b \in B}(F_b, \kappa'_b)$ Marinescu-Räume. Die Marinescu-Limitierungen $\Lambda^{E_aF_b} (= \hat{\Lambda}^{E_aF_b})$ auf $\mathscr{L}(E_a, F_b)$ $(= \hat{\mathscr{L}}(E_a, F_b))$ bezeichnen wir mit Λ^{ab}. Wir wollen aus den Λ^{ab} in natürlicher Weise eine Marinescu-Limitierung Δ^{EF} auf $\mathscr{L}(E, F)$ konstruieren und zeigen, dass diese nicht mit der Marinescu-Limitierung Λ^{EF} übereinstimmen muss.

Bei festem $a \in A$ ist $\mathscr{L}(E_a, F_b)$ für jedes $b \in B$ identifizierbar mit einem linearen Teilraum von $\mathscr{L}(E_a, F)$. Aus der Bemerkung im Anschluss an (2.2.7) folgt $\mathscr{L}(E_a, F) = \bigcup_{b \in B} \mathscr{L}(E_a, F_b)$. Für $b \leqslant b'$ hat man nach (3.1.2) $(\mathscr{L}(E_a, F_b), \Lambda^{ab}) \prec (\mathscr{L}(E_a, F_{b'}), \Lambda^{ab'})$. Auf $\mathscr{L}(E_a, F)$ gibt es also eine VR-Limitierung Δ^a, so dass

$$(\mathscr{L}(E_a, F), \Delta^a) = \operatorname*{ind}_{b \in B} (\mathscr{L}(E_a, F_b), \Lambda^{ab}).$$

Nach (2.2.10) ist Δ^a eine Marinescu-Limitierung.

Jetzt betrachten wir die Familie $((\mathscr{L}(E_a, F), \Delta^a))_{a \in A}$. Für $a \leqslant a'$ und jedes $b \in B$ hat man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_{a'}, F) & \xrightarrow{\theta_{a\,a'}} & \mathscr{L}(E_a, F) \\ {\scriptstyle i_b}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j_b} \\ \mathscr{L}(E_{a'}, F_b) & \xrightarrow[\theta^b_{a\,a'}]{} & \mathscr{L}(E_a, F_b) \end{array}$$

Darin sind i_b, j_b, $\theta_{aa'}$, $\theta^b_{aa'}$ die kanonischen Abbildungen. Jedes $\theta^b_{aa'}$ ist $(\Lambda^{a'b}, \Lambda^{ab})$-stetig nach (3.1.2). Aus der universellen Eigenschaft von $\Delta^{a'}$ folgt daher die $(\Delta^{a'}, \Delta^a)$-Stetigkeit von $\theta_{aa'}$. Eine lineare Abbildung $E \to F$ gehört genau dann zu $\mathscr{L}(E, F)$, wenn für jedes $a \in A$ ihre Restriktion auf E_a zu $\mathscr{L}(E_a, F)$ gehört. Für jedes $a \in A$ ist θ_{aa} die Identität von $\mathscr{L}(E_a, F)$, und für $a \leqslant a' \leqslant a''$ gilt stets $\theta_{aa''} = \theta_{aa'} \circ \theta_{a'a''}$. Ausserdem sind alle Abbildungen linear. Auf $\mathscr{L}(E, F)$ existiert also eine VR-Limitierung Δ^{EF}, so dass

$$(\mathscr{L}(E, F), \Delta^{EF}) = \operatorname*{proj}_{a \in A} (\mathscr{L}(E_a, F), \Delta^a)$$

bezüglich der $\theta_{aa'}$ in der Kategorie der Marinescu-Räume gilt, siehe (2.2.6). Sie stimmt mit Λ^{EF} überein, wenn $\lambda_E = \kappa(\lambda_E)$ und $\lambda_F = \kappa(\lambda_F)$ gilt.

3.2.1 SATZ: *Seien (E, κ_E) ein lc. VR und (F, λ_F) ein Marinescu-Raum. Dann gilt für die beiden Marinescu-Limitierungen Λ^{EF} und Δ^{EF} von $\mathscr{L}(E, F)$:*

$$\Lambda^{EF} \leqslant \Delta^{EF}$$

Der Beweis ergibt sich aus (3.1.2) und der universellen Eigenschaft induktiver Limites. Das Gleichheitszeichen muss in (3.2.1) jedoch nicht immer richtig sein:

3.2.2 GEGENBEISPIEL 1: X sei ein lokalkompakter topologischer Raum, nicht kompakt, jedoch abzählbar im Unendlichen. $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sei eine offene Überdeckung von X, so dass $K_n := \bar{Q}_n$ kompakt und echt in Q_{n+1} enthalten ist für jedes $n \in \mathbf{N}$. Der VR aller reellwertigen stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger sei E, der lineare Unterraum aller Funktionen aus E mit Träger in K_n sei E_n. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist E_n linearer Teilraum von E_{n+1}, ferner ist $E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n$.

Es ist jedoch $E_n \neq E$ für jedes $n \in \mathbf{N}$. In der Alexandroff'schen Kompaktifizierung X^* von X sind nämlich alle K_n und ${}^cQ_n$ (Komplement von Q_n in X^*) abgeschlossen. Für festes $n \in \mathbf{N}$ sind also insbesondere die disjunkten Mengen $S := K_{n+2} \cap {}^cQ_{n+1}$ und $R := K_n \cup {}^cQ_{n+3}$ abgeschlossen in X^*. Es gibt daher eine stetige Funktion $f^* : X^* \to [0, 1]$, die S und R trennt. Der Träger T^* von f^* liegt in K_{n+3}, ist kompakt und zugleich Träger der Restriktion f von f^* auf X. Es ist also $f \in E$, aber $f \notin E_n$.

κ_u sei die Topologie der uniformen Konvergenz auf E, wir schreiben E_u für (E, κ_u). Die von κ_u auf E_n induzierte Topologie heisse κ_n, $n \in \mathbf{N}$. Den Raum der (κ_u, κ_n)-stetigen linearen Abbildungen $E \to E_n$ nennen wir $\mathscr{L}(E_u, E_n)$, den Raum der (κ_u, λ)-stetigen Endomorphismen von E nennen wir $\mathscr{L}(E_u, E)$. Dabei ist $\lambda := \operatorname{ind}_{n \in \mathbf{N}} \kappa_n$ keine Topologie auf E. Die Marinescu-Limitierungen $\Lambda^{E_u E}$ bzw. $\Lambda^{E_u E_n}$ auf $\mathscr{L}(E_u, E)$ bzw. $\mathscr{L}(E_u, E_n)$ sind wegen der Normierbarkeit von E_u nach [8] Topologien. Der induktive Limes $\Delta^{E_u E}$ der $\Lambda^{E_u E_n}$ ist aber keine Topologie, denn für jedes $n \in \mathbf{N}$ zeigt man sehr leicht $\mathscr{L}(E_u, E_n) \neq \mathscr{L}(E_u, E)$.

Ein weiteres einfacheres Gegenbeispiel hierzu geben wir im Anschluss an (3.3.8).

3.2.3 SATZ: *Sind (E, λ_E) ein Marinescu-Raum und (F, κ_F) ein lc. VR, so gilt für die beiden Marinescu-Limitierungen Λ^{EF} und Δ^{EF} auf $\mathscr{L}(E, F)$:*

$$\Delta^{EF} \leqslant \Lambda^{EF}.$$

Der Beweis ergibt sich diesmal aus der universellen Eigenschaft projektiver Limites und (3.1.2). Aber auch hier ist das Gleichheitszeichen nicht immer richtig. Das folgende Gegenbeispiel zeigt ausserdem, dass man für LVR (E, λ_E), (F, λ_F), (G, λ_G) aus der $(\lambda_E \times \lambda_F, \kappa(\lambda_G))$-Stetigkeit einer bilinearen Abbildung $E \times F \to G$ nicht notwendig auf deren $(\kappa(\lambda_E) \times \kappa(\lambda_F), \kappa(\lambda_G))$-Stetigkeit schliessen kann; vergleiche die Bemerkung im Anschluss an (2.3.12).

3.2.4 GEGENBEISPIEL 2: (E, κ) sei ein separierter lc. VR mit gerichteter definierender Seminormenfamilie S und nicht normierbar. Wir versehen den Raum $E' := \mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ mit der Marinescu-Limitierung $\Lambda' := \Lambda^{E\mathbf{R}}$ und können schreiben

$$(E', \Lambda') = \operatorname*{ind}_{s \in S}(E'_s, \kappa'_s),$$

siehe (3.1). Nach [8] ist Λ' keine Topologie, und es gibt auf E' auch keine feinere VR-Topologie. Das Skalarprodukt $w: E \times E' \to \mathbf{R}$ ist eine $(\kappa \times \Lambda', \tau_{\mathbf{R}})$-stetige Bilinearform, und Λ' ist die gröbste unter allen Marinescu-Limitierungen auf E', für welche w stetig ist. Insbesondere ist also w nicht $(\kappa \times \kappa(\Lambda'), \tau_{\mathbf{R}})$-stetig.

Den Raum $E'' := \mathscr{L}(E', \mathbf{R})$ (E' trägt die Limitierung Λ') versehen wir mit den Marinescu-Limitierungen $\Delta := \Delta^{E'\mathbf{R}}$ und $\Lambda'' := \Lambda^{E'\mathbf{R}}$. Um $\Delta \neq \Lambda''$ zu zeigen, konstruieren wir eine lineare Abbildung $E \to E''$, die (κ, Δ)-stetig aber nicht (κ, Λ'')-stetig ist. Wir machen dabei Gebrauch von den Resultaten und der Schreibweise von (3.3). Nach (3.3.9) definiert die Zuordnung $f \mapsto \tilde{f}$ einen linearen Isomorphismus $\mathscr{L}(E, E'') \to \mathscr{L}(E, E'; \mathbf{R})$, dabei trägt E'' die Limitierung Δ, und $\tilde{f}$ ist die aus f entwickelte bilineare Abbildung. Insbesondere gibt es zum $(\kappa \times \Lambda', \tau_{\mathbf{R}})$-stetigen Skalarprodukt w eine (κ, Δ)-stetige lineare Abbildung $v: E \to E''$, so dass $w = \tilde{v}$. Wäre nun $\Delta = \Lambda''$, so wäre v auch (κ, Λ'')-stetig, woraus die $(\kappa \times \kappa(\Lambda'), \tau_{\mathbf{R}})$-Stetigkeit von w nach [8] folgte: Widerspruch!

Ein einfacheres Gegenbeispiel erhält man mit Hilfe der *bornologischen Räume*, vgl. [10]. Es sei $(E, \kappa(\lambda_E))$ ein nicht normierbarer bornologischer Raum, d.h. (E, λ_E) ist darstellbar als induktiver Limes normierbarer Räume: $(E, \lambda_E) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$. Auf $\mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ ist die Limitierung $\Lambda^{E\mathbf{R}}$ keine Topologie und lässt auch keine feinere VR-Topologie zu. Für jedes $a \in A$ ist jedoch $\Lambda^{E_a\mathbf{R}}$ auf $\mathscr{L}(E_a, \mathbf{R})$ gerade die starke Topologie, wegen (1.2.7) ist also $\Delta^{E\mathbf{R}} = \operatorname*{proj}_{a \in A} \Lambda^{E_a\mathbf{R}}$ eine Topologie auf $\mathscr{L}(E, \mathbf{R})$.

3.2.5 SATZ: *Für Marinescu-Räume (E, λ_E), (F, λ_F) und (G, λ_G) ist die kanonische Abbildung*

$$\pi: \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G) \to \mathscr{L}(E, G)$$

$(\Delta^{EF} \times \Delta^{FG}, \Delta^{EG})$-stetig.

Beweis: Mit $(E, \lambda_E)=\operatorname{ind}_{a\in A}(E_a, \kappa_a)$, $(F, \lambda_F)=\operatorname{ind}_{b\in B}(F_b, \kappa'_b)$ und $(G, \lambda_G)=\operatorname{ind}_{c\in C}(G_c, \kappa''_c)$ ergibt sich der Beweis aus (3.1.1) und dem folgenden Diagramm natürlicher Abbildungen, welches für jedes Tripel $(a, b, c)\in A\times B\times C$ kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}(E_a, F_b)\times\mathscr{L}(F_b, G_c) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_a, G_c) \\
\downarrow & & \\
\mathscr{L}(E_a, F_b)\times\mathscr{L}(F_b, G) & \longrightarrow & \downarrow \\
\uparrow & & \\
\mathscr{L}(E_a, F_b)\times\mathscr{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_a, G) \\
\downarrow & & \uparrow \\
\mathscr{L}(E_a, F)\times\mathscr{L}(F, G) & \longrightarrow & \\
\uparrow & & \\
\mathscr{L}(E, F)\times\mathscr{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, G)
\end{array}$$

3.2.6 KOROLLAR: *Für jeden Marinescu-Raum* (E, λ_E) *ist* $(\mathscr{L}(E, E), \Delta^{EE})$ *eine Limesalgebra.*

3.3 *Evaluation und Limitierung der stetigen Konvergenz*

$(E_i, \lambda_i)=\operatorname{ind}_{a_i\in A_i}(E_{a_i}, \kappa_{a_i})$, $1\leqslant i\leqslant n$, und $(F, \lambda_F)=\operatorname{ind}_{b\in B}(F_b, \kappa'_b)$ seien Marinescu-Räume. Die Räume $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ und $\mathscr{L}(\bigotimes_{i=1}^{n} E_i, F)$ sind kanonisch isomorph, wenn man $\otimes E_i$ mit einer der in (2.3) konstruierten VR-Limitierungen $\otimes\lambda_i$ bzw. $\underset{c}{\otimes}\lambda_i$ versieht. *Wir wollen in diesem Abschnitt immer die Marinescu-Limitierung* $\underset{c}{\otimes}\lambda_i$ auf $\otimes E_i$ *verwenden.*

Für jedes $(a_i)\in\prod A_i$ und jedes $b\in B$ hat man analog die kanonischen Isomorphien $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b)\cong\mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F_b)$ und $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)\cong\mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F)$, wobei wir $\otimes E_{a_i}$ mit der lc. Topologie $\underset{c}{\otimes}\kappa_{a_i}$ versehen. Die Marinescu-Limitierungen $\Lambda^{\otimes E_{a_i} F_b}$, $\Delta^{\otimes E_{a_i} F}$, $\Delta^{\otimes E_i F}$ auf $\mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F_b)$, $\mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F)$, $\mathscr{L}(\otimes E_i, F)$ bezeichnen wir mit Λ^{ab}, Δ^a und Δ. Mit Hilfe der Isomorphismen können wir sie auf $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b)$, $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$ und $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ übertragen; wir bezeichnen sie dort der Reihe nach wieder mit Λ^{ab}, Δ^a, Δ.

Es wäre selbstverständlich möglich, Λ^{ab}, Δ^a und Δ auf den Räumen $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b)$, $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$, $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ nach dem Verfahren von (3.2) direkt zu konstruieren. Man kann dann aber zeigen, dass die oben angegebenen Isomorphismen sogar Homöomorphismen sind. Man vergleiche dazu [8], Satz 8.

Die *Evaluation* von $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ ist die kanonische Abbildung

$$\omega: \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)\times\prod_i E_i\to F,$$

$\omega(u, x):=u(x)$. Wir zeigen:

3.3.1 SATZ: *Die Evaluation von* $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *ist* $(\Delta \times \prod_i \lambda_i, \lambda_F)$*-stetig.*

Beweis: ω_a bzw. ω_{ab} seien die Evaluationen von $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$ bzw. $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b)$, $b \in B$, $a = (a_i) \in \prod A_i$. Mit den kanonischen Abbildungen $i_a: \prod E_{a_i} \to \prod E_i$, $i_b: F_b \to F$, $j_b: \mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b) \to \mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}, F)$ und $\theta_a: \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \to \mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$ haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \times \prod E_{a_i} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{L}} \times i_a} & \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \times \prod E_i \\
\downarrow{\scriptstyle \theta_a \times \mathrm{id}_\Pi} & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\
\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F) \times \prod E_{a_i} & \xrightarrow{\omega_a} & F \\
\uparrow{\scriptstyle j_b \times \mathrm{id}_\Pi} & & {\scriptstyle i_b}\uparrow \\
\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b) \times \prod E_{a_i} & \xrightarrow{\omega_{ab}} & F_b
\end{array}$$

Nach [8] sind die ω_{ab} $(\Lambda^{ab} \times \prod \kappa_{a_i}, \kappa_b')$-stetig. Daraus folgt über die universelle Eigenschaft induktiver Limites und die Stetigkeitseigenschaften projektiver Limites die $(\Delta \times \prod \lambda_i, \lambda_F)$-Stetigkeit von ω.

Mit Hilfe der Evaluation ω von $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ definiert man für eine Menge M und eine Abbildung $f: M \to \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *die aus* f *entwickelte Abbildung*

$$\tilde{f}: M \times \prod_i E_i \to F$$

durch $\tilde{f} := \omega \circ (f \times \mathrm{id}_E)$; dabei ist id_E die Identität von $\prod E_i$. Ferner gestattet ω die Einführung der *Limitierung* Λ^c *der stetigen Konvergenz* auf $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ durch folgende Definition (vgl. [4] und [1]):

Für ein $u \in \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *und einen Filter* Φ *auf diesem Raum gilt* $\Phi \in \Lambda^c(u)$ *genau dann, wenn* $\omega(\Phi \times \psi) \in \lambda_F(u(x))$ *für jedes* $x \in \prod E_i$ *und jeden Filter* $\psi \in (\prod \lambda_i)(x)$.

Λ^c *ist die gröbste unter allen Limitierungen* χ *auf* $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$*, für welche die Evaluation* ω $(\chi \times \prod \lambda_i, \lambda_F)$*-stetig ist. Sie ist eine VR-Limitierung und separiert, wenn* λ_F *separiert ist. Ist* (S, λ_S) *ein Limesraum, so ist eine Abbildung* $f: S \to \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *genau dann* (λ_S, Λ^c)*-stetig in* $p \in S$*, wenn für jedes* $x \in \prod E_i$ *gilt:* $\tilde{f}$ *ist* $(\lambda_S \times \prod \lambda_i, \lambda_F)$*-stetig in* (p, x).

Damit lässt sich (3.3.1) jetzt auch so aussprechen:

3.3.2 KOROLLAR: *Auf* $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *ist* Δ *feiner als* Λ^c.

3.3.3 KOROLLAR: *Mit* λ_F *ist auch* Δ *separiert.*

Λ^c und Δ sind jedoch nicht notwendig identisch, wie in [8] für lc. VR gezeigt wurde.

3.3.4 LEMMA: *Es sei* (Z, τ) *ein topologischer VR. Eine lineare Abbildung* $u: Z \to \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *ist genau dann* (τ, Δ)*-stetig, wenn sie* (τ, Λ^c)*-stetig ist.*

Beweis: Wir setzen $E := \prod E_i$, $E_a := \prod E_{a_i}$, $\lambda_E := \prod \lambda_i$, $\kappa_a := \prod \kappa_{a_i}$. Wegen $\Lambda^c \leqslant \Delta$ folgt aus der (τ, Δ)-Stetigkeit von u die (τ, Λ^c)-Stetigkeit. Ist umgekehrt u (τ, Λ^c)-

stetig, so ist $\tilde{u}$ $(\tau \times \lambda_E, \lambda_F)$-stetig. Zu jedem $a := (a_i) \in A := \prod A_i$ gibt es daher ein $b \in B$, so dass die Restriktion $(\tilde{u})_a$ von $\tilde{u}$ auf $Z \times E_a$ identifiziert werden kann mit einer $(n+1)$-linearen $(\tau \times \kappa_a, \kappa_b')$-stetigen Abbildung $Z \times E_a \to F_b$. Für (z, x) aus $Z \times E_a$ zeigt man $(\tilde{u})_a(z, x) = \omega_a \circ (\theta_a \circ u \times \mathrm{id}_{E_a})(z, x)$, dabei ist $\theta_a : \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \to \mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$ die kanonische Abbildung. Als Abbildung mit Werten in F_b identifizieren wir $\widetilde{(\theta_a \circ u)}$ mit der $(\tau \times \kappa_a, \kappa_b')$-stetigen Abbildung $\omega_{ab} \circ (\theta_a \circ u \times \mathrm{id}_{E_a})$. Nach [8], Satz 6 folgt daraus die (τ, Δ^a)-Stetigkeit der $\theta_a \circ u$ und damit die (τ, Δ)-Stetigkeit von u.

Indem wir nun die universelle Eigenschaft induktiver Limites anwenden, erhalten wir aus (3.3.4):

3.3.5 SATZ: *Es sei (Z, λ_Z) ein Marinescu-Raum (PTV-Raum). Für eine lineare Abbildung $u : Z \to \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *u ist (λ_Z, Δ)-stetig.*

(2) *u ist (λ_Z, Λ^c)-stetig.*

(3) *$\tilde{u} : Z \times \prod E_i \to F$ ist $(\lambda_Z \times \prod \lambda_i, \lambda_F)$-stetig, $\tilde{u}(z, x) = u(z)(x)$.*

3.3.6 KOROLLAR: *Ist eine Marinescu-Limitierung auf $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ feiner als Λ^c, so ist sie auch feiner als Δ. Unter allen Marinescu-Limitierungen χ auf $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, für welche die Evaluation ω $(\chi \times \prod \lambda_i, \lambda_F)$-stetig ist, ist Δ die gröbste.*

Mit (3.3.5) können wir ausserdem beweisen:

3.3.7 SATZ: *Für jeden Marinescu-Raum (E, λ_E) ist die Abbildung*

$$\gamma : \mathscr{L}(\mathbf{R}, E) \to E,$$

definiert durch $\gamma(u) := u(1)$, ein linearer $(\Delta^{\mathbf{R}E}, \lambda_E)$-Homöomorphismus.

Beweis: γ ist ein Isomorphismus der linearen Strukturen mit $\gamma^{-1}(x)(t) = t.x$ für jedes $t \in \mathbf{R}$ und jedes $x \in E$. Wir identifizieren γ mit der Restriktion der Evaluation von $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E)$ auf $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E) \times \{1\}$ und haben die $(\Delta^{\mathbf{R}E}, \lambda_E)$-Stetigkeit von γ. Die aus γ^{-1} entwickelte Abbildung $\widetilde{\gamma^{-1}} : E \times \mathbf{R} \to E$ liefert gerade die Skalarmultiplikation in E, ist also $(\lambda_E \times \tau_{\mathbf{R}}, \lambda_E)$-stetig. Aus (3.3.5) folgt daher die $(\lambda_E, \Delta^{\mathbf{R}E})$-Stetigkeit von γ^{-1}.

3.3.8 KOROLLAR: *Für einen Marinescu-Raum (E, λ_E) sind die Limitierungen $\Delta^{\mathbf{R}E}$ und $\Lambda^{\mathbf{R}E}$ auf $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E)$ dann und nur dann gleich, wenn $\lambda_E = \kappa(\lambda_E)$ gilt.*

(3.3.8) enthält das im Anschluss an (3.2.2) angekündigte Gegenbeispiel: Ist der Marinescu-Raum (E, λ_E) nicht lokalkonvex, so gilt auf $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E)$ stets $\Lambda^{\mathbf{R}E} < \Delta^{\mathbf{R}E}$.

Es seien jetzt (E, λ_E), (F, λ_F) und (E_i, λ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, Marinescu-Räume. Wir schreiben anstelle von $(\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F), \Delta)$ kurz $\mathscr{L}_\Delta(E_1, \ldots, E_n; F)$ usw.. Für (λ_E, Δ)-stetige lineare Abbildungen $u : E \to \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ vermittelt dann die Zuordnung $u \mapsto \tilde{u}$ den linearen Isomorphismus

$$\alpha : \mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\Delta(E_1, \ldots, E_n; F)) \to \mathscr{L}(E, E_1, \ldots, E_n; F).$$

Nach (3.3.5) ist noch $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_{\Delta}(E_1, \ldots, E_n; F)) = \mathscr{L}(E, \mathscr{L}_{\Delta^c}(E_1, \ldots, E_n; F))$. Damit können wir beweisen:

3.3.9 SATZ: *Der kanonische Isomorphismus α ist ein (Δ, Δ)-Homöomorphismus von $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_{\Delta}(E_1, \ldots, E_n; F))$ auf $\mathscr{L}(E, E_1, \ldots, E_n; F)$.*

Beweis: Nach [1] ist α ein linearer (Λ^c, Λ^c)-Homöomorphismus. Wegen $\Lambda^c \leqslant \Delta$ ist dann α auch (Δ, Λ^c)-stetig, also (Δ, Δ)-stetig nach (3.3.5). Analog beweist man die (Δ, Δ)-Stetigkeit von α^{-1}.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. BINZ, und H. H. KELLER, *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Ac. Sci. Fennicae, AI, *383* (1966).

[2] N. BOURBAKI, *Topologie générale* (Hermann, Paris 1961 [Act. Sci. Ind., 1142]), ch. I & II.

[3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1966 [Act. Sci. Ind., 1189]), ch. I & II.

[4] C. H. COOK, and H. R. FISCHER, *On equicontinuity and continuous convergence*, Math. Ann. *159* (1965), 94–104.

[5] H. R. FISCHER, *Limesräume*, Math. Ann. *137* (1959), 269–301.

[6] A. FRÖHLICHER, and W. BUCHER, *Calculus in vector spaces without norm*, Lecture Notes in Math. *30* (1966).

[7] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Am. Math. Soc. *16* (1955).

[8] H. H. KELLER, *Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume*, Math. Ann. *159*, 259–270 (1965).

[9] H. H. KELLER, *Über Probleme, die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten*, Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna (Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1966).

[10] G. KOETHE, *Topologische lineare Räume I*, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1966 [Grundlehren der math. Wiss., *107*]).

[11] G. MARINESCU, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions* (VEB, Deutscher Verl. der Wiss., Berlin 1963).

[12] J. WLOKA, *Limesräume und Distributionen*. Math. Ann. *152*, (1963), 351–409.

Eingegangen den 29. Januar 1968

Einige Kongruenzsätze für geschlossene k-dimensionale Flächen in n-dimensionalen Riemannschen Räumen

von HEINZ BRÜHLMANN

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, ähnliche Sätze für k-dimensionale Flächen in n-dimensionalen Riemannschen Räumen zu beweisen, wie sie von H. HOPF und K. VOSS [1] für Abbildungen von Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum, bei denen die Verbindungsgeraden Punkt – Bildpunkt untereinander parallel sind, K VOSS [2] für gleiche Abbildungen von Hyperflächen in Euklidischen Räumen und A. AEPPLI [3] für Abbildungen von Hyperflächen in Euklidischen Räumen, bei denen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte p und Bildpunkte $\bar{p}$ durch einen festen Punkt O gehen, gegeben wurden.

Der Hauptsatz in der Arbeit von H. HOPF und K. VOSS lautet folgendermassen:

F und $\bar{F}$ seien orientierte geschlossene Flächen, die unter Erhaltung der Orientierung so aufeinander abgebildet sind, dass erstens die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte p und $\bar{p}$ untereinander parallel sind, und dass zweitens F und $\bar{F}$ in je zwei entsprechenden Punkten p und $\bar{p}$ die gleiche mittlere Krümmung haben; ferner setzen wir voraus, dass die Flächen keine Zylinderstücke enthalten, deren Erzeugende parallel zu den Geraden $p\bar{p}$ sind. Dann geht $\bar{F}$ aus F durch eine Translation hervor. (d.h. die Entfernungen $p\bar{p}$ sind konstant.)

In der Arbeit von A. AEPPLI lautet die Bedingung für die mittlere Krümmung $rH=\bar{r}\bar{H}$, wobei r bzw. $\bar{r}$ den Abstand des Punktes p bzw. $\bar{p}$ von O bedeutet, während die Schlussfolgerung $\bar{r}/r=$konst. ist.

Es liegt nun nahe, zu versuchen, einen Satz zu beweisen, der diese beiden Sätze als Spezialfall enthält. Dies ist in einer Arbeit von Y. KATSURADA [4] ausgeführt worden. Zur Formulierung ihres Resultates betrachten wir eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ ($p\in R^n$, $t=$Parameter) eines Riemannschen Raumes R^n und zwei Hyperflächen F und $\bar{F}$, die unter Erhaltung der Orientierung durch $\bar{p}=\Phi(f(p),p)$ aufeinander abgebildet seien, wobei $f(p)$ eine differenzierbare Funktion auf F sei. Es sei nun $\bar{p}_0=\Phi(f(p_0),p_0)$. Der Punkt $\bar{p}_0$ liegt dann nicht nur auf der Fläche $\bar{F}$, sondern auch auf der Fläche $\tilde{F}_{p_0}$, die wir erhalten, in dem wir auf jeden Punkt $p\in F$ die Transformation $\Phi(f(p_0),p)$ anwenden. Damit liegt $\bar{p}=\Phi(f(p),p)$ auch auf der Fläche $\tilde{F}_p$. Die Bedingung $\tilde{H}=H$ bei H. HOPF und K. VOSS und $rH=\bar{r}\bar{H}$ bei A. AEPPLI lautet dann in dieser Formulierung: $\bar{H}=\tilde{H}$.

Mit diesen Definitionen lautet nun der Kongruenzsatz von Y. KATSURADA [4]:

Seien F und $\bar{F}$ zwei durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$ wie oben aufeinander abgebildete, orientierte geschlossene Hyperflächen im R^n. $S \subset F$ sei die Menge derjenigen Punkte $\bar{p}$, in denen der Tangentialvektor an die Kurve $\Phi(t, \bar{p})$ $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, im Tangentialraum von $\bar{F}$ liegt. Falls nun erstens $\bar{H} = \tilde{H}$ ist, zweitens S nirgends dicht in $\bar{F}$ liegt und drittens $\Phi(t, p)$ eine homothetische Transformationsgruppe (Verallgemeinerung der bei A. AEPPLI [3] betrachteten Abbildung, die als Spezialfall die Isometrien enthält, genaue Definition im Abschnitt 3) ist, so ist $f(p) =$ konstant.

Zur Herleitung dieses Satzes wird von der Autorin von Anfang an ein spezielles Koordinatensystem verwendet, was z.B. bei Fixpunkten der Transformationsgruppe nicht möglich ist. Auch scheint mir die Darstellung, die sich an den Ricci-Kalkül von Schouten anlehnt, ziemlich umständlich.

Zur Herleitung des oben formulierten Kongruenzsatzes benötigen wir in dieser Arbeit eine Integralformel, die wir mit Hilfe einer Methode herleiten, die in jedem Punkt der Fläche ein spezielles orthonormiertes n-Bein benützt, und zwar so, dass e_n, der n-te Vektor des n-Beins, senkrecht zur Fläche steht, also mit der Flächennormale zusammenfällt. Sodann benützen wir eine von H. FLANDERS [5] gegebene Verallgemeinerung des äusseren Differentialoperators auf Tensoren, die sowohl in den kovarianten als auch in den kontravarianten Indizes schiefsymmetrisch sind. Die Indizes der Tensoren werden immer bezüglich des speziell gewählten n-Beins von Vektoren und des dazu dualen n-Beins von 1-Formen geschrieben; dabei brauchen wir zur Herleitung der Integralformel diese Indizes, in der Schlussformel erscheinen aber keine Indizes mehr.

In einer Arbeit von R. E. STONG [6] wurde der Kongruenzsatz für geschlossene k-dimensionale Flächen im n-dimensionalen Euklidischen Raum und Abbildungen wie bei H. HOPF und K. VOSS [1] und A. AEPPLI [3] bewiesen. Mit Hilfe des oben erwähnten Formalismus konnte ich nun den Satz von Y. KATSURADU auf k-dimensionale geschlossene Flächen im n-dimensionalen Riemannschen Raum verallgemeinern, wobei die Bedingung für die mittlere Krümmung nun als Bedingung für die mittleren Krümmungsvektoren auftritt.

Im Abschnitt 1) werden die algebraischen, im Abschnitt 2) die analytischen Grundlagen dargelegt. Wir stützen uns dabei im wesentlichen auf die Arbeit von FLANDERS [5], doch wird der Beweis für die Existenz des erweiterten äusseren Differentialoperators nach einer anderen Methode gegeben, die lokale Koordinaten benutzt. Im Abschnitt 3) werden die Definitionen der konformen, homothetischen und isometrischen Transformationen sowie der Lie-Ableitungen zusammengestellt. Abschnitt 4) enthält den Beweis des Kongruenzsatzes für homothetische und gewisse konforme Abbildungen von Hyperflächen in Riemannschen Räumen und abschliessend wird in Abschnitt 5) der Kongruenzsatz für dieselben Abbildungen von k-dimensionalen Flächen im n-dimensionalen Riemannschen Raum formuliert und bewiesen.

1. Der Raum der (p, q)-Vektoren

Wir beginnen mit dem Tensorprodukt von reellen Vektorräumen. Falls U und V zwei Vektorräume sind, so nennen wir einen Vektorraum T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\theta: U \times V \to T$ ein Tensorprodukt von U und V, falls gilt:

a) Das Bild $\theta(U \times V)$ spannt T auf.

b) Falls $\varphi: U \times V \to W$ eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum W ist, so existiert eine lineare Abbildung $\lambda: T \to W$, so dass $\varphi = \lambda \cdot \theta$.

Durch diese beiden Bedingungen ist das Tensorprodukt zweier Vektorräume bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Auch zeigt man leicht, dass die Abbildung λ, die der bilinearen Abbildung φ nach b) zugeordnet ist, eindeutig ist.

Zum Beweis der Existenz des Tensorproduktes betrachtet man den freien Vektorraum, welcher erzeugt wird von den Elementen von $U \times V$; d.h. den Vektorraum $\bar{U}$ aller endlichen Summen der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (u_i, v_i) \quad u_i \in U, \quad v_i \in V, \quad \lambda_i = \text{reelle Zahl}.$$

$\bar{R}$ sei der Teilraum von $\bar{U}$, der erzeugt wird von folgenden Elementen:

$$\begin{gathered} \lambda(u, v) - (\lambda u, v) \\ \lambda(u, v) - (u, \lambda v) \\ (u + u', v) - (u, v) - (u', v) \\ (u, v + v') - (u, v) - (u, v') \end{gathered}$$

Der Faktorraum $T = \bar{U}/\bar{R}$ ist dann ein Tensorprodukt von U und V: $T = U \otimes V$. Falls $u \in U$, $v \in V$, so bezeichnen wir die Klasse von (u, v) in $U \otimes V$ mit $u \otimes v$ und setzen

$$\theta(u, v) = u \otimes v.$$

Dann folgt sofort, dass die Abbildung θ bilinear ist und dass $\theta(U \times V)$ den Raum $U \otimes V$ aufspannt.

Sei nun φ eine bilineare Abbildung $U \times V \to W$. Dann definieren wir eine Abbildung $\bar{\lambda}: \bar{U} \to W$, indem wir setzen

$$\bar{\lambda}(u, v) = \varphi(u, v)$$

und diese Abbildung durch Linearität auf ganz $\bar{U}$ ausdehnen. Da φ bilinear ist, folgt $\bar{\lambda}(\bar{R}) = 0$, also induziert $\bar{\lambda}$ eine lineare Abbildung λ:

$$\lambda: U \otimes V \to W, \quad \text{mit} \quad \varphi = \lambda \cdot \theta.$$

Ausser dem Tensorprodukt zweier Vektorräume benötigen wir im folgenden noch das r-fache äussere Produkt eines Vektorraumes V für $0 \leqslant r \leqslant n = \dim V$. Zur Definition des äusseren Produktes gehen wir wie beim Tensorprodukt aus von dem freien

Vektorraum $\bar{U}$, dessen Erzeugende die Elemente von $\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{r}$ sind. $\bar{R}$ ist nun der Teilraum von $\bar{U}$, erzeugt durch folgende Elemente:

$$\lambda(v_1,\ldots,v_r)-(v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots,v_r)$$
$$(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_r)-(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r)-(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_r)$$
$$(1\leqslant i\leqslant r,\quad v_i\in V,\quad \lambda=\text{reelle Zahl})$$
$$(v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_r})-\text{sign.}\,\pi(v_1,v_2,\ldots,v_r)$$

wobei sign. π das Vorzeichen derjenigen Permutation π von r Elementen ist, die $(1,2,\ldots,r)$ in $(i_1,i_2,\ldots,i_r)$ überführt. Dann bilden wir wiederum den Faktorraum

$$\bar{U}/\bar{R}=\Lambda^r V.$$

$\Lambda^r V$ wird das r-fache äussere Produkt von V genannt. Falls $(v_1,\ldots,v_v)\in V\times\cdots\times V$, so bezeichnen wir die Klasse von $(v_1,\ldots,v_r)$ in V mit $v_1\wedge\cdots\wedge v_r$ und setzen:

$$\theta(v_1,\ldots,v_r)=v_1\wedge\cdots\wedge v_r.$$

Jedem Element π der Permutationsgruppe von r Elementen ordnen wir nun eine Abbildung $\bar{\pi}:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r}\to\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r}$ zu, indem wir setzen:

$$\bar{\pi}(v_1,\ldots,v_r)=(v_{\pi(1)},v_{\pi(2)},\ldots,v_{\pi(r)}).$$

Eine Abbildung $\varphi:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r}\to W$ nennt man symmetrisch, falls $\varphi\cdot\bar{\pi}=\varphi$, und alternierend, falls $\varphi\cdot\bar{\pi}=\text{sign.}\,\pi\cdot\varphi$.

Analog zum Tensorprodukt haben wir nun für das äussere Produkt folgende charakterisierende Eigenschaften:

1) $\theta(\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r})$ spannt Λ^r auf.

2) Falls $\varphi:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r}\to W$ eine alternierende, multilineare Abbildung ist, so existiert eine und nur eine lineare Abbildung

$$\lambda:\Lambda^r V\to W\quad\text{mit}\quad\varphi=\lambda\cdot\theta.$$

Aus der Definition des äusseren Produktes $\Lambda^r V$ eines Vektorraumes V folgt nun, dass, falls $(e_1,e_2,\ldots,e_n)=$ Basis von V, die Elemente

$$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\qquad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$$

eine Basis von $\Lambda^r V$ bilden. $\Lambda^r V$ hat also die Dimension $\binom{n}{r}$ und jedes Element aus $\Lambda^r V$ lässt sich immer in der Form

darstellen.

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n}\lambda_{i_1 i_2\ldots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$$

Eine Element $\lambda \in \Lambda^r V$ lässt sich nun aber auch mit einem Element $\mu \in \Lambda^s V$ multiplizieren, das so entstehende Element $\lambda \wedge \mu$ liegt in $\Lambda^{r+s} V$ und es gilt:

$$\lambda \wedge \mu = (-1)^{rs} \mu \wedge \lambda$$

Zum Beweis dieser Tatsache betrachten wir folgende Räume und Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{(V \times \cdots \times V)}_{r} \times \underbrace{(V \times \cdots \times V)}_{s} & \xrightarrow{\theta} & \Lambda^{r+s} V \\ \downarrow \theta_1 \qquad\qquad \downarrow \theta_2 & & \\ \Lambda^r V \qquad\quad \Lambda^s V & & \end{array}$$

Da $\theta(\lambda, \mu) = 0$ für $\lambda \in \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r}$, $\mu \in \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s}$ mit $\theta_1(\lambda) = 0$ oder $\theta_2(\mu) = 0$, induziert θ eine bilineare Abbildung

$$\theta' : \Lambda^r V \times \Lambda^s V \to \Lambda^{r+s} V$$

Das Bild $\theta'(\lambda', \mu')$, $\lambda' \in \Lambda^r V$, $\mu' \in \Lambda^s V$ nenenn wir das äussere Produkt von λ' und μ':

$$\theta'(\lambda', \mu') = \lambda' \wedge \mu' .$$

Nun betrachten wir ausser dem ursprünglichen Vektorraum V noch den dualen Raum V^* und bilden die Räume

$$T_q^p = \Lambda^q V^* \otimes \Lambda^p V$$

Falls $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ die dazu duale Basis von V^* ist, so bilden die Elemente

$$\sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_q} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$$
$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leqslant n \qquad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n$$

eine Basis von T_q^p; also haben die Räume T_q^p die Dimension $\binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q}$ und jedes Element aus T_q^p hat die Form:

$$\sum \lambda_{i_1 \ldots i_q}^{j_1 \ldots j_p} \; \sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_q} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} .$$

Zur Erweiterung des oben definierten Produktes von p und q-Vektoren auf Elemente aus den Räumen T_q^p bzw. $T_{q'}^{p'}$ betrachten wir folgende Abbildung

$$f : \Lambda^q V^* \times \Lambda_p V \times \Lambda^{q'} V^* \times \Lambda^{p'} V \to \Lambda^{q+q'} V^* \otimes \Lambda^{p+p'} V$$

gegeben durch

$$f(\zeta, \eta, \zeta', \eta') = \zeta \wedge \zeta' \otimes \eta \wedge \eta' .$$
$$\zeta \in \Lambda^q V^*, \quad \eta \in \Lambda^p V, \quad \zeta' \in \Lambda^{q'} V^*, \quad \eta' \in \Lambda^{p'} V .$$

Diese Abbildung ist bilinear in (ζ, η), also existiert eine und nur eine in $\zeta \otimes \eta$ lineare Abbildung

$$\varphi_1 : (\Lambda^q V^* \otimes \Lambda^p V) \times \Lambda^{q'} V^* \times \Lambda^{p'} V \to \Lambda^{q+q'} V^* \otimes \Lambda^{p+p'} V$$

mit

$$\varphi_1(\zeta \otimes \eta, \zeta', \eta') = f(\zeta, \eta, \zeta', \eta').$$

f ist aber auch bilinear in (ζ', η'), also auch φ_1, d.h. es existiert genau eine in $\zeta \otimes \eta$, $\zeta' \otimes \eta'$ lineare Abbildung

$$\varphi_2 : (\Lambda^q V^* \otimes \Lambda^p V) \times (\Lambda^{q'} V^* \otimes \Lambda^{p'} V) \to \Lambda^{q+q'} V^* \otimes \Lambda^{p+p'} V$$

mit

$$\varphi_2(\zeta \otimes \eta, \zeta' \otimes \eta') = \varphi_1(\zeta \otimes \eta, \zeta', \eta') = f(\zeta, \eta, \zeta', \eta')$$

φ_2 ist also nach Konstruktion eine bilineare Abbildung

$$\varphi_2 : T_q^p \times T_{q'}^{p'} \to T_{q+q'}^{p+p'}$$

wobei

$$\varphi_2(\zeta \otimes \eta, \zeta' \otimes \eta') = \zeta \wedge \zeta' \otimes \eta \wedge \eta'.$$

Wir benützen für das so definierte Produkt wieder das Zeichen $\wedge$, d.h. wir schreiben:

$$\varphi_2(\zeta \otimes \eta, \zeta' \otimes \eta') = (\zeta \otimes \eta) \wedge (\zeta' \otimes \eta') = \zeta \wedge \zeta' \otimes \eta \wedge \eta'.$$

Wie man leicht sieht, gilt für dieses Produkt:

$$(\zeta \otimes \eta) \wedge (\zeta' \otimes \eta') = (-1)^{p\,p' + q\,q'} (\zeta' \otimes \eta') \wedge (\zeta \otimes \eta)$$
$$\zeta \in \Lambda^q V^*, \quad \eta \in \Lambda^p V, \quad \zeta' \in \Lambda^{q'} V^*, \quad \eta' \in \Lambda^p V,$$

Mit dieser Definition können wir auch schreiben:

$$\zeta \otimes \eta = (\zeta \otimes 1) \wedge (1 \otimes \eta) = \zeta \wedge \eta \quad \text{für} \quad \zeta \in \Lambda^q V^*, \quad \eta \in \Lambda^p V.$$

2. Der erweiterte Differentialkalkül auf Mannigfaltigkeiten

M^n sei eine C^∞ Mannigfaltigkeit der Dimension n. (Unter Differenzierbarkeit verstehen wir in Zukunft immer Differenzierbarkeit der Klasse C^∞). Der Tangentialraum $T(p)$ eines Punktes $p \in M^n$ ist definiert als Menge der Aequivalenzklassen von differenzierbaren Abbildungen φ eines offenen Intervalls $(-\varepsilon, +\varepsilon) \subset R$ in die Mannigfaltigkeit M^n mit $\varphi(0) = p$. Zwei solche Abbildungen $\varphi(t)$ bzw. $\varphi'(t)$ werden dabei als äquivalent betrachtet, falls in einer Koordinatenumgebung $U(p)$ $\varphi(t)$ bzw. $\varphi'(t)$ gegeben sind durch Koordinaten $x^i(t)$ bzw. $x^{i'}(t)$ und

$$\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx^{i'}}{dt}\right|_{t=0}.$$

Die Menge der so definierten Aequivalenzklassen kann dann zu einem n-dimensionalen Vektorraum $T(p)$ gemacht werden, den Tangentialraum von M^n im Punkte p. Die Klasse, in der die Abbildung $x^i(t) = \delta_j^i \cdot t$ liegt, bezeichnen wir mit $(\partial/\partial x^j)_p$, die Tangentialvektoren $(\partial/\partial x^1)_p \ldots (\partial/\partial x^n)_p$ bilden dann eine Basis von $T(p)$ und

$$T(p) = \left\{ \sum_i \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\} \qquad \lambda^i = \text{reelle Zahlen}.$$

Diese spezielle Basis von $T(p)$ nennen wir eine Koordinatenbasis, die dazu duale Basis bezeichnen wir mit $(\mathrm{d}x^1)_p, \ldots, (\mathrm{d}x^n)_p$.

Ein differenzierbares Vektorfeld auf M^n besteht aus einem Tangentialvektor in jedem Punkte p, der differenzierbar vom Punkte p abhängen soll, d.h. in lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$,

$$v(p) = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

sollen die v^i differenzierbare Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ sein. Analog besteht ein (r, s)-Vektorfeld in der Vorgabe eines (r, s)-Vektors $\xi \in T_s^r(p)$ in jedem Punkte p, also in lokalen Koordinaten

$$\xi(p) = \lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r} (dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_s})_p \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)_p \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}\right)_p$$

wobei die $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ differenzierbare Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ sind.

Die Funktionen $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ sind in dieser Darstellung nur für $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant n$ und $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$ definiert. Wir können aber durch Schiefsymmetrie $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ für alle i_k, j_l mit $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_l \leqslant n$ definieren. Dann sind die $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ Komponenten eines r-fach kontravarianten, s-fach kovarianten Tensors, der sowohl in den kovarianten als auch in den kontravarianten Indizes total antisymmetrisch ist. Wir bezeichnen im folgenden die Menge der (r, s) Vektorfelder mit τ_s^r.

Die $(0, s)$-Vektorfelder entsprechen den s-Formen auf M^n. Für die s-Formen existiert nun bekanntlich ein Operator d, der jeder s-Form eine $(s+1)$-Form zuordnet und durch folgende 4 Eigenschaften eindeutig festgelegt ist:

1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$. $\quad \omega_1, \omega_2 \in \tau_s^0$

2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^s \omega_1 \wedge d\omega_2 \quad \omega_1 \in \tau_s^0, \omega_2 \in \tau_{s_1}^0$

3) falls f = Funktion auf M, so ist df das Differential von f, in lokalen Koordinaten also

$$df(p) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}_p \cdot (dx^i)_p.$$

4) $d(df) = 0$

Wir nehmen nun zusätzlich noch an, dass auf M^n ein linearer Zusammenhang gegeben sei. Das lässt sich auch so ausdrücken, dass auf M^n ein Operator D gegeben ist, der jedem Vektorfeld auf M^n ein (1, 1)-Vektorfeld zuordnet, wobei gilt:

1) $D(v+w) = Dv + Dw$. $\quad v, w \in \tau_0^1$

2) $D(fv) = df \wedge v + f \cdot Dv$. $\quad$ wobei df = Differential von f.

Der Operator D entspricht der kovarianten Ableitung von Vektorfeldern, in lokalen Koordinaten haben wir:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$Dv = dv^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i D \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Dabei ist $dv^i=(\partial v^i/\partial x^j)\,dx^j$, ausserdem setzen wir

$$D\frac{\partial}{\partial x^i}=\Gamma^k_{j\,i}\,dx^j\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}$$

und erhalten:

$$Dv=\left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j}+\Gamma^k_{j\,i}v^i\right)dx^j\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Nach FLANDERS [5] können nun die Operatoren d und D zu einem einzigen Operator zusammengefasst werden; er bewies folgenden

SATZ: *Auf einer* n-dim. *Mannigfaltigkeit mit linearem Zusammenhang D existiert ein und nur ein Operator, den wir wieder mit d bezeichnen, mit folgenden Eigenschaften:*

1) $d(\zeta+\eta)=d\zeta+d\eta \quad \zeta,\eta\in\tau^r_s$

2) $d(\zeta\wedge\eta)=d\zeta\wedge\eta+(-1)^s\zeta\wedge d\eta \quad \zeta\in\tau^r_s,\ \eta\in\tau^{r'}_{s'}$.

3) *d stimmt mit dem gegebenen linearen Zusammenhang D auf τ^1_0 und mit dem äusseren Differentialoperator d auf τ^1_0 überein.*

Beweis: Es sei U eine Koordinatenumgebung von M, Koordinaten $x^1,\dots,x^n$. Dann gilt für $\zeta\in\tau^r_s$

$$\zeta=\lambda^{j_1\dots j_r}_{i_1\dots i_s}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_r}}$$

oder

$$\zeta=\omega^{j_1\dots j_r}\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_r}},\qquad \omega^{j_1\dots j_r}\in\tau^0_s$$

Falls nun ein Operator d mit den obigen Eigenschaften existiert, muss gelten

$$d\zeta=d\omega^{j_1\dots j_r}\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_r}}+(-1)^s\sum_{k=1}^{r}\omega^{j_1\dots j_r}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\wedge\cdots\wedge D\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_r}}$$

Daraus sieht man sofort, dass der Operator d in U eindeutig ist und dass $d\zeta\in\tau^r_{s+1}$ in U. Damit haben wir aber auch die globale Existenz bewiesen, da aus der Eindeutigkeit in U folgt:

$$(d\zeta\mid U)_{U\cap V}=(d\zeta\mid V)_{U\cap V}=d\zeta\mid U\cap V,$$

wobei $d\zeta/U$ die Restriktion von $d\zeta$ auf U bedeutet. Wir haben nun nur noch die Eigenschaft 2) zu verifizieren. Sei also

$\zeta\in\tau^r_s,\quad \eta\in\tau^{r'}_{s'}$ d.h.

$$\zeta=\omega^{j_1\dots j_r}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_r}}$$

$$\eta=\tilde\omega^{k_1\dots k_{r'}}\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}}$$

$$\zeta \wedge \eta = \omega^{j_1 \dots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}}$$

$$\begin{aligned} d(\zeta \wedge \eta) = {} & d(\omega^{j_1 \dots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}}) \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\ & + (-1)^{s+s'} \omega^{j_1 \dots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \\ & \wedge \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\ & + (-1)^{s+s'} \omega^{j_1 \dots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \\ & \wedge \sum_{l=1}^{r'} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{k_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \end{aligned}$$

Nun ist

$$d(\omega^{j_1 \dots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}}) = d\omega^{j_1 \dots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} + (-1)^s \omega^{j_1 \dots j_r} \wedge d\tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}}.$$

ausserdem gilt

$$\begin{aligned} & \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \\ & \qquad = (-1)^{s'} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}}, \end{aligned}$$

da

$$\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \in \tau_1^r.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d(\zeta \wedge \eta) = {} & d\omega^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \left(\tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \right) \\ & + (-1)^s \omega^{j_1 \dots j_r} \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \\ & \wedge \left(\tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \right) \\ & + (-1)^s \left(\omega^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \right) \wedge d\tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\ & + (-1)^s \left(\omega^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \right) \\ & \wedge (-1)^{s'} \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_{r'}} \sum_{l=1}^{r'} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{k_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\ = {} & d\zeta \wedge \eta + (-1)^s \zeta \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir ein spezielles (1, 1) Vektorfeld immer wieder brauchen, es ist dies der sogenannte Verschiebungsvektor dP. Er ist folgendermassen definiert

$$dP = \delta_i^j \, dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Basis im Tangentialraum, d.h. es gilt auch

$$dP = \delta_i^j \sigma^i \wedge e_j$$

wobei die e_i $(i = 1, \ldots, n)$ irgend eine Basis des Tangentialraumes und die σ^i $(i = 1, \ldots, n)$ die dazu duale Basis bilden. Falls nun die Mannigfaltigkeit M^n affin zusammenhängend ist, also die Γ_{ji}^k in der Darstellung von D in Koordinaten symmetrisch in j und i sind, so gilt

$$d(dP) = 0 .$$

Beweis

$$d(dP) = d\left(\delta_i^j \, dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = - \delta_i^j \, dx^i \wedge D\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{also}$$

$$d(dP) = - \delta_i^j \, dx^i \wedge \Gamma_{lj}^k \, dx^l \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} = - \Gamma_{li}^k \, dx^i \wedge dx^l \wedge \frac{\partial}{\partial x^k},$$

woraus man sofort sieht:

$$d(dP) = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{lj}^k \text{ symmetrisch in } j \text{ und } l .$$

Die Wichtigkeit des äusseren Differentialoperators d kommt im wesentlichen im Satz von STOKES zum Ausdruck. Um den Satz von Stokes im folgenden anwenden zu können, müssen wirh ihn etwas anders als üblich formulieren. Diese Formulierung hat nur in Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik einen Sinn. Wir werden also im folgenden ausschliesslich Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachten. Unter D verstehen wir von nun an immer den eindeutig bestimmten, mit der Riemannschen Metrik verträglichen affinen Zusammenhang.

Vorerst führen wir im Tangentialraum eines jeden Punktes durch das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren eine orthonormale Basis ein, wir bilden also, indem wir v_i für $\partial/\partial x^i$ setzen,

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \|v_1\| = + \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right)} = + \sqrt{g_{11}} .$$

$$b_2 = v_2 - (v_2, e_1) e_1 \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}$$

und so weiter, b_k ergibt sich, falls wir $e_1, \ldots, e_{k-1}$ konstruiert haben, als

$$b_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k, e_i) e_i \quad \text{und} \quad e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|} .$$

Da bei diesem Verfahren nur algebraische Operationen ausgeführt werden, können wir die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^r}$ in einer Koordinatenumgebung U in allen Punkten gleichzeitig orthogonalisieren und erhalten so n in U orthonormierte Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n$.

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit gilt nun, falls $e_1, \ldots, e_n$ n orthonormierte Vektorfelder in einer Umgebung U, $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ die dazu dualen 1-Formen sind, d der durch die äussere Ableitung und den affinen Zusammenhang D bestimmte erweiterte Differentialoperator ist,

$$d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 0$$

und

$$\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n = dV \qquad dV = \text{Volumelement}$$

Beweis

a) Es gilt

$$de_i = \omega_i^k e_k \qquad \omega_i^k = \text{1-Formen}$$

und

$$d(e_i, e_j) = (de_i, e_j) + (e_i, de_j) = 0,$$

da $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Daraus erhält man

$$0 = (\omega_i^k e_k, e_j) + (e_i, \omega_j^k e_k) = \omega_i^j + \omega_j^i,$$

also $\omega_j^i =$ schiefsymmetrisch. Weiterhin ist

$$d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \cdots \wedge de_i \wedge \cdots \wedge e_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge \omega_i^k e_k \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Da aber ein äusseres Produkt 0 ist, falls zwei gleiche Faktoren auftreten, tritt nur der Fall $k = i$ auf, und wir erhalten

$$d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = (\sum_i \omega_i^i)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = 0,$$

da ω_i^j schiefsymmetrisch.

b) $\sigma^i = a_j^i\, dx^j \qquad (dx^i, dx^j) = g^{ij} \qquad (\sigma^i, \sigma^j) = \delta^{ij}$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n &= a_{j_1}^1\, dx^{j_1} \wedge a_{j_2}^2\, dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}^n\, dx^{j_n} \\ &= \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \ldots a_{j_n}^n\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \det(a_j^i)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\det(\delta^{ij}) = 1 = (\det(a_j^i))^2 \det(g^{ij}) = (\det(a_j^i))^2 \cdot \frac{1}{\det(g_{ij})}$$

also

$$g = \det(g_{ij}) = (\det(a^i_j))^2$$

woraus man

$$\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n = + \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = dV$$

erhält.

Nun sei M^n eine orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik; wir können also auf M^n in der Umgebung eines jeden Punktes n orthonormierte Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n$ so auswählen, dass, falls U eine Umgebung mit Vektorfeldern $e_1, \ldots, e_n$, V eine Umgebung mit Vektorfeldern $e'_1, \ldots, e'_n$ ist und $U \cap V \neq 0$, in $U \cap V$ gilt

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n .$$

Ein Element $\zeta \in \tau^n_k$ lässt sich dann folgendermassen schreiben

$$\zeta = \omega \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n ,$$

wobei ω eine eindeutig bestimmte k-Form ist. Durch diese Schreibweise wird jedem (n, k)-Vektorfeld ζ eine k-Form $\omega = \mathrm{on}(\zeta)$ zugeordnet. Ausserdem gilt

$$d\zeta = d\omega \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + (-1)^k \omega \wedge d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = d\omega \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n ,$$

woraus folgt

$$\mathrm{on}(d\zeta) = d(\mathrm{on}(\zeta)),$$

wobei d links der erweiterte Differentialoperator, angewendet auf (n, k)-Vektorfelder, und rechts der äussere Differentialoperator, angewendet auf k-Formen, ist.

Falls nun F^{k+1} eine orientierte $(k+1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit in M^n ist, so gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_{\partial F^{k+1}} \omega = \int_{F^{k+1}} d\omega$$

oder

$$\int_{\partial F^{k+1}} \mathrm{on}(\zeta) = \int_{F^{k+1}} \mathrm{on}(d\zeta).$$

3. Einparametrige Transformationsgruppen

Wir erinnern zuerst an die Definition einer einparametrigen Transformationsgruppe:

Eine Familie φ_t von Diffeomorphismen $M^n \to M^n$ wird eine einparametrige Gruppe von differenzierbaren Transformationen von M^n genannt, falls die Abbildung $\Phi: R \times M^n \to M^n$, definiert durch

$$\Phi(t, p) = \varphi_t(p) \quad p \in M, \quad t \in R, \quad R = \text{reelle Zahlen}.$$

folgende drei Eigenschaften erfüllt:

1) Φ ist differenzierbar.

2) $\Phi(s, \Phi(t,p)) = \Phi(s+t,p)$ dh. $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ für alle t und s.

3) $\Phi(0,p) = p$, d.h. $\varphi_0 =$ Identität.

$\varphi_t(p)$ $-c<t<+c$, p fest, $c>0$, definiert eine Kurve auf M^n. v sei der Tangentialvektor an diese Kurve im Punkte p. In lokalen Koordinaten gilt dann, falls in $U(p)$ die Kurve $\varphi_t(p)$ gegeben ist durch die Koordinaten $x^i(t)$:

$$v_p = \lim_{t\to 0} \frac{x^i(t) - x^i(0)}{t} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

Eine differenzierbare Abbildung $\Phi: M \to \bar{M}$ induziert eine Abbildung $\Phi_*: T_p \to T_{\Phi(p)}$ der entsprechenden Tangentialräume, und zwar wird, falls $\varphi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ den Tangentialvektor $v(p)$ repräsentiert, $\Phi_*(v)$ durch die Abbildung $\Phi \circ \varphi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \bar{M}$ repräsentiert.

Im folgenden werden wir noch die Lie-Ableitung von Vektorfeldern brauchen. $\Phi(t,p)$ sei eine einparametrige Transformationsgruppe, w ein in einer Umgebung des Punktes p definiertes Vektorfeld, v der Tangentialvektor an die Kurve $\varphi_t(p)$. Dann definieren wir

$$(\mathscr{L}_v(w))_p = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^*(w))_p - w_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* w_{\varphi_t(p)} - w_p}{t}$$

und nennen diese Grösse die Lie-Ableitung von w bezüglich v. Man zeigt leicht, dass $\mathscr{L}_v(w)$ wieder ein Vektorfeld ist. Durch Ausrechnen (siehe [7], Seite 93) erhält man für

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad w = w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\mathscr{L}_v(w) = \left(\frac{\partial w^j}{\partial x^i} v^i - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} w^i\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir noch die Definitionen der konformen, homothetischen und isometrischen Abbildungen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten an.

Eine differenzierbare Abbildung $\Phi: M \to \bar{M}$ wird konform genannt, falls eine differenzierbare Funktion $\varphi(p) > 0$ auf M existiert, derart, dass für alle Vektorfelder v, w auf M gilt:

$$(\Phi_* v, \Phi_* w)_{\Phi(p)} = \varphi(p)\,(v, w)_p .$$

Falls φ in der obigen Definition konstant ist, so wird Φ eine Homothetie genannt, falls $\varphi(p) \equiv 1$, so ist Φ eine Isometrie.

Eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ nennen wir konform bzw. homothetisch bzw. isometrisch, falls jede Abbildung $\varphi_t(p) = \Phi(t,p)$, t fest, konform bzw. homothetisch bzw. isometrisch ist.

4. Der Kongruenzsatz für Hyperflächen

Für Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum gelten folgende Formeln (siehe [1])

$$d\vec{x} \hat{\times} d\vec{x} = 2\vec{n}\, dA \qquad d\vec{x} \hat{\times} d\vec{n} = -2H\vec{n}\, dA .$$

Diese Formeln wollen wir nun verallgemeinern. F^{n-1} bedeute im folgenden eine Hyperfläche im Riemannschen Raum R^n, lokal gegeben durch die Darstellung $x^i = x^i(u^\alpha)$, wobei die x^i $(i=1,\ldots,n)$ Koordinaten im R^n, die u^α $(\alpha=1,\ldots,n-1)$ Koordinaten auf der Hyperfläche sind. Dabei setzen wir voraus, dass die Matrix $(\partial x^i/\partial u^\alpha)$ in jedem Punkt den Rang $n-1$ habe, d.h. dass die Fläche wirklich die Dimension $n-1$ habe. In einer Umgebung eines jeden Punktes von F^{n-1} wählen wir nun ein orthonormiertes n-Bein $e_1,\ldots,e_n$ so, dass e_n die Normale $\vec{n}$ der Fläche ist. Für das dazu duale n-Bein $\sigma^1,\ldots,\sigma^n$ gilt dann $\sigma^n=0$ auf F^{n-1}. Als Verallgemeinerung von $d\vec{x} = \vec{x}_i\, du^i$ nehmen wir $dP = \delta^i_j\, dx^j \wedge (\partial/\partial x^i)$, auf F^{n-1} ist dann $dP = \sigma^\alpha \wedge e_\alpha$.

Auf F^{n-1} ist dann

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{n-1} = \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-1}} \wedge e_{\alpha_{n-1}} = \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-1}} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-1}},$$

wobei $1 \leqslant \alpha_k \leqslant n-1$. Da alle α_k voneinander verschieden sein müssen, muss

$$\sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-1}} = \operatorname{sign}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\, \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1}$$

und

$$e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-1}} = \operatorname{sign}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$$

sein. Damit wird

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{n-1} = (n-1)!\, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} .$$

Das ist die Verallgemeinerung der ersten der beiden am Anfang dieses Abschnittes angeführten Formeln, statt $\vec{n}$ steht darin der im Sinne der äusseren Algebra zur Normalen e_n duale $(n-1)$-Vektor $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$.

Zur Verallgemeinerung der zweiten Formel benützen wir folgende Relation

$$dn = de_n = -b^\alpha_\beta \sigma^\beta \wedge e_\alpha$$

wobei b^α_β den gemischten Tensor der 2. Fundamentalform bezüglich der Basis $e_1,\ldots,e_n$ darstellt.

Dann wird

$$\begin{aligned} dn \wedge \underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(n-2)} &= -b^\alpha_\beta \sigma^\beta \wedge e_\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \sigma^{\alpha_2} \wedge e_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_{\alpha_{n-2}} \\ &= -b^\alpha_\beta \sigma^\beta \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} . \end{aligned}$$

Hier sind $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2}$ $(n-2)$ voneinander verschiedene Zahlen zwischen 1 und $(n-1)$,

ebenso gilt $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant (n-1)$ und $\alpha \neq \alpha_k, \beta \neq \alpha_k$ für $1 \leqslant k \leqslant (n-2)$, woraus folgt, dass $\alpha = \beta$ sein muss, also

$$\begin{aligned} dn \wedge \underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(n-2)} &= -\sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\alpha} \sigma^{\alpha} \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_{\alpha} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} \\ &= -\sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\alpha} (\operatorname{sign}(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}))^2 \, \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \\ &= -(n-2)! \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\alpha} \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad dn \wedge dP \wedge \cdots \wedge dP = -(n-1)! \, H \, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1},$$

wobei wir

$$H = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{n-1} \operatorname{Spur}(b_{\beta}^{\alpha})$$

gesetzt haben; damit haben wir auch eine Verallgemeinerung für die zweite der obigen Formeln gefunden.

Nun gehen wir über zum Kongruenzsatz. Der gegebenen Hyperfläche F^{n-1} sei durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$ eine zweite Hyperfläche $\bar{F}^{n-1}$ so zugeordnet, dass

$$\bar{F}^{n-1} = \{\Phi(f(p), p) \mid p \in F^{n-1}\},$$

wobei $f(p)$ eine Funktion auf F^{n-1} ist. Von der Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$ setzen wir bis auf weiteres nur voraus, dass jede Abbildung φ_t regulär sei, d.h. dass φ_{t*} für jeden Punkt p eine Abbildung des Tangentialraumes $T(p)$ auf den Tangentialraum $T(\varphi_t(p))$ sei; Fixpunkte von $\Phi(t, p)$ sind also nicht ausgeschlossen. Ausser der Fläche $\bar{F}^{n-1}$ betrachten wir noch die in der Einleitung definierten, jedem $p \in F^{n-1}$ zugeordneten Flächen $\tilde{F}_p^{n-1}$,

$$\tilde{F}_p^{n-1} = \{\Phi(f(p), p') \mid p' \in F^{n-1}\}.$$

$\bar{n}$ bezeichne die Normale von $\bar{F}^{n-1}$ im Punkte $\bar{p}$, $\tilde{n}$ die Normale von $\tilde{F}_p^{n-1}$ im Punkte $\bar{p}, \bar{p} = \Phi(f(p), p)$. Mit w bezeichnen wir den Vektor $e^{f(p)} v$, wobei v der Tangentialvektor an die Kurve $\Phi(t, \bar{p})$, $-\varepsilon < t < +\varepsilon$, ist. Dann betrachten wir, um zu einer Integralformel zu gelangen, den Ausdruck

$$(\bar{n} - \tilde{n}) \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)}.$$

Die Anwendung des Operators d auf diesen Ausdruck ergibt

$$\begin{aligned} d\big((\bar{n} - \tilde{n}) \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)}\big) &= d\bar{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)} \\ &\quad - d\tilde{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)} + (\bar{n} - \tilde{n}) \wedge dw \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)}. \end{aligned}$$

Hierin ist, falls wir e_i; statt $\bar{e}_i$; und σ^j statt $\bar{\sigma}^j$ schreiben,

$$d\bar{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)} = (n-1)!\, \bar{H}\, d\bar{A} \wedge w \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$$
$$= (n-1)!\,(-1)^{n-1}\, \bar{H}\,(w, \bar{n})\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n .$$

Um auch $d\tilde{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)}$ zu berechnen, setzen wir $d\tilde{n} = -b'^{i}_{\alpha}\sigma^{\alpha} \wedge e_i$; und erhalten

$$d\tilde{n} \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} = -\, b'^{i}_{\alpha}\sigma^{\alpha} \wedge e_i \wedge w^j e_j \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} e_{\alpha_{n-2}}$$
$$= -\, b'^{\beta}_{\alpha} w^n \sigma^{\alpha} \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_\beta \wedge e_n \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}}$$
$$- b'^{n}_{\alpha} w^{\beta} \sigma^{\alpha} \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_n \wedge e_\beta \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}},$$

also

$$d\tilde{n} \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}$$
$$= (-1)^{n-1}(n-2)!\, \{(w, \bar{n})\,(\sum_{\alpha} b'^{\alpha}_{\alpha}) - (b'^{n}_{\alpha} w^{\alpha})\} \cdot d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n .$$

Nun suchen wir den Zusammenhang zwischen $\sum_{\alpha} b'^{\alpha}_{\alpha}$ und $\tilde{H}$. Für irgend ein Vektorfeld y im R^n gilt

$$dy = y^i_j \sigma^j \wedge e_i ,$$

für die Differentiation längs $\bar{F}^{n-1}$ also

$$dy = y^i_{\alpha} \sigma^{\alpha} \wedge e_i ,$$

da $\sigma^n = 0$ auf $\bar{F}^{n-1}$. Sei nun $\bar{p}$ ein Punkt auf $\bar{F}^{n-1}$, der nicht in der Ausnahmemenge $\bar{S}$ liegt, d.h. in $\bar{p}$ soll der Strömungsvektor v nicht im Tangentialraum der Fläche $\bar{F}^{n-1}$ liegen. Dann haben wir in einer Umgebung von $\bar{p}$ ein Vektorfeld $\tilde{n}$, gegeben als Normalenfeld an die Flächenschar

$$\varphi_t(\bar{F}^{n-1}) \qquad f(p) - \varepsilon \leqslant t \leqslant f(p) + \varepsilon , \qquad \varepsilon > 0 .$$

$\tilde{n}$ ist dann einerseits $= \tilde{e}_n$ und andererseits $= \tilde{n}^i e_i$, womit wir auf $\bar{F}^{n-1}$ erhalten:

$$d\tilde{n} = -\, b'^{i}_{\alpha}\sigma^{\alpha} \wedge e_i ;$$

und auf $\tilde{F}^{n-1}_{\bar{p}}$

$$d\tilde{n} = -\, \tilde{b}^{\alpha}_{\beta}\tilde{\sigma}^{\beta} \wedge \tilde{e}_{\alpha} .$$

Andererseits gilt aber im R^n

$$d\tilde{n} = -\, b'^{i}_{j}\sigma^{j} \wedge e_i = -\, \tilde{b}^{i}_{j}\tilde{\sigma}^{j} \wedge \tilde{e}_i ,$$

woraus $(\sum_i b'^{i}_{i}) = (\sum_i \tilde{b}^{i}_{i})$ folgt, wegen der Invarianz der Spur. Ausserdem ist $\tilde{b}^{n}_{j} = 0$, da $(d\tilde{n}, \tilde{n}) = 0$; daraus erhält man

$$(n-1)\,\tilde{H} = \sum_{\alpha} \tilde{b}^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{i} \tilde{b}^{i}_{i} = \sum_{i} b'^{i}_{i} = \sum_{\alpha} b'^{\alpha}_{\alpha} + b'^{n}_{n} .$$

In den Punkten $\bar{p}\in\bar{S}$ ist nun b'^{n}_{n} noch nicht bestimmt, doch können wir diese Grösse dort durch Stetigkeit definieren, da $\bar{S}$ nirgends dicht in $\bar{F}^{n-1}$ sein soll. Damit ergibt sich

$$d\tilde{n}\wedge w\wedge d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,\tilde{H}(w,\tilde{n})\,d\bar{A}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$
$$-(-1)^{n-1}(n-2)!\,(b'^{n}_{j}w^{j})\,d\bar{A}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n.$$

Zur Berechnung von

$$(\bar{n}-\tilde{n})\wedge dw\wedge d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}$$

brauchen wir noch eine Zwischenbetrachtung. In Koordinaten gilt lokal

1) auf $\bar{F}^{n-1}$: $y^i(u^\alpha)=\Phi^i(f(u^\alpha),x^j(u^\alpha))$
2) auf $\tilde{F}^{n-1}_{\bar{p}}$: $y^i(u^\alpha)=\Phi^i(f(\mathring{u}^\alpha),x^j(u^\alpha))$

$u^\alpha=$Koordinaten auf F^{n-1},
$x^j(u^\alpha)=$Einbettung von F^{n-1} in R^n.
$\mathring{u}^\alpha=$Koordinaten von p.

Daraus folgt für die Basisvektoren $\partial/\partial u^1,\ldots,\partial/\partial u^{n-1}$ auf $\bar{F}^{n-1}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|^{\bar{F}^{n-1}}_{\bar{p}}=\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\bar{p}}\cdot\left\{\frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial\Phi^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right\}$$

und für die Vektoren $\partial/\partial u^1,\ldots,\partial/\partial u^{n-1}$ auf $\tilde{F}^{n-1}_{\bar{p}}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{\bar{p}}^{F_{\bar{p}}^{n-1}}\cdot=\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\bar{p}}\cdot\left\{\frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\right\}$$

woraus

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|^{F}_{\bar{p}}=\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|^{\bar{F}}_{\bar{p}}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}$$

folgt.

Also ist

$$d\bar{P}=\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|^{F}_{\bar{p}}\wedge du^\alpha=\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|^{\bar{F}\bar{p}}_{\bar{p}}\wedge du^\alpha+v\wedge df=d\tilde{P}+v\wedge df$$

woraus folgt

$$\underbrace{d\tilde{P}\wedge\cdots\wedge d\tilde{P}}_{n-1}=\underbrace{d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}}_{n-1}-(n-1)\,v\wedge df\wedge\underbrace{d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}}_{n-2}.$$

Damit haben wir

$$v\wedge df\wedge\underbrace{d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}}_{n-2}=\frac{1}{(n-1)}\left\{\underbrace{d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}}_{(n-1)}-\underbrace{d\tilde{P}\wedge\cdots\wedge d\tilde{P}}_{(n-1)}\right\}$$
$$=(n-2)!\,\{d\bar{A}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}-d\tilde{A}\wedge\tilde{e}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{e}_{n-1}\},$$

nach der ersten Formel, die wir im Abschnitt 4) hergeleitet haben.

Nun ist $dw=e^f\,dv+e^f\,df\wedge v$, also

$$(\bar{n}-\tilde{n})\wedge dw\wedge d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}$$
$$=e^f(\bar{n}-\tilde{n})\wedge dv\wedge d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}+e^f(\bar{n}-\tilde{n})\wedge df\wedge v\wedge d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ergibt nun nach unserer Zwischenbetrachtung

$$\begin{aligned} e^f(\bar{n}-\tilde{n}) \wedge df \wedge v \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \\ = e^f(\bar{n}-\tilde{n})(n-2)!\,\{d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} - d\tilde{A} \wedge \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{n-1}\}. \\ = e^f(n-2)!\,(-1)^{n-1}(1-(\bar{n},\tilde{n}))(d\bar{A}+d\tilde{A}) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite erhalten wir mit $dv = v^i_\alpha \sigma^\alpha \wedge e_i$

$$\begin{aligned} \bar{n} \wedge dv \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} &= (-1)^{n-1}(n-2)!\,(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \\ \tilde{n} \wedge dv \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} &= (-1)^{n-1}(n-2)!\,(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)(\bar{n},\tilde{n})\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (-1)^{n-2}(n-2)!\, v^n_\alpha \tilde{n}^\alpha\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\bar{n}-\tilde{n}) \wedge dw \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \\ = (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f(1-(\bar{n},\tilde{n}))(d\bar{A}+d\tilde{A})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f(1-(\bar{n},\tilde{n}))(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f v^n_\alpha \tilde{n}^\alpha\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir damit

$$\begin{aligned} d((\bar{n}-\tilde{n}) \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \\ = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(\bar{H}-\tilde{H})(w,\bar{n})\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f(1-(\bar{n},\tilde{n}))(d\bar{A}+d\tilde{A})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f\{(1-(\bar{n},\tilde{n}))\sum_\alpha v^\alpha_\alpha + v^n_\alpha \tilde{n}^\alpha - b'^n_j v^j\}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned}$$

Den Ausdruck $D = (1-(\bar{n},\tilde{n}))\sum_\alpha v^\alpha_\alpha + v^n_\alpha \tilde{n}^\alpha + b'^n_j v^j$ wollen wir jetzt noch etwas umformen. Zunächst ist

$$(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)(1-(\bar{n},\tilde{n})) = (\sum_i v^i_i)(1-(\bar{n},\tilde{n})) - v^n_n + v^n_n \tilde{n}^n$$

und

$$(\sum_i v^i_i) = \operatorname{div} v.$$

Daraus ergibt sich für D:

$$D = (1-(\bar{n},\tilde{n}))\operatorname{div} v + v^n_j \tilde{n}^j + b'^n_j v^j - v^n_n.$$

Andererseits ist

$$\mathscr{L}_v \tilde{n} = -(b'^i_j v^j + v^i_j \tilde{n}^j)\, e_i$$

wobei $\mathscr{L}_v$ die in Abschnitt 3) erwähnte Lie-Ableitung längs v bedeutet; also ist

$$v^n_j \tilde{n}^j + b'^n_j v^j = -(\mathscr{L}_v \tilde{n}, \bar{n}).$$

Nun definieren wir für ein Vektorfeld $w = w^i e_i$ und irgend einen Vektor $y = y^j e_j$:

$$d_y w = w^i_j y^j e_i,$$

wobei w^i_j der gemischte Tensor in $dw = w^i_j \sigma^j \wedge e_i$ ist. Falls w und y Vektorfelder sind, gilt

$$d_y w - d_w y = \mathscr{L}_y w = - \mathscr{L}_w y .$$

Daraus folgt

$$v^n_n = (d_{\bar{n}} v, \bar{n}) = (d_v \bar{n}, \bar{n}) - (\mathscr{L}_v \bar{n}, \bar{n}) = - (\mathscr{L}_v \bar{n}, \bar{n}),$$

da $(d_v \bar{n}, \bar{n}) = 0$; wir erhalten damit für den Ausdruck D:

$$D = (1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) .$$

Zusammenfassend erhalten wir daraus mit dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \bar{F}^{n-1}} & \operatorname{on}((\bar{n} - \tilde{n}) \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}) \\ & = (-1)^{n-1} (n-1)! \int_{\bar{F}^{n-1}} (\bar{H} - \tilde{H}) (w, \bar{n}) \, d\bar{A} \\ & + (-1)^{n-1} (n-2)! \left\{ \int_{\bar{F}^{n-1}} e^f (1 - (\bar{n}, \tilde{n})) (d\bar{A} + d\tilde{A}) \right. \\ & \left. + \int_{\bar{F}^{n-1}} e^f ((1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n})) \, d\bar{A} \right\}. \end{aligned}$$

Falls nun $\bar{F}^{n-1}$ geschlossen und auf $\bar{F}^{n-1}$ $\bar{H} = \tilde{H}$ ist, so ist die linke Seite sowie der erste Term auf der rechten Seite der obigen Gleichung $= 0$, womit wir den folgenden Satz erhalten:

SATZ: *Falls $\bar{F}^{n-1}$ geschlossen ist und auf $\bar{F}^{n-1}$ gilt $\bar{H} = \tilde{H}$ und*

$$D = (1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) \geqslant 0 ,$$

so ist

$$1 - (\bar{n}, \tilde{n}) = 0 , \quad \textit{also} \quad \bar{n} = \tilde{n} .$$

Falls auf $\bar{F}^{n-1}$ aber überall $(1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) \leqslant 0$ ist, so betrachten wir statt der Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$ die Transformationsgruppe $\Phi'(t, p) = \Phi(-t, p)$; wir haben dann

$$\bar{F}^{n-1} = \{ \Phi' (-f(p), p) \, p \in F^{n-1} \} .$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite der obigen Integralformel, das nicht verschwindet, falls $\bar{H} = \tilde{H}$, steht dann $e^{f'} = e^{-f}$ statt e^f, sonst ändert sich nichts, während im andern Integral zudem noch v durch $v' = -v$ ersetzt werden muss. Nun ist $\operatorname{div} v' = -\operatorname{div} v$ und $(\mathscr{L}_{v'} (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) = -(\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n})$; wir erhalten also das Resultat $\bar{n} = \tilde{n}$ auch für diesen Fall.

Aus $\bar{n}=\tilde{n}$ folgt aber, da $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n$,

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} = \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{n-1}$$

und

$$\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1} = \tilde{\sigma}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\sigma}^{n-1}$$

also

$$\underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-1)} = \underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(n-1)}$$

Nun ist

$$\underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(n-1)} = \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-1)} - (n-1)\, v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)},$$

woraus

$$v \wedge df \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} = 0$$

folgt. Ausgerechnet ergibt das

$$v \wedge df \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} = v^\beta f_\alpha \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_\beta \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}}$$
$$+ v^n f_\alpha \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_n \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} = 0,$$

somit

$$v^n f_\alpha \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_n \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}}$$
$$= (-1)^{\alpha-1}(n-2)!\, v^n f_\alpha d\bar{A} \wedge e_n \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_\alpha \wedge \cdots \wedge e_{n-1} = 0$$

also

$$v^n f_\alpha = 0$$

für alle α. Falls wir einen Punkt $p \notin \bar{S}$ betrachten, so ist $v^n \neq 0$, also $f_\alpha = 0$, woraus $\partial f/\partial u^\beta = 0$, also $f =$ konstant folgt. Also gilt $f =$ konstant auf $\bar{F}^{n-1} - \bar{S}$, somit $f =$ konstant auf ganz $\bar{F}^{n-1}$ wegen der Stetigkeit von f, da $\bar{S}$ nirgends dicht auf $\bar{F}^{n-1}$ vorausgesetzt wurde.

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch, dass für gewisse konforme Abbildungen, die als Spezialfall die homothetischen sowie die isometrischen Abbildungen umfassen, gilt:

$$D = (1 - (\tilde{n}, \tilde{n}))\, \mathrm{div}\, v + (\mathscr{L}_v(\bar{n} - \tilde{n}), \tilde{n}) \geqslant 0 \quad \text{(bzw. } \leqslant 0)$$

Es ist

$$\mathrm{div}\, v = \sum_i (d_{e_i} v, e_i) = -\sum_i (\mathscr{L}_v e_i, e_i)$$

und

$$(\mathscr{L}_v e_i)_{\bar{p}} = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* (e_i)_{\bar{p}'} - (e_i)_{\bar{p}}}{t}$$

wobei

$$\bar{p}' = \varphi_t(\bar{p}).$$

Weiterhin gilt für konforme Transformationen nach Abschnitt 3)

$$\varphi_{t*}(e_i)_{\bar{p}} = +\sqrt{\varphi(t, \bar{p})}\, (e_i)_{\bar{p}'} = \psi(t, \bar{p})\, (e_i)_{\bar{p}'}$$

wobei wir $\psi(t,p)=+\sqrt{\varphi(t,\bar{p})}$ gesetzt haben. Also ist

$$(\varphi_{-t})_*(e_i)_{\bar{p}'}=\psi(-t,\bar{p}')(e_i)_{\bar{p}},$$

und aus $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$ folgt

$$\psi(s,\bar{p}')\cdot\psi(t,\bar{p})=\psi(s+t,\bar{p})\qquad \bar{p}'=\varphi_t(\bar{p})$$

also

$$\psi(-t,p)=\frac{1}{\psi(t,\bar{p})},$$

somit

$$(\mathscr{L}_v e_i)_{\bar{p}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\psi(t,\bar{p})}-\frac{1}{\psi(0,\bar{p})}\right)(e_i)_{\bar{p}}=-\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}(e_i)_{\bar{p}}.$$

Durch genaue gleiche Überlegungen erhält man auch

$$(\mathscr{L}_v\tilde{n})_{\bar{p}}=-\cdot\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}(\tilde{n})_{\bar{p}}$$

Damit ergibt sich für konforme Transformationen

$$\begin{aligned}D&=n\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}(1-(\tilde{n},\tilde{n}))-(1-(\tilde{n},\tilde{n}))\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}\\&=(n-1)(1-(\tilde{n},\tilde{n}))\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}.\end{aligned}$$

Es ist also $D\geqslant 0$ (bzw. $D\leqslant 0$), genau dann, wenn $\psi'(0,\bar{p})\geqslant 0$ (bzw. $\leqslant 0$). Ist nun $\Phi(t,p)$ homothetisch, so ist ψ unabhängig von $\bar{p}$, also ist $\psi'(0,\bar{p})$ auf $\bar{F}^{n-1}$ eine Konstante; ist $\Phi(p,t)$ isometrisch, so ist $\psi(t,p)\equiv 1$, also $D\equiv 0$. Damit haben wir folgenden Kongruenzsatz bewiesen:

F^{n-1} und $\bar{F}^{n-1}$ seien zwei geschlossene, orientierte Hyperflächen in einem Riemannschen Raum R^n; dabei sei F^{n-1} auf $\bar{F}^{n-1}$ mittels einer einparametrigen konformen Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ unter Erhaltung der Orientierung so abgebildet, dass

$$\bar{F}^{n-1}=\{\Phi(f(p),p)\mid p\in F^{n-1}\}$$

wobei $f(p)$ eine gegebene differenzierbare Funktion auf F^{n-1} ist. Falls dann $\bar{H}=\tilde{H}$ ist und die Menge der Punkte $\bar{p}\in\bar{F}^{n-1}$, in denen der Tangentialvektor v an die Stromlinien der Transformationsgruppe im Tangentialraum der Hyperfläche $\bar{F}^{n-1}$ liegt, nirgends dicht auf $\bar{F}^{n-1}$ ist, sowie $\psi'(0,\bar{p})\geqslant 0$ (bzw. $\leqslant 0$) überall auf $\bar{F}^{n-1}$, so ist $f(p)$ eine Konstante. Dabei ist $\psi(t,p)=\sqrt{\varphi(t,p)}$ und $\varphi(t,p)$ der in der Definition der konformen Transformationen auftretende Faktor (siehe Abschnitt 3).

5. Der Kongruenzsatz für k-dimensionale Flächen im R^n

In diesem Abschnitt bezeichne F^k eine orientierbare k-dimensionale Fläche in einem orientierbaren Riemannschen Raum R^n. Dabei sei nun, falls

$$x^i = x^i(u^\alpha) \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant k$$

die lokale Darstellung der Fläche ist, die Matrix

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$$

in jedem Punkt vom Rang k. Weiterhin wählen wir wiederum in der Umgebung jedes Punktes $p \in F^k$ n orthonormierte Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n$ so, dass $e_1, \ldots, e_k$ im Tangentialraum von F^k und $e_{k+1}, \ldots, e_n$ senkrecht zu F^k sind, damit haben wir $\sigma^{k+1} = \cdots = \sigma^n = 0$ auf F^k.

Aus

$$dP = \sum_{\alpha=1}^{k} \sigma^\alpha \wedge e_\alpha$$

folgt

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{k} = k!\, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$$

wobei die Berechnung genau gleich wie bei Hyperflächen verläuft. Um auch eine Formel für die mittlere Krümmung zu bekommen, setzen wir zunächst auf F^k

$$de_i = \omega_{i\beta}^j \sigma^\beta \wedge e_j$$

womit wir für die e_α bekommen

$$de_\alpha = \omega_{\alpha\beta}^j \sigma^\beta \wedge e_j = \omega_{\alpha\beta}^\gamma \sigma^\beta \wedge e_\gamma + b_{\alpha\beta}^s \sigma^\beta \wedge e_s.$$

Dabei haben wir $\omega_{\alpha\beta}^s = b_{\alpha\beta}^s$ gesetzt, und für die Indizes soll immer $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant k$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ und $k+1 \leqslant s, t \leqslant n$ gelten. $\sum_{s=k+1}^{n} b_{\alpha\beta}^s e_s$ sind in dieser Formel die vektorwertigen Komponenten der zweiten Fundamentalform auf F^k.

Weiterhin gilt mit

$$N = e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(k-1)} \wedge dN = \sum_{s=k+1}^{n} \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge de_s \wedge \cdots \wedge e_n,$$

also $\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(k-1)} \wedge dN = \sum_{s=k+1}^{n} \omega_{s\beta}^\alpha \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\beta \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}}$

$$\wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_{s-1} \wedge e_\alpha \wedge e_{s+1} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Nun folgt aus $(e_i, de_j)+(de_i, e_j)=0$, dass

$$\omega^j_{ik} + \omega^i_{jk} = 0,$$

also

$$\omega^\alpha_{s\beta} = -\omega^s_{\alpha\beta} = -b^s_{\alpha\beta},$$

womit wir erhalten

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(k-1)} \wedge dN = (k-1)! \sum_{s=k+1}^{n} (-1)^{s-k} \left(\sum_\alpha b^s_{\alpha\alpha}\right) dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_s \wedge \cdots \wedge e_n,$$
$$= k! \sum_{s=k+1}^{n} (-1)^{s-k} H^s \, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_s \wedge \cdots \wedge e_n.$$

In der obigen Formel haben wir den mittleren Krümmungsvektor

$$H = \frac{1}{k} \sum_\alpha (b^s_{\alpha\alpha})\, e_s$$

eingeführt.

Im folgenden seien nun F^k und $\bar{F}^k$ orientierbare k-dimensionale Flächen im Riemannschen Raum R^n, die unter Erhaltung der Orientierung durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$ so aufeinander abgebildet sind, dass

$$\bar{F}^k = \{\Phi(f(p), p) \mid p \in F^k\} \quad \text{oder} \quad F^k = \{\Phi(-f(\bar{p}), \bar{p}) \mid \bar{p} \in \bar{F}^k\}.$$

$\bar{S}$ bezeichne wiederum die Menge derjenigen Punkte auf $\bar{F}^k$, für die der Strömungsvektor v im Tangentialraum von $\bar{F}^k$ liegt. $\bar{S}$ soll wie bisher nirgends dicht in $\bar{F}^k$ liegen. $w(p)$ bezeichnet wieder den Vektor $e^{f(p)} \cdot v$, und die $\tilde{F}^k_p$ seien wie bisher definiert. Dann betrachten wir in Analogie zum $(n-1)$-dimensionalen Fall den Ausdruck

$$w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N})$$

und berechnen die Wirkung des Operators d auf diese Grösse. Dann wird

$$w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\bar{N} = k! \sum_{s=k+1}^{n} (-1)^{s-k} \bar{H}^s \, d\bar{A}\, w^j e_j \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_s \wedge \cdots \wedge e_n$$
$$= k!\,(-1)^{k-1} (\bar{H}, w)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung legen wir nun das n-Bein $e_1, \ldots, e_n$ genauer fest. Wie für Hyperflächen berechnet man

$$\underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(k)} = \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k)} - k \cdot v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)}$$

somit

$$v \wedge \underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(k)} = v \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k)}$$

also

$$d\bar{A} \wedge v \wedge \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_k = d\bar{A} \wedge v \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k,$$

woraus folgt, dass der Vektorraum aufgespannt von $v, \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k$ derselbe ist wie derjenige, aufgespannt von $v, e_1, \ldots, e_k$. In den Punkten $\bar{p} \notin \bar{S}$ wählen wir nun das n-Bein $e_1, \ldots, e_n$ so, dass $e_1, \ldots, e_{k+1}$ im Vektorraum aufgespannt von $v, e_1, \ldots, e_k$ und die $e_\alpha (1 \leqslant \alpha \leqslant k)$ im Tangentialraum von $\bar{F}^k$ liegen. Dann können wir für $s \geqslant k+2$ die $\tilde{e}_s$ so wählen, dass $\tilde{e}_s = e_s$, womit $\tilde{e}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{n}^i e_i$ wird.

Mit diesen Festsetzungen wird

$$\tilde{N} = \tilde{e}_{k+1} \wedge e_{k+2} \wedge \cdots \wedge e_n$$

und

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= w^j e_j \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge d\tilde{e}_{k+1} \wedge e_{k+2} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ \sum_{s=k+2}^{n} w^j e_j \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge \tilde{e}_{k+1} \wedge \cdots \wedge de_s \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Mit $d\tilde{e}_{k+1} = -b'^i_\alpha \sigma^\alpha \wedge e_i$, $de_s = \omega^i_{s\alpha} \sigma^\alpha \wedge e_i$, $i \neq s$, $s \geqslant k+2$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= (-1)^k \{ w^j b'^i_\alpha \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_j \wedge e_i \wedge e_{k+2} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &- w^j \omega^i_{s\alpha} \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_j \wedge \tilde{e}_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_{s-1} \\ &\wedge e_i \wedge e_{s+1} \wedge \cdots \wedge e_n \} \end{aligned}$$

In dieser Formel ist der zweite Summand rechts gleich Null, da $w^j = 0$ und $\tilde{n}^j = 0$ für $j \geqslant k+2$ und zudem $i \neq s$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= (-1)^{k-1} w^{k+1} b'^\beta_\alpha \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_\beta \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ (-1)^k w^\alpha b'^{k+1}_\alpha \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_\alpha \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= (-1)^{k-1} (k-1)!\, w^{k+1} \Big(\sum_\alpha b'^\alpha_\alpha\Big)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ (-1)^k (k-1)!\, b'^{k+1}_\alpha w^\alpha\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt wiederum im R^n

$$d\tilde{e}_{k+1} = -b'^i_j \sigma^j \wedge e_i = -\tilde{b}^i_j \tilde{\sigma}^j \wedge e_i,$$

zudem ist $(e_{k+2}, \ldots, e_n) = (\tilde{e}_{k+2}, \ldots, \tilde{e}_n)$ und $\tilde{b}^{k+1}_{k+1} = 0$, woraus man

$$\sum_\alpha b'^\alpha_\alpha + b'^{k+1}_{k+1} = \sum_\alpha \tilde{b}^\alpha_\alpha = k \tilde{H}^{k+1}$$

erhält, wobei $\tilde{H}^{k+1}$ die $(k+1)$. Komponente von $\tilde{H}$ in der Darstellung

$$\tilde{H} = \tilde{H}^i e_i$$

ist. Zusammenfassend haben wir damit gezeigt

$$\begin{aligned} w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \wedge d\tilde{N} = (-1)^{k-1}\, k!\, (w, e_{k+1})\, (\tilde{H}, \tilde{e}_{k+1})\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + (-1)^k (k-1)!\, w^j b'^{k+1}_j\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung verläuft nun gleich wie bei Hyperflächen. Aus

$$v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-1)} = (k-1)!\, (d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k - d\tilde{A} \wedge \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_k)$$

folgt

$$v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) = (k-1)!\, (d\bar{A} + d\tilde{A})\, (1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

wobei wir $\bar{n}$ für e_{k+1} und $\tilde{n}$ für $\tilde{e}_{k+1}$ gesetzt haben. Ausserdem ist mit

$$dv = v^i_\alpha \sigma^\alpha \wedge e_i$$

$$dv \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge \bar{N} = (k-1)!\, (\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

und

$$\begin{aligned} dv \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge \tilde{N} = (k-1)!\, (\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)\, \tilde{n}^{k+1}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ - (k-1)!\, \tilde{n}^\alpha v^{k+1}_\alpha\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Mit $dw = e^f\, dv + e^f\, df \wedge v$ folgt daraus

$$\begin{aligned} dw \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) = e^f (k-1)! \cdot (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\, (\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + e^f (k-1)! \cdot \tilde{n}^\alpha v^{k+1}_\alpha\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + e^f (k-1)! \cdot (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\, (d\bar{A} + d\tilde{A}) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Fassen wir nun diese Rechnungen zusammen. Wir haben

$$\begin{aligned} d\big(w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) \\ = dw \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) + (-1)^{k-1}\, w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \wedge d(\bar{N} - \tilde{N}), \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} d\big(w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N})\big) \\ = k!\, (w, \bar{n})\, \{(\bar{H}, \bar{n}) - (\tilde{H}, \tilde{n})\}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + (k-1)!\, e^f (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\, (d\bar{A} + d\tilde{A})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ + (k-1)!\, e^f \{(1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\, (\sum_\alpha v^\alpha_\alpha) + \tilde{n}^\alpha v^{k+1}_\alpha + v^j b'^{k+1}_j\}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Der Ausdruck $D=(1-(\bar{n},\tilde{n}))\,(\sum_{\alpha} v_{\alpha}^{\alpha})+\tilde{n}^{\alpha} v_{\alpha}^{k+1}+v^{j} b_{j}^{\prime k+1}$ lässt sich wieder umformen zu

$$D=(1-(\bar{n},\tilde{n}))\,(\sum_{j=1}^{k+1} v_{j}^{j})+(\mathscr{L}_{v}(\bar{n}-\tilde{n}),\bar{n})$$

und wird für konforme Abbildungen nach genau gleicher Rechnung wie bei Hyperflächen

$$D=k\cdot(1-(\bar{n},\tilde{n}))\cdot\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^{2}(0,\bar{p})}.$$

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir daraus für konforme Transformationsgruppen $\Phi(t,p)$ die folgende Integralformel:

$$\int_{\partial\bar{F}^{k}} \text{on}(w\wedge d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}\wedge(\bar{N}-\tilde{N}))$$

$$=k!\int_{\bar{F}^{k}}\{(\bar{H},\bar{n})-(\tilde{H},\tilde{n})\}\,(w,\bar{n})\,d\bar{A}$$

$$+(k-1)!\int_{\bar{F}^{k}} e^{f}(1-(\bar{n},\tilde{n}))\left\{d\bar{A}+d\tilde{A}+k\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^{2}(0,\bar{p})}\,d\bar{A}\right\}.$$

Falls nun $\bar{F}^{k}$ geschlossen ist und wir voraussetzen, dass für alle Punkte $\bar{p}\notin\bar{S}$ $(\bar{H},\bar{n})=(\tilde{H},\tilde{n})$ ist und $\psi'(0,\bar{p})$ von konstantem Vorzeichen auf $\bar{F}^{k}$ ist, folgt aus dieser Integralformel wie bei Hyperflächen $\bar{n}=\tilde{n}$ und daraus $f(p)=$konst. auf F^{k}.

Die Voraussetzung $(\bar{H},\bar{n})=(\tilde{H},\tilde{n})$ bedeutet dabei, dass die beiden mittleren Krümmungen, bezogen auf die im Vektorraum aufgespannt vom Tangentialraum an die Fläche $\tilde{F}_{p}^{k}$ bzw. $\bar{F}_{p}^{k}$ und dem Strömungsvektor v liegenden Normalen, gleich sind.

Zusammenfassend haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

F^{k} und $\bar{F}^{k}$ seien zwei geschlossene, orientierte k-dimensionale Flächen in einem Riemannschen Raum R^{n}, die durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ unter Erhaltung der Orientierung mit Hilfe einer Funktion $f(p)$ auf F^{k} so aufeinander abgebildet sind, dass

$$\bar{F}^{k}=\{\Phi(f(p),p)\mid p\in F^{k}\};$$

zudem seien zu jedem Punkt $p_{0}\in F^{k}$ Flächen $\tilde{F}_{p_{0}}^{k}$ folgendermassen definiert:

$$\tilde{F}_{p_{0}}^{k}=\{\Phi(f(p_{0}),p)\mid p\in F^{k}\}$$

$\bar{H}$ und $\tilde{H}$ seien die entsprechenden mittleren Krümmungsvektoren in $\bar{p}$, $\bar{S}$ sei die Menge der Punkte $\bar{p}$, in denen der Tangentialvektor v an die Stromlinien $\Phi(t,\bar{p})-\varepsilon<t<+\varepsilon$ im Tangentialraum von $\bar{F}^{k}$ liegt. In den Punkten $\bar{p}\notin\bar{S}$ seien $\bar{n}$ bzw. $\tilde{n}$ die Normalen an die Fläche $\bar{F}^{k}$ bzw. $\tilde{F}_{p}^{k}$, die im Vektorraum aufgespannt von den Tangentialvektoren von $\bar{F}^{k}$ und dem Vektor v liegen.

Falls dann S nirgends dicht auf F^k liegt sowie $(\bar{H}, \bar{n}) = (\tilde{H}, \tilde{n})$ für jeden Punkt $\bar{p} \notin S$ gilt, und $\Phi(t, p)$ eine konforme Transformationsgruppe mit $\psi'(0, \bar{p}) \geqslant 0$ (bzw. $\leqslant 0$) auf F^k ist, wobei $\psi(t, p) = \sqrt{\varphi(t, p)}$ und $\varphi(t, p)$ der in der Definition der konformen Abbildung auftretende Faktor ist, so ist $f(p) =$ konstant, d.h. F^k und $\bar{F}^k$ sind kongruent bezüglich der Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$.

LITERATUR

[1] H. HOPF und K. VOSS, *Ein Satz aus der Flächentheorie im Grossen*, Archiv der Mathematik *3* (1952), 187–192.

[2] K. VOSS, *Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen*, Math. Annalen *131* (1956), 180–218.

[3] A. AEPPLI, *Einige Ähnlichkeits- und Symmetriesätze für differenzierbare Flächen im Raum*. Comment. Math. Helv. *33* (1959), 174–195.

[4] Y. KATSURADA, *Some Congruence Theorems for Closed Hypersurfaces in Riemann spaces*, I, Comment. Math. Helv. *43* (1968), 176–194.

[5] H. FLANDERS, *Development of an Extended Exterior Differential Calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. *75* (1953), 311–326.

[6] R. E. STONG, *Some Differential Geometric Properties of Submanifolds of Euclidean Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. *12* (1961), 343–349.

[7] S. STERNBERG, *Lectures on Differential Geometry* (Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1964).

Eingegangen den 7. Mai 1968

Über eine Klasse von Polyederfunktionalen

PETER SCHERK

Ein *konvexes Polyeder* im k-dimensionalen euklidischen Raume E^k ist die konvexe Hülle einer endlichen nicht leeren Punktmenge. Ein *Polyeder* ist die Vereinigungsmenge von endlich vielen konvexen Polyedern gleicher Dimension in E^k. Diese Dimension heißt die Dimension des Polyeders. Bezeichne

$$\Pi^k = \{A, B, \ldots\}$$

die Menge der Polyeder in E^k.

Ein *Polyederfunktional* φ ordnet jedem $A \in \Pi^k$ eine reelle Zahl $\varphi(A)$ zu. Wir nennen φ *bewegungsinvariant*, wenn $\varphi(A) = \varphi(B)$, falls A und B kongruent sind. Gilt

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

für alle A, B in Π^k mit

$$\dim A = \dim B = 1 + \dim(A \cap B),$$

so nennen wir φ *additiv*; vgl. jedoch **(1**, S. 36**)**. Schließlich nennen wir φ *homogen* vom Grade m, wenn

$$\varphi(\lambda A) = \lambda^m \varphi(A) \quad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und alle } A \in \Pi^k.$$

Hier entsteht λA aus A durch eine Streckung am Ursprung im Verhältnis $1:\lambda$.

Die Polyederfunktionale in Π^k, die bewegungsinvariant, additiv und homogen vom Grade m sind, bilden einen Vektorraum Φ^k_m, dessen Nullvektor das Funktional 0 ist, welches jedes Polyeder auf die Zahl 0 abbildet. Bezeichne $\Phi^k_{m\,h}$ den Unterraum aller $\varphi \in \Phi^k_m$, für die $\varphi(A) = 0$, wenn $\dim A < h$. Wir beweisen

SATZ I:

$$\dim \Phi^k_m = \begin{cases} 0 & m \notin \{0, 1, \ldots, k\} \\ 1 \quad \textit{für} & m \in \{0, k-1, k\}; \quad \text{vgl. (1, S. 79)} \\ \infty & m \in \{1, 2, \ldots, k-2\}; \quad \text{vgl. (1, S. 50).} \end{cases}$$

In der obersten Zeile braucht m nicht ganz zu sein.

Wegen Satz I können wir die Untersuchung der Vektorräume Φ^k_m auf die Fälle

$$m \in \{1, 2, \ldots, k-2\} \tag{1}$$

beschränken. Aus ihm folgt

$$\{0\} = \Phi^k_{m,\,k+1} \subset \Phi^k_{m\,k} \subset \cdots \subset \Phi^k_{m,\,m+1} \subset \Phi^k_{m\,m} = \Phi^k_m. \tag{2}$$

Hadwiger bewies **(1**, 66**)**, – und wir werden einen zweiten Beweis dieses Satzes vorschlagen, –

SATZ II: $\Phi^k_{m\,k} = \{0\}$ *für* $m \equiv k-1 \pmod 2$, $1 \leqslant m \leqslant k-2$.

Wegen Satz II kann man (2) leicht verschärfen zu

$$\Phi^k_m \supset \Phi^k_{m,\,m+1} = \Phi^k_{m,\,m+2} \supset \Phi^k_{m,\,m+3} = \Phi^k_{m,\,m+4} \supset \cdots, \tag{3}$$

wo jedes zweite Mal das Gleichheitszeichen steht. Es erhebt sich somit die Frage nach der Struktur des Diagramms

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & & & \Phi^{m+2}_{m,\,m+2} = \Phi^{m+2}_{m,\,m+1} & \subset \Phi^{m+2}_{m\,m} \\
 & & \{0\} = \Phi^{m+3}_{m,\,m+3} & \subset \Phi^{m+3}_{m,\,m+2} = \Phi^{m+3}_{m,\,m+1} & \subset \Phi^{m+3}_{m\,m} \\
 & \Phi^{m+4}_{m,\,m+4} = \Phi^{m+4}_{m,\,m+3} & \subset \Phi^{m+4}_{m,\,m+2} = \Phi^{m+4}_{m,\,m+1} & & \subset \Phi^{m+4}_{m\,m} \\
\{0\} = \Phi^{m+5}_{m,\,m+5} & \subset \Phi^{m+5}_{m,\,m+4} = \Phi^{m+5}_{m,\,m+3} & \subset \Phi^{m+5}_{m,\,m+2} = \Phi^{m+5}_{m,\,m+1} & & \subset \Phi^{m+5}_{m\,m}
\end{array}$$

Man zeigt leicht

SATZ III: $\dim(\Phi^k_m/\Phi^k_{m,\,m+1}) = 1$ *für* $k > m+1$.

Wir ordnen jetzt jedem Polyederfunktional φ *in* E^k *das Funktional*

$$L\varphi = \varphi|_{E^{k-1}}$$

zu. Dann zeigt man

SATZ IV: *Sei* $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. *Dann gilt*

(i) $\Phi^k_{m,\,k-h} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,\,k-h}$ *für* $k \equiv m+1 \pmod 2$

(ii) $\Phi^k_{m,\,k-h}/\Phi^k_{m\,k} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,\,k-h}$ *für* $k \equiv m \pmod 2$.

KOROLLAR V: *Sei h gerade;* $2 \leqslant h \leqslant k-m-2$. *Dann ist*

$$\Phi^k_{m,\,m+h}/\Phi^k_{m,\,m+h+2} \simeq \Phi^{m+h}_{m,\,m+h}. \tag{4}$$

Insbesondere hat der Quotientenraum (4) *unendliche Dimension.*

1. Zylinder in E^k

Der Beweis von Satz I benutzt im wesentlichen Ideen, die bereits in **(1)** dargestellt sind. Wir skizzieren daher nur die Schritte.

Hier und im folgenden bezeichne I^h den h-dimensionalen Einheitswürfel; $h = 1, 2, \ldots, k$. Überdies sei I^0 ein Punkt. Man bestätigt leicht

LEMMA 1.1: *Sei* φ *ein additives bewegungsinvariantes Funktional. Sei r eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$\varphi(r\,I^h) = r^h\,\varphi(I^h) - \binom{h}{1}(r-1)\,r^{h-1}\,\varphi(I^{h-1}) + \binom{h}{2}(r-1)^2\,r^{h-2}\,\varphi(I^{h-2}) \mp \cdots + (-1)^h\,(r-1)^h\,\varphi(I^0).$$

Aus Lemma 1.1 folgt unmittelbar

KOROLLAR 1.2: *Sei* $\varphi \in \Phi_m^k$. *Sei* $m \notin \{0, 1, \ldots, k\}$ *oder* $\varphi(I^k) = 0$. *Dann gilt*

$$\varphi(I^h) = 0 \quad \text{für } h = 0, 1, \ldots, k.$$

Mit Hilfe dieses Korollars und unter Benutzung der Additivität von φ beweist man

LEMMA 1.3: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(A) = 0$ *für jedes rechtwinklige Parallelotop* A.

Schließlich folgt aus Lemma 1.3 mittels einer Routinekonstruktion

LEMMA 1.4: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(A) = 0$ *für jedes Parallelotop* A.

Die Definition der h-Zylinder findet sich in (**1**; S. 19). Bezeichne Z_h^k die Klasse der h-Zylinder in E^k, also

$$Z_k^k \subset Z_{k-1}^k \subset \cdots \subset Z_2^k \subset Z_1^k = \Pi^k,$$

Da jedes Dreieck sich durch ein kongruentes zu einem Parallelogramm ergänzen läßt, folgt aus Lemma 1.4 sofort

LEMMA 1.5: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(Z_{k-1}^k) = 0$.

Mittels der Hadwigerschen Simplotope (**1**; 17) zeigt man

LEMMA 1.6: *Sei* $\varphi \in \Phi_m^k$. *Gilt*

$$\varphi(Z_{h-1}^{k-1}) = \varphi(Z_{h+1}^k) = 0$$

und ist $h \neq m$, *so gilt* $\varphi(Z_h^k) = 0$. [*für* $h = 1$ *setzen wir* $Z_0^{k-1} = \Pi^{k-1}$].

BEMERKUNG 1.7: Aus den beiden letzten Lemmas folgt, daß $\varphi(\Pi^k) = 0$, wenn $\varphi \in \Phi_m^k$ und entweder (i) $m \notin \{0, 1, \ldots, k\}$ oder (ii) $m \in \{0, k-1, k\}$ und $\varphi(I^k) = 0$. Hieraus und aus der Existenz von Volumen und Oberfläche ergeben sich sofort die beiden ersten Teile von Satz I. Die Fälle $m = k-1$ und $m = k$ finden sich bereits in (**1**, S. 79). Für $m = k$ setzt Hadwiger statt der Bewegungsinvarianz sogar nur die Translationsinvarianz voraus.

Für den Rest dieser Arbeit dürfen wir voraussetzen, daß

$$m \in \{1, 2, \ldots, k-2\}.$$

2. Abschluß des Beweises von Satz I

LEMMA 2.1: $\dim \Phi_{m\,k}^k = \infty$ *für* $m \equiv k \pmod 2$.

Beweis: (**1**, S. 50).

Wir benutzen hier und später die folgende *Konvention*: Ist $A \in \Pi^k$, so durchläuft A_i^h die h-dimensionalen Seiten von A.

LEMMA 2.2: $\dim \Phi_{m,k-1}^k = \infty$ *für* $m \equiv k+1 \pmod 2$.

Der Beweis benutzt ein Argument, das wir später verallgemeinern werden. Jedem

$\psi \in \Phi^{k-1}_{m,k-1}$ ordnen wir mittels

$$\varphi(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum \psi(A_i^{k-1}) & \text{für } \dim A = k \\ \psi_{(A)} & \dim A < k \end{cases}$$

ein Funktional φ in Π^k zu. Offensichtlich ist φ bewegungsinvariant und homogen vom Grade m. Da $\psi(A)=0$ für $\dim A<k-1$, gilt das gleiche für φ. Hieraus folgt leicht die Additivität von φ. Somit ist $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. Da die Abbildung $\psi \to \varphi$ eineindeutig ist, ergibt sich hieraus unsere Behauptung.

Mit den Lemmas 2.1 und 2.2 ist Satz I bewiesen.

3. Über einen zweiten Beweis von Satz II

Die Ortsvektoren $a_1, \ldots, a_k$ seien linear unabhängig. Sei

$$B_t = \left\{ \sum_1^k \lambda_i a_i \,\middle|\, \sum \lambda_i \leqslant t; \quad 0 \leqslant \lambda_h \leqslant 1 \text{ für alle } h \right\}; \qquad t = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.1}$$

Dann ist also

$$B_1 = S^k = \left\{ \sum_1^k \lambda_i a_i \,\middle|\, \sum \lambda_i \leqslant 1; \quad \lambda_h \geqslant 0 \text{ für alle } h \right\} \tag{3.2}$$

ein k-Simplex, und B_k ist ein Parallelotop. Man bestätigt sofort, daß

$$B_t \cup \left(\sum_1^k a_i - B_{k-t} \right) = B_k$$

und

$$\dim \left[B_t \cap \left(\sum_1^k a_i - B_{k-t} \right) \right] \leqslant k - 1.$$

Nehmen wir also das von Satz II unabhängige Lemma 4.5 vorweg, so folgt aus Lemma 1.4

LEMMA 3.1: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{mk}$. *Dann gilt*

$$\varphi(B_t) + \varphi(B_{k-t}) = \varphi(B_k) = 0; \qquad t = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Man bestätigt unschwer

LEMMA 3.2: *Sei* $1 \leqslant t \leqslant k$. *Dann ist*

$$t S^k = \bigcup_{h=0}^{t-1} \bigcup_{\Sigma p_i = h} \left(\sum_1^k p_i a_i + B_{t-h} \right),$$

wo die p_i *die nichtnegativen ganzen Zahlen durchlaufen.*

Aus Lemma 3.2 folgt unmittelbar

KOROLLAR 3.3: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m\,k}$. Dann gilt

$$t^m \varphi(S^k) = \sum_{h=0}^{t-1} \binom{k+h-1}{h} \varphi(B_{t-h}); \quad t = 1, 2, \ldots, k.$$

Wir geben an ohne Beweis

LEMMA 3.4: *Sei* $k \geq m+3, k \equiv m+1 \pmod 2$. *Dann hat das homogene lineare Gleichungssystem*

$$\left.\begin{aligned} t^m \xi_1 &= \sum_{h=0}^{t-1} \binom{k+h-1}{h} \xi_{t-h}; \quad t = 2, 3, \ldots, k \\ \xi_t + \xi_{k-t} &= 0; \qquad\qquad t = 1, 2, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

nur die triviale Lösung.

BEMERKUNG: Aus Lemmas 2.1. und 3.3 folgt, daß (3.3) nichttriviale Lösungen hat, wenn $k \geq m+3, k \equiv m \pmod 2$.

Sei jetzt $\varphi \in \Phi^k_{m,k}$, $m \equiv k-1 \pmod 2$, $k > m+1$. Dann folgt aus Lemma 3.1, Korollar 3.3 und Lemma 3.4, daß $\varphi(S^k)=0$; vgl. (3.2). Da S^k ein beliebiger k-dimensionaler Simplex sein kann, ist $\varphi(A)=0$ für beliebige konvexe Polyeder A der Dimension k, somit auch für alle Polyeder. Hiermit ist Satz II auf Lemma 3.4 zurückgeführt.

KOROLLAR 3.5: *Formel* (3) *der Einleitung.*

Beweis: Sei h ungerade, $1 \leq h \leq k-m-1$; $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$. *Wenden wir Satz* I *für* $h=1=$ *und Satz* II *für* $h>1$ *an, so erhalten wir*

$$\varphi|_{E^{m+h}} \in \Phi^{m+h}_{m,m+h} = \{0\}.$$

Somit ist

$$\varphi \in \Phi^k_{m,m+h+1}.$$

4. Eine Kennzeichnung der Vektorräume Φ^k_{mh}

Offensichtlich gilt

LEMMA 4.1: *Sei* φ *additiv und bewegungsinvariant,* $\varphi(Z^k_h)=0$. *Dann ist* $\varphi(Z^{k-1}_{h-1})=0$.

KOROLLAR 4.2: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Für ein* $h \leq k-m$ *gelte* $\varphi(Z^k_{k-h})=0$. *Dann ist* $\varphi(Z^{m+h}_m)=0$.

LEMMA 4.3: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Für ein* $h \leq m$ *sei* $\varphi(Z^k_h)=0$. *Dann ist* $\varphi=0$.

Der Beweis benutzt doppelte Induktion nach k und h. Nach Lemma 4.1 ist $\varphi(Z^{k-1}_{h-1})=0$. Aus der Induktionsannahme für k bzw. aus Bemerkung 1.7 folgt daher, daß $\varphi(\Pi^{k-1})=0$. Jetzt leistet Lemma 1.6 den Induktionsschritt von $h-1$ nach h.

Aus Korollar 4.2 und Lemma 4.3 erhalten wir

LEMMA 4.4: *Sei* $h \leq k-m$. *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$, $\varphi(Z^k_{k-h})=0$. *Dann ist* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h+1}$.

Wir besprechen jetzt eine Umkehrung von Lemma 4.4. Zunächst der Fall $h=1$.

LEMMA 4.5: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+1}$. *Dann ist* $\varphi(Z^k_{k-1})=0$.

Beweis: Voraussetzungsgemäß ist $\varphi(I^h)=0$ für $h=0,1,\ldots,m$. Aus Lemma 1.1 folgt, daß $\varphi(I^h)$ auch für $h=m+1,\ldots,k$ verschwindet. Lemma 1.5 ergibt dann die Behauptung.

LEMMA 4.6: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$, *wo* $h \leqslant k-m$ *und ungerade. Dann ist* $\varphi(Z^k_{k-h})=0$.

Beweis: Nach Lemma 4.5 ist diese Behauptung richtig für $h=1$. Sie sei bis $h-2$ bewiesen. Sei h jetzt fest. Ist $k=m+h$, so folgt die Behauptung aus Satz II. Die Induktion nach k wird durch zweimalige Anwendung von Lemma 1.6 ausgeführt.

Wir fassen Lemmas 4.4. und 4.6 zusammen.

SATZ 4.7: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Sei* $h \leqslant k-m$ *und ungerade; vgl.* (3). *Dann gilt*

$$\varphi \in \Phi^k_{m,m+h} \Leftrightarrow \varphi(Z^k_{k-h}) = 0\,.$$

KOROLLAR 4.8: $\Phi^k_{m,m+1}=\{\varphi \in \Phi^k_m \mid \varphi(I^k)=0\}$.

Beweis: vgl. Lemma 1.5.

5. Der Kern von L

Sei $0<h<k-m$. Wir definierten den Homomorphismus

$$\mathrm{L}: \Phi^k_{m,m+h} \to \Phi^{k-1}_{m,m+h}\,,$$

indem wir jedem $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$ das Funktional

$$\mathrm{L}\varphi = \varphi|_{E^{k-1}} \in \Phi^{k-1}_{m,m+h}$$

zuordneten. Wir bestätigen zunächst einen Sonderfall von Satz IV.

LEMMA 5.1: *Sei* $k \equiv m+1 \pmod 2$, $k>m+1$. *Dann gilt*

$$\Phi^k_{m,k-1} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,k-1}\,.$$

Beweis: Für jedes $\psi \in \Phi^k_{m,k-1}$ definieren wir $L^{-1}\psi$ mittels

$$(L^{-1}\psi)(A) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum \psi(A^{k-1}_i) & \text{für } \dim A = k; \\ \psi(A) & \dim A < k. \end{cases} \tag{5.1}$$

Dann folgt aus dem Beweis von Lemma 2.2, daß L^{-1} ein Monomorphismus von $\Phi^{k-1}_{m,k-1}$ in $\Phi^k_{m,k-1}$ ist. Offensichtlich ist $LL^{-1}\psi=\psi$.

Ist $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$, so ist durch

$$\chi(A) = \begin{cases} \varphi(A) - \frac{1}{2}\sum \varphi(A^{k-1}_i) & \text{für } \dim A = k \\ 0 & \dim A < k \end{cases}$$

ein Funktional $\chi \in \Phi^k_{m,k}$ definiert. Nach Satz II ist $\chi=0$. Somit ist $\varphi=L^{-1}L\varphi$, und L^{-1} ist ein Isomorphismus von $\Phi^{k-1}_{m,k-1}$ auf $\Phi^k_{m,k-1}$ mit der Inversen L.

KOROLLAR 5.2: *Sei* $k \equiv m+1 \pmod 2$, $k > m+1$, $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. *Dann gilt*

$$\varphi(A) = \tfrac{1}{2} \sum \varphi(A_i^{k-1}) \quad \text{für } \dim A = k.$$

LEMMA 5.3: *Sei* $k > m+1$. *Dann gilt*

$$\ker L = \begin{cases} 0 & \text{für } k \equiv m+1 \pmod 2 \\ \Phi^k_{mk} & \text{für } k \equiv m \pmod 2. \end{cases}$$

Beweis: Sei

$$\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}, \qquad L\varphi = 0.$$

Dann ist insbesondere $\varphi(Z_m^{k-1}) = 0$.

Ist h ungerade, so ist nach Satz 4.7 $\varphi(Z^k_{k-h}) = 0$. Ist h gerade, so folgt aus (3) und Satz 4.7, daß wenigstens $\varphi(Z^k_{k-h+1}) = 0$. In beiden Fällen erhalten wir mittels wiederholter Anwendung von Lemma 1.6, daß

$$0 = \varphi(Z^k_{k-h+1}) = \varphi(Z^k_{k-h}) = \cdots = \varphi(Z^k_{m+1}).$$

Nach Satz 4.7 ist daher $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. Unsere Behauptung ergibt sich somit für $k \equiv m+1 \pmod 2$ aus Lemma 5.1 und für $k \equiv m \pmod 2$ aus Satz II mit $k-1$ statt k und aus (3).

6. Die Quermassintegrale

Bezeichne Π'^k die Menge der konvexen Polyeder in E^k. Ferner bezeichne Φ'^k_m bzw. Φ'^k_{mh} den Vektorraum der auf Π'^k definierten additiven bewegungsinvarianten Funktionale, die homogen vom Grade m sind, [und die für jedes $A \in \Pi'^k$ mit $\dim A < h$ verschwinden].

LEMMA 6.1: *Ist* $\varphi' \in \Phi'^k_m$ [*Ist* $\varphi' \in \Phi'^k_{mh}$], *so gibt es ein und nur ein* $\varphi \in \Phi^k_m$ [*ein und nur ein* $\varphi \in \Phi^k_{mh}$], *so daß* $\varphi|_{\Pi'^k} = \varphi'$.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus einer Konstruktion von VOLLAND; vgl. **(2)**.

Beweis von Satz III. Liegen φ und ψ in $\Phi^k_m \backslash \Phi^k_{m,m+1}$, so sind $\varphi(I^k)$ und $\psi(I^k)$ von 0 verschieden. Ferner ist

$$\chi = \psi(I^k) \cdot \varphi - \varphi(I^k) \cdot \psi \in \Phi^k_m.$$

Wegen $\chi(I^k) = 0$ ist $\chi \in \Phi^k_{m,m+1}$; vgl. Korollar 4.8. Somit ist

$$\dim(\Phi^k_m / \Phi^k_{m,m+1}) \leqslant 1.$$

Das $(k-m)$-te Quermassintegral φ'^k_m liegt in Φ'^k_m. Nach Lemma 6.1 läßt es sich auf genau eine Weise zu einem Funktional $\varphi^k_m \in \Phi^k_m$ erweitern. Wegen

$$\varphi^k_m(I^k) = \varphi'^k_m(I^k) \neq 0$$

ist

$$\varphi^k_m \in \Phi^k_m \backslash \Phi^k_{m,m+1}.$$

Hiermit ist Satz III bewiesen.

Definitionsgemäß ist $\varphi^h_h(A^h_i)$ das h-dimensionale Volumen von A^h_i.

Sei $A \in \Pi'^k$; $\dim A > h$. Wir legen durch einen relativ inneren Punkt p von A_i^h das $(k-h)$-flach E^{k-h} senkrecht zu A_i^h; also $E^{k-h} \cap A \in \Pi'^{k-h}$. Die Strahlen von p nach den Punkten von $(E^{k-h} \cap A) \setminus \{p\}$ bilden einen konvexen Kegel. Wir konstruieren den in E^{k-h} zu diesem polaren Kegel und schneiden letzteren mit dem Einheitsball um p. Bezeichne $\lambda_{h\,i}^k(A)$ das Volumen dieses $(k-h)$-dimensionalen Durchschnittes. Indem wir φ_h^k umnormieren, nämlich mit $\binom{k}{h}$ multiplizieren, können wir dann wegen der Steinerschen Formel (**1**; S. 214) setzen

$$\varphi_h^k(A) = \sum_i \lambda_{h\,i}^k(A) \cdot \varphi_h^h(A_i^h); \qquad h = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{6.1}$$

Wir beachten, daß

$$\lambda_{k-1,\,i}^k(A) = 1 \qquad \text{für } \dim A = k. \tag{6.2}$$

Im folgenden bezeichne ω_h das Volumen des h-dimensionalen Einheitsballes. Man bestätigt leicht

LEMMA 6.2: *Sei* $A \in \Pi'^{k-1}$; $1 \leqslant h \leqslant \dim A$. *Dann gilt*

$$\lambda_{h\,i}^k(A) = \frac{\omega_{k-h}}{\omega_{k-h-1}} \cdot \lambda_{h\,i}^{k-1}(A).$$

Ist $\dim A = h+1$, *so folgt wegen* $\omega_1 = 2$ *aus Lemma* 6.2 *und Formel* (6.2), *daß*

$$\lambda_{h\,i}^k(A) = \frac{\omega_{k-h}}{\omega_{k-h-1}} \cdot \frac{\omega_{k-h-1}}{\omega_{k-h-2}} \cdots \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \lambda_{h\,i}^{h+1}(A) = \tfrac{1}{2}\omega_{k-h}. \tag{6.3}$$

Lemma 6.3: *Sei* $m < h < k$, *sei* $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$. *Für alle* $A \in \Pi'^k$ *setzen wir*

$$\varphi'(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_{k-h}} \displaystyle\sum_i \lambda_{h\,i}^k(A)\, \psi(A_i^h) & \text{für } \dim A > h \\ \psi(A) & \text{für } \dim A \leqslant h. \end{cases} \tag{6.4}$$

Dann ist durch (6.4) *gemäß Lemma* 6.1 *ein Funktional* $\varphi \in \Phi_{m\,h}^h$ *definiert.*

Beweis: Mit ψ ist φ' bewegungsinvariant und homogen vom Grade m. Es bleibt die Additivität von φ' nachzuprüfen.

Sei

$$\{A, B, C\} \subset \Pi'^k,\ A \cup B = C,\ A \cap B = D,$$
$$\dim A = \dim B = 1 + \dim D.$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$\varphi'(A) + \varphi'(B) - \varphi'(C) - \varphi'(D) = 0. \tag{6.5}$$

Für $\dim A \leqslant h$ ist die Additivität von φ' trivial. Sei zunächst $\dim A > h+1$.

(i) Kommt eine Seite C_i^h etwa nur als Seite von A vor, so haben C_i^h und das entsprechende A_i^h den gleichen Koeffizienten $\lambda_{h\,i}^k$.

(ii) Sei $C_i^h = A_i^h \cup B_i^h$, $\dim(C_i^h \cap D) < h$. Dann ist wegen $\psi|_{E^{h-1}} = 0$

$$\psi(C_i^h) = \psi(A_i^h) + \psi(B_i^h).$$

Ferner ist dann

$$\lambda_{h\,i}^k(C) = \lambda_{h\,i}^k(A) = \lambda_{h\,i}^k(B).$$

(iii) Jedes D_i^h ist auch ein A_i^h und ein B_i^h. Tritt D_i^h nicht als h-dimensionale Seite von C auf, so definieren wir $\lambda_{h\,i}^k(C) = 0$. Dann folgt aus der Definition der $\lambda_{h\,i}^k$, daß stets

$$\lambda_{h\,i}^k(A) + \lambda_{h\,i}^k(B) = \lambda_{h\,i}^k(C) + \lambda_{h\,i}^k(D).$$

In allen drei Fällen ist der Beitrag der entsprechenden h-dimensionalen Seiten zur linken Seite von (6.5) gleich null.

Es bleibt der Fall, daß $\dim A = h+1$, also $\dim D = h$. Dann wird etwa $D = A_j^h = B_j^h$, jedoch ist D nicht Seite von C. Da (i) und (ii) gültig bleiben, folgt aus (6.3), daß die linke Seite von (6.5) gleich

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\psi(A_i^h) + \psi(B_i^h) - \psi(C_i^h)\right) + \left(\tfrac{1}{2} \cdot 2\psi(D) - \varphi'(D)\right) = \tfrac{1}{2} \sum 0 + 0 = 0$$

ist.

7. Beweis von Satz IV

Ist $1 \leqslant h < \dim A < k$, so ist nach Lemma 6.2

$$\mu_{h\,i}(A) = \frac{1}{\omega_{k-h}} \lambda_{h\,i}^k(A) = \frac{1}{\omega_{k-h-1}} \lambda_{h\,i}^{k-1}(A) = \cdots \tag{7.1}$$

unabhängig von k. Nach (6.2) ist

$$\mu_{k-1,\,i}(A) = \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \dim A = k. \tag{7.2}$$

Sei jetzt $m < h \leqslant k$, $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$, $A \in \Pi'^k$. Ist $\dim A \leqslant h$, so interpretieren wir den zunächst sinnlosen Ausdruck

$$\sum_i \mu_{h\,i}(A)\, \psi(A_i^h)$$

als $\psi(A)$. Dann können wir Lemma 6.3 folgendermaßen umschreiben:

LEMMA 7.1: *Sei $m < h < k$, $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$. Dann ist durch*

$$\varphi'(A) = \sum_i \mu_{h\,i}(A)\, \psi(A_i^h) \quad \textit{für alle } A \in \Pi'^k$$

ein Funktional $\varphi \in \Phi_{m\,h}^h$ definiert. [*Für den Fall $h = k-1$ vgl.* (7.2) *und* (5.1)].

Wegen Lemma 5.3 folgt Satz IV unmittelbar aus

LEMMA 7.2: *Sei $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. Dann ist*

$$L: \Phi_{m,\,k-h}^k \to \Phi_{m,\,k-h}^{k-1}$$

ein Epimorphismus.

Wir beweisen Lemma 7.2 mittels Induktion nach h gleichzeitig mit

SATZ 7.3: *Sei* $h \equiv k-m \pmod 2$, $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. *Dann gibt es zu jedem* $\varphi \in \Phi^k_{m,k-h}$ *eine eindeutig bestimmte Folge von Funktionalen*

$$\chi_r \in \Phi^{k-h+2r}_{m,k-h+2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{h}{2}\right],$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} \varphi(A) = &\sum_i \mu_{k-h,i}(A)\, \varphi(A_i^{k-h}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant h/2} \sum_i \mu_{k-h+2r,i}(A) \cdot \chi_r(A_i^{k-h+2r}) \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

für alle $A \in \Pi'^k$.

Für $h=1$ erhalten wir Lemma 7.2 aus Satz II für $k \equiv m \pmod 2$ und aus Lemma 5.1 für $k \equiv m+1 \pmod 2$. Satz 7.3 mit $h=1$ folgt aus Korollar 5.2 und (7.2). Unsere Behauptungen seien bis $h-1$ bewiesen.

Zu Lemma 7.2: Sei

$$\psi \in \Phi^{k-1}_{m,k-h} = \Phi^{k-1}_{m,(k-1)-(h-1)}.$$

Ist $h \equiv k-m+1 \pmod 2$, so ist nach (3)

$$\Phi^{k-1}_{m,k-h} = \Phi^{k-1}_{m,k-h+1} \quad \text{und} \quad \Phi^k_{m,k-h} = \Phi^k_{m,k-h+1}.$$

In diesem Falle ergibt sich der Induktionschritt unmittelbar aus der Induktionsannahme für Lemma 7.2.

Sei jetzt $h \equiv k-m \pmod 2$. Dann gibt es nach Induktionsannahme für Satz 7.3 eindeutig bestimmte Funktionale

$$\chi_r \in \Phi^{k-h+2r}_{m,k-h+2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{h-1}{2}\right],$$

so daß das durch

$$\left.\begin{aligned} \chi(A) = &\sum_i \mu_{k-h,i}(A)\, \psi(A_i^{k-h}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant (h-1)/2} \sum_i \mu_{k-h+2r,i}(A) \cdot \chi_r(A_i^{k-h+2r}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

zunächst in Π'^k definierte Funktional χ in Π'^{k-1} mit ψ übereinstimmt. Nach Lemma 7.1 ist $\chi \in \Phi^k_{m,k-h}$. Wegen $L\chi = \psi$ ist hiermit Lemma 7.2, also Satz IV für h bewiesen.

Zu Satz 7.3: Sei $\varphi \in \Phi^k_{m,k-h}$. Wählen wir in (7.4) $\psi = L\varphi$, so erhalten wir

$$L(\varphi - \chi) = 0. \tag{7.5}$$

Ist h ungerade, also $k \equiv m+1 \pmod 2$, so folgt aus (7.5) und Satz IV (i), daß $\varphi = \chi$.

Sei h gerade, also $k \equiv m \pmod 2$. Nach Satz IV (ii) gibt es dann ein eindeutig bestimmtes $\chi_{h/2} \in \Phi^k_{mk}$, so daß $\varphi = \chi + \chi_{h/2}$. In beiden Fällen erhalten wir eine eindeutige Darstellung (7.3).

Beweis von Korollar V. Aus Satz IV folgt, daß

$$\Phi^k_{m,\,m+h}/\Phi^k_{m,\,m+h+1} \simeq \Phi^{k-1}_{m,\,m+h}/\Phi^{k-1}_{m,\,m+h+1}$$

für $1 \leqslant h \leqslant k-m-2$. Ersetzen wir in dieser Formel k der Reihe nach durch $k-1$, $k-2, \ldots, m+h+2$, so erhalten wir

$$\Phi^k_{m,\,m+h}/\Phi^k_{m,\,m+h+1} \simeq \Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h}/\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h+1}. \tag{7.6}$$

Da $h \geqslant 2$ und gerade ist, ist $\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h+1} = \{0\}$ nach Satz II. Nach Lemma 5.1 ist

$$\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h} \simeq \Phi^{m+h}_{m,\,m+h}.$$

Somit ist die rechte Seite von (7.6) isomorph zu $\Phi^{m+h}_{m,\,m+h}$.

LITERATUR

[1] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Berlin, 1957).

[2] W. VOLLAND, *Ein Fortsetzungssatz für additive Eipolyederfunktionale im euklidischen Raum*, Arch. d. Math. *8* (1957), 144–149.

Eingegangen den 6. Mai 1968

Note on Poissson's Treatment of the Euler–Maclaurin Formula[1])

(To Hugo Hadwiger for his 60-th birthday)

By ALEXANDER OSTROWSKI (Basel)

1. In the Euler-Maclaurin Formula

$$\sum_{\mu=p}^{q}{}' f(\mu) = \int_p^q f(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(f^{(2\nu-1)}(q) - f^{(2\nu-1)}(p)\right) + R_n \quad (n \geqq 1), \tag{1}$$

an expression for the remainder term was first given by POISSON [6] 1827. This is

$$R_n = \frac{1}{(2n+1)!}\int_p^q \overline{B_{2n+1}}(t) f^{(2n+1)}(t)\,dt, \tag{2}$$

where $\overline{B_{2n+1}}(t)$ is given by

$$B_{2n+1}(t) = \frac{2}{(2\pi)^{2n+1}} U_{2n+1}(t), \qquad U_s(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi t}{\nu^s} \quad (s > 1). \tag{3}$$

To obtain from here an estimate for $U_{2n+1}(t)$, POISSON used the obvious bound

$$|U_{2n+1}(t)| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n+1}}. \tag{4}$$

2. It has apparently not as yet been noticed, that the inequality (4) can be replaced with

$$|U_{2n+1}(t)| < 1 \quad (0 \leqq t \leqq 1, \quad n = 1, 2, \ldots).^2) \tag{5}$$

---

[1]) The work on this paper was partly done under the Contract DA J A 37-67-C-0628 of the Institute of Mathematics, University of Basel with the US Department of the Army, European Research Office.

[2]) This follows immediately from the relation

$$\left|\frac{B_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}\right| < \frac{2}{(2\pi)^{2n+1}} \quad (0 \leqq t \leqq 1,\ n \geqq 1).$$

As to this formula, it is for $n > 1$ equivalent with a formula deduced by LEHMER on p. 538 of his paper, LEHMER [2] (see the formula without number, following immediately after LEHMER's formula (18) in his paper). However, this relation is also true for $n = 1$, as is immediately verified, using for instance the value of $\operatorname{Max}_{\langle 0,1\rangle}\left|\frac{B_3(t)|}{6}\right| = .00801875$ (which is obtained from LEHMER's value of his M_3), since this this is $< \frac{1}{4\pi^3} = .0806$.

However, the inequality (5) can be further improved. It is easy to see that we have in any case

$$\max_{\langle 0,\frac{1}{4}\rangle} |U_s(t)| > 1 - \frac{1}{3^s} \quad (s > 1) \tag{6}$$

(see section 4).

As to the upper limit of $|U_s(t)|$, we will prove that we have

$$|U_s(t)| < 1 - \frac{\frac{1}{2}}{3^s} \quad (s \geqq 7). \tag{7}$$

On the other hand we have

$$\max_{\langle 0,\frac{1}{4}\rangle} |U_5(t)| = 1 - \frac{.496}{3^5}, \tag{8}$$

$$\max_{\langle 0,\frac{1}{4}\rangle} |U_3(t)| = 1 - \frac{.147}{3^3}. \tag{9}$$

3. The inequality (7) will be proved for all real s by a rather elementary method, making no use of the results obtained in the last decades on the zeros of the Bernoullian Polynomials of even order. (NÖRLUND [4], LENSE [3], LEHMER [2], INKERI [1], OSTROWSKI [5].) As to the values (8) and (9), they are obtained using the connection between the Bernoullian Polynomials $B_5(t)$ and $B_3(t)$ with $U_5(t)$ and $U_3(t)$.

4. We obtain at once from (3)

$$U_s(\tfrac{1}{4}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi/2}{\nu^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \left(\frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s}\right) + \cdots > 1 - \frac{1}{3^s} \quad (s > 1),$$

and this proves (6).

5. In order to prove (7) we introduce

$$\varphi(t) = \sin \pi t + \frac{\sin 2\pi t}{2^s} + \frac{\sin 3\pi t}{3^s} \tag{10}$$

and put

$$U_s(t/2) = \varphi(t) + R(t), \quad R(t) = \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi t}{\nu^s}. \tag{11}$$

Then we have

$$|R(t)| \leqq \frac{1}{4^s} + \sum_{\nu=5}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} < \frac{1}{4^s} + \int_4^{\infty} \frac{dx}{x^s}$$

$$= \frac{1}{4^s}\left(1 + \frac{4}{s-1}\right) \leqq \frac{\frac{5}{3}}{4^s} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3^s}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^s \leqq \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7 \frac{1}{3^s},$$

$$|R(t)| \leqq \frac{.2225}{3^s} \quad (s \geqq 7). \tag{12}$$

6. We are now going to discuss $\underset{\langle -1,\,1\rangle}{\operatorname{Max}} |\varphi(t)| = \underset{\langle 0,\,1\rangle}{\operatorname{Max}} |\varphi(t)|$ and to prove that

$$|\varphi(t)| \leqq 1 - \frac{.7232}{3^s} \quad (|t| \leqq 1,\ s \geqq 7). \tag{13}$$

Let

$$u = \frac{\pi}{2} - \pi t, \quad 0 \leqq |u| \leqq \frac{\pi}{2}, \quad \sigma = \sin u, \quad \gamma = \cos u. \tag{14}$$

Then we have

$$\varphi(t) = \gamma K, \quad K = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{2\sigma}{2^s} + \frac{4\sigma^2}{3^s}, \tag{15}$$

$$f(u) := -\frac{d}{du}\varphi(t) = \sin u - \frac{3\sin 3u}{3^s} - \frac{2\cos 2u}{2^s}, \tag{16}$$

$$F_2(\sigma) := 3^{s-1} f(u) = 4\sigma^3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{s-1}\sigma^2 + (3^{s-1} - 3)\,\sigma - \left(\frac{3}{2}\right)^{s-1}. \tag{17}$$

As $F_2(1) > (\frac{3}{2})^{s-1} > 0$ and by Descartes' rule, $F_2(\sigma)$ has exactly one positive zero, σ_0, which is <1. On the other hand, as $F_2'(\sigma) = 12\sigma^2 + 4(\frac{3}{2})^{s-1}\sigma + 3^{s-1} - 3$, we have for $|\sigma| \leqq 1$ and $s \geqq 7$:

$$|F_2'(\sigma)| \geqq 3^{s-1} - 3 - 12 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{s-1} = 3^{s-1}\left(1 - \frac{1}{2^{s-3}}\right) - 15 \geqq 729 - \frac{15}{16} - 15 > 0,$$

and we see that $F_2(\sigma)$ cannot have a zero in $\langle -1, 0\rangle$.

7. Putting $\sigma = \dfrac{x}{2^{s-1}}$ into $F_2(\sigma)$ we obtain

$$F_1(x) := 6^{s-1} f(u) = \frac{x^3}{4^{s-2}} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^{s-1} x^2 + (3^{s-1} - 3)\,x - 3^{s-1},$$

$$F_1(1) = \frac{1}{4^{s-2}} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^{s-1} - 3 < 0.$$

We see that $F_1(x)$ has exactly one positive zero, ξ, which is >1. Writing $x = 1 + y$, $F_1(x) = 3F(y)$ we obtain

$$F(y) = \frac{16}{3}\frac{y^3}{4^s} + \left[\frac{16}{4^s} + \frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^s\right] y^2 + \left[\frac{16}{4^s} + \frac{16}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^s + \frac{1}{9}3^s - 1\right] y - \left[1 - \frac{16}{3}\frac{1}{4^s} - \frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^s\right].$$

For positive y it follows

$$F(y) > (\tfrac{1}{9}3^s - 1)\,y - (1 - \tfrac{8}{9}(\tfrac{3}{4})^s)$$

and therefore

$$F\left(\frac{2}{2^s}\right) > \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^s - 1 + \frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^s - \frac{2}{2^s} > 0 \quad (s \geqq 7).$$

8. We see that $\xi = 1 + \dfrac{2\theta}{2^s}$,

$$\sigma_0 = \frac{2}{2^s} + \theta\frac{4}{4^s}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (s \geqq 7), \tag{18}$$

$$\sigma_0 = \frac{2}{2^s}\left(1 + \frac{2\theta}{2^s}\right) < \frac{2}{2^s}\left(1 + \frac{1}{2^6}\right) = \frac{2}{2^s}\left(1 + \frac{1}{64}\right) \quad (s \geqq 7). \tag{19}$$

Since $\varphi(t)$ vanishes for $t = 0$ and $t = 1$, the maximum of $\varphi(t)$ is attained at a point where $f(u)$ vanishes, that is to which corresponds $\sin u = \sigma_0$. The corresponding values of $\gamma = \cos u$ is then

$$\sqrt{1 - \sigma_0^2} < 1 - \sigma_0^2/2 < 1 - \frac{2}{4^s}.$$

9. We now have from (15)

$$|\varphi(t)| < \left(1 - \frac{2}{4^s}\right)K,$$

$$K = 1 - \frac{1}{3^s} + K_1, \quad K_1 = \frac{2\sigma_0}{2^s} + \frac{4\sigma_0^2}{3^s} = \frac{2\sigma_0}{2^s}\left(1 + \frac{2\sigma_0}{(\frac{3}{2})^s}\right)$$

$$< \frac{4}{4^s}\left(1 + \frac{1}{64}\right)\left(1 + \frac{4 + \frac{1}{8}}{3^7}\right) < \left(1 + \frac{1}{56}\right)\frac{4}{4^s} < \frac{\frac{57}{14}}{4^s},$$

$$K < 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{\frac{57}{14}}{4^s},$$

$$|\varphi(t)| < \left(1 - \frac{2}{4^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s} + \frac{\frac{57}{14}}{4^s}\right) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{\frac{29}{14}}{4^s} + \frac{2}{12^s} - \frac{8\frac{1}{7}}{16^s}$$

$$< 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s}\left(\frac{29}{14}\left(\frac{3}{4}\right)^s + \frac{2}{4^s}\right) \leqq 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s}\left(\frac{29}{14}\left(\frac{3}{4}\right)^7 + \frac{2}{4^7}\right),$$

$$|\varphi(t)| < 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{.2766}{3^s} = 1 - \frac{.7234}{3^s},$$

and by (12) and (13)

$$|U_s(t)| < 1 - \frac{.7234}{3^s} + \frac{.2225}{3^s} = 1 - \frac{.5009}{3^s},$$

which proves (7).

It is of some interest to observe that (7) and our proof of (7) remain valid if $U_s(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2\nu\pi t}{\nu^s}$ is replaced with $\sum_{\nu=1}^{N} \dfrac{\sin 2\nu\pi t}{\nu^s}$ for any $N \geqq 3$.

9. To verify (8) and (9) we use the fact that (3) is in $\langle 0, 1\rangle$ a polynomial, the so-called Bernoullian Polynomial $B_{2n+1}(t)$. We have in particular $B_3(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t$, $B_5(t)=t^5-\frac{5}{2}t^4+\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{6}t$. The maximum of $|B_3(t)|$ in $\langle 0, 1\rangle$ is attained at $t=.211325$ and gives $|B_3(0.211325)|=.048113$. Since $\frac{2\pi^3}{3}=20.67085$, we obtain $\operatorname{Max}_{\langle 0,1\rangle}|U_s(t)|=0.99454=1-\frac{.147}{27}$, which gives (9).

The maximum of $|B_5(t)|$ in $\langle 0, 1\rangle$ is attained at $t=.240335$ and the corresponding value of $|B_5(t)|$ is .0244582. Since $\frac{2\pi^5}{15}=40{,}8026$, we obtain

$$\operatorname{Max}_{\langle 0,1\rangle}|U_5(t)| = .997958 = 1-\frac{.496}{243},$$

which proves (8).

REFERENCES

[1] K. INKERI, *The real roots of Bernoulli polynomials*, Ann. Univ. Turkuensis [Series A], Nr 37 (Turku 1959).

[2] D. H. LEHMER, On the Maxima and Minima of Bernoulli polynomials, Am. Math. Monthly *47* (1940), 533–538.

[3] J. LENSE, *Über die Nullstellen der Bernoullischen Polynome*, Wiener Monatshefte f. Mathematik *41* (1934), 188–190.

[4] N. E. NÖRLUND, *Mémoire sur les Polynômes de Bernoulli*, Acta Math. *43* (1920), 121–196.

[5] A. M. OSTROWSKI, *On the zeros of Bernoulli Polynomials of Even Order*, L'Enseignement Mathématique *VI* (1960), 27–47.

[6] S. D. POISSON, *Sur le calcul numérique des intégrales definies*, Mémoires Acad. Paris *VI* (1827), 571–602.

State University of New York at Buffalo
September 1968

Received Sept. 26, 1968

A Notion of Krull Dimension for Differential Rings

JOSEPH JOHNSON

It is known that if k is a field and if R is a commutative ring and a finitely generated k-algebra without zero divisors, then the dimension of R (defined to be the greatest length of a chain of prime ideals of R) is equal to the transcendance degree of R over k. In this paper an analogue of this theorem is shown for differential algebra. The principal theorem proven here has the fact just mentioned as a special case if in addition we assume that the characteristic of k is zero.

For an indication of how the theorem is actually stated, consider the special case of an ordinary differential field $\mathfrak{F}$ of characteristic zero and let R be a finitely generated differential algebra over $\mathfrak{F}$. If $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ are prime differential ideals of R with $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, call the gap between $\mathfrak{q}$ and $\mathfrak{p}$ *large* if there exists an infinite strictly descending sequence $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \supsetneq \mathfrak{q}_1 \supsetneq \cdots \supset \mathfrak{p}$ of prime differential ideals between $\mathfrak{q}$ and $\mathfrak{p}$. The main theorem of this paper (at the beginning of § 2) specializes in this instance to tell us that if $\mathfrak{p}$ is a prime differential ideal of R and if d is the differential transcendance degree of $R/\mathfrak{p}$ over $\mathfrak{F}$, then there exists a chain $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d$ of prime differential ideals of R with the gaps from $\mathfrak{p}_i$ to $\mathfrak{p}_{i-1}$ large for each i and that no chain of prime differential ideals of R all of which contain $\mathfrak{p}$ can have more than d large gaps.

This paper would have been substantially shorter were it not for the fact that very little is known about differential ideals in an arbitrary differential algebra finitely generated over a differential field. In §§ 3 and 4, some tools are developed which allow one to deal with these to a certain extent, and consequently these sections are quite technical in nature. Many readers will probably prefer to have an outline of the proof of the theorem mentioned above before digging deeply into these details. In § 5, the results from §§ 3 and 4 which are needed are succinctly summarized near the beginning so that one can defer reading those sections.

It is assumed that the reader is to some extent familiar with the material of [1] and [2]. In any instance where notation is unexplained there will be an explanation in one of these references.

§ 1. Combinatorial Type and Dimension

Let R be a ring and let $\mathfrak{A}$ be a family of ideals of R[1]). Adjoin to the set of integers $\mathbf{Z}$ a single element ∞ and extend the order on $\mathbf{Z}$ to $\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ by requiring that $p \leqslant \infty$ for every $p \in \mathbf{Z}$.

[1]) For the definitions and results in this section, $\mathfrak{A}$ can be any ordered set; the ring R plays no role.

LEMMA. *There is a unique way to define an element* $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ (or $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$) *of* $\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ *for every pair* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ *with* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}'$ *such that the following two conditions hold:*

i) $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \geqslant -1$

ii) *If* d *is any non-negative integer,* $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \geqslant d$ *if and only if* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}'$ *and there exists an infinite sequence* $(\mathfrak{a}_i)_{i=0,1,\ldots}$ *of elements of* $\mathfrak{A}$ *such that* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}'$ *and* $\mu(\mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_i) \geqslant d-1$ *for* $i = 1, 2, \ldots$.

The reader can quickly prove this lemma by defining $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = \infty$ if ii) holds for $d = 0, 1, 2, \ldots$ and $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = d$ where $d \in \mathbf{Z}$ is the largest d such that ii) holds otherwise.

It follows from i) and ii) above that $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \geqslant 0$ if $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}'$ and that $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = 0$ means that $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}'$ and that every infinite descending chain of $\mathfrak{A}$ of the form $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \cdots \supset \mathfrak{a}'$ satisfies $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i+1}$ for all sufficiently large i. On the other hand $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \geqslant 1$ means that there exists an infinite strictly descending chain of $\mathfrak{A}$ of the form $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \supsetneq \mathfrak{a}_1 \supsetneq \cdots \supset \mathfrak{a}'$.

Define $\operatorname{type}_{\mathfrak{A}} R$ (or type R) to be the least upper bound of all the $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$. Define $\dim_{\mathfrak{A}} R$ (or $\dim R$) to be the least upper bound of the $p \in \mathbf{Z}$ such that there exists a chain $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_p$ of elements of $\mathfrak{A}$ with $\mu(\mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_i) = \operatorname{type} R$ for $i = 1, \ldots, p$. If $\mathfrak{A}$ is non-empty, type R and $\dim R$ are defined. If $\operatorname{type} R < \infty$, then $\dim R \geqslant 1$, but if $\operatorname{type} R = \infty$, we may have $\dim R = 0$. In the situations of interest here, type R will always be finite.

§ 2. Dimension in Differential Rings

In the sequel the following theorem will be shown.

THEOREM. *Let* R *be a differential integral domain with* m *derivation operators which is a finitely generated differential algebra over a differential field* $\mathfrak{F}$ *of characteristic zero. Let* $\mathfrak{A}$ *be the set of all prime differential ideals of* R. *Then if* $\operatorname{diff\,tr\,deg}_{\mathfrak{F}} R > 0$, $\operatorname{type}_{\mathfrak{A}} R = m$ *and* $\dim_{\mathfrak{A}} R = \operatorname{diff\,tr\,deg}_{\mathfrak{F}} R$. *If* $\operatorname{diff\,tr\,deg}_{\mathfrak{F}} R = 0$, *then* $\operatorname{type}_{\mathfrak{A}} R < m$.

As a first step toward proving this theorem it will be shown that

i) $\operatorname{type} R \leqslant m$,

ii) $\operatorname{type} R < m$ if $\operatorname{diff\,tr\,deg}_{\mathfrak{F}} R = 0$ and

iii) if $\operatorname{type} R = m$, $\dim R \leqslant \operatorname{diff\,tr\,deg}_{\mathfrak{F}} R$.

Let $\eta_1, \ldots, \eta_n$ generate the differential algebra R over $\mathfrak{F}$. Let $\mathfrak{p}$ be a prime differential ideal of R and for the moment let $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n$ denote the images of $\eta_1, \ldots, \eta_n$ respectively in $R/\mathfrak{p}$. Let $\mathfrak{r}$ be an indeterminate. By the theorem in Chapter II of [1], there exists a polynomial $\chi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{r}) \in \mathbf{Q}[\mathfrak{r}]$ such that $\chi_{\mathfrak{p}}(r) = \operatorname{tr\,deg}_{\mathfrak{F}} \mathfrak{F}[\Theta(r)\bar{\eta}_1 \cup \ldots \cup \Theta(r)\bar{\eta}_n]$ for all sufficiently large $r \in \mathbf{Z}$.

Given polynomials $P_1(\mathfrak{r}), P_2(\mathfrak{r})$ with rational coefficients, write $P_1(\mathfrak{r}) \geqslant P_2(\mathfrak{r})$ if for all sufficiently large $r \in \mathbf{Z}$, $P_1(r) \geqslant P_2(r)$. If now $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ are prime differential ideals of R with $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, then $\chi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{r}) \leqslant \chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{r})$. Let $R_r = \mathfrak{F}[\Theta(r)\eta_1 \cup \cdots \cup \Theta(r)\eta_n]$. If $\chi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{r}) = \chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{r})$, then $\operatorname{tr\,deg}_{\mathfrak{F}}(R_r/\mathfrak{p} \cap R_r) = \operatorname{tr\,deg}_{\mathfrak{F}}(R_r/\mathfrak{q} \cap R_r)$ for all sufficiently large

$r \in \mathbf{Z}$. It follows (c.f. [3], Lemma page 75) that $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ if $\chi_{\mathfrak{p}}(r)=\chi_{\mathfrak{q}}(r)$. It will now be shown inductively that if $\mu(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \geqslant p$, then $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r)) \geqslant p$.

The polynomials χ we are considering are *numerical*, that is $\chi(r)$ is an integer for all sufficiently large $r \in \mathbf{Z}$. If χ is a numerical polynomial, $\Delta\chi$ is also. (See [1], Chap. III § 2 for definition of $\Delta\chi$.) Let p be the degree of χ and write $\chi(r)=(a/p!)r^p+a$ polynomial of degree less than p. A simple induction shows that $\Delta^p\chi=a$. It follows that if χ is numerical, a is an integer. Also if $\chi \geqslant 0$, it is clear that $a \geqslant 0$.

To show that $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r)) \geqslant \mathfrak{p}$ when $\mu(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \geqslant p$, observe that in any case $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r)) \geqslant -1$. Also if $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, then since $\chi_{\mathfrak{q}}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r)$ is not the zero polynomial, $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r)) \geqslant 0$. This demonstrates the assertion for $p=-1$ and for $p=0$.

Now let $p>0$ and let $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{q}$ be an infinite chain of prime differential ideals of P with $\mu(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i) \geqslant p-1$ for $i=1, 2, \ldots$. If for some i, $\deg(\chi_{\mathfrak{p}_i}(r)-(\chi_{\mathfrak{p}_{i-1}}(r)) \geqslant p$, then surely since $\chi_{\mathfrak{q}}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r) \geqslant \chi_{\mathfrak{p}_i}(r)-\chi_{\mathfrak{p}_{i-1}}(r)$, $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r)) \geqslant p$. Otherwise we have $\deg(\chi_{\mathfrak{p}_i}(r)-\chi_{\mathfrak{p}_{i-1}}(r))=p-1$ for every i. Write $\chi_{\mathfrak{p}_i}(r)-\chi_{\mathfrak{p}}(r)=a_i r^{p-1}/(p-1)!+$ a polynomial of degree $<p-1$. It is clear that $a_{i-1}<a_i$ for all i. Because $\chi_{\mathfrak{q}}-\chi_{\mathfrak{p}} \geqslant \chi_{\mathfrak{p}_i}-\chi_{\mathfrak{p}}$ for all i, the degree of $\chi_{\mathfrak{q}}-\chi_{\mathfrak{p}}$ is forced to be $\geqslant p$ proving the assertion that was made.

For any prime differential ideal $\mathfrak{p}$ of R, $\deg \chi_{\mathfrak{p}}(r) \leqslant m$ and is $<m$ if diff tr $\deg_{\mathfrak{F}} R=0$. It follows that type $R \leqslant m$ and is $<m$ if diff tr $\deg_{\mathfrak{F}} R=0$. Suppose now that type $R=m$ and that $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_d$ is a chain of prime differential ideals of R with $\mu(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i)=m$ for $i=1, \ldots, d$. Write $\chi_{\mathfrak{p}_d}(r)-\chi_{\mathfrak{p}_0}(r)=ar^m/m!+$ a polynomial of degree $<m$ with $a \in \mathbf{Z}$. Then since $\chi_{\mathfrak{p}_i}(r)-\chi_{\mathfrak{p}_{i-1}}(r)=a_i r^m/m!+$ a polynomial of degree $<m$ with a_i an integer and >0, $a \geqslant d$. On the other hand $a=\Delta^m(\chi_{\mathfrak{p}_d}(r)-\chi_{\mathfrak{p}_0}(r)) \leqslant \Delta^m(\chi_{\mathfrak{p}_d}(r)) \leqslant \Delta^m(\chi_{(0)}(r))=$ diff tr $\deg_{\mathfrak{F}} R$, so $d \leqslant$ diff tr $\deg_{\mathfrak{F}} R$. Hence $\dim R \leqslant$ diff tr $\deg_{\mathfrak{F}} R$. This completes the proof of assertions i), ii) and iii).

Before going on to prove the rest of the theorem, let it be remarked that if χ is a differential dimension polynomial for R over $\mathfrak{F}$, it is not in general true that type $R=\deg \chi$. To see this take $m=1$, let $\mathfrak{F}$ be a differential field of constants and let x be an algebraic indeterminate over $\mathfrak{F}$ with $x'=1$. Then $\mathfrak{F}[x]$ has no non-trivial differential ideals so that type $\mathfrak{F}[x]=-1$. On the other hand $\deg \chi$ must be zero.

The proof of the rest of the theorem starts with what is essentially the consideration of a special case. (In the statement of the lemma, [ ] means *differential ideal generated by*.) (Consult [2], § 0 for explanations of the notation used here.)

LEMMA.[2]) *Let $\mathfrak{F}$ be a differential field of characteristic zero and let $y_1, \ldots, y_n$ be differential indeterminates. Let $\mathfrak{A}$ be the set of all differential ideals of $\mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ of the form $[\theta_1 y_{i(1)}, \ldots, \theta_p y_{i(p)}]$ where $p \geqslant 0$, $\theta_1, \ldots, \theta_p \in \Theta$ and $1 \leqslant i(1), \ldots, i(p) \leqslant n$. Then $\text{type}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\}=m$ and $\dim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\}=n$.*

[2]) The special choice of $\mathfrak{A}$ makes the proof of the lemma much less awkward than it might otherwise be. It turns out however to be also necessary to have the lemma in this form in order to successfully carry out the proof of the theorem.

Because $\mathfrak{A}$ is contained in the family of all prime differential ideals of $\mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, it is readily apparent from what has already been shown that $\text{type}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\} \leqslant m$, and if $\text{type}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\} = m$, then $\dim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\} \leqslant n$. Upon considering therefore the chain $[y_1, \ldots, y_n] \supset [y_1, \ldots, y_{n-1}] \supset \cdots \supset [y_1] \supset (0)$ of $\mathfrak{A}$, it becomes evident that it is enough to show that $\mu_{\mathfrak{A}}([y_1, \ldots, y_p], [y_1, \ldots, y_{p-1}]) \geqslant m$ for $1 \leqslant p \leqslant n$. If $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A} : [y_1, \ldots, y_p] \supset \mathfrak{a} \supset [y_1, \ldots, y_{p-1}]\}$, it will suffice to show that $\mu_{\mathfrak{A}'}([y_1, \ldots, y_p], [y_1, \ldots, y_{p-1}]) \geqslant m$. We have $\mathfrak{F}\{y_1, \ldots, y_n\}/[y_1, \ldots, y_{p-1}] \approx \mathfrak{F}\{y_p, \ldots, y_n\}$ canonically and under this isomorphism, the set $\mathfrak{A}'$ is mapped order isomorphically onto the set $\mathfrak{B}$ consisting of all those differential ideals of $\mathfrak{F}\{y_p, \ldots, y_n\}$ which are generated by the finite subsets of Θy_p. Let $\mathfrak{B}'$ consist of all those differential ideals of $\mathfrak{F}\{y_p\}$ which are generated by finite subsets of Θy_p. Because $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}'$ implies $(\mathfrak{b}\mathfrak{F}\{y_p, \ldots, y_n\}) \cap \mathfrak{F}\{y_p\} = \mathfrak{b}$, it follows quickly that the map from $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B}'$ obtained by intersecting the elements of $\mathfrak{B}$ with $\mathfrak{F}\{y_p\}$ is an order preserving isomorphism. This reduces our problem to the case $n = 1$, i.e. it will suffice to show that if y is a differential indeterminate over $\mathfrak{F}$ and if $\mathfrak{A}_1$ is the class of all differential ideals of $\mathfrak{F}\{y\}$ generated by the finite subsets of Θy, $\mu_{\mathfrak{A}_1}([y], (0)) \geqslant m$.

Considering the chain $[y] \supset \cdots \supset [\delta_m^r y] \supset [\delta_m^{r+1} y] \supset \cdots \supset (0)$ of elements of $\mathfrak{A}_1$, it is obvious that it will suffice to show that $\mu_{\mathfrak{A}_1}([\delta_m^r y], [\delta_m^{r+1} y]) \geqslant m$—1. Similarly to what was done before, let $\mathfrak{A}_1'$ be the family of all $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_1$ such that $[\delta_m^r y] \supset \mathfrak{a} \supset [\delta_m^{r+1} y]$. Let ζ be the element $\delta_m^r y + [\delta_m^{r+1} y]$ of the differential ring $\mathfrak{F}\{\delta_m^r y\}/[\delta_m^{r+1} y]$. As before one reasons that $\mathfrak{A}_1'$ is order isomorphic to the family $\mathfrak{B}_1'$ of all differential ideals of $\mathfrak{F}\{\zeta\} = \mathfrak{F}\{\delta_m^r y\}/[\delta_m^{r+1} y]$ generated by finite subsets of $\Theta^{(m-1)}\zeta$, where $\Theta^{(m-1)} \subset \Theta$ is the subset of all those derivative operators which do not involve δ_m.

Let $\Delta^{(m-1)} = \Delta - \{\delta_m\}$. As the family of the $\theta\zeta$ for $\theta \in \Theta^{(m-1)}-$ is algebraically independent over $\mathfrak{F}$, ζ is a $\Delta^{(m-1)}$-differential indeterminate. The structure of Δ-differential ring on $\mathfrak{F}\{\zeta\}$ is determined by the additional condition $\delta_m \zeta = 0$. It is clear that every $\Delta^{(m-1)}-$differential ideal of $\mathfrak{F}\{\zeta\}$ generated by a finite subset of $\Theta^{(m-1)}\zeta$ is Δ-differential and generated by the same finite subset of $\Theta^{(m-1)}\zeta$ and the converse is true too. Consequently $\mathfrak{A}_1'$ is order isomorphic to the set of all $\Delta^{(m-1)}$-differential ideals of $\mathfrak{F}\{\zeta\}$ generated by finite subsets of $\Theta^{(m-1)}\zeta$ so the proof of the lemma follows by induction.

To go from the lemma that has just been demonstrated to the proof of the theorem an analogue will be developed for differential algebra of the following very easily proven fact of commutative algebra.

LEMMA. *Let k be a field, R an algebra of finite type over R without zero divisors. If $x_1, \ldots, x_p$ is a transcendance basis for R over k, there exists a non-zero $D \in k[x_1, \ldots, x_p]$ such that $R[1/D]$ is an integral extension of $k[x_1, \ldots, x_p, 1/D]$.*

Using this lemma one can prove the theorem for the case $m = 0$. What it is necessary to do is to show the existence of a chain $\mathfrak{P}_p \supsetneq \mathfrak{P}_{p-1} \subsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{P}_0$ of prime ideals of R of

length p. We have (assuming characteristic $k=0$) that k is infinite, so there exist $\xi_1, \ldots, \xi_p \in k$ such that $D(\xi_1, \ldots, \xi_p) \neq 0$. Let $\mathfrak{p}_i = (x_1 - \xi_1, \ldots, x_i - \xi_i)$. Then $\mathfrak{p}_p \supsetneq \mathfrak{p}_{p-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_0$ and $D \notin \mathfrak{p}_p$. By integrality this chain lifts to a chain of prime ideals $\mathfrak{Q}_p \supsetneq \mathfrak{Q}_{p-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{Q}_0$ of $R[1/D]$ (i.e., we have $\mathfrak{Q}_i \cap k[x_1, \ldots, x_p] = \mathfrak{p}_i$). Letting $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{Q}_i \cap R$ we obtain a chain of the desired type.

The proof of the theorem for $m > 0$ will run along lines similar to those just given, but is quite a bit more complicated.

§ 3. Some Preliminary Results on Differential Vector Spaces

For the time being $\mathfrak{G}$ will be a differential field of any characteristic. It will however be assumed that the subfield C of $\mathfrak{G}$ consisting of all constants (elements c of $\mathfrak{G}$ satisfying $\delta(c) = 0$ for all $\delta \in \Delta$) contains infinitely many elements.

Let $\delta_1, \ldots, \delta_m$ be the elements of Δ. If $\sigma \in GL(m, C)$ is any non-singular $m \times m$ matrix over C, Δ^σ will be the set $\{\delta_1^\sigma, \ldots, \delta_m^\sigma\}$ where δ_i^σ is the formal linear combination $\delta_i^\sigma = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} \delta_j$. If M is any differential vector space over $\mathfrak{G}$ or a differential algebra over $\mathfrak{G}$, the set Δ^σ will be made to act on M in the obvious way, i.e. we will define $\delta_i^\sigma(x) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} \delta_j(x)$ for $x \in M$. We have clearly that $\delta_i^\sigma(\delta_j^\sigma(x)) = \delta_j^\sigma(\delta_i^\sigma(x))$ since the coefficients of σ lie in C. In this way $\mathfrak{G}$ and all differential structures over $\mathfrak{G}$ will be viewed as having Δ or Δ^σ as their fundamental set of derivation operators. It is clear (since σ is invertible) that if M is a differential vector space over $\mathfrak{G}$ or a differential algebra over $\mathfrak{G}$, M is finitely generated with respect to Δ if and only if M is finitely generated with respect to Δ^σ.

In the sequel when the phrase "for an appropriate choice of Δ" precedes a statement P, this will mean that there exists a $\sigma \in GL(m, C)$ such that P holds true when Δ is replaced by Δ^σ in the manner indicated above. Similarly when the phrase "for almost all choices of Δ" precedes a statement P, then there exists a non-empty Zariski open subset U of $GL(m, C)$ such that P holds true when Δ is replaced by any Δ^σ with $\sigma \in U$.

If $0 \leqslant p \leqslant m$, $\Delta^{(p)}$ will be the set $\{\delta_1, \ldots, \delta_p\}$. Then any differential structure with Δ as its fundamental set of derivation operators inherits a differential structure with $\Delta^{(p)}$ as its fundamental set of derivation operators by simply ignoring the given action of $\delta_{p+1}, \ldots, \delta_m$. Denote by $\Theta^{(p)}$ the subset of Θ consisting of all elements of the form $\delta_1^{i(1)} \cdots \delta_p^{i(p)}$. Similarly if $\mathfrak{F}$ is a differential ring with fundamental set of derivation operators Δ and if R is a differential ring extension of $\mathfrak{F}$ with respect to Δ or with respect to $\Delta^{(p)}$, let $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}^{(p)}$ be the $\Delta^{(p)}$-differential subring of R generated by

$\mathfrak{F}$ and $\eta_1, \ldots, \eta_n$ whenever $\eta_1, \ldots, \eta_n$ are given elements of R. Similar uses of a superscript $^{(p)}$ whose meaning seems clear will be made without further explanation. The following theorem has its origin in Theorem 6 of [4].

THEOREM. *(Reduction of the number of derivation operators.)*

Let M be a finitely generated differential vector space over the differential field $\mathfrak{G}$. Then if $\operatorname{diff\,dim}_{\mathfrak{G}} M = 0$ *and if the field of constants of $\mathfrak{G}$ is infinite, for almost all choices of Δ, M is finitely generated as a $\Delta^{(m-1)}$-differential vector space.*

As $\operatorname{diff\,dim}_{\mathfrak{G}} M = 0$, all the elements of M are differentially linearly dependent over $\mathfrak{G}$. Let $\mathfrak{D}$ be the ring of linear differential operators in Δ with coefficients in $\mathfrak{G}$, and let $\eta_1, \ldots, \eta_n$ be a set of generators of M. It will suffice to show that if $1 \leqslant i \leqslant n$, then for almost all choices of Δ, the differential vector space $\mathfrak{D}\eta_i$ is finitely generated as a $\Delta^{(m-1)}$-differential vector space over $\mathfrak{G}$. Indeed if we do this for each $i = 1, \ldots, n$, we obtain non-empty Zariski open subsets $U_1, \ldots, U_n$ of $GL(m, C)$ such that if we replace Δ by Δ^σ with $\sigma \in U_i$, $\mathfrak{D}\eta_i$ is a finitely generated $\Delta^{(m-1)}$-differential vector space over $\mathfrak{G}$. Then $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ is non-empty and if $\sigma \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$, $M = \mathfrak{D}\eta_1 + \cdots + \mathfrak{D}\eta_n$ is a finitely generated $\Delta^{(m-1)}$-differential vector space over $\mathfrak{G}$ when Δ has been replaced by Δ^σ. It follows that it will be enough to prove the theorem when M is generated by a single element η.

Since η is differentially algebraically dependent over $\mathfrak{G}$, there exists a non-zero $D \in \mathfrak{D}$ such that $D\eta = 0$. Let r be the order of D. Consider any $\sigma \in GL(m, C)$ and let $\tau = \sigma^{-1}$. Writing $\varepsilon_i = \delta_i^\sigma$ we have $\delta_i = \sum_{j=1}^{m} \tau_{ij}\varepsilon_j$. If $\delta_1^{j(1)} \cdots \delta_m^{j(m)}$ with $j(1) + \cdots + j(m) = r$ is an arbitrary element of order r of

$$\Theta, \delta_1^{j(1)} \ldots \delta_m^{j(m)} = \left(\sum_{j=1}^{m} \tau_{1j}\varepsilon_j\right)^{j(1)} \cdots \left(\sum_{j=1}^{m} \tau_{mj}\varepsilon_j\right)^{j(m)} = \tau_{1m}^{j(1)} \ldots \tau_{mm}^{j(m)} \varepsilon_m^r + E,$$

where $E \in \mathfrak{D}_r$ and can be written as a polynomial in $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ with coefficients in C of degree $\leqslant r$ and such that the coefficient of ε_m^r is zero. Let I be the set of all m-tuples $j = (j(1), \ldots, j(m))$ with $j(1), \ldots, j(m)$ non-negative integers and $j(1) + \cdots + j(m) = r$. Then we can write $D = \sum_{j \in I} a_j \delta_1^{j(1)} \ldots \delta_m^{j(m)} + D'$ where $D' \in \mathfrak{D}_{r-1}$ and the a's belong to $\mathfrak{G}$. Then

$$(*) \quad D = \sum_{j \in I} a_j \tau_{1m}^{j(1)} \ldots \tau_{mm}^{j(m)} \varepsilon_m^r + E' + D'$$

where E' is a linear combination with coefficients in $\mathfrak{G}$ of elements of $\mathfrak{D}$ which have the properties listed above for E.

It is possible to choose a non-zero polynomial function P on $GL(m, C)$ such that if $P(\sigma) \neq 0$ and if letting $\alpha = \sum_{j \in I} a_j \tau_{1m}^{j(1)} \ldots \tau_{mm}^{j(m)}$, $\alpha \neq 0$. Let $\mathfrak{D}^{(m-1)}$ be the subring of $\mathfrak{D}$ generated by $\mathfrak{G}$ and $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$. Because $D\eta = 0$, it follows that if $\alpha \neq 0$, $\varepsilon_m^r \eta \in \mathfrak{D}^{(m-1)}\eta + \mathfrak{D}^{(m-1)}\varepsilon_m\eta + \cdots + \mathfrak{D}^{(m-1)}\varepsilon_m^{r-1}\eta$ because of the relation $(*)$. This implies that

$\mathfrak{D}^{(m-1)}\eta+\cdots+\mathfrak{D}^{(m-1)}\varepsilon_m^{r-1}\eta$ is mapped into itself by ε_m. Since it is certainly mapped into itself by $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{m-1}$, it must be all of M, and this proves the theorem.

COROLLARY. *Let $\mathfrak{F}$ be a differential field of characteristic zero, $\mathfrak{G}$ a finitely generated differential field extension of $\mathfrak{F}$. If* $\operatorname{diff\,tr\,deg}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}=0$, *then for almost all choices of Δ, $\mathfrak{G}$ is a finitely generated $\Delta^{(m-1)}$-differential field extension of $\mathfrak{F}$.*

Let $\Omega=\Omega^1_{\mathfrak{G}/\mathfrak{F}}$ be the module of Kahler differentials of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{F}$ and recall ([2], § 1) that Ω has a structure of differential vector space over $\mathfrak{G}$ such that for $\delta\in\Delta$ and $\eta\in\mathfrak{G}$ we have $\delta(d(\eta))=d(\delta(\eta))$. Choose $\eta_1,\ldots,\eta_n\in\mathfrak{G}$ such that $d\eta_1,\ldots,d\eta_n$ generate Ω as a $\Delta^{(m-1)}$-differential vector space, and such that $\eta_1,\ldots\,\eta_n$ generate G as a differential field over F. Let $\mathfrak{H}_0$ be the $\Delta^{(m-1)}$-differential field extension of $\mathfrak{F}$ generated by $\eta_1,\ldots,\eta_n$, let $\mathfrak{H}$ be the $\Delta^{(m-1)}$-differential field extension of $\mathfrak{F}$ generated by $\eta_1,\ldots,\eta_n$, $\delta_m(\eta_1),\ldots,\delta_m(\eta_n)$. It will be shown that $\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$.

Letting η be one of the η_i, it will suffice to show that all the $\delta_m^s\eta$ for $s\geqslant 0$ belong to $\mathfrak{H}$. Since $d(\delta_m\eta)\in d(\mathfrak{H}_0)$, there exists an $F\in\mathfrak{H}_0[X]$, X an indeterminate, such that $F(\delta_m\eta)=0$ and $S=dF/dX(\delta_m\eta)\neq 0$. We have $0=\delta_m(F)=S\,\delta_m^2\eta+$ an element of $\mathfrak{H}$. This shows that $\delta_m^2\eta\in\mathfrak{H}$. Since $\delta_m^2\eta_1,\ldots,\delta_m^2\eta_n\in\mathfrak{H}$, it follows that if $s>2$ and $\delta_m^{s-1}\eta\in\mathfrak{H}$, then $\delta_m\eta\in\mathfrak{H}$ so that by induction all the $\delta_m\eta\in\mathfrak{H}$. This completes the proof of the corollary.

§ 4. Parametric Subrings

Let R and $\mathfrak{F}$ be differential integral domains and suppose that R is an extension of $\mathfrak{F}$. The notion of a *parametric subring of R over $\mathfrak{F}$* (or parametric subring) will be defined by induction on m.

If $m=0$, a subring R_0 of R will be called *parametric* if the quotient field of R is finite algebraic over the quotient field of R_0 and if there exist finitely many elements $\eta_1,\ldots,\eta_n$ of R_0 algebraically independent over $\mathfrak{F}$ and such that $R_0=\mathfrak{F}[\eta_1,\ldots,\eta_n]$. Observe that in this case R_0 is a parametric subring of R if and only if R_0 is a parametric subring of the quotient field of R.

If $m>0$, a subring R_0 of R will be called *parametric* if there exist elements $\eta_1,\ldots,\eta_n$ of R_0 differentially algebraically independent over $\mathfrak{F}$ and such that R_0 is a parametric subring of R over $\mathfrak{F}\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ when these are considered to be differential rings with respect to the set of derivation operators $\Delta^{(m-1)}$.

From the definition, the following proposition follows immediately by induction on m.

PROPOSITION. *Let R and $\mathfrak{F}$ be differential integral domains, R being an extension of $\mathfrak{F}$. Then*

i) *A subring R_0 of R containing $\mathfrak{F}$ is a parametric subring of R over $\mathfrak{F}$ if and only if R_0 is a parametric subring of the quotient field of R over $\mathfrak{F}$.*

ii) *If R_0 is a parametric subring of R over $\mathfrak{F}$, then R_0 is a polynomial ring extension of $\mathfrak{F}$ and the quotient field of R is finite algebraic over the quotient field of R_0.*

THEOREM. *Let R and $\mathfrak{F}$ be differential integral domains of characteristic zero, R being an extension of $\mathfrak{F}$. Suppose that the quotient field of R is a finitely generated differential field extension of the quotient field of $\mathfrak{F}$. Let $\eta_1, \ldots, \eta_d$ be a differential transcendance basis for R over $\mathfrak{F}$. Then for an appropriate choice of Δ, R contains a subring parametric over $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$.*

First suppose that $m=0$. Then the quotient field of R is finite algebraic over the quotient field of $\mathfrak{F}[\eta_1, \ldots, \eta_d]$, and hence $\mathfrak{F}[\eta_1, \ldots, \eta_d]$ is a parametric subring of R over $\mathfrak{F}$.

Suppose now that $m>0$. Then for almost all choices of Δ, the quotient field of R considered as a $\Delta^{(m-1)}$-differential field is a finitely generated extension of the quotient field of $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$. Choose such a Δ. By induction we may assume that after an appropriate change of $\Delta^{(m-1)}$ (and hence ultimately one more change of Δ) there exists a subring R_0 of R parametric over $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$ when these last are considered as $\Delta^{(m-1)}$-differential rings. This establishes the theorem.

LEMMA. *Let R and $\mathfrak{F}$ be differential integral domains with $\mathfrak{F}$ a differential subring of R. Suppose that R_0 is a subring of R parametric over $\mathfrak{F}$. Let K be the quotient field of R, K_0 the quotient field of R_0. Let $a_1, \ldots, a_h$ be a basis for K over K_0. Then there exists $D \in R_0 - (0)$ such that $R_0[1/D]\, a_1 + \cdots + R_0[1/D]\, a_h$ is a finitely generated differential algebra over $\mathfrak{F}$.*

Let $M = R_0 a_1 + \cdots + R_0 a_h$. It is necessary to find $D \in R_0 - (0)$ such that $R_0[1/D]\, M$ is a finitely generated differential algebra over $\mathfrak{F}$. If $m=0$, it suffices to choose D such that all the $D a_i a_j$ belong to M. Suppose now that $m>0$. Choose $\eta_1, \ldots, \eta_d \in R_0$ which are differentially algebraically independent over $\mathfrak{F}$ and such that R_0 is parametric for R over $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$ when R and $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$ are considered as $\Delta^{(m-1)}$-differential rings. By induction there exists $D \in R_0 - (0)$ such that $R_0[1/D]\, M$ is a finitely generated $\Delta^{(m-1)}$-differential algebra over $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$.

It is now only a question of finding $E \in R_0 - (0)$ such that $R_0[1/DE]\, M$ is mapped into itself by δ_m. Let $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ be generators of $R_0[1/D]\, M$ as a $\Delta^{(m-1)}$-differential algebra over $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$. Choose $E \in R_0 - (0)$ such that $E\delta_m(\zeta_1), \ldots, E\delta_m(\zeta_q) \in R_0[1/D]\, M$. Now $R_0[1/DE]\, M$ is closed under $\Delta^{(m-1)}$. It will suffice to show that if $i=1, \ldots, q$ and $\theta \in \Theta^{(m-1)}$, $\delta_m \theta \zeta_i \in R_0[1/DE]\, M$. But this is clear since $\delta_m \zeta_i \in R_0[1/DE]\, M$. This completes the proof of the lemma.

COROLLARY. *Suppose that R and $\mathfrak{F}$ are differential integral domains with R a finitely generated differential ring extension of $\mathfrak{F}$ and suppose that R_0 is a ring parametric for R over $\mathfrak{F}$. Then there exists $D \in R_0 - (0)$ such that $R[1/D]$ is a finite module over $R_0[1/D]$.*

In the lemma take $a_1, \ldots a_h$ to be in R. Choose a D as given by the lemma and let $\xi_1, \ldots, \xi_n$ generate R as a differential algebra over $\mathfrak{F}$. Multiply D by a non-zero element of R_0 so as to get $\xi_1, \ldots, \xi_n \in R_0[1/D]\, a_1 + \cdots + R_0[1/D]\, a_h$. Then as $R[1/D] = R_0[1/D]\, a_1 + \cdots + R_0[1/D]\, a_h$, $R[1/D]$ is a finite module over $R_0[1/D]$. This proves the corollary.

§ 5. Conclusion of the Proof of the Main Theorem

We return to the situation of the theorem of § 2. Hence again $\mathfrak{F}$ is a differential field of characteristic zero, and R is a differential overring of $\mathfrak{F}$ which is finitely generated as a differential algebra over $\mathfrak{F}$ and without zero divisors. Let $d = \text{diff tr deg}_{\mathfrak{F}} R$. Because the assertions i), ii) and iii) which immediately follow the statement of the theorem have already been demonstrated, it will suffice to show that if $\mathfrak{C}$ is the

class of all prime differential ideals of R and if $d>0$, then $(m, d)\leqslant(\text{type}_{\mathfrak{C}} R, \dim_{\mathfrak{C}} R)$ where $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ has been ordered lexicographically.

Let $\eta_1, \ldots, \eta_d$ be a differential transcendance basis for R over $\mathfrak{F}$. By the results of §§ 3, 4 (corollary of § 4 and proposition of § 4), there exists a subring R_0 of R and a non-zero element D of R_0 such that

i) R_0 is a polynomial ring extension of $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$.

ii) $R[1/D]$ is a finite $R_0[1/D]$-module.

LEMMA. *Let A and B be rings with B an overring of A. Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be families of ideals of A and B respectively such that if $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}\cap A\in\mathfrak{A}$. Suppose*

a) If $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'\in\mathfrak{A}$ with $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}'$, then there exist $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\in\mathfrak{B}$ with $\mathfrak{b}\cap A=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'\cap A=\mathfrak{a}'$ and $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{b}'$.

b) If $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_2\in\mathfrak{B}$ with $\mathfrak{b}_0\subset\mathfrak{b}_2$ and if $\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{A}$ with $(\mathfrak{b}_0\cap A)\subset\mathfrak{a}_1\subset(\mathfrak{b}_2\cap A)$, then there exists $\mathfrak{b}_1\in\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{b}_0\subset\mathfrak{b}_1\subset\mathfrak{b}_2$ and $\mathfrak{b}_1\cap A=\mathfrak{a}_1$.

Under these assumptions, $(\text{type}_{\mathfrak{A}} A, \dim_{\mathfrak{A}} A)\leqslant(\text{type}_{\mathfrak{B}} B, \dim_{\mathfrak{B}} B)$.

Let $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'\in\mathfrak{A}$ with $\mathfrak{a}'\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\in\mathfrak{B}$ with $\mathfrak{b}'\supset\mathfrak{b}$ and suppose that $\mathfrak{b}\cap A=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'\cap A=\mathfrak{a}'$. If $p\geqslant 0$ and $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})\geqslant p$, consider an infinite chain in $\mathfrak{A}$ of the form $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}_0\supset\mathfrak{a}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{a}$ with $\mu(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i-1})\geqslant p-1$ for $i=1, 2, \ldots$. By condition b) there exists an infinite chain of $\mathfrak{B}$ of the form $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}_0\supset\mathfrak{b}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{b}$ such that for $i=0, 1, \ldots, \mathfrak{b}_i\cap A=\mathfrak{a}_i$. By induction we may assert that $\mu_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_{i-1})\geqslant p-1$ and hence, since $\mathfrak{b}'\neq\mathfrak{b}$, that $\mu(\mathfrak{b}', \mathfrak{b})\geqslant p$. It follows from this and a) that $\text{type}_{\mathfrak{A}} A\leqslant\text{type}_{\mathfrak{B}} B$.

Suppose now that $\text{type}_{\mathfrak{A}} A=\text{type}_{\mathfrak{B}} B$. Any chain $\mathfrak{a}_0\supset\mathfrak{a}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{a}_d$ of $\mathfrak{A}$ with $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_i)=\text{type}_{\mathfrak{A}} A$ for $i=1, \ldots, d$ can by a) and *b)* be lifted to a chain of $\mathfrak{B}$, say $\mathfrak{b}_0\supset\mathfrak{b}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{b}_d$. As $\mu_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i)=\text{type}_{\mathfrak{B}} B$ and as $\dim_{\mathfrak{A}} A$ is the least upper bound of such d, it follows that $\dim_{\mathfrak{A}} A\leqslant\dim_{\mathfrak{B}} B$, and this completes the proof of the lemma.

LEMMA. *Let B_0 and B be rings with B an overring of B_0 and integral over B_0. Then if $\mathfrak{p}$ is a prime ideal of B_0 and if $\mathfrak{q}$ is a prime ideal of B such that $\mathfrak{q}\cap B_0=\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ is a minimal prime component of $\mathfrak{p}B$. Furthermore if B_0 is integrally closed, then any minimal prime component $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{p}B$ lies over $\mathfrak{p}$.*

The first assertion is an immediate consequence of [5], III-3, Proposition 2. As for the second, let $\mathfrak{q}'$ be a minimal prime component of $\mathfrak{p}B$ and let $\mathfrak{p}'=\mathfrak{q}'\cap B_0$. Then by [5] (III-5) there exists a prime ideal $\mathfrak{q}$ of B such that $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}'$ and $\mathfrak{q}\cap B_0=\mathfrak{p}$. Then $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$ and $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'$, completing the proof of the lemma.

COROLLARY. *Let $\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2$ be prime ideals of a ring A, let B be an integral extension of A and let $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_2$ be prime ideals of B such that $\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}_i$, $i=0, 2$. Then if $A/\mathfrak{p}_0$ is integrally closed, there exists a prime ideal $\mathfrak{q}_1$ of B such that $\mathfrak{q}_0\subset\mathfrak{q}_1\subset\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_1\cap A=\mathfrak{p}_1$ and $\mathfrak{q}_1$ is a component of $\mathfrak{p}_1 B$.*

Let θ be an element of Θ which for the moment is arbitrary and set $\zeta_i=\theta\eta_i$ (where $\eta_1, \ldots, \eta_d$ is the differential transcendance basis we have chosen for R over $\mathfrak{F}$). In $\mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ let $\mathfrak{A}$ be the family of all those differential ideals which are generated by

the finite subsets of $\Theta\zeta_1 \cup \cdots \cup \Theta\zeta_d$. If the order of θ is sufficiently large, then for $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $D \notin \mathfrak{a} R_0$. It will now be assumed that θ is so chosen.

Let $\mathfrak{B}$ be the family of all prime differential ideals $\mathfrak{b}$ of $R[1/D]$ such that $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ is in $\mathfrak{A}$. One can canonically identify $\mathfrak{B}$ with the family of all prime differential ideals $\mathfrak{b}$ of R such that $D \notin \mathfrak{b}$ and $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ is in $\mathfrak{A}$. To complete the proof of the theorem, it will be enough to show that $(m, d) \leqslant (\text{type}_{\mathfrak{B}} R, \dim_{\mathfrak{B}} R)$. Referring to the first lemma of this section and the first lemma of § 2 it is seen that it will suffice to show that a) and b) hold true when we take $A = \mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ and $B = R$ and use the families $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ that have just been defined.

It is important to remark that R_0 being a polynomial ring over $\mathfrak{F}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$ is also such over $\mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$. Also if $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $R_0/\mathfrak{a} R_0$ is a polynomial ring over $\mathfrak{F}$ since the ideal $\mathfrak{a} R_0$ is generated by homogeneous linear elements of R_0. Consequently $R_0[1/D]$ is integrally closed and so is $R_0[1/D]/\mathfrak{a} R_0[1/D]$ for every $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$. The verification of a) and b) will now follow quickly.

First notice that if $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ and if $\mathfrak{b}$ is a prime ideal of $R[1/D]$ lying over $\mathfrak{a} R_0[1/D]$, then $\mathfrak{b}$ is a minimal prime component of $\mathfrak{a} R[1/D]$ and hence is differential. (It is a known fact that if a differential ring A contains $\mathbf{Q}$, any minimal prime component of a differential ideal of A is itself differential.) If $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{A}$, then by integrality there exist prime ideals $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ of $R[1/D]$ such that $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}'$ and $\mathfrak{b} \cap R_0[1/D] = \mathfrak{a} R_0[1/D]$, $\mathfrak{b}' \cap R_0[1/D] = \mathfrak{a}' R[1/D]$. Then $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}' \in \mathfrak{B}$ and lie over $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ respectively; this proves a). To show b), let $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{A}$ with $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_2$ and $\mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\} \subset a_1 \subset \mathfrak{b}_2 \cap$ $\cap \mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$. Let $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{F}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$. By the corollary there exists a prime ideal $\mathfrak{b}_1$ of $R[1/D]$ such that $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2$ and $\mathfrak{b}_1 \cap R_0[1/D] = \mathfrak{a}_1 R_0[1/D]$ and this implies b). The proof of the main theorem is now complete.

BIBLIOGRAPHY

[1] JOHNSON, JOSEPH, *Differential dimension polynomials and a fundamental theorem on differential modules,* to appear in Amer. J. Math.

[2] JOHNSON, JOSEPH, *Kähler differentials and differential algebra,* to appear in Ann. of Math.

[3] MUMFORD, DAVID, *Introduction to algebraic geometry* (Preliminary version of first three chapters), Harvard University lecture notes.

[4] KOLCHIN, ELLIS, *The notion of dimension in the theory of algebraic differential equations,* Bull. Am. Math. Soc. *70* (1964), 570–573.

[5] SERRE, Jean-Pierre and GABRIEL, PIERRE, *Algèbre locale-multiplicites* (Springer-Verlag, 1965).

Received April 29, 1968

Coherent Graded Rings and the Non-Existence of Spaces of Finite Stable Homotopy Type

JOEL M. COHEN[1])

As is indicated by the title, this paper will contain discussions of both algebra and algebraic topology. The main results are topological but the main work is algebra.

The main theorem concerns the stable homotopy groups $\pi_n^s(X)$ of a space X and localizes to the p-primary part for some prime p, ${}_p\pi_n^s(X)$, i.e. the group modulo the elements of finite order prime to p.

THEOREM II. 3.1 *If* $\tilde{H}^n(X; Z_p) \neq 0$ *for any* n *then* ${}_p\pi_n^s(X) \neq 0$ *for infinitely many* n.

The most interesting part of the algebra stems from the concept of coherence (a generalization of Noetherian). This condition with its beautiful properties is well-known to algebraic geometers (e.g. [6]) but is little known to algebraic topologists and to ring theorists.

This paper lists all the standard results on coherence but there are no new results here that are likely to be useful to algebraists. We define a variant of coherence which is topologically useful (it is non-trivial only in the graded case) and for which all the results on coherence pass over. We urge those algebraists who have come this far to read at least the definitions and known results on coherence (Section I. 1).

The author wishes to thank Professor J. P. MAY for many useful discussions and the referee for valuable suggestions.

The paper consists of two chapters, the first algebraic and the second topological, each with three sections. Within a chapter, theorems will be referred to as a.b. From one chapter to the other, they will be referred to as I.a.b. or II.a.b.

I. Coherent and Strongly Coherent Graded Rings

1. *Definitions*

The purpose of this chapter is to investigate some of the purely algebraic properties of graded rings which occur frequently in topology. We are interested in preserving to some degree the properties associated with Noetherian rings, but Noetherian is much too strong a condition especially in the case of graded rings. A useful concept is that of the *coherent* ring and a more restricted type the *strongly coherent ring.*

To make up for considering these weaker rings we must restrict the category of modules. Instead of considering finitely generated modules as one does for Noetherian,

[1]) This work was partially supported by NSF grant GP-5609.

we shall consider finitely presented modules (and a weaker version which makes sense only in the graded case).

First let us recall some definitions.

DEFINITIONS. A graded ring R is a collection of abelian groups R_n for all integers n and homomorphisms $R_n \otimes R_m \to R_{n+m}$ (which we write as juxtaposition) satisfying associativity and distributivity. We always assume the existence of a multiplicative identity element in R_0.

A graded (left) R-module M is a sequence of abelian groups M_n for all integers n and homomorphisms $R_n \otimes M_m \to R_{n+m}$ (which we write as juxtaposition) satisfying the usual module identities.

From now on all modules, ideals, and properties will be assumed to be left – unless they are specifically called otherwise. All modules, rings, and ideals will be graded.

An R-module map $f: M \to N$ of degree d is a sequence of maps $f: M_n \to N_{n+d}$ such that for $r \in R_n$ and $m \in M$, $f(rm) = (-1)^{dn} r f(m)$.

An exact triangle

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ f\ } & M' \\ & {\scriptstyle h}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & M'' & \end{array}$$

is a sequence of R-module maps f, g, h such that the kernel of each equals the image of the previous.

An exact diagram is a commutative diagram in which the rows and columns form exact sequences. In topology the exact triangle appears in the guise of the long exact sequence; for example, those associated to the homotopy and homology of a pair of spaces. (cf. [7]).

We recall the following definitions (cf. [2] and [3] where they are used for ungraded rings):

DEFINITION. An R-module M is finitely presented if there is a short exact sequence

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

with K and F finitely generated and F free.

An R-module M is *coherent* if it and its finitely generated submodules are finitely presented.

A ring R is *coherent* if it is coherent as an R-module.

We recall the standard theorems about coherent rings (they are fairly straightforward to prove; most are the trivializations of SERRE's theorems on coherent

sheaves [6], the rest are exercises in BOURBAKI [2] pp. 62–63). These propositions hold for the graded case as well as the ungraded with no change in the proofs.

PROPOSITION 1.1. *A finitely generated submodule of a coherent module is coherent.*

PROPOSITION 1.2. *If A, B, C are R-modules and*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

is an exact sequence and any two are coherent, so is the third.

PROPOSITION 1.3. *If $f: M \to N$ is an R-module map and M and N are coherent then so are* $\ker f$, $\operatorname{im} f$ *and* $\operatorname{cok} f$.

PROPOSITION 1.4. *Let R be a ring. Then the following are equivalent:*

(i) *R is coherent.*

(ii) *An R-module M is coherent if and only if it is finitely presented.*

PROPOSITION 1.5. *Let $\{R_\alpha\}$ be a direct system of left coherent rings such that for all α, R is a right flat R_α-module. Then $\varinjlim R_\alpha = R$ is left coherent.*

An immediate consequence of Proposition 1.5 is the following:

COROLLARY 1.6. *Let $R = \varinjlim R_\alpha$ be a Hopf algebra where the $R_\alpha \subset R$ are coherent subHopf algebras. Then R is coherent.*

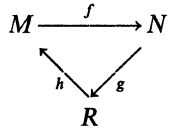
Proof. By MILNOR–MOORE [5] a Hopf algebra is free over a subHopf algebra.

We now introduce a concept that arises frequently as one studies properties of long exact sequences.

DEFINITION. If M is an R-module we say that M has size n over R

a) for $n=0$ if $M=0$

b) for $n>0$ if there is an exact triangle



where N has size $n-1$ and n is minimal with respect to this.

In general, finite size does not imply finitely generated but we shall show in Theorem 3.1. that coherent rings are characterized by the property that finite size implies finitely generated or equivalently that finite size implies finitely presented.

In order to prove some theorems in II of a strictly topological nature we shall introduce a weakening of the concept of coherence for the case of a graded ring and show that most properties still hold.

DEFINITION. A *weakly finitely generated* module is one which has generators in only finitely many degrees. A *weakly finitely presented* module M is one for which there is an exact sequence

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

where K and F are weakly finitely generated and F is free.

A module is *weakly coherent* if it and all its weakly finitely generated submodules are weakly finitely presented.

A ring R is *strongly coherent* if it is coherent and if every weakly finitely generated free module is weakly coherent.

We shall prove in § 3 that most of the propositions true for coherence are true in this variant.

We observe that coherent does not imply strongly coherent:

Example: Let R be a k-algebra (k some Noetherian ring) on generators x_n of degree $1, n=1, 2, 3, \ldots$ with the relations $x_n^{n+1}=0$. R is easily seen to be coherent. But the ideal $(x_1, x_2, \ldots)$ is weakly finitely generated but not weakly finitely presented.

2. *Properties of Strongly Coherent Rings*

We shall first prove the following useful lemma the non-weak case of which is in [2] p. 37.

LEMMA 2.1. *Let M be (weakly) finitely presented and N (weakly) finitely generated. Then if*

$$0 \to A \to N \to M \to 0$$

is exact, A is (weakly) finitely generated.

Proof. Let $0 \to K \to F \to M \to 0$ be a (weakly) finite presentation. If N is projective, then SHANUEL's lemma [4] says $K \oplus N \simeq F \oplus A$, hence A is (weakly) finitely generated since F and K are. For general N, there exists a (weakly) finitely generated projective P and an epimorphism $f: P \to N$. Then $f^{-1}(A)$ is the kernel of $P \to N \to M$ hence by the part already proved $f^{-1}(A)$ is (weakly) finitely generated. But $f \mid f^{-1}(A): f^{-1}(A) \to A$ is onto hence A is (weakly) finitely generated.

We can now prove the analogues of Propositions 1.1–1.5.

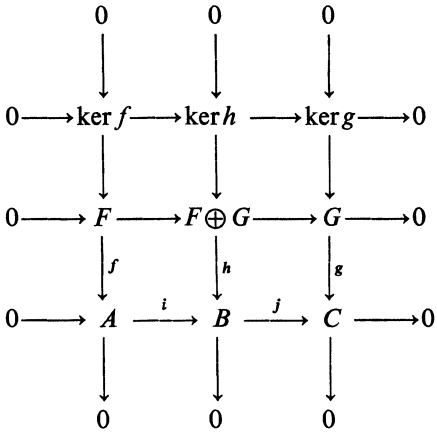
PROPOSITION 2.2. *A weakly finitely generated submodule of a weakly coherent module is weakly coherent.*

The proof is obvious.

THEOREM 2.3. *If $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ is an exact sequence of R-modules and any two are weakly coherent, then so the third.*

Proof. 1) Assume B and C weakly coherent. Then by Lemma 2.1, A is a weakly finitely generated submodule of B hence is weakly coherent by Proposition 2.2.

2) Assume A and B are weakly coherent. Then C is weakly finitely generated. Let F and G be weakly finitely generated free modules with epimorphisms $f: F \to A$, $g: G \to C$. Then there is an exact diagram



By Lemma 2.1, $\ker h$ is weakly finitely generated, hence so is $\ker g$ so C is weakly finitely presented.

If $C' \subset C$ is a weakly finitely generated submodule of C, let $B' = j^{-1}(C')$. Then the following is exact: $0 \to A \to B' \to C' \to 0$.

Since A and C' are weakly finitely generated so is B'. Then since $B' \subset B$, B' is weakly coherent. Since A is weakly coherent using the above, C' is weakly finitely presented. So C is weakly coherent.

3) Assume A and C are weakly coherent. Choose F and G as in 2) yielding the exact diagram there. Now $\ker f$ and $\ker g$ are weakly finitely generated, hence $\ker h$ is also so B is weakly finitely presented. If $B' \subset B$ is a weakly finitely generated submodule let $A' = i(A) \cap B'$, $C' = j(B')$. Then

$$0 \to A' \to B' \to C' \to 0$$

is exact. $C' \subset C$ is weakly finitely generated hence weakly coherent. Thus by Lemma 2.1, $A' \subset A$ is weakly finitely generated hence is weakly coherent. Thus by the above B' is weakly coherent.

PROPOSITION 2.4. *If f: $M \to N$ is an R-module map and M and N are weakly coherent then so are* $\ker f$, $\operatorname{cok} f$ *and* $\operatorname{im} f$.

Proof.

$$0 \to \operatorname{im} f \to N \to \operatorname{cok} f \to 0$$
$$0 \to \ker f \to M \to \operatorname{im} f \to 0$$

are exact. $\operatorname{im} f$ is a weakly finitely generated submodule of N hence is weakly coherent. Thus by the previous proposition, $\operatorname{cok} f$ and $\ker f$ are weakly coherent.

THEOREM 2.5. *The following are equivalent statements about a ring R*

(i) *R is strongly coherent*

(ii) *An R-module M is (weakly) finitely presented if and only if it is (weakly) coherent.*

Proof. (ii) implies (i): Eliminating "weakly", Proposition 1.4 says that R is coherent. Secondly, any weakly finitely generated free module is weakly finitely presented hence weakly coherent. Thus R is strongly coherent.

(i) implies (ii): By definition weakly coherent implies weakly finitely presented. Conversely assume

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

is a weakly finite presentation of M. Since R is strongly coherent F and hence K are weakly coherent so by Proposition 2.3, so is M.

Finally, we prove

THEOREM 2.6. *Let $R = \varinjlim R_\alpha$ where the R_α are strongly left coherent rings with R right flat over each R_α and such that for all integers m there exists α such that $R_\alpha \to R$ is an isomorphism up to degree m. Then R is strongly left coherent.*

Proof. First note that R is coherent from Proposition 1.5. Next let $M \subset F$ be a weakly finitely generated submodule of a free module. Choose m so that all the generators of M occur in degrees $\leqslant m$ and pick α as in the hypothesis. Let $F' \subset F$ be the weakly finitely generated R_α module on the same generators as F. Let $M' = F' \cap M$. Then $M \simeq R \otimes_{R_\alpha} M'$. Since R_α is strongly coherent there is a weakly finite presentation of R_α-modules

$$0 \to K \to H \to M' \to 0.$$

Since R is right R_α-flat

$$0 \to R \otimes_{R_\alpha} K \to R \otimes_{R_\alpha} H \to M \to 0$$

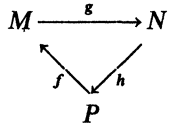
is a weakly finite presentation of M. Thus R is strongly coherent.

We prove two trivial but useful results.

PROPOSITION 2.7. *If R is finite then it is strongly coherent.*

Proof. If R is finite, it is trivially coherent. Let M be *any* weakly finitely generated module. Then if $f: F \to M$ is an epimorphism of a weakly finitely generated free module, then F vanishes in almost all degrees, hence so does $\ker f$ so $\ker f$ is trivially weakly finitely generated.

PROPOSITION 2.8. *If*



is an exact triangle and any two of the modules are (weakly) coherent then so is the third.

Proof. Assume M and N are (weakly) coherent. Then

$$0 \to \operatorname{im} h \to P \to \ker g \to 0$$

is exact. But by Proposition 2.4, $\operatorname{im} h$ and $\ker g$ are (weakly) coherent. So by Theorem 2.3, so is P.

PROPOSITION 2.9. *If M is a weakly coherent R-module and R is strongly coherent then for all $0 \neq x \in M$, $rx \neq 0$ for all indecomposables r except those in finitely many degrees.*

Proof. Let $f: R \to M$ be $f(r) = rx$. Then $\ker f$ is weakly coherent by Proposition 2.4. Thus $\ker f$ is weakly finitely generated. Since $f(1) = x \neq 0$, $1 \notin \ker f$ so indecomposables $r \in \ker f$ occur in only finitely many degrees and for $r \notin \ker f$, $0 \neq f(r) = rx$.

3. *A Characterization of Coherent Rings*

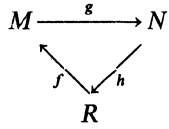
THEOREM 3.1. *The following are equivalent statements about a ring R.*

(i) *R is coherent,*

(ii) *Every R-module of finite size is coherent,*

(iii) *Every R-module of finite size is finitely generated.*

Proof. (i) implies (ii): By induction on the size of the R-module M: If size $M = 0$, then $M = 0$ so M is coherent. Assume the result holds for R-modules of size $n-1$. Let M be an R-module of size n. Then there is an R-module N of size $n-1$ and an exact triangle



Since R and N are coherent, Proposition 2.8 says that M is also.

(ii) implies (iii) trivially.

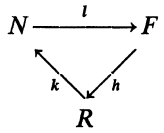
(iii) implies (i): Assume R is not coherent. Let $I \subset R$ be a finitely generated ideal which is not finitely presented. Let F be a free finitely generated module with

$$0 \to K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} I \to 0$$

exact (whence K is not finitely generated)

Let $h: F \to R$ be the composite $F \xrightarrow{g} I \subset R$. Set $N = \ker h \oplus \operatorname{cok} h = K \oplus \operatorname{cok} h$. So N is

not finitely generated. But



is exact where k and l are the obvious maps. Inductively it is easy to see that F is of finite size. Thus N is of finite size but not finitely generated.

II. The Topological Theorems

1. *Topological Premilinaries.*

All spaces will be given a basepoint $*\in X$. Maps preserve this basepoint. We shall assume familiarity with spectra. Since the ones we shall be concerned with are of a simple type almost anybody's definition will do. For example this (due to ADAMS [1]):

DEFINITION. A spectrum $\mathbf{X}$ is a sequence of CW complexes X_n of dimension $(2n-1)$ such that $SX_n = X_{n+1}^{(2n)}$.

Example. 1) If G is an abelian group then $\mathbf{K}(G)$ is the spectrum whose n-th space is the $(2n-1)$-skeleton of a suitably chosen Eilenberg-MacLane space of type (G, n). Let $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}(Z_p)$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}(Z)$.

2) If X is any space, $\mathbf{S}X$ is the spectrum whose n-th space is $S^n X^{(n-1)}$ where by $X^{(n-1)}$ we mean the $(n-1)$-skeleton of a CW complex weakly homotopy equivalent to X. If we set $X = S^0$ we write $\mathbf{S} = \mathbf{S}X$, the sphere spectrum whose n-th space in S^n, the n sphere.

3) If $\mathbf{X}$ is any spectrum then $\mathbf{X}^d$ is the spectrum whose n-th space is $X_{n+d}^{(2n-1)}$. This is the d-th suspension of $\mathbf{X}$.

DEFINITION. A map of degree r, $f: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ is a sequence of maps $f_n: X_n \to Y_{n+r}$ such that $Sf_n = f_{n+1} \mid X_{n+1}^{(2n)}$. The set of homotopy classes of such maps is $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^r$. $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^*$ is the total graded group.

We have the following properties of $\mathbf{X}$.

PROPOSITION 1.1. *If $f: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ is of degree r then there is a canonically defined spectrum $\mathbf{E}_f$ called the fibre of f and maps $\sigma_f: \mathbf{E}_f \to \mathbf{X}$ of degree 0 and $j_f: \mathbf{Y} \to \mathbf{E}_f$ of degree $(1-r)$ such that for any spectrum $\mathbf{W}$ there are long exact sequences*

$$[\mathbf{W}, \mathbf{Y}]^{n+r-1} \xrightarrow{j_{f*}} [\mathbf{W}, \mathbf{E}_f]^n \xrightarrow{\sigma_{f*}} [\mathbf{W}, \mathbf{X}]^n \xrightarrow{f_*} [\mathbf{W}, \mathbf{Y}]^{n+r}$$

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{W}]^{n-r+1} \xleftarrow{j_f^*} [\mathbf{E}_f, \mathbf{W}]^n \xleftarrow{\sigma_f^*} [\mathbf{X}, \mathbf{W}]^n \xleftarrow{f^*} [\mathbf{Y}, \mathbf{W}]^{n-r}$$

DEFINITION. If $\mathbf{X}$ is a spectrum we define $\Pi_n(\mathbf{X}) = [\mathbf{S}, \mathbf{X}]^{-n}$.

$H_n(\mathbf{X}; G)=\lim\limits_{\rightarrow} H_{n+r}(X_r; G)$ where the directed system is

$$H_{n+r}(X_r; G)\tilde{\rightarrow}H_{n+r+1}(SX_r; G)\rightarrow H_{n+r+1}(X_{r+1}; G).$$

Similarly $H^n(X; G)=\lim\limits_{\leftarrow} H^{n+r}(X_r; G)$.

The following properties are well-known:

PROPOSITION 1.2:

a) $H^n(\mathbf{X}; G)\cong[\mathbf{X}, \mathbf{K}(G)]^n$.

b) $H^*(X; Z_p)\cong H^*(\mathbf{S}X; Z_p)$ *as modules over the Steenrod algebra* $\mathscr{A}^*$.

c) *For any space* X, $\Pi_n^S(X)\cong\Pi_n(\mathbf{S}X)$.

d) *The Steenrod algebra* $\mathscr{A}^*\cong H^*(\mathbf{K}_p; Z_p)$.

Putting Propositions 1.1 and 1.2 together with the definitions we get

PROPOSITION 1.3. *If* $f: \mathbf{X}\rightarrow\mathbf{Y}$ *there are exact triangles:*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_*(\mathbf{X}) & \xrightarrow{f_*} & \Pi_*(\mathbf{Y}) \\ & {\scriptstyle\sigma_{f*}}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j_{f*}} & \\ & \Pi_*(\mathbf{E}_f) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^*(\mathbf{X}; G) & \xrightarrow{\sigma_f^*} & H^*(\mathbf{E}_f; G) \\ & {\scriptstyle f^*}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j_f^*} & \\ & H^*(\mathbf{Y}; G) & \end{array}$$

2. *On the* $\mathscr{A}^*$*-Module Structure of* $H^*(\mathbf{X})$

We shall now relate the topology to the algebra discussed earlier. We fix a prime p throughout. $\mathscr{A}_*$ shall refer to the mod p Steenrod algebra [8] and $H^*(\ )=H^*(\ ; Z_p)$.

PROPOSITION 2.1. *The Steenrod algebra is strongly coherent.*

Proof. From [8] we know that $\mathscr{A}^*$ is a Hopf algebra and is the union of finite subHopf algebras $\mathscr{A}_n$ where $\mathscr{A}_n=\mathscr{A}^*$ in degrees less than $m=2(p^n-1)$ ($m=2^n-1$ for $p=2$). Then apply Propositions I.2.6. and I.2.7 to get the desired result.

We now observe the following:

THEOREM 2.2. *If* ${}_p\pi_n(\mathbf{X})\neq 0$ *for only finitely many* n *then* $H^*(\mathbf{X})$ *is a weakly coherent* $\mathscr{A}^*$*-module.*

Proof. By induction on the number of non-trivial ${}_p\pi_n(\mathbf{X})$:

If ${}_p\pi_n(\mathbf{X})=0$ for $n\neq k$ and ${}_p\pi_k(\mathbf{X})=G$ then there is a map $f:\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{K}(G)$ which is a ${}_p\pi_k$-isomorphism. Thus ${}_p\pi_*(E_f)=0$ by Proposition 1.3 thus by the Hurewicz Theorem $H^*(E_f)=0$ and again by Proposition 1.3, $f^*: H^*(\mathbf{K}(G))\tilde{\rightarrow}H^*(\mathbf{X})$.

First, if $G=Z$ then the exact sequence $0\rightarrow Z\xrightarrow{p}Z\rightarrow Z_p\tilde{\rightarrow}0$ yields the exact trivangle

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbf{K}) & \longrightarrow & H^*(\mathbf{K}_p) \\ & {\scriptstyle p^*}\nwarrow \quad \swarrow & \\ & H^*(\mathbf{K}) & \end{array}$$

But $p^*=0$ and $\mathscr{A}^* \cong H^*(\mathbf{K}_p)$ so

$$0 \to H^*(\mathbf{K}) \to \mathscr{A}^* \to H^*(\mathbf{K}) \to 0$$

is exact and gives a finite presentation of $H^*(\mathbf{K})$.

Thus if G is free abelian

$$0 \to G \otimes H^*(G) \to G \otimes \mathscr{A}^* \to H^*(\mathbf{K}(G)) \to 0$$

gives a weak finite presentation of $H^*(\mathbf{K}(G))$. Thus since $\mathscr{A}^*$ is strongly coherent $H^*(\mathbf{K}(G))$ is weakly coherent.

Finally, if G is arbitrary, there is an exact sequence of groups

$$0 \to H \to F \to G \to 0$$

with H, F free abelian.

Then

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbf{K}(F)) & \longrightarrow & H^*(\mathbf{K}(H)) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H^*(\mathbf{K}(G)) & \end{array}$$

is exact (this comes from the fact that the fibre of the induced map $\mathbf{K}(F) \to \mathbf{K}(G)$ must be homotopy equivalent to $\mathbf{K}(H)$). Since $H^*(\mathbf{K}(F))$ and $H^*(\mathbf{K}(G))$ are weakly coherent, so is $H^*(\mathbf{K}(G))$ by Proposition I.2.8.

Assume inductively that $H^*(\mathbf{X})$ is weakly coherent if ${}_p\pi_*(\mathbf{X})$ has $(k-1)$-non-trivial groups. Assume ${}_p\pi_n(\mathbf{X}) \neq 0$ implies $n = i_1, i_2, \ldots, i_k$ with i_1 the smallest. Let ${}_p\pi_{i_1}(\mathbf{X}) = G$. Then there is a map $f: \mathbf{X} \to \mathbf{K}(G)$ such that ${}_p\pi_{i_1}(\mathbf{X}) \xrightarrow{f_*} \pi_0(\mathbf{K}(G))$ is an isomorphism. Then ${}_p\pi_*(\mathbf{E}_f)$ has $(k-1)$ non-trivial groups so $H^*(\mathbf{E}_f)$ is weakly coherent.

But

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbf{K}(G)) & \longrightarrow & H^*(\mathbf{X}) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H^*(\mathbf{E}_f) & \end{array}$$

is exact and $H^*(\mathbf{E}_f)$ and $H^*(\mathbf{K}(G))$ are weakly coherent. Thus $H^*(\mathbf{X})$ is also by Proposition I.2.8.

A special case of this is the following. First recall that a reduced group is one with no divisible subgroup and that if Q is divisible then $Q \otimes Z_p \simeq \mathrm{Tor}_z^1(Q, Z_p) = 0$.

Theorem 2.3. *If* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_p\pi_n(\mathbf{X})$ *has its reduced part finite then* $H^*(\mathbf{X})$ *is of finite size over* $\mathscr{A}^*$.

Proof. Since $Q \otimes Z_p \cong \mathrm{Tor}_z^1(Q, Z_p) = 0$ for Q divisible we may as well assume $\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_p\pi_n(\mathbf{X})$ itself is finite. Let $m \geqslant 0$ be such that $\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_p\pi_n(\mathbf{X})$ is of order p^m. If $m=0$ then ${}_p\pi_*(\mathbf{X})=0$ so $H^*(\mathbf{X})=0$ is of finite size. Assume that for $m<k$ the result holds. Let $\mathbf{X}$ be such that $\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_p\pi_n(\mathbf{X})$ is of order p^k. Assume ${}_p\pi_i(\mathbf{X})=0$ for $i<r$ and ${}_p\pi_r(\mathbf{X}) \neq 0$. Then $\pi_r(\mathbf{X})$ contains an element of order p so then does $H_r(\mathbf{X})$. Thus $H^r(\mathbf{X})$ contains some element θ of order p. Let $f: \mathbf{X} \to \mathbf{K}_p$ represent θ. Then $f_*: \pi_n(\mathbf{X}) \to \pi_0(\mathbf{K}_p)$ is onto. Thus from Proposition 1.3 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_p\pi_n(\mathbf{E}_f)$ contains p^{k-1} elements. Thus $H^*(\mathbf{E}_f)$ is of finite size. But

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbf{X}) & \longrightarrow & H^*(E_f) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H^*(\mathbf{K}_p) \cong \mathscr{A}^* & \end{array}$$

is exact hence $H^*(\mathbf{X})$ is of finite size.

3. *The Main Theorem*

THEOREM 3.1. *If $\tilde{H}^n(X) \neq 0$ for any n then ${}_p\pi_n^s(X) \neq 0$ for infinitely many n, for any space X.*

Proof. Assume to the contrary that ${}_p\pi_n^s(X) \neq 0$ for almost all n. Then the same is true of ${}_p\pi_n(\mathbf{S}X)$ so $H^*(\mathbf{S}X)$ is a weakly coherent $\mathscr{A}^*$-module ty Theorem 2.2. Since $H^*(X) \cong H^*(\mathbf{S}X)$ as $\mathscr{A}^*$-modules and since from Proposition 2.1, $\mathscr{A}^*$ is strongly coherent, Proposition I.2.9 says that for every $0 \neq x \in H^*(X)$, $\mathscr{P}^{p^n} x \neq 0$ for almost all n, since the $\mathscr{P}^{p^n}$ and β are the indecomposables of $\mathscr{A}^*$ (read Sq^{2^n} for $p=2$). From [8], however, we have that $\mathscr{P}^{p^n} x = 0$ if degree $x < 2p^n$. This yields a contradiction unless $\tilde{H}^*(X)=0$.

This proves the main theorem. In finishing we point out two further facts – ${}_p\pi_*(\mathbf{S})$ the p-primary part of the stable homotopy ring of the sphere is not coherent (hence the same is true of $\pi_*(\mathbf{S})$): There is a sequence of indecomposable elements $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ such that $\alpha_i \alpha_j = 0$ for all i and j. Thus the map $\alpha_1: {}_p\pi_*(\mathbf{S}) \to {}_p\pi_*(\mathbf{S})$ has infinitely generated kernel.

Secondly we observe that there are non-trivial spaces with only a finite number of stable homotopy groups: Let Q be a divisible group, then the Eilenberg-MacLane space $K(Q, n)$ has its integral homology and stable homotopy isomorphic to its homotopy. Of course here $0 = \tilde{H}^*(K(Q, n); Z_p)$. (This is for n add.)

BIBLIOGRAPHY

[1] J. F. ADAMS, *Stable homotopy theory* (Springer-Verlag, Heidelberg 1965).
[2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative* (Hermann, Paris 1961), Chapters 1–2.
[3] M. E. HARRIS, *Some results on coherent rings*, Proc. Amer. Math. Soc. *17* (1966), 474–479.
[4] I. KAPLANSKY, *Commutative Rings*, Queen Mary College notes (1966).
[5] J. W. MILNOR and J. C. MOORE, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. *81* (1965), 211–264.
[6] J.-P. SERRE, *Faisceaux Algébriques Cohérents*, Ann. of Math. 61 (1955), 197–278.
[7] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology* (McGraw-Hill, 1966).
[8] N. E. STEENROD and D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology Operations* (Princeton Univ. Press, 1962).

The University of Chicago

Received January 11, 1968

Revised May 31, 1968

Knot Cobordism Groups in Codimension Two[1])

J. LEVINE

In [3] and [7] the relationship of *cobordism* between knotted n-spheres in $(n+2)$-space (n-knots) is introduced and studied. Cobordism is weaker than isotopy but, on the other hand, is the more natural concept for studying singularities of submanifolds of codimension two (see [2], [3]). Moreover cobordism has the advantage that cobordism classes form an abelian group C_n, for each dimension, under connected sums.

KERVAIRE [7] has shown that $C_n=0$ when n is even i.e. all n-knots are null-cobordant (slice knots). When n is odd, FOX and MILNOR [3] for $n=1$, and KERVAIRE [7] for $n\geqslant 3$, have shown that C_n is infinitely-generated.

In this work, the groups C_{2n-1}, for $n\geqslant 2$, will be given a purely algebraic description. A relation, which we shall call cobordism, will be introduced into certain collections of matrices. Under "block addition" the cobordism classes form an abelian group for each collection. Two of these, G_+ and G_-, are of special interest. We construct a homomorphism:

$$\phi_n\colon C_{2n-1}\to G_{\varepsilon_n},\qquad \varepsilon_n=(-1)^n$$

and our main result is that ϕ_n is an isomorphism for $n\geqslant 3$, ϕ_2 is an isomorphism onto a certain specified subgroup G_+^0 of index 2, and ϕ_1 is onto. Thus the graded group $\{C_n{:}n\geqslant 4\}$ is periodic with period four of the form $\{0, G_-, 0, G_+\}$, but C_1 and C_3 seem to violate this periodicity. C_1 is still undetermined.

We next study the group G_ε by introducing some invariants whose relation to the Alexander polynomial and quadratic form of a knot will be immediately recognized. In particular, this will provide a more general setting for the result of FOX and MILNOR [3] and KERVAIRE [7] on the form of the Alexander polynomial of a slice knot and the cobordism invariance of the Minkowski units and signature of the quadratic form of a knot [14], [15]. We determine the values these invariants may assume and show that they are *not* faithful. In fact, we find that G_ε contains a linearly independent set. This has also been proved by MILNOR [23].

In conclusion, we use some of our considerations to construct examples, in every odd dimension, of knots whose complements are homotopy equivalent, yet are not cobordant. This generalizes the example of the granny knot and square knot in dimension 1. It is interesting to compare this to the result [9] that a knot whose complement is a homotopy circle is necessarily unknotted (at least in dimensions $\neq 2$ or 3). Moreover, in half the cases, the two knots are not even diffeomorphic; in the rest,

[1]) Research supported in part by NSF Grant No. 6868. The author is a Sloan Foundation Fellow.

It has been brought to my attention that many of the results of this paper have been independently of obtained by F. UNGOED-THOMAS.

it is known that the differential structure of a knot depends only on the homotopy type of its complement [10].

Cobordism of Matrices

1. All matrices will have integer entries. A square matrix N is *null-cobordant* if it is congruent to a matrix of the form $\begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ N_2 & N_3 \end{pmatrix}$ where N_i are square matrices of the same size. Note that N must have an even number of rows.

If A_1, A_2 are matrices, we define the "block sum" $A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. We say square matrices A_1 and A_2 are *cobordant* if $A_1 \oplus (-A_2)$ is null-cobordant. This is a reflexive and symmetric relation, but not necessarily transitive. For transitivity to hold, we will have to restrict the collection of matrices.

2. LEMMA 1: *Suppose A and N are square matrices and N and $A \oplus N$ are null-cobordant. If some linear combination $\lambda N + \mu N'$ (λ, μ integers and N' the transpose of N) is non-singular i.e. determinant $\neq 0$, then A is null-cobordant.*

Note that some restriction on N is necessary, since a large zero matrix would not work.

Proof: Consider $B = A \oplus N$ as a bilinear form on $Z^{2n} = Z^{2m} \oplus Z^k \oplus Z^l$, with the properties that $k = l$, Z^{2m} and $Z^k \oplus Z^l$ are orthogonal with respect to B, $B \mid Z^{2m} = A$, $B \mid Z^k \oplus Z^l = N$, $B \mid Z^k = 0$, and there exists $\alpha_1, \cdots \alpha_n \varepsilon Z^{2n}$, linearly independent elements, with $B(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. To prove the lemma it suffices to find linearly independent elements $\beta_1, \ldots, \beta_m \varepsilon Z^{2m}$ satisfying $B(\beta_i, \beta_j) = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Let us write $\alpha_i = x_i + y_i + z_i$ where $x_i \varepsilon Z^{2m}$, $y_i \varepsilon Z^k$, $z_i \varepsilon Z^l$. We will need the well-known fact:

(1) If $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \varepsilon Z^m$, then there exists a non-singular matrix $P = (p_{ij})$ such that if $\gamma_i' = \sum p_{ij} \gamma_j$, then $\gamma_1', \ldots, \gamma_r'$ are linearly independent, while $\gamma_{r+1}' = \cdots = \gamma_n' = 0$, for some r.

Applying this to $\{z_i\} \subset Z^l$, we may assume that $z_1, \ldots, z_r$ are independent, while $z_{r+1} = \cdots = z_n = 0$. Note that $r \leqslant k = l$. Applying (1) now to $\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$, we may assume $\{x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}\}$ is linearly independent and $x_{r+s+1} = \cdots = x_n = 0$. Then $A(x_i, x_j) = B(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ for $r+1 \leq i, j \leq r+s$, so it suffices to show $s \geq m$. But $N(y_i, z_j) = B(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ for $i > r+s$; similarly $N(z_j, y_i) = 0$ for $i > r+s$. If we define $N_0 = \lambda N + \mu N'$, as specified in the hypothesis, then $y_{r+s+1}, \ldots, y_n$ lie in the subgroup $Y \subset Z^k$ orthogonal to $z_1, \ldots, z_r$ with respect to N_0. Since N_0 is non-singular and $\{z_1, \ldots, z_r\}$ are linearly independent, Y has rank $\leq k - r$. Thus $n - r - s \leq k - r$ (note $\{y_i\} = \{\alpha_i\}$, for $i > r+s$. and so are linearly independent) and this implies $s \geq n - k = m$.

3. It now follows from Lemma 1 that, in the collection of square matrices A satisfying:

(2) $\lambda A + \mu A'$ is non-singular for some integers λ, μ,

cobordism is an equivalence relation. In fact, if A_1, A_2 and A_2, A_3 are cobordant pairs, then $A_1 \oplus (-A_2)$ and $A_2 \oplus (-A_3)$ are null-cobordant. Therefore, $A \oplus (-A_2) \oplus \oplus A_2 \oplus (-A_3)$ is null-cobordant, and, since $A_2 \oplus (-A_2)$ is null-cobordant, it follows from Lemma 1 that A_1 and A_3 are cobordant.

For a fixed pair of integers λ, μ, consider the collection of matrices A satisfying (2). This collection is closed under block sum; moreover block sum preserves cobordism. It follows that the set $G_{\lambda,\mu}$ of cobordism classes has the structure of an abelian semi-group. But if A satisfies (2), so does $-A$, which is obviously a cobordism inverse. Thus $G_{\lambda,\mu}$ is an abelian group. Notice that the matrices satisfying (2), except that $\lambda A + \mu A'$ is required to be *unimodular*, if there are any, define a subgroup of $G_{\lambda,\mu}$.

4. We will say that A has *property* ε ($\varepsilon = \pm 1$) if $A + \varepsilon A'$ is unimodular. It follows from § 3 that the cobordism classes of matrices with property ε form an abelian group G_ε under block sum. It follows immediately from Lemma 1 that the zero class in G_ε consists precisely of the null-cobordant matrices of type ε.

A matrix with property ε must have an even number of rows. If $\varepsilon = -1$, this is a familiar property of non-singular skew-symmetric matrices. If $\varepsilon = +1$, it is a property of unimodular even quadratic forms (see e.g. [11, Theorem 1]).

If A has property $+$, then $A + A'$ has signature a multiple of 8 (see [11, Theorem 1]). Let G_+^0 be the subgroup of G_+ of index 2, defined by matrices A with property $+$ and signature $(A + A')$ a multiple of 16. Note that signature $(A + A')$ depends only on the cobordism class of A.

Cobordism of Knots

5. If $n \geqslant 1$ is an integer, an *n-knot* is a smooth oriented submanifold of S^{n+2}, *homeomorphic* to S^n. Two n-knots K_0, K_1 are *cobordant* if there exists a smooth oriented submanifold V of $I \times S^{n+2}$, with $\partial V = (1 \times K_1) \cup (0 \times (-K_0))$. An n-knot is *null-cobordant* (slice knot) if it is cobordant to the standard imbedded $S^n \subset S^{n+2}$ – equivalently, if it bounds an imbedded $(n+1)$-disk in D^{n+3}.

Cobordism is weaker than isotopy e.g. the square knot is null-cobordant. The cobordism classes of n-knots form an abelian group C_n, under *connected sums*. See [7, Ch. III] for more detail and proofs – our C_n is larger than Kervaire's, since he only allows knots *diffeomorphic* to S^n. The negative of the cobordism class of a knot K is represented by the image of K, with reversed orientation, under a reflection of S^{n+2}; we denote this knot by $-K$. As mentioned in the introduction, Kervaire [7] has shown that $C_n = 0$ for n even; we therefore concentrate on odd n.

6. $A(2n-1)$-knot K is *simple* if the homotopy groups of its complement $S^{2n+1} - K$ coincide with those of the circle in dimensions $< n$. Note that this is the

most one can ask if K is knotted (see [9]). If K is simple, it is proved in [9], that K bounds an $(n-1)$-connected submanifold of S^{2n+1} – and conversely.

Construction of ϕ_n

7. Let K be a $(2n-1)$-knot; then K bounds an oriented $2n$-dimensional submanifold V of S^{2n+1} (see e.g. [9; Lemma 2]). We can define a pairing:

$$\theta: H_n(V) \otimes H_n(V) \to Z$$

by $\theta(\alpha \otimes \beta) = L(\alpha \otimes i_*(\beta))$, where L denotes linking number and $i: V \to S^{2n+1} - V$ is defined by translation in the positive normal direction. We have the formula:

$$\theta(\alpha \otimes \beta) + (-1)^n \theta(\beta \otimes \alpha) = -\alpha \cdot \beta \tag{3}$$

where $\alpha \cdot \beta$ is the intersection number in V (see [10, § 2.5]).

A basis for the torsion-free part of $H_n(V)$ determines a matrix representing θ – such a matrix A will be called a *Seifert matrix for* K. It follows directly from (3) that A satisfies property $(-1)^n$, since the intersection pairing of $H_n(V)$ is unimodular.

If A_1, A_2 are Seifert matrices for K_1, K_2, it is easily seen that $A_1 \oplus A_2$ is a Seifert matrix for the connected sum $K_1 \# K_2$ and $-A_1$ is a Seifert matrix for $-K_1$.

Let K be a simple $(2n-1)$-knot, $n \geqslant 2$; then $\pi_n(S^{2n+1} - K)$ is a module over the group ring A of $\pi_1(S^{2n+1} - K) \approx Z$. If t is a generator of $\pi_i(^{2n+1} - K)$ and A is a Seifert matrix for K, then $tA + (-1)^n A'$, viewed as a matrix with entries in Λ, is a relation matrix for $\pi_n(S^{2n+1} - K)$ (see [7, p. 255]). More generally, for any $(2n-1)$-knot K, $tA + (-1)^n A'$ is a relation matrix for $H_n(\tilde{X}; Q)$ (Q=rationals) where $\tilde{X}$ is the infinite cyclic covering of the complement of K (see [10, § 2]).

8. LEMMA 2: *If K is a null-cobordant $(2n-1)$-knot and A is a Seifert matrix for K, then A is null-cobordant.*

Proof: Let V be the oriented submanifold of S^{2n+1} bounded by K from which A is defined. It is required to find a linearly independent subset $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \varepsilon H_n(V)$ such that rank $H_n(V) = 2r$ and $\theta(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ for $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

Let Δ be a smooth $(2n+1)$-disk in D^{2n+2} bounded by K. Consider the closed manifold $\bar{V} = V \cup \Delta$ (corner at K) oriented consistent with V. $\bar{V}$ bounds a submanifold W of D^{2n+2}. To see this, we apply the Thom-Pontriagin construction. Let v be a unit normal vector field to $\bar{V}$ in D^{2n+2}. Extending this to a framed submanifold of D^{2n+2} is equivalent to a more standard problem. Let U be an open tubular neighborhood of Δ in D^{2n+2}. Then $(\bar{V}, v)$ is trivially isotopic to a framed submanifold of ∂M, where $M = D^{2n+2} - U$. According to the Thom-Pontriagin construction, we get an obstruction to extending $(\bar{V}, v)$ in $H^2(M, \partial M)$, and this is the only obstruction. But $H^2(M, \partial M) \approx H^2(D^{2n+2}, S^{2n+1} \cup \Delta) \approx H^1(S^{2n+1} \cup \Delta) = 0$. Thus W exists.

Now consider the inclusion $j: V \to W$. If $\alpha, \beta \varepsilon \operatorname{Ker}\{j_*: H_n(V) \to H_n(W)\}$, then $\theta(\alpha \otimes \beta) = 0$, because α bounds a chain in W and $i_*(\beta)$ bounds a chain in $D^{2n+2} - W$ obtained by translating off W a chain bounded by β in W (recall $i: V \to S^{2n+1} - V$). Thus, to prove Lemma 2 it suffices to show that $\operatorname{Ker} j_*$ has rank r.

Now consider the exact sequence:

$$H_{n+1}(W) \xrightarrow{\lambda} H_{n+1}(W, V) \xrightarrow{\delta} H_n(V) \xrightarrow{j^*} H_n(W) \xrightarrow{\lambda'} H_n(W, V). \tag{4}$$

By duality (and $V = \partial W$-disk), we have $H_n(W, V) \approx H^{n+1}(W)$ and $H_{n+1}(W, V) \approx \approx H^n(W)$. Moreover, modulo torsion, the homomorphisms λ and λ' correspond to the homomorphisms $H_{n+1}(W) \to \operatorname{Hom}\{H_n(W), Z\}$, $H_n(W) \to \operatorname{Hom}\{H_{n+1}(W), Z\}$ determined by the intersection pairing: $H_n(W) \otimes H_{n+1}(W) \to Z$.

In particular, rank (image λ) = rank (image λ'). From this, and the following well-known fact:

If $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ is an exact sequence of abelian-groups, then rank B = rank (image g) + + rank (image h).

We deduce from (4) that: rank $(\operatorname{Ker} j_*)$ = rank (image ∂) = $1/2$ rank $H_n(V) = r$ as desired.

9. Let $\varepsilon_n = (-1)^n$. We can now construct a homomorphism $\phi_n: C_{2n-1} \to G_{\varepsilon_n}$ by assigning to the cobordism class of a knot, the cobordism class of any Seifert matrix. By § 7 and Lemma 2, ϕ_n is well-defined and a homomorphism.

The Main Theorem

THEOREM: ϕ_n *is:* (a) *an isomorphism onto* G_{ε_n} *for* $n \geqslant 3$
(b) *an isomorphism onto* G_+^0 *for* $n = 2$
(c) *an epimorphism for* $n = 1$.

10. To prove the onto parts of the theorem we use the following result:

LEMMA 3: *If A is a matrix satisfying property ε_n, then there exists a simple $(2n-1)$-knot for which A is a Seifert matrix, for any $n \geqslant 1$. If $n = 2$, it is necessary to assume that $A + A'$ is a matrix representation of the intersection pairing $H_2(V) \otimes H_2(V) \to Z$ for some simply-connected closed 4-manifold V.*

For $n = 1$, this is a classical result [17]. For $n \geqslant 2$, a proof is given in [7, Ch. II, § 6].

Using Lemma 3, the onto statements for $n \neq 2$ follow immediately. We now consider $n = 2$.

Suppose K is a 3-knot bounding the 4-manifold V in S^5. Then K is diffeomorphic to S^3 and we can put a disk on ∂V to form a closed manifold $\bar{V}$. If A is a Seifert matrix for K, then $A + A'$ represents the intersection pairing of $\bar{V}$. It follows from

Rohlin's Theorem that signature $(A+A')$ is a multiple of 16, since V is parallelizable (it has a trivial normal bundle in Euclidean space) (see e.g. [8]). Thus $\phi_2(C_3)\subset G_+^0$.

Suppose $\alpha\varepsilon G_+^0$. We can represent α by an arbitrarily large matrix A, for which $A+A'$ is indefinite – for example, by adding to a given representative a number of copies of $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Now, in [11], Milnor constructs a closed 4-manifold M with index 16 and second Betti number 22. By forming the connected sum of copies of M and $S^2\times S^2$, it follows that we can construct a closed 4-manifold V with any index S a multiple of 16, and second Betti-number any even integer $\geqslant 11/8\cdot S$. Thus we construct V whose intersection pairing $H_2(V)\otimes H_2(V)\to Z$ has the same signature and rank as $A+A'$ (for suitable A). But, by the classification of indefinite unimodular integral quadratic forms [11; Th. 1, 2], it follows that $A+A'$ is actually a matrix representative of the intersection pairing of V. By Lemma 3, A is a Seifert matrix for a 3-knot and therefore $\alpha\varepsilon\phi_2(C_3)$. Thus $\phi_2(C_3)=G_+^0$.

11. The theorem will now follow from the following two lemmas.

LEMMA 4: *Every $(2n-1)$-knot is cobordant to a simple knot.*

LEMMA 5: *If $n\geqslant 2$ and K is a simple $(2n-1)$-knot with a null-cobordant Seifert matrix, then K is null-cobordant.*

Proof of Lemma 4: We only need consider $n\geqslant 2$. The idea is to extend a knot K to an $(n-1)$-connected submanifold V_0 of D^{2n+2} which can then be "engulfed" in the boundary of a smaller disk D_0^{2n+2} in the interior of D^{2n+2}. Then V_0 bounds a simple knot K_0 in ∂D_0^{2n+2} and the annular region $\overline{D^{2n+2}-D_0^{2n+2}}$ gives a cobordism between K and K_0.

Let V be a submanifold of S^{2n+1} bounded by K. In [7, Ch. III, § 3] Kervaire shows how to add handles to V in D^{2n+2} in such a way that the corresponding "surgeries" simplify V in a prescribed manner. His arguments, although presented only in the case of even-dimensional knots, work equally well in the odd-dimensional case, but only up to one dimension below the middle. The result is a $(2n+1)$-dimensional submanifold W of D^{2n+2}, with an imbedding $i: V\times I\to W$ satisfying:

(a) $W\cap S^{2n+1}=V$ and $i(x,t)=1/2(t+1)\,x$, considering $V\subset D^{2n+2}$, and using scalar multiplication in R^{2n+2}.

(b) $\partial W=V\cup i(\partial V\times I)\cup V_0$, where $V_0\cap V=\phi$ and $V_0\cap i(\partial V\times I)=\partial V_0=i(\partial V\times 0)$

(c) V_0 is $(n-1)$-connected

(d) W is obtained from $i(V\times I)$ by attaching handles of index $\leqslant n$ to $i(V\times 0)$.

Note that W has a corner at $i(\partial V\times 1)=K$.

We now wish to apply the engulfing theorem of HIRSCH and ZEEMAN to imbed a $(2n+2)$-disk D_0^{2n+2} in the interior of D^{2n+2} so that $D_0^{2n+2}\cap W=\partial D_0^{2n+2}\cap W=V_0$. We may formally apply [4, Th. 2]; in the notation of [4], we let $X=V_0$ and V(of [4])

$=D^{2n+2}$ with a "cut" along W (alternatively, the complement in D^{2n+2} of a tubular neighborhood of W). The hypothesis of [4, Th. 2] are satisfied as follows:

(i) V_0 is n-collapsible by (c) and e.g. [16, Lemma 2.7],

(ii) $D^{2n+2}-W$ is 1-connected by (d), and

(iii) $2n+1 \geqslant n+3$, since $n \geqslant 2$.

Now $D^{2n+2}-D_0^{2n+2}$ is an h-cobordism between S^{2n+1} and ∂D^{2n+1}; according to [18] ($n \geqslant 2$) it is diffeomorphic to $S^{2n+1} \times I$. If h is such a diffeomorphism, then $h_i(\partial V \times I)$ is a cobordism from K to $h(\partial V_0)$, the latter being simple since it bounds $h(V_0)$ in S^{2n+1}.

12. *Proof of Lemma* 5: Suppose V is an $(n-1)$-connected submanifold of S^{2n+1}, bounded by K. By the assumption of Lemma 5 and the fact that ϕ_n is well-defined, any matrix associated with K is null-cobordant. Thus, $H_n(V)$ has a basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$; $\beta_1, \ldots, \beta_r$ such that $\theta(\alpha_i, \alpha_j)=0$ for $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

Suppose $n \geqslant 3$; then $\{\alpha_i\}$ are represented by disjoint imbedded n-spheres $S_i \subset V$. This follows from Whitney's procedure [22] applied, first, to the self-intersections of S_i, and, then, to the intersections of S_i and S_j, using $\alpha_i \cdot \alpha_j = \theta(\alpha_i, \alpha_j)+\theta(\alpha_j, \alpha_i)=0$. Next we extend each S_i to an imbedded $(n+1)$-disk d_i in D^{2n+2}. Since the intersection number of d_i and d_j is $\theta(\alpha_i, \alpha_j)$, we can again apply Whitney's procedure ($n+1 \geqslant 3$) to insure that the $\{d_i\}$ are disjoint. Now d_i can be taken as the core of a handle h_i attached to V. This is done by extending a normal field to V in S^{2n+1} to a normal field v_i to d_i in D^{2n+2} – the obstruction can be identified with $\theta(\alpha_i, \alpha_i)=0$ – and taking h_i to be the orthogonal complement to v_i in a tubular neighborhood of d_i.

The handles $\{h_i\}$ induce surgeries on V resulting in a submanifold Δ of D^{2n+2}, bounded by K. The computation in [12, § 6] shows that Δ is contractible. If $n \geqslant 3$, it follows from [18] that Δ is a $2n$-disk and, therefore, K is null-cobordant.

13. If $n=2$, the above argument fails in two places:

(a) representing $\{\alpha_i\}$ by disjoint imbedded spheres, and

(b) the assertion that Δ is a disk.

We use results of WALL [20], [21] on 4-manifolds to repair the argument. Since K is diffeomorphic to S^3, we form the smooth closed manifold $\bar{V}$ by putting a disk on ∂V. Since V is parallelizable and has index zero, it follows from [21, Th. 1 and Lemma 2] that $\bar{V}$ is h-cobordant to the boundary of a handlebody with handles of index 2. But then it follows easily from [21, Th. 3] that the connected sum of $\bar{V}$ with enough copies of $S^2 \times S^2$ is diffeomorphic to the boundary of such a handlebody W. Since we may perform these connected sums with copies of $S^2 \times S^2$ in S^5, we may assume that $\bar{V}=\partial W$.

The handlebody decomposition of W provides us with a family $\{S_i'\}$ of disjoint imbedded n-spheres in $\bar{V}$ – the boundaries of the transverse disks of the handles. If

$\alpha_i' \varepsilon H_2(\bar{V})$ is the homology class of S_i', then an easy homology argument shows that $\{\alpha_i'\}$ is half of a basis of $H_2(\bar{V})$. Also $\alpha_i' \cdot \alpha = 0_j'$, all i, j. Since the intersection pairing on $H_2(\bar{V})$ is unimodular, both $\{\alpha_i\}$ and $\{\alpha_i'\}$ extend to bases $\{\alpha_i; \beta_i\}$, $\{\alpha_i'; \beta_i'\}$ satisfying $\alpha_i \cdot \beta_j = \alpha_i' \cdot \beta_j' = \delta_{ij}$, $\beta_i \cdot \beta_j = \beta_i' \cdot \beta_j' = 0$. It then follows from [20, Th. 2], that $\bar{V}$ admits a diffeomorphism h onto itself such that $h_*(\alpha_i') = \alpha_i$. We can therefore take $S_i = h(S_i')$.

Observe that the result of surgery on $\bar{V}$, using the $\{S_i'\}$, is diffeomorphic to S^4, because this is equivalent to removing the handles of W (since $\pi_3(SO_2) = 0$, the framing of the $\{S_i'\}$ is irrelevant). Thus, applying h^{-1}, Δ must be a 4-disk.

This completes the proof of Lemma 5, and the Theorem.

Alexander Polynomial

14. We now begin a purely algebraic study of the groups G_ε. For an integral matrix A of type ε, we define an integral, i.e. integer coefficients, polynomial: $\Delta_A(t) =$ $=$ determinant $(tA + \varepsilon A')$.

PROPOSITION 1: *If A has 2μ rows, then*

(1) $\Delta_A(t) = t^{2\mu} \Delta_A(t^{-1})$,

(2) $\Delta_A(-\varepsilon)$ is square,

(3) $\Delta_A(1) = (-\varepsilon)^\mu$.

Proof: (1) follows directly from the definition. (2) follows from the fact that skew-symmetric matrices have square determinants. This fact together with property -1 implies (3), for $\varepsilon = -1$. For $\varepsilon = +1$, $\Delta_A(1)$ is the determinant of an even unimodular quadratic form of rank 2μ. If this form has signature $2S$, then the determinant is $(-1)^{\mu - S}$. But $S = 0 \bmod 8$ for such forms, which implies (3).

As a converse to Proposition 1, we have:

PROPOSITION 2: *Let $\varepsilon = \pm 1$, μ be a positive integer and $\Delta(t)$ an integral polynomial satisfying* (1), (2) *and* (3). *Then there exists a square integral matrix A satisfying property ε, such that $\Delta(t) = \Delta_A(t)$.*

Proof: We adapt the construction in [17]. For $\mu = 1$, the most general form for such a $\Delta(t)$ is $at^2 + (1-2a)t + a$ for $\varepsilon = -1$, and $a(a+1)t^2 - (2a(a+1)+1)t + a(a+1)$ for $\varepsilon = +1$, where a is an integer. We may set $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} a(a+1) & 2a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, for $\varepsilon = -1$ or $+1$, respectively.

Assume the proposition for all $\mu < \mu_0$. In addition, assume that A may be chosen so that the matrix obtained from $tA + \varepsilon A'$ by deleting the first row and column is $(t+\varepsilon)(t-\varepsilon)^{2\mu-2}$. This is true for $\mu = 1$ of the above choices. We may write a given $\Delta(t)$, satisfying (1), (2) and (3), for $\mu = \mu_0$, in the form:

$$\Delta(t) = a(t+\varepsilon)^2 (t-\varepsilon)^{2\mu_0 - 2} - \varepsilon t \Delta_0(t)$$

for some polynomial $\Delta_0(t)$. It may be checked directly that $\Delta_0(t)$ satisfies (1), (2) and

(3) for $\mu=\mu_0-1$. Thus there exists a square matrix A_0 with $2\mu_0-2$ rows, satisfying property ε, such that $\Delta_{A_0}(t)=\Delta_0(t)$ and satisfying the additional hypothesis for $\mu=\mu_0-1$. We now define A by:

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & -a & 0 & \cdots\ 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots\ 0 \\ a & -1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_0 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

It is easily checked that A satisfies property ε and $\Delta_A(t)=\Delta(t)$.

15. The polynomial $\Delta_A(t)$, clearly an invariant of the congruence class of A, is also important in studying the cobordism class of A because of:

PROPOSITION 3: *If A is a null-cobordant matrix of type ε, with 2μ rows, then $\Delta_A(t)=(-\varepsilon t)^{\mu}\,\theta(t)\,\theta(t^{-1})$ for some integral polynomial $\theta(t)$.*

Proof: Since $\Delta_A(t)$ is an invariant of the congruence class of A, we may assume $A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$, where A_i are $(\mu\times\mu)$-matrices. Then $tA+\varepsilon A'=\begin{pmatrix} 0 & tA_1+\varepsilon A_2' \\ tA_2+\varepsilon A_1' & tA_3+\varepsilon A_3' \end{pmatrix}$ and $\Delta_A(t)=(-1)^{\mu}\det(tA_1+\varepsilon A_2')\det(tA_2+\varepsilon A_1')$. But $tA_2+\varepsilon A_1'=\varepsilon t(t^{-1}A_1'+\varepsilon A_2)$; and we may set $\theta(t)=\det(tA_1+\varepsilon A_2')$.

Consider the family of integral polynomials satisfying (1)–(3) of Proposition 1 for a given $\varepsilon=\pm 1$, and some μ (which is uniquely determined by (1)). Define an equivalence relation among these polynomials by: $\Delta_1(t)\sim\Delta_2(t)$ if and only if $\Delta_1(t)\,\Delta_2(t)=(-\varepsilon t)^{\mu}\,\theta(t)\,\theta(t^{-1})$ for some μ and $\theta(t)$. If P_ε denote the set of equivalence classes, polynomial multiplication induces an abelian group structure on P_ε in which every element has order two.

By Proposition 3, a homomorphism $G_\varepsilon\to P_\varepsilon$ is induced by $A\mapsto\Delta_A(t)$. Proposition 2 implies it is an epimorphism.

The Quadratic Form

16. If A satisfies property ε, then $A+A'$ represents an even quadratic form with odd determinant (when $\varepsilon=-1$, it differs from the unimodular $A-A'$ by even entries). From Section 3 we see that the cobordism classes of quadratic forms with non-zero determinant form an abelian group. Let K_+, K_- be the subgroups defined by restricting the quadratic forms to be even and their determinants to be ± 1, and odd, respectively. Then it follows immediately that $A\mapsto A+A'$ defines homomorphisms $G_\varepsilon\to K_\varepsilon$. Surjectivity when $\varepsilon=+1$ is obvious; when $\varepsilon=-1$ we need:

LEMMA 6: *If B is a symmetric integral matrix with even diagonal entries and odd*

determinant, then there exists an integral matrix A, satisfying property -1, such that $A+A'=B$.

Proof: Let B_0 be a skew-symmetric matrix such that $B \equiv B_0 \bmod 2$, i.e. corresponding entries of B and B_0 have the same parity. This can be accomplished, for example, by changing the diagonal entries of B to zero, and changing the sign of all entries below the diagonal. Clearly B_0 has odd determinant. Now B_0 is congruent to a matrix of the form $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$, where $A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}$; since $\det B_0$ is odd, the a_i are odd. Thus B is congruent to a matrix $C=(c_{ij})$, where c_{ij} is even unless either (i) i is odd and $j=i+1$, or (ii) i is even and $j=i-1$ – in these cases c_{ij} is odd. We define $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$, by

(i) $\bar{a}_{ij}=1/2c_{ij}$, if c_{ij} is even,

(ii) $\bar{a}_{ij}=1/2(c_{ij}+1)$, if i is odd and $j=i+1$, and

(iii) $\bar{a}_{ij}=1/2(c_{ij}-1)$, if i is even, $j=i-1$.

Then $C=\bar{A}+\bar{A}'$ and $\bar{A}$ is congruent to the desired A by means of the same congruence which transforms C to B.

17. If Λ is a commutative ring with 1, we define the Witt group of *even* unimodular quadratic forms over Λ to be the group (under block sum) of equivalence classes of such forms under the relation defined as follows: $A \sim B$ if and only if $A \oplus k\,U$ and $B \oplus l\,U$ are congruent, for some k, l, where $U=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. An inverse for A is given by $-A^{-1}$, since, if $P=\begin{pmatrix} I-CA^{-1} & -C \\ A^{-1} & I \end{pmatrix}$, where $A=C+C'$, then

$$P(A \oplus (-A^{-1}))P' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

This generalizes the classical Witt group for Λ a field of characteristic $\neq 2$ (see [1] and [5]). $W(\Lambda)$ is easily seen to coincide with the Grothendieck group of even unimodular quadratic forms over Λ, divided by the subgroup generated by U.

The following lemma says that $W(\Lambda)$ is the same as the group of cobordism classes of even unimodular quadratic forms over Λ.

LEMMA 7: *Let B be an even unimodular quadratic form over Λ. Then B is null-cobordant if and only if B is congruent, over Λ, to $U \oplus U \oplus \cdots \oplus U$.*

Proof: We may assume $B=\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}$, where B_1, B_2 are invertible over Λ, and B_3 has even diagonal entries.

Define $T=\begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ AB_1^{-1} & I \end{pmatrix}$, where $B_3=A+A'$, and I is the identity matrix. Then TBT' has the form $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

18. Recall that the rational 2-adic integers $Q(2)$ is the ring of all rational numbers with odd denominator. It follows from Lemma 7 that there are homomorphisms $K_+ \to W(Z)$, $K_- \to W(Q(2))$, defined by regarding a quadratic form representing an element of K_- (or K_+) as an even unimodular form over $Q(2)$ (or Z).

Define Λ_ε to be Z if $\varepsilon = +1$, and $Q(2)$ if $\varepsilon = -1$.

PROPOSITION 4: *The above homomorphisms are isomorphisms* $K_\varepsilon \approx W(\Lambda_\varepsilon)$.

This follows immediately from Lemma 7 if $\varepsilon = +1$. For $\varepsilon = -1$, we first prove another lemma.

19. Suppose $\Lambda \subset \Gamma$ are principal ideal domains such that every element of Γ/Λ has finite Λ-order i.e. if $\alpha \varepsilon \Gamma$, then there exists $\lambda \varepsilon \Lambda$ such that $\lambda \alpha \varepsilon \Lambda$. Let C_Λ and C_Γ be the group of cobordism classes of even non-degenerate (i.e. non-zero determinant) quadratic forms over Λ and Γ respectively.

LEMMA 8: *The natural homomorphism* $C_\Lambda \to C_\Gamma$ *is injective.*

Proof: Suppose A is a non-degenerate even quadratic form over Λ, null-cobordant over Γ. If A is considered as a bilinear form on a free Λ-module V, then there exists a direct summand S of $V \otimes_\Lambda \Gamma$, whose Γ-dimension is half the Λ-dimension of V, such that $A \mid S = 0$. Let $S_0 = S \cap V$; it is easily seen from the hypotheses on Λ and Γ that S_0 is a submodule of V of half its dimension. But S_0 is also a direct summand, since V/S_0 is torsion free and Λ is a principal ideal domain.

COROLLARY: *Under the conditions given above on* Λ *and* Γ, $W(\Lambda) \to W(\Gamma)$ *is injective.*

This follows from Lemmas 7 and 8.

It follows from Lemmas 7 and 8 that $K_- \to W(Q(2))$ is injective. Surjectivity follows from the observation that if A is any even unimodular quadratic form over $Q(2)$, then, for some odd integer a, aA is an even *integral* quadratic form, with odd determinant, and, if a is square, aA is congruent to A over $Q(2)$.

20. Summarizing, we have defined epimorphisms:

$$G_\varepsilon \to W(\Lambda_\varepsilon)$$

induced by $A \mapsto A + A'$. A represents an element of the kernel if and only if $A + A'$ is null-cobordant (over the integers).

21. We now make some general remarks about the Witt groups $W(\Lambda_\varepsilon)$. If $\varepsilon = +1$, $\Lambda_\varepsilon = Z$ and there is an isomorphism $W(Z) \approx Z$, defined by $A \mapsto 1/8$ (signature A) (see [11] and [5, Appendix]).

If $\varepsilon = -1$, $\Lambda_\varepsilon = Q(2)$. Letting Q be the rational numbers, we have a *monomorphism*

$W(Q(2))\to W(Q)$ – see Corollary to Lemma 8. There are several well-known invariants of rational quadratic forms:

(a) $W(Q)\to Q^+/(Q^+)^2$, defined by determinant, multiplied by a sign,

(b) $W(Q)\to Z$, defined by signature.

These are homomorphisms, but the following is not.

(c) $W(Q)\to\{-1,+1\}$, defined by the Minkowski unit C_p for every prime p. (see [15]).

These form a complete set of invariants for $W(Q)$, i.e. two elements of $W(Q)$ are equal if and only if their determinants, signatures and Minkowski units coincide (see [6]). Such is, therefore, also true for $W(Q(2))$. Moreover the range of values taken by these invariants on elements of $W(Q(2))$ is known ([6, Theorems 29 and 45]).

It follows readily from these facts, and the additivity formulae for C_p (see [15 (2.5)]) that every element of $W(Q(2))$ has order 1, 2, 4 or ∞. For example, any element of $W(Q(2))$ with determinant 3 and signature 0 must, by considering C_3, have order 4. Also see [5, Appendix A].

The Range of the Invariants

22. We have so far defined epimorphisms: $G_\varepsilon\to P_\varepsilon$ and $G_\varepsilon\to W(\Lambda_\varepsilon)$. We now consider their direct sum:

$$\phi_\varepsilon: G_\varepsilon\to P_\varepsilon\oplus W(\Lambda_\varepsilon),\qquad \varepsilon=\pm 1.$$

We would like to calculate the image of ϕ_ε, and investigate injectivity.

We shall see that the image of ϕ_ε is defined by the relation $\Delta_A(\varepsilon)=\text{determinant}\,(A+A')$. Let U_ε be the multiplicative groups of units in Λ_ε and U_ε^2 the subgroup of square units. We define homomorphisms:

$$d_\varepsilon: P_\varepsilon\oplus W(\Lambda_\varepsilon)\to U_\varepsilon/U_\varepsilon^2$$

by $d_\varepsilon(\Delta, B)=(-1)^{\mu+\varrho}\Delta(\varepsilon)$ determinant B, where μ is determined from Δ as in Proposition 1, and $\operatorname{rank} B=2\varrho$.

We also define epimorphisms $U_\varepsilon/U_\varepsilon^2\to Z_2$ by $a\mapsto(a-1)/2 \bmod 2$, where we use the fact that $\Lambda_\varepsilon/2\Lambda_\varepsilon\approx Z_2$. If $\varepsilon=+1$, this is an isomorphism.

23. Proposition 5: *The following sequence is exact:*

$$G_\varepsilon\xrightarrow{\phi_\varepsilon} P_\varepsilon\oplus W(\Lambda_\varepsilon)\xrightarrow{d_\varepsilon} U_\varepsilon/U_\varepsilon^2\to Z_2\to 0$$

Thus ϕ_+ is onto.

Proof: Exactness at $U_\varepsilon/U_\varepsilon^2$: If $\varepsilon=+1$, it is shown in the proof of Proposition 1, that an even unimodular quadratic form of rank 2ϱ has determinant $(-1)^\varrho$. This fact, and (3) of Proposition 1 imply $d_+=0$.

Suppose $\varepsilon=-1$. If $\Delta(t)$ satisfies (1) and (3) of Proposition 1, an easy computation shows that $\Delta(1)-\Delta(-1)$ is a multiple of 4. Thus, when $\varepsilon=-1$, $\Delta(-1)\equiv(-1)^{\mu} \bmod 4$. Furthermore, if B is an even unimodular quadratic form over $R(2)$ of rank 2ϱ, then B is congruent to a block sum of ϱ 2×2-matrices (see [5] or [6]). But an even unimodular quadratic form of rank 2 is easily checked to have a determinant $\equiv -1 \bmod 4$. It follows that determinant $B\equiv(-1)^{\varrho} \bmod 4$. From these considerations, if $(\Delta, B)\varepsilon P_- \oplus W(Q(2))$, then $d_-(\Delta, B)=1 \bmod 4$.

To complete the proof of exactness at U_-/U_-^2, we notice that any integer of the form $4a-1$ can be realized as $\Delta(-1)$ for some representative $\Delta(t)$ of an element of P_- with $\mu=1$; e.g. let $\Delta(t)=at^2+(1-2a)t+a$.

24. *Exactness at* $P_\varepsilon\oplus W(\Lambda_\varepsilon)$: The relation $\Delta_A(\varepsilon)=\det(A+A')$ implies that Image $\phi_\varepsilon\subset$ Kernel d_ε, since $d_\varepsilon(\Delta_A, A+A')=(-1)^{\mu+\varrho}\Delta_A(\varepsilon)^2$, and $\varrho=\mu$ by Proposition 1.

We now show that Kernel $d_\varepsilon\subset$ Image ϕ_ε. Suppose $\Delta(t)$, satisfying (1), (2) and (3), also satisfies: $(-1)^{\mu}\Delta(\varepsilon)$ is square i.e. $(\Delta, 0)\,\varepsilon$ Kernel d_ε. Then, if A is the matrix constructed in the proof of Proposition 2, we will show that $A+A'$ is null-cobordant i.e. $(\Delta, 0)=\phi_\varepsilon(A)$.

If $\mu=1$ and $\varepsilon=+1$, then $A+A'=\begin{pmatrix}2a(a+1) & 2a+1\\ 2a+1 & 2\end{pmatrix}$.

If we subtract a times the second row from the first, and then perform the corresponding column operation, we obtain a null-cobordant matrix. If $\mu=1$ and $\varepsilon=-1$, then $A+A'=\begin{pmatrix}2a & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; but $-\Delta(-1)$ being square implies $a=b(1-b)$ for some integer b. If we subtract b times the second row from the first, and then perform the corresponding column operation, we obtain a null-cobordant matrix. We now proceed to the inductive step. If $\Delta(t)$ satisfies the given conditions, so does $\Delta_0(t)$; we then assume A_0+A_0' is null-cobordant. Now $A+A'=U\oplus(A_0+A_0')$, where $U=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, which is clearly null-cobordant, if A_0+A_0' is.

We have shown that $P_\varepsilon\cap$ Kernel $d_\varepsilon\subset$ Image ϕ_ε. This, together with the facts that (i) the composition of ϕ_ε with projection to $W(\Lambda_\varepsilon)$ is onto, and (ii) Image $\phi_\varepsilon\subset$ Kernel d_ε, implies that Kernel $d_\varepsilon=$ Image ϕ_ε by the following argument. Suppose $(\Delta, B)\,\varepsilon$ Kernel d_ε. By (i), $(\Delta', B)\,\varepsilon$ Image ϕ_ε, for some Δ'. Then $(\Delta, B)-(\Delta', B)=(\Delta\cdot\Delta', 0)\,\varepsilon$ Kernel Δ_ε, by (ii). But we have shown that $(\Delta\cdot\Delta', 0)\,\varepsilon$ Image ϕ_ε; therefore, $(\Delta, B)=(\Delta', B)+$ $+(\Delta\cdot\Delta', 0)\,\varepsilon$ Image ϕ_ε.

More Invariants

25. We now see that G_ε is very large.

PROPOSITION 6: *G_ε contains an infinite linearly independent set.*

Proof: We define a new invariant. Given a matrix A of type ε and ξ a complex

number of unit norm, we consider the Hermitian form:

$$B_\xi = \begin{cases} \dfrac{\xi A + A'}{\xi + 1} & \xi \neq -1 \\ i(A' - A) & \xi = -1 \end{cases}$$

The signature of B_ξ is well-defined. Let S_A be the unit circle in the complex plane with the zeros of determinant $(\xi A + A')$ (as a function of ξ) removed. If $\sigma_A(\xi) =$ signature B_ξ for $\xi \varepsilon S_A$, then we will show that σ_A is continuous.

Recall the characterization of signature given in [6, § 3]; the arguments there apply with only slight modification to Hermitian forms. A non-singular Hermitian matrix M is regular if the sequence of principal minors $1, D_1, \cdots D_n$ has no two consecutive zeros; D_i is the determinant of the submatrix of M formed by the first i rows and columns. The following two facts are of importance;

(a). If M is regular, then the signature of M is the number of permanences of sign reduced by the number of changes of sign in the sequence $1, D_1, \ldots, D_n$, where, if $D_i = 0$ we may assign it either sign.

(b). Any non-singular Hermitian matrix M is congruent to a regular matrix i.e. there exists a non-singular matrix P such that $P M \bar{P}'$ is regular ($^-$ is complex conjugate).

Now suppose $\xi \varepsilon S_A$, $\xi \neq -1$. Then B_ξ is congruent to a regular matrix $P B_\xi \bar{P}'$. Clearly if $\eta \varepsilon S_A$ is near enough to ξ, then $P B_\eta \bar{P}'$ is also regular and the non-zero minors D_i have the same sign in ξ and η. It then follows easily from (a) that B_ξ and B_η have the same signature.

To establish continuity at $\xi = -1$, notice that $|\xi + 1| B_\xi$ has the same signature as B_ξ, for $\xi \neq -1$. Since $|\xi + 1|/(\xi + 1) \to i$ as $\xi \to -1$, $B_{-1} = \lim_{\xi \to -1} |\xi + 1| B_\xi$ and we can apply the argument of the previous paragraph to $|\xi + 1| B_\xi$.

Notice that $\sigma_A(-1) = 0$ for all A.

Clearly, if A is null-cobordant then $\sigma_A = 0$. Also note that, if $A = A_1 \oplus A_2$, then $\sigma_A = \sigma_{A_1} + \sigma_{A_2}$ on $S_A = S_{A_1} \cap S_{A_2}$.

26. We first construct the linearly independent set for $\varepsilon = -1$. For any integer $k \geqslant 1$, define $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Then $S_{A_k} = S_k$ is obtained by removing the points $(1/2k^2) - 1 \pm i(4k^2 - 1)^{1/2}/2k^2$ from the unit complex circle. It is easily checked that $\sigma_k(-1) = 0$, $\sigma_k(1) = 2$. If N_k is the component of S_k in which $\sigma_k(\xi) = 2$, then we see that $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \cdots$, where the inclusions are proper. To see that the elements of G_- determined by $\{A_k\}$ are linearly independent, suppose $\sum \oplus \lambda_k A_k = A$ is null-cobordant. If k is the largest integer for which $\lambda_k \neq 0$ and $\xi \varepsilon N_k - N_{k-1}$, then $\sigma_A(\xi) = 2\lambda_k$. But $\sigma_A = 0$, and so $\lambda_k = 0$.

For $\varepsilon=1$, we take $A_k=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k & 0\\ 0 & -k & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

We leave it to the reader to check that $\sigma(1)=\sigma(-1)=0$, $\sigma(i)=2$ and, if N_k is the component of S_k containing i, then $N_1\subset N_2\subset\cdots$ are proper inclusions. We may now use the above argument to conclude that $\{A_k\}$ represent linearly independent elements of G_+.

Non-cobordant Knots With Homotopy Equivalent Complements

27. LEMMA 9: *If $n\geqslant 2$, then two simple $(2n-1)$-knots have homotopy equivalent complements if and only if their n-th homotopy groups are isomorphic as Λ-modules* (see § 7).

Proof: Note that the universal coverings of the complements have non-zero homology groups only in dimension n [13], which are there isomorphic to the n-th homotopy groups of the complements – the action of Λ corresponding to the action of the covering transformations. The result now follows by obstruction theory considerations.

Let K be a $(2n-1)$-knot whose quadratic form has non-zero signature. This is possible, for every $n\geqslant 1$, according to the theorem and § 20. Now consider $K_1=K\# K$ and $K_2=K\#(-K)$. K_1 has non-zero signature, while K_2 is null-cobordant. If A is a Seifert matrix for K and $A_1=A\oplus A$, $A_2=A\oplus(-A)$, then A_i is a Seifert matrix for K_i. Recall (see § 7) that $tA_i+(-1)^n A_i'=R_i$ is a relation matrix for $\pi_n(X_i)$ as a Λ-module; X_i is the complement of K_i. But, if $P=I\oplus(-I)$, then $PA_1=A_2$, $PA_1'=A_2'$, and so $PR_1=R_2$. Therefore, by Lemma 9, X_1 and X_2 are homotopy equivalent.

We have proved.

PROPOSITION 7: For every $n\geqslant 2$, there exist non-cobordant $(2n-1)$-knots with homotopy equivalent complements.

28. Note that, if n is even and $\sum$ is a $(2n-1)$-knot, the signature of the quadratic form of $\sum$ is also the signature of a parallelizable manifold bounded by $\sum$ (see § 7(3)). In the construction above, K_1 can be chosen to have signature 16, for n even $\geqslant 4$. It follows from the Index Theorem that K_1 is not diffeomorphic to S^{2n-1}. K_2 is diffeomorphic to S^{2n-1}, of course.

REFERENCES

[1] BOURBAKI, N.; *Eléments de mathématique – Algèbre*, Livre II (Hermann, Paris 1959), Chapitre IX.

[2] BRIESKORN, E.; *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Inventiones mathematicae *2* (1966), 1–14.

[3] FOX, R. and MILNOR, J.; *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka J. Math. *3* (1966), 257–67.

[4] HIRSCH, M.; *Embeddings and compressions of polyhedra and smooth manifolds*, Topology *4* (1966), 361–9.
[5] HIRZEBRUCH, F.; *Differentiable manifolds and quadratic forms*, mimeographed notes (Berkeley 1962).
[6] JONES, B. W.; *The Arithmetic theory of quadratic forms*, Carus Mathematical monographs (New York 1950).
[7] KERVAIRE, M.; *Les noeuds de dimensions supérieures*, Bull. Soc. Math. France *93* (1965), 225–71.
[8] KERVAIRE, M. and MILNOR, J.; *Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin*, Proc. Inter. Cong. Math., Edinburg (1958), 454–8.
[9] LEVINE, J.; *Unknotting spheres in codimension two*, Topology *4* (1965), 9–16.
[10] LEVINE, J.; *Polynomial invariants of knots of codimension two*, Annals of Math. *84* (1966), 537–54.
[11] MILNOR, J.; *On simply-connected 4-manifolds*, Symposium Inter. de Topologia Algebrica, Mexico (1958), 122–8.
[12] MILNOR, J.; *A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds*, Symposia in Pure Math., A.M.S. *III* (1961), 39–55.
[13] MILNOR, J.; *A duality theorem for Reidemeister torsion*, Annals of Math. *76* (1962), 137–47.
[14] MURASUGI, K.; *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. A.M.S. *117* (1965), 387–422.
[15] MURASUGI, K.; *On the Minkowski unit of slice links*, Trans. A.M.S. *114* (1965), 377–83.
[16] PENROSE, R., WHITEHEAD, J. H. C. and ZEEMAN, E. C.; *Imbeddings of manifolds in Euclidean space*, Annals of Math. *73* (1961), 613–23.
[17] SEIFERT, H.; *Über das Geschlecht von Knoten*, Math. Annalen *110* (1934), 571–92.
[18] SMALE, S.; *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. *84* (1962), 387–99.
[19] TROTTER, H. F.; *Homology of group systems with applications to knot theory*, Annals of Math. *76* (1962), 464–98.
[20] WALL, C. T. C.; *Diffeomorphisms of 4-manifolds*, Journal London Math. Soc. *39* (1964), 131–40.
[21] WALL, C. T. C.; *On simply-connected 4-manifolds*, Journal London Math. Soc. 39 (1964), 141–9.
[22] WHITNEY, H.; *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space*, Annals of Math. *45* (1944), 220–46.
[23] MILNOR, J.; *Infinite cyclic coverings* (to appear).

Received June 6, 1968

Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen

von PETER HESS (Zürich)

1. S. GOLDBERG zeigt in seinem Buch [2], dass jeder lineare Operator A, der bezüglich eines linearen Operators T kompakt ist, T-beschränkt ist mit T-Schranke null (p. 123, Korollar V.3.8.i). Dabei wird vorausgesetzt, dass der Operator A abgeschlossen – oder jedenfalls abschliessbar – ist, was im Rahmen der Störungstheorie linearer Operatoren eher fremd wirkt. Wird doch meist von einem leicht diskutierbaren Operator T ausgegangen und – für bezüglich T genügend kleine Störoperatoren A – die Abgeschlossenheit von $T+A$ aus derjenigen von T gefolgert, selbst wenn A nicht abschliessbar ist.

In der vorliegenden Arbeit leiten wir das erwähnte Resultat unter Bedingungen her, die der Fragestellung der Störungstheorie besser entsprechen: anstelle der Abschliessbarkeit von A fordern wir diejenige von T.

Zunächst zeigen wir also, dass die T-Beschränktheit mit T-Schranke null eine notwendige Bedingung für die T-Kompaktheit eines Operators ist (Satz 1). Anschliessend untersuchen wir, wann diese Bedingung auch hinreichend ist: Falls die Resolventenmenge $\varrho(T)$ nicht leer ist, folgt aus der T-Beschränktheit mit T-Schranke null die T-Kompaktheit genau dann, wenn T eine kompakte Resolvente besitzt (Satz 3). Dieses Resultat ergibt sich durch Spezialisierung aus einer allgemeineren Aussage (Satz 2).

2. Es seien $(X_1, \| \ \|_1)$ und $(X_2, \| \ \|_2)$ zwei Banachräume, d.h. lineare Räume X_1 und X_2 mit den Normen $\| \ \|_1$ bzw. $\| \ \|_2$. Ferner bezeichnen T und A lineare Operatoren mit den Definitionsmengen $D(T)$ und $D(A)$ in X_1 und mit Werten in X_2. Der Operator A heisst T-beschränkt, falls $D(A) \supset D(T)$ und Zahlen $a \geqq 0$, $b(a) \geqq 0$ so existieren, dass

$$\|Au\|_2 \leqq a\|Tu\|_2 + b(a)\|u\|_1$$

für alle $u \in D(T)$. Die untere Grenze der möglichen Werte $a \geqq 0$ wird T-Schranke von A genannt.

Für Vektoren $u \in D(T)$ definieren wir die T-Norm von u durch

$$\|u\|_T = \|Tu\|_2 + \|u\|_1 .$$

Der Operator A heisst T-kompakt, wenn $D(A) \supset D(T)$ und A jede beschränkte Menge des normierten Raumes $(D(T), \| \ \|_T)$ auf eine in $(X_2, \| \ \|_2)$ relativ kompakte Menge abbildet. Ist T abgeschlossen, so ist $(D(T), \| \ \|_T)$ ein Banachscher Raum.

Für die schwache Konvergenz einer Vektorfolge $\{u_n\}$ gegen ein Element u des betreffenden Raumes verwenden wir das Symbol $u_n \rightharpoonup u$.

3. Wir beginnen mit einem Lemma, das für Operatoren in Hilberträumen bereits bekannt ist, und dessen Beweis sich leicht auf den Fall von Banachräumen übertragen lässt:

LEMMA 1 ([3], p. 356). *Es sei A ein T-beschränkter Operator. Für jede in $(X_1, \| \|_1)$ schwach gegen null konvergierende Folge $\{u_n\} \subset D(T)$ mit $Tu_n \rightharpoonup 0$ gilt dann $Au_n \rightharpoonup 0$.*

SATZ 1. *Der Bildraum $(X_2, \| \|_2)$ sei reflexiv, und es sei T abgeschlossen. Notwendig für die T-Kompaktheit des Operators A ist dann die T-Beschränktheit von A mit T-Schranke null.*

Beweis. Sei der Operator A T-kompakt. Als kompakter Operator $(D(T), \| \|_T) \to (X_2, \| \|_2)$ ist A T-beschränkt. Es bleibt zu zeigen, dass die T-Schranke null ist. Nehmen wir an, diese Aussage sei falsch. Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine Folge $\{u_n\} \subset D(T)$ mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$\|Au_n\|_2 > \delta \|Tu_n\|_2 + n \|u_n\|_1 .$$

Sei $v_n = u_n / \|u_n\|_T$. Es gilt

$$\|Av_n\|_2 > \delta \|Tv_n\|_2 + n \|v_n\|_1 . \tag{1}$$

Da A ein T-beschränkter Operator ist und

$$\|v_n\|_T = 1 \tag{2}$$

für alle n, ist die Folge $\{Av_n\}$ beschränkt, und aus der Ungleichung

$$\|v_n\|_1 < \frac{1}{n} \|Av_n\|_2$$

folgt die Konvergenz $v_n \to 0$ in $(X_1, \| \|_1)$.

Nach Voraussetzung ist der Raum $(X_2, \| \|_2)$ reflexiv, und die Folge $\{Tv_n\}$ ist konstruktionsgemäss beschränkt; folglich existiert eine schwach konvergente Teilfolge $\{Tw_n\}$, $\{w_n\} \subset \{v_n\}$. Aus der schwachen Abgeschlossenheit des Operators T ergibt sich $Tw_n \rightharpoonup 0$ (vgl. [4], p. 165, Problem 5.12). Auf Grund von Lemma 1 gilt also $Aw_n \rightharpoonup 0$.

Wegen der T-Kompaktheit von A und der Beziehung (2) besitzt $\{Aw_n\}$ eine stark konvergente Teilfolge $Aw_{n_k} \to 0$. Aus (1) folgt $Tw_{n_k} \to 0$, was aber im Widerspruch steht zur Relation (2),

w.z.b.w.

4. Wir untersuchen nun, wann die T-Beschränktheit eines Operators mit T-Schranke null hinreichend ist für die T-Kompaktheit. Dazu setzen wir voraus, dass es

einen topologischen Isomorphismus E von $(D(T), \| \ \|_1)$ in $(X_2, \| \ \|_2)$ gibt. (Ein solcher existiert z.B. immer, wenn die Räume $(X_1, \| \ \|_1)$ und $(X_2, \| \ \|_2)$ topologisch äquivalent sind.) Mit E^{-1} bezeichnen wir den auf der Wertemenge von E definierten beschränkten inversen Operator.

SATZ 2. *Dafür, dass jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist, ist notwendig und hinreichend, dass der Isomorphismus E T-kompakt ist*[1]).

Beweis. 1. *Notwendigkeit.* Da E offenbar ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke null ist, muss E T-kompakt sein.

2. *Hinlänglichkeit.* Sei A ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke null. Zu beliebigem $\delta > 0$ existiert also eine Zahl $b(\delta)$ derart, dass

$$\|A u\|_2 \leqq \delta \|T u\|_2 + b(\delta) \|u\|_1$$

für alle $u \in D(T)$ gilt. Es sei $\{u_n\}$ eine beschränkte Folge aus $(D(T), \| \ \|_T)$: $\|u_n\|_T \leqq K$ für alle n. Da der Operator E T-kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{v_n\} \subset \{u_n\}$ mit konvergenter Bildfolge $\{E v_n\}$.

Wir zeigen, dass auch die Folge $\{A v_n\}$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen $\delta_1 = \varepsilon / 4K$ und wählen die Zahl N so, dass

$$\|E v_m - E v_n\|_2 \leqq \varepsilon / 2 b(\delta_1) \|E^{-1}\|$$

für alle $m, n > N$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|A v_m - A v_n\|_2 &\leqq \delta_1 \|T(v_m - v_n)\|_2 + b(\delta_1) \|v_m - v_n\|_1 \\ &\leqq \delta_1 (\|T v_m\|_2 + \|T v_n\|_2) + b(\delta_1) \|E^{-1}\| \ \|E v_m - E v_n\|_2 < \varepsilon \end{aligned}$$

für $m, n > N$,

w.z.b.w.

5. Unter der Voraussetzung

$$(X_1, \| \ \|_1) = (X_2, \| \ \|_2) = (X, \| \ \|)$$

können wir eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, dass jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist. Das folgende Lemma ist wohlbekannt (vgl. z.B. [1], p. 201):

LEMMA 2. *Sei T abgeschlossen, und sei λ in der Resolventenmenge $\varrho(T)$. Der Operator A ist T-kompakt dann und nur dann, wenn $D(A) \supset D(T)$ und $A(T-\lambda)^{-1}$ ein kompakter Operator des Raumes $(X, \| \ \|)$ ist.*

Der Einheitsoperator 1 ist unter den getroffenen Annahmen ein zulässiger topologischer Isomorphismus E. Aus Satz 2 und Lemma 2 folgt deshalb

---

[1]) Der Operator T braucht hier nicht abschliessbar zu sein.

SATZ 3. *Sei der Operator T abgeschlossen, und sei λ in der Resolventenmenge $\varrho(T)$. Der Operator $(T-\lambda)^{-1}$ ist genau dann kompakt im Raume $(X, \| \|)$, wenn jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist.*

6. BEMERKUNG (20. März 1969). Wir haben in Satz 1 vorausgesetzt, dass der Operator T abgeschlossen ist. Der Beweis muss nur unbedeutend modifiziert werden, wenn wir bloss annehmen, dass T abschliessbar ist. Dass man diese Voraussetzung jedoch nicht weglassen kann, zeigt das folgende

Beispiel. Sei X_2 endlich dimensional, und sei der Operator T unbeschränkt. Dann ist T nicht abschliessbar ([4], p. 166, Problem 5.18). Der Operator $A = T$ ist T-kompakt, aber offensichtlich ist die T-Schranke von A nicht null.

LITERATUR

[1] I. C. GOHBERG, und M. G. KREIN, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators*. A. M. S. Translations, Serie 2, Vol. 13, p. 185–264.
[2] S. GOLDBERG, *Unbounded linear operators*, Mac Graw Hill series in higher mathematics (1966).
[3] K. JÖRGENS, *Zur Spektraltheorie der Schrödinger-Operatoren*. Math. Z., *96* (1967), 355–372.
[4] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators* (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1966).

Eingegangen, 31.5.68

Beiträge zur Theorie der limitierten Vektorräume

SIMON COURANT (Bern)

Prof. Dr. H. Hadwiger zum 60. Geburtstag gewidmet

0. Einleitung

Die Struktur der limitierten Vektorräume wurde zumeist nur untersucht, um Aussagen zu sichern, die man zum Aufbau einer Differentialrechnung in nicht normierten Vektorräumen, zur Untersuchung von Abbildungsräumen etc. verwenden wollte. Im folgenden sollen einige Fragen, die dabei offen geblieben sind, beantwortet werden.

Limites von Systemen limitierter Vektorräume werden in kategorialer Weise definiert. Die Konstruktionen der Limites zu gegebenen Systemen, die meist als Definitionen verwendet werden, dienen nun als Beweise von Existenzaussagen: Jedes direkte System limitierter Vektorräume hat einen induktiven Limes (2.1.), jedes inverse System besitzt einen projektiven Limes (2.2.), die Summe einer Familie limitierter Vektorräume existiert immer (2.3.). Ein limitierter Vektorraum ist genau dann Summe einer Familie von Unterräumen, wenn er algebraisch Summe dieser Unterräume ist und die Projektionen auf diese Unterräume stetig sind (Satz 2.3.3.).

Im vierten Kapitel wird die Kommutativität der wichtigsten Operatoren untersucht, die limitierten Vektorräumen oder Systemen von solchen wieder limitierte Vektorräume zuordnen.

Jeder vollständige Unterraum eines separierten limitierten Vektorraumes ist abgeschlossen (5.1.), eine nichtverschwindende Linearform auf einem limitierten Vektorraum ist genau stetig, wenn die durch sie bestimmte Hyperebene abgeschlossen ist (5.2.).

In dritten und sechsten Kapitel werden endlichdimensionale limitierte Vektorräume betrachtet. Die natürliche Topologie ist die einzige zulässige separierte Limitierung eines solchen Raumes (Sätze 3.2. und 6.1.). In 3.1. finden sich Beispiele eindimensionaler nicht topologischer limitierter Vektorräume. Alle ausgeglichenen endlichdimensionalen limitierten Vektorräume sind topologisch, was zeigt, dass die Forderung der Ausgeglichenheit stark ist.

In 1.4. wird ein Verfahren angegeben, zu einer gegebenen zulässigen Topologie auf einem Vektorraum mittels eines Mengensystems Limitierungen zu konstruieren. Nach 6.5. lässt sich jede zulässige Limitierung eines endlichdimensionalen Vektorraumes so durch eine Topologie und ein System von Teilmengen des Raumes erhalten.

1. Grundlagen

1.1. Limitierte Vektorräume

Unter *Vektorraum* (VR) wird im folgenden immer VR über dem Körper **R** der

reellen Zahlen verstanden. Wir verwenden zumeist die Definitionen und Bezeichnungen von [9], insbesondere für die Begriffe limitierter Vektorraum (LVR), Unterraum, Produktraum, Stetigkeit, Hüllenoperator ([9] p. 278) und die auftretenden Ordnungsrelationen. $\mathfrak{T}$ bezeichne die Kategorie der LVR und der stetigen linearen Abbildungen. Ist E ein LVR, so bezeichnet $\underline{E}$ den zugrundegelegten Vektorraum und $\underline{E}$ die Menge seiner Punkte. Konvergiert ein Filter $\mathfrak{F}\in\mathbf{F}(E)$ bezüglich der Limitierung von E gegen $x\in\underline{E}$, so schreiben wir wie in [11]: $\mathfrak{F}\downarrow_x E$. Für $\mathfrak{F}\downarrow_0 E$ setzen wir $\mathfrak{F}\downarrow E$ und sagen, $\mathfrak{F}$ konvergiere in E, oder sei E-konvergent.

SATZ 1.1. ([9] p. 296): *Ist $\underline{E}$ ein* VR *und $\tau 0\in\mathfrak{P}(\mathbf{F}(E))$, dann gibt es genau einen* LVR *E über $\underline{E}$ mit $\mathfrak{F}\downarrow E \Leftrightarrow \mathfrak{F}\in\tau 0$, falls $\tau 0$ die folgenden Eigenschaften hat:*

$$\mathfrak{F}\in\tau 0,\quad \mathfrak{G}\in\tau 0 \Rightarrow \mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}\in\tau 0 \tag{1}$$

$$\mathfrak{F}\in\tau 0,\quad \mathfrak{F}\leqslant\mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{G}\in\tau 0 \tag{2}$$

$$\mathfrak{F}\in\tau 0,\quad \mathfrak{G}\in\tau 0 \Rightarrow \mathfrak{F}+\mathfrak{G}\in\tau 0 \tag{3}$$

$$\mathfrak{F}\in\tau 0 \Rightarrow \mathbf{V}\mathfrak{F}\in\tau 0 \tag{4}$$

$$x\in E \Rightarrow \mathbf{V}\dot{x}\in\tau 0 \tag{5}$$

$$\lambda\in\mathbf{R},\quad \mathfrak{F}\in\tau 0 \Rightarrow \lambda\mathfrak{F}\in\tau 0. \tag{6}$$

Diese Limitierung ist dann gegeben durch:

$$\mathfrak{F}\downarrow_x E \Leftrightarrow (\mathfrak{F}-x)\in\tau 0. \tag{7}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{V}$ den Nullumgebungsfilter des Raumes $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie. Im folgenden werden wir Limitierungen auf einem VR $\underline{E}$ meist durch Angabe einer Teilmenge von $\mathbf{F}(E)$ mit den Eigenschaften (1) bis (6) definieren, ohne die Festsetzung (7) zu wiederholen.

1.2. Zugeordnete Limitierungen

1.2.1. Der Funktor °. Ist E ein LVR, so bezeichnet E° den assoziierten lokalkonvexen topologischen Vektorraum, der durch die Menge $\Gamma(E)$ der E-stetigen Seminormen definiert ist. Weil mit $f: E\to F$ auch $f: E^\circ\to F^\circ$ linear und stetig ist, ist ° ein Funktor von $\mathfrak{T}$ in die Kategorie der lokalkonvexen topologischen Vektorräume. E und E° haben insbesondere dieselben stetigen Linearformen.

1.2.2. Der Funktor #. Nach [11] heisst ein Filter $\mathfrak{F}\in\mathbf{F}(E)$ ausgeglichen (equable), falls gilt $\mathbf{V}\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$. Ein LVR E heisst ausgeglichen, falls der Filter der gegen $0\in E$ konvergenten Filter eine Basis aus ausgeglichenen Filtern besitzt. # bezeichne den Funktor, der dem LVR E den ausgeglichenen LVR $E^\#$, mit $\mathfrak{F}\downarrow E^\# :\Leftrightarrow$(es existiert $\mathfrak{G}\in\mathbf{F}(E)$, $\mathfrak{G}$ ausgeglichen, $\mathfrak{G}\leqslant\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}\downarrow E$), der stetigen linearen Abbildung $f: E\to F$ die ebenfalls stetige Abbildung $f: E^\#\to F^\#$ zuordnet.

1.2.3. Schnittlimitierung. Sei $\underline{E}$ ein VR, $\{E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von LVR über $\underline{E}$. $\mathfrak{F}\downarrow E :\Leftrightarrow$ (alle $s\in S$: $\mathfrak{F}\downarrow E_s$) definiert eine zulässige Limitierung auf $\underline{E}$, die Schnitt-

limitierung der Familie. Wir bezeichnen $E =: \bigwedge_S E_s$ und für $S := \{1, 2\} : E =: E_1 \wedge E_2$.

1.2.4. Finale und initiale Limitierung. Sei $\underline{E}$ ein VR, $\{E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von LVR, $\{f_s : \underline{E}_s \to \underline{E}\}_{s\in S}$ eine Familie linearer Abbildungen. Dann ist die Familie $\{E_t\}_{t\in T}$ der LVR auf $\underline{E}$ bezüglich der alle f_s stetig sind nicht leer und enthält ihr Supremum $\bigwedge_T E_t =: E$. Die Limitierung von E heisst finale Limitierung bezüglich der Abbildungsfamilie $\{f_s\}_{s\in S}$.

SATZ 1.2.: *Ist E ein* LVR, $\{E_s\}_{s\in S}$ *eine Familie von* LVR *und* $\{f_s : \underline{E}_s \to \underline{E}\}_{s\in S}$ *eine Familie linearer Abbildungen, so hat E genau dann die finale Limitierung bezüglich dieser Abbildungsfamilie, falls gilt:*

$\mathfrak{F} \downarrow E \Leftrightarrow$ *(es existiert eine endliche Teilmenge* $S^* \neq \emptyset$ *von S und zu jedem* $s \in S^*$ *ein Filter* $\mathfrak{F}_s \downarrow E_s$, *so dass* $\mathfrak{F} \geqslant \bigwedge_{S^*} f_s \mathfrak{F}_s$). Sei $\underline{E}$ ein VR, $\{E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von LV R und $\{f_s : \underline{E} \to \underline{E}_s\}_{s\in S}$ eine Familie linearer Abbildungen, so ist durch:

$$\mathfrak{F} \downarrow E : \Leftrightarrow \quad \text{alle} \quad s \in S : f_s \mathfrak{F} \downarrow E_s$$

die gröbste zulässige Limitierung auf $\underline{E}$, so dass alle f_s stetig sind, die initiale Limitierung bezüglich der Abbildungsfamilie, gegeben.

1.3. Separiertheit

SATZ 1.3.1.: *Zwei Punkte x, y eines* LVR *E haben dieselben oder keine gemeinsamen gegen sie konvergenten Filter. Die Menge* $U(E) := \{x \mid \mathfrak{F} \downarrow_x E \Leftrightarrow \mathfrak{F} \downarrow E\}$ *ist ein linearer Unterraum von* $\underline{E}$ *und es gilt* $U(E) = \overline{\{0\}}$.

Ist $U(E) = \{0\}$, gilt also $\mathfrak{F} \downarrow_x E$, $\mathfrak{F} \downarrow_y E \Rightarrow x = y$ so heisst der LVR E nach [8] separiert.

SATZ 1.3.2.: *Mit einem* LVR *E ist jeder seiner Unterräume separiert.*

SATZ 1.3.3.: *Ist H Unterraum des* LVR *E, so ist der Quotientenraum* E/H([10] p. 363f.) *genau dann separiert, wenn H in E abgeschlossen ist.*

1.4. Konstruktion von Limitierungen zu gegebenen Topologien

SATZ 1.4.: *Ist E ein topologischer* VR *mit Nullumgebungsfilter* $\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{P}(E)$ *ein Mengensystem mit den Eigenschaften:*

(a) $\mathfrak{a} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathfrak{a}$,

(b) $A \in \mathfrak{a}$, $\lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda A \in \mathfrak{a}$,

(c) $A, B \in \mathfrak{a} \Rightarrow$ *in* $\mathfrak{a}$ *existiert C mit* $A \cup B \subset C$,

(d) $A, B \in \mathfrak{a} \Rightarrow$ *in* $\mathfrak{a}$ *existiert C mit* $A + B \subset C$,

(e) $A \in \mathfrak{a} \Rightarrow \mathbf{V} \cdot [A] \geqslant \mathfrak{U}$,

so ist durch:

$\mathfrak{F}\downarrow E^{\mathfrak{a}}$: $\Leftrightarrow$ *in* $\mathfrak{a}$ *existiert* A, *so dass* $\mathfrak{F}\geqslant[A]+\mathfrak{U}$ *ein* LVR *über* $\underline{E}$ *definiert. Es gilt* $E^{\mathfrak{a}}\leqslant E$.

Im allgemeinen ist $E^{\mathfrak{a}}\neq E$: Ist etwa E separiert und $\mathfrak{a}$ nicht reduziert auf $\{\{0\}\}$, so ist $E^{\mathfrak{a}}$ nicht separiert.

Beispiel: Die Menge $\mathfrak{a}$ der nichtleeren endlichen Teilmengen eines topologischen VR E erfüllt (a)–(e). Falls E nicht indiskret ist, ist $E^{\mathfrak{a}}$ echt gröber als E. $E^{\mathfrak{a}}$ hat die feinste Limitierung, die gröber als die Topologie von E ist und $\overline{\{0\}}=\underline{E}$ erfüllt.

Über nicht endlichdimensionalen VR gibt es nach [12] p. 145 eine zulässige Limitierung, die echt feiner als jede zulässige Topologie ist. Also sind nicht alle LVR nach 1.4. durch Mengensysteme definierbar.

2. Limites

2.1. Induktiver Limes

$\{E_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$ heisst ein *direktes System* der Kategorie $\mathfrak{T}$, falls:

(1) S eine gerichtete Indexmenge ist.

(2) Zu allen $s\in S$ ein LVR E_s gegeben ist.

(3) Zu $s\leqslant s'$ ein $f_{ss'}: E_s\to E_{s'}$ linear und stetig gegeben ist.

(4) $f_{ss}=\mathrm{id}_{E_s}$ für alle $s\in S$ gilt.

(5) Aus $s\leqslant s'\leqslant s''$ $f_{ss''}=f_{s's''}f_{ss'}$ folgt.

Ein LVR E heisst induktiver (oder direkter) Limes des direkten Systems $\{E_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$, $E=:\operatorname{ind}_{\to S} E_s$, falls erfüllt sind:

(IL_1) Zu $s\in S$ ist eine stetige lineare Abbildung $f_s: E_s\to E$ gegeben, so dass

(IL_2) für $s\leqslant s'$ gilt $f_{s'}f_{ss'}=f_s$.

(IL_3) Für jeden LVR Z und jede Familie $\{g_s: E_s\to Z\}_{s\in S}$ von linearen stetigen Abbildungen, so dass für alle $s\leqslant s'$ gilt $g_{s'}f_{ss'}=g_s$, existiert genau eine stetige lineare Abbildung $g: E\to Z$ mit $g_s=gf_s$ für alle $s\in S$.

Jedes direkte System hat bis auf Isomorphismen höchstens einen induktiven Limes. Die f_s heissen kanonische Abbildungen des Limes.

SATZ 2.1.: *In der Kategorie der* LVR *und stetigen linearen Abbildungen hat jedes direkte System einen induktiven Limes.*

Beweis: Sei $\{E_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$ ein direktes System der Kategorie $\mathfrak{T}$, $W:=\bigcup_S(\underline{E}_s\times\{s\})$ disjunkte Summe der Mengen $\underline{E}_s$. Wir definieren auf W eine Aequivalenzrelation $\sim$ durch:

$(x,s)\sim(x',s')$: $\Leftrightarrow$ In S existiert $s''\geqslant s, s'$ mit $f_{ss''}x=f_{s's''}x'$. $\underline{E}:=W/\sim$ sei die Menge der Aequivalenzklassen. Für $s\in S$ sei $f_s:\underline{E}_s\to\underline{E}$ gegeben durch $f_sx:=\mathrm{cls}(x,s)$. Dann gilt $\underline{E}=\bigcup_S f_s\underline{E}_s$, so dass zu $x\in E$ ein $s\in S$ und ein $x_s\in\underline{E}_s$ existierten mit $x=f_sx_s$.

Das erlaubt, $\underline{E}$ durch die Festsetzungen:

$+ : \underline{E} \times \underline{E} \to \underline{E} : (x, y) \to x + y := f_{s''}(f_{ss''} x_s + f_{s's''} y_{s'})$, wo $x = f_s x_s$, $y = f_{s'} y_{s'}$ gilt mit geeigneten s, $s' \in S$, $x_s \in E_s$, $y_{s'} \in E_{s'}$ und $s'' \in S$ so dass $s'' \geqslant s$, s', sowie

$\cdot : \underline{R} \times \underline{E} \to \underline{E} : (\lambda, x) \to \lambda x := f_s \lambda x_s$ für geeignete $s \in S$ und $x_s \in E_s$ mit $f_s x_s = x$

zu einem VR $\underline{E}$ zu machen. Alle f_s sind linear, so dass $\underline{E}$ mit der finalen Limitierung bezüglich der Familie $\{f_s\}_{s \in S}$ ein LVR E ist.

Mit Satz 1.2. und weil in S jede endliche Teilmenge eine obere Schranke hat, ergibt sich:

$\mathfrak{F} \downarrow E \Leftrightarrow$ es gibt $s \in S$, $\mathfrak{F}_s \in \mathbf{F}(E_s)$, $\mathfrak{F}_s \downarrow E_s$ mit $f_s \mathfrak{F}_s \leqslant \mathfrak{F}$. ($\mathrm{IL}_1$) und ($\mathrm{IL}_2$) sind erfüllt; ist Z ein LVR und $\{g_s : E_s \to Z\}_{s \in S}$ eine Familie von stetigen linearen Abbildungen, so dass für $s \leqslant s'$ gilt $g_{s'} f_{ss'} = g_s$, so ist mit $g : E \to Z : gx := g_s x_s$ für $s \in S$, $x_s \in E_s$, so dass $x = f_s x_s$, auch (IL_3) erfüllt.

2.2. Projektiver Limes

$\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$ heisst ein *inverses System* der Kategorie $\mathfrak{T}$, falls folgendes gilt:

(1) T ist eine gerichtete Indexmenge.

(2) Für $t \in T$ ist ein LVR E^t gegeben.

(3) Zu $t' \leqslant t$ ist $f^{tt'} : E^t \to E^{t'}$ linear und stetig gegeben.

(4) Für $t \in T$ gilt $f^{tt} = \mathrm{id}_{(E^t)}$.

(5) Aus $t'' \leqslant t' \leqslant t$ folgt $f^{tt''} = f^{t't''} f^{tt'}$.

Ein LVR E heisst projektiver (oder inverser) Limes des inversen Systems $\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$, $E = \underset{\leftarrow T}{\mathrm{proj}} E^t$, falls erfüllt sind:

(PL_1) Zu $t \in T$ ist eine stetige lineare Abbildung $f^t : E \to E^t$ gegeben, so dass gilt:

(PL_2) Für $t' \leqslant t$ ist $f^{tt'} f^t = f^{t'}$.

(PL_3) Für jeden LVR Z und jede Familie $\{g^t : Z \to E^t\}_{t \in T}$ von linearen stetigen Abbildungen, so dass für alle $t' \leqslant t$ gilt $f^{tt'} g^t = g^{t'}$, existiert genau eine lineare stetige Abbildung $g : Z \to E$, so dass für alle $t \in T$ gilt $g^t = f^t g$.

Die f^t heissen kanonische Abbildungen des projektiven Limes. Jedes inverse System hat bis auf Isomorphismen höchstens einen projektiven Limes.

SATZ 2.2.: *In der Kategorie $\mathfrak{T}$ der* LVR *und linearen stetigen Abbildungen hat jedes inverse System einen projektiven Limes.*

Beweis: (Man vergleiche [10] p. 373f.) Ist $\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$ ein inverses System, so erfüllt der Unterraum

$$E := \{x \mid x \in \prod_T E^t,\ t' \leqslant t \Rightarrow \mathrm{pr}^{t'} x = f^{tt'} \mathrm{pr}^t x\}$$

des Produktraumes $\prod_T E^t$ zusammen mit der Abbildungsfamilie $\{f^t := \mathrm{pr}^t_{|E}\}_{t \in T}$ alle Forderungen. (PL_3) wird erfüllt mit $g := \prod_T g^t$. E trägt dann die initiale Limitierung bezüglich der Familie $\{f^t\}_{t \in T}$ und es gilt: $\mathfrak{F} \downarrow E \Leftrightarrow$ (alle $t \in T$: $\mathrm{pr}^t \mathfrak{F} \downarrow E^t$).

Anmerkung: Die Definition eines inversen Systems lässt sich abschwächen durch Ersetzung von (1) durch

(1′) Auf T ist eine transitive und reflexive Relation $\geqslant$ (préordre) erklärt.

Satz 2.2. und die Aussagen in 4.4–4.9. bleiben gültig, hingegen geht folgende Eigenschaft verloren:

Ist E ein LVR und $\{E^t, f^{tt'}\}_{t\in T}$ ein inverses System mit $E^t = E$ für alle $t\in T$ und $f^{tt'} = \mathrm{id}_E$ für alle $t' \leqslant t$, dann ist E projektiver Limes des inversen Systems.

2.3. Summen limitierter Vektorräume

Ist $\{E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von LVR, so heisst ein LVR E Summe dieser Familie, $E =: \bigoplus_S E_s$, falls eine Familie $\{f_s: E_s \to E\}_{s\in S}$ von linearen stetigen Abbildungen so existiert, dass es für jeden LVR Z und jede Familie $\{g_s: E_s \to Z\}_{s\in S}$ von stetigen linearen Abbildungen genau eine stetige lineare Abbildung $j: E \to Z$ gibt, so dass für alle $s\in S$ gilt: $g_s = jf_s$.

Zu jeder Familie gibt es bis auf Isomorphismen höchstens eine Summe.

SATZ 2.3.1.: *In der Kategorie der* LVR *und stetigen linearen Abbildungen hat jede Familie* $\{E_s\}_{s\in S}$ *eine Summe.*

Beweis: Ist $\underline{E} := \bigoplus_S \underline{E}_s$ algebraische Summe der Familie $\{\underline{E}_s\}_{s\in S}$ und E der LVR über $\underline{E}$ mit der finalen Limitierung bezüglich der Abbildungsfamilie $\{f_s: \underline{E}_s \to \underline{E}\}_{s\in S}$, wo für $x_s \in E_s$ $f_s x_s := \bigoplus_S x_t$, mit $x_t := 0$ für $t \neq s$, gesetzt ist, so ist E Summe der Familie: Für $t\in S$ sei $\pi_t: E \to E_t$ definiert durch $\pi_t(\bigoplus_S x_s) := x_t$. Dann ist für $s, s' \in S$, $s \neq s'$: $\pi_s f_s = \mathrm{id}_{E_s}$, $\pi_s f_{s'} = 0$. Nach 1.2. existiert zu $\mathfrak{F} \downarrow E$ eine endliche Teilmenge $S^* \subset S$ und zu $s\in S^*$ ein Filter $\mathfrak{F}_s \downarrow E_s$, so dass $\mathfrak{F} \geqslant \bigwedge_{S^*} f_s \mathfrak{F}_s$. Also gilt $\pi_t \mathfrak{F} \geqslant \pi_t \bigwedge_S f_s \mathfrak{F}_s \geqslant \bigwedge_{S^*} \pi_t f_s \mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_t \wedge \dot{0}$ (oder gleich $\dot{0}$, falls $t \notin S^*$, oder gleich $\mathfrak{F}_t$ falls $S^* = \{t\}$). Also sind die π_t stetig. Ist nun Z ein LVR und $\{g_s: E_s \to Z\}_{s\in S}$ eine Familie linearer stetiger Abbildungen, so ist $j: E \to Z$ durch $j := \sum_S g_s \pi_s$ linear definiert. Für $s\in S$ ist $jf_s = g_s$ erfüllt. j ist stetig: Zu $\mathfrak{F} \downarrow E$ existiert $S^* \subset S$, S^* endlich und zu $s\in S^*$ existiert $\mathfrak{F}_s \downarrow E_s$ mit $\mathfrak{F} \geqslant \bigwedge_{S^*} f_s \mathfrak{F}_s$; somit folgt: $j\mathfrak{F} \geqslant j(\bigwedge_{t\in S^*} f_t \mathfrak{F}_t) = \sum_{s\in S} g_s \pi_s \bigwedge_{t\in S^*} f_t \mathfrak{F}_t = \sum_{s\in S} g_s \bigwedge_{t\in S^*} \pi_s f_t \mathfrak{F}_t = \sum_{t\in S^*} g_t(\mathfrak{F}_t \wedge \dot{0})$ (oder gleich $g_t \mathfrak{F}_t$, falls $S^* = \{t\}$). Es folgt die Konvergenz von $j\mathfrak{F}$ gegen $0 \in Z$.

SATZ 2.3.2.: *Ist* $\{E_s\}_{s\in S}$ *eine endliche Familie von* LVR, *so ist ihr Produkt Summe der Familie.*

Beweis: Für $s\in S$ ist $f_s: E_s \to \prod_S E_s$, definiert durch $\mathrm{pr}_s f_s := \mathrm{id}_{E_s}$ und $\mathrm{pr}_{s'} f_s := 0$ für $s \neq s'$, stetig und linear, denn für $\mathfrak{F}_s \in \mathbf{F}(E_s)$ gilt $f_s \mathfrak{F}_s = \prod_{t\in S} \mathfrak{F}_t$ mit $\mathfrak{F}_t = \dot{0}$ für $t \neq s$. Ist Z ein LVR und $\{g_s: E_s \to Z\}_{s\in S}$ eine Familie von stetigen linearen Abbildungen, so

sind mit $j:\prod_S E_s \to Z$, $j:=\sum_S g_s \,\mathrm{pr}_s$ alle Forderungen der Summendefinition erfüllt.

Aus dem Beweis zu 2.3.1. ergibt sich:

Ist E ein LVR, $\underline{E}$ algebraisch Summe einer Familie $\{\underline{E}_s\}_{s\in S}$ von Unterräumen, $\underline{E}=\oplus_S \underline{E}_s$, so darf $\underline{\oplus_S} E_s=\underline{E}$ angenommen werden. $\oplus_S E_s$ ist dann feiner als E. Für alle $x\in E$ existiert eine eindeutige Darstellung $x=\sum_S x_s$, $x_s\in E_s$. Für $t\in S$ sei $\pi_t: E\to E_s$ durch $\pi_t(\sum_S x_s):=x_t$ gegeben.

SATZ 2.3.3.: *Ist E ein* LVR, *E algebraisch Summe der Familie $\{E_s\}_{s\in S}$ von Unterräumen, so ist E genau dann Summe der Familie $\{E_s\}_{s\in S}$, wenn alle Abbildungen π_s stetig sind.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich aus dem Existenzbeweis für Summen. Ist sie erfüllt, so ist $j: E\to \oplus_S E_s$, $j:=\sum_S i_s\pi_s$, mit den Inklusionen $i_s: E_s\to E$ stetig. Wegen $jx=x$ für $x\in\underline{E}=\underline{\oplus_S} E_s$ ist dann $\oplus_S E_s$ auch gröber als E.

Eine lineare Abbildung u eines VR E in sich heisst ein Projektor, falls $uu=u$ erfüllt ist. $H:=u\underline{E}$ ist linearer Unterraum von $\underline{E}$. u heisst dann Projektor auf H.

SATZ 2.3.4.: *Sei E ein* LVR, *$\{u_s\}_{s\in S}$ eine endliche Familie stetiger Projektoren für die $\sum_S u_s=\mathrm{id}_E$ und $u_s u_{s'}=0$ für $s, s'\in S$, $s\neq s'$ gilt, so ist E Summe der Familie $\{u_s E\}_{s\in S}$ von Unterräumen von E und für $s\in S$ gilt: $u_s=\pi_s$.*

Der Beweis von prop. 11, [4] I.1. gilt sinngemäss.

SATZ 2.3.5.: *Ist H Unterraum des* LVR *E, so gibt es genau einen Unterraum H' von E, so dass E isomorph zu $H\oplus H'$ ist, wenn in E ein stetiger Projektor u auf H existiert. Es gilt dann $H'=u^{-1}(0)$.*

Beweis: Der Satz folgt aus 2.3.4., weil mit u auch $u':=\mathrm{id}_E-u$ ein stetiger Projektor ist, für den $uu'=0$ und $u+u'=\mathrm{id}_E$ gilt.

3. Limitierungen von $\underline{\mathbf{R}}$

3.1. Beispiele

Zur Ordnung $\mathfrak{T}(\underline{\mathbf{R}})$ der mit der VR-Struktur von $\underline{\mathbf{R}}$ verträglichen Limitierungen gehören die indiskrete Topologie ι und die natürliche Topologie ω. Wir bezeichnen $\mathbf{R}:=(\underline{\mathbf{R}}, \omega)$ und $\mathbf{R}_\iota:=(\underline{\mathbf{R}}, \iota)$. Im folgenden sollen drei weitere zulässige Limitierungen aufgewiesen werden.

3.1.1. (W. BUCHER) Für $\delta\in\underline{\mathbf{R}}$, $\delta>0$ bezeichne $I_\delta:=(-\delta, \delta)$ das durch δ bestimmte offene Intervall. Die Menge $\mu:=\{I_\delta \mid \delta\in\mathbf{R}, \delta>0\}$ erfüllt die Bedingungen von Satz 1.4. Somit existiert ein eindimensionaler LVR $\mathbf{R}^\mu$. Es gilt:

$\mathfrak{F}\downarrow\mathbf{R}^\mu \Leftrightarrow$ Es existiert $\delta\in\mathbf{R}$, $\delta>0$: $I_\delta\in\mathfrak{F} \Leftrightarrow \mathfrak{F}$ enthält eine ω-beschränkte Menge.

3.1.2. Ist v die Menge der nichtleeren endlichen Teilmengen von $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ und $\mathbf{R}^v$ der nach 1.4. existierende LVR mit $\mathfrak{F}\downarrow\mathbf{R}^v \Leftrightarrow$ in v existiert A, so dass $\mathfrak{F}\geqslant[A]+\mathbf{V}$, so konvergiert ein Filter in $\mathbf{R}^v$ genau gegen Null, wenn er feiner ist als der Schnitt der Umgebungsfilter bezüglich der natürlichen Topologie von endlich vielen Punkten von $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$.

3.1.3. Sei $\sigma\subset\mathfrak{P}(\mathbf{R})$ das System der Teilmengen von $\mathbf{R}$, die nicht leer, abzählbar und ω-kompakt sind. σ erfüllt die Bedingungen von Satz 1.4., so dass durch

$\mathfrak{F}\downarrow\mathbf{R}^\sigma :\Leftrightarrow$ (Es existiert eine nicht leere, abzählbare, ω-kompakte Teilmenge A von $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, so dass $\mathfrak{F}\geqslant[A]+\mathbf{V}$) ein LVR $\mathbf{R}^\sigma$ auf $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ definiert ist.

Der Hauptfilter $[I_1]$ konvergiert bezüglich $\mathbf{R}^\mu$, nicht jedoch bezüglich $\mathbf{R}^\sigma$ oder $\mathbf{R}^v$, der Hauptfilter $[\{0\}\cup\{1/n\,|\,n\in\mathbf{N}\}]$ konvergiert in $\mathbf{R}^\sigma$ nicht jedoch in $\mathbf{R}^v$, so dass die Limitierungen μ, σ und v verschieden sind.

3.2. Separiertheit eindimensionaler LVR

SATZ 3.2.: *Die natürliche Topologie ω ist die einzige separierte zulässige Limitierung auf* $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$.

Beweis (a contrario): Sei $\mathbf{R}^\tau$ ein separierter LVR auf $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$. Aus 1.2.(6) folgt mit $\mathbf{V}\dot{\mathbf{1}}=\mathbf{V}\downarrow\mathbf{R}^\tau:\mathbf{R}^\tau\leqslant\mathbf{R}$. Falls nun $\mathbf{R}^\tau\neq\mathbf{R}$, so existiert ein Filter $\mathfrak{F}\downarrow\mathbf{R}^\tau$ und $\delta\in\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, $\delta>0$ mit $I_\delta\notin\mathfrak{F}$. Dann existiert auch ein Ultrafilter $\mathfrak{G}$ der $\underline{\underline{\mathbf{R}}}\div I_\delta$ enthält, feiner ist als $\mathfrak{F}$ und also in $\mathbf{R}^\tau$ konvergiert. $\mathfrak{G}$ enthält keine ω-kompakte Menge: Ist nämlich $K\in\mathfrak{G}$ ω-kompakt, so hat auch $K\cap(\underline{\underline{\mathbf{R}}}\div I_\delta)$ diese Eigenschaften, so dass $0\notin K$ angenommen werden darf. Da $\mathbf{R}^\tau$ separiert ist, kann $\mathfrak{G}$ nicht feiner sein als der ω-Umgebungsfilter eines Punktes von K, so dass zu $x\in K$ eine offene ω-Umgebung U_x mit $U_x\notin\mathfrak{G}$ existiert. $\{U_x\,|\,x\in K\}$ ist eine ω-offene Überdeckung von K. Es gibt eine endliche Teilüberdeckung $\{U_j\,|\,j=1,\ldots,n\}$. Da $\mathfrak{G}$ Ultrafilter ist, gilt für $j\leqslant n:\underline{\underline{\mathbf{R}}}\div U_j\in\mathfrak{G}$, somit $V:=\bigcap_{j=1}^{n}(\underline{\underline{\mathbf{R}}}\div U_j)\in\mathfrak{G}$. Aber V ist disjunkt zu $K\in\mathfrak{G}$, was unmöglich ist. $\mathfrak{G}$ enthält auch keine ω-beschränkte Menge, denn sonst müsste ihr ω-kompakter ω-Abschluss zu $\mathfrak{G}$ gehören. Wegen 1.1.(4) konvergiert mit $\mathfrak{G}$ auch $\mathbf{V}\mathfrak{G}=\{\underline{\underline{\mathbf{R}}}\}$ in $\mathbf{R}^\tau$. Also gilt $\mathbf{R}^\tau=\mathbf{R}_t$, was der Separiertheit von $\mathbf{R}^\tau$ widerspricht.

3.3. Ordnung der Limitierungen von $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$

SATZ 3.3.: *Es gilt $\mathbf{R}_t<\mathbf{R}^\mu<\mathbf{R}^\sigma<\mathbf{R}^v<\mathbf{R}$ und für jede weitere zulässige Limitierung τ auf* $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$: $\mathbf{R}^\mu<\mathbf{R}^\tau<\mathbf{R}^v$.

3.4. Ein Konstruktionsverfahren für Limitierungen auf $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$

Sei $f\neq\emptyset$ eine Menge von Folgen von reellen Zahlen, die gegen Null konvergieren und deren erstes Glied 0 ist. Wir definieren $Ff:=\{\{\lambda f_j\}_{j\in\mathbf{N}}\,|\,\lambda\in\mathbf{R},\ \{f_j\}_{j\in\mathbf{N}}\in f\}$. Für $n\in\mathbf{N}$ setzen wir $N:=\{1,\ldots,n\}$. Ist v wieder die Menge der nichtleeren endlichen

Teilmengen von $\underline{\mathbf{R}}$, so setzen wir für $E \in v$, $n \in \mathbf{N}$: $\Phi(E, n) := (Ff)^{(E \times N)}$ ($\Phi(E, n)$ ist die Menge der Abbildungen von $E \times N$ in Ff). Für $a \in \Phi(E, n)$, $x \in E$, $i \in N$ ist dann $a(x, i)$ eine Folge aus Ff, die wir mit $\{a_j^i(x)\}_{j \in \mathbf{N}}$ bezeichnen. Ferner sei $\mathbf{N}^N$ die Menge der Abbildungen von N in $\mathbf{N}$. Ist $E \in v$, $n \in \mathbf{N}$ und $a \in \Phi(E, n)$, so definieren wir Teilmengen $A(E, n, a)$ von $\underline{\mathbf{R}}$ durch:

$$A(E, n, a) := \left\{ x + \sum_{p=1}^{n} a_{k(p)}^p(x) \mid x \in E,\ k \in \mathbf{N}^N \right\}.$$

Durch

$$\mathfrak{a} f := \{A(E, n, a) \mid E \in v,\ n \in \mathbf{N},\ a \in \Phi(E, n)\}$$

ist dann der Menge f ein System von Teilmengen von $\underline{\mathbf{R}}$ zugeordnet.

SATZ 3.4.: *Ist f eine Menge von Nullfolgen aus $\mathbf{R}$, deren Anfangsglied verschwindet, so erfüllt $\mathfrak{a} f \subset \mathfrak{P}(\underline{\mathbf{R}})$ die Bedingungen von Satz* 1.4. *mit $\mathfrak{U} := \mathbf{V}$, also ist durch $\mathfrak{F} \downarrow \mathbf{R}^{\mathfrak{a} f}$: $\Leftrightarrow$ (es existiert $A \in \mathfrak{a} f$: $\mathfrak{F} \geqslant [A] + \mathbf{V}$) eine zulässige Limitierung auf $\underline{\mathbf{R}}$ definiert.* Statt $\mathbf{R}^{\mathfrak{a} f}$ setzen wir $\mathbf{R}^f$.

Beweis: (a) Wegen $f \neq \emptyset$ folgt $\{0\} \in \mathfrak{a} f$, somit $\mathfrak{a} f \neq \emptyset$.

Aus $\emptyset \notin v$, $\emptyset \notin f$ ergibt sich $\emptyset \notin \mathfrak{a} f$.

(c) Zu $A(E, n, a)$ und $A(E', m, b)$ definieren wir $c \in \Phi(E \cup E', n+m)$ durch

$$c(x, p) := \begin{cases} a(x, p) & \text{falls} \quad p \leqslant n,\ x \in E \\ b(x, p-n) & \qquad\quad p > n,\ x \in E' \\ \{0\}_{j \in \mathbf{N}} & \qquad\quad \text{sonst}. \end{cases}$$

Dann gilt $A(E, n, a) \cup A(E', m, b) \subset A(E \cup E', n+m, c)$: Ist $z \in A(E', m, b)$, so gibt es $x \in E'$, $k \in \mathbf{N}^M$, so dass gilt: $z = x + \sum_{p=1}^{m} b_{k(p)}^p(x)$. Mit $k^* \in \mathbf{N}^{N+M}$, $k^*(p) := 1$ für $p \leqslant n$, $k^*(p) := k(p-n)$ für $p > n$ ist $z = x + \sum_{p=1}^{n+m} c_{k^*(p)}^p(x)$, also $z \in A(E \cup E', n+m, c)$.

(d) Zu $A(E, n, a)$ und $A(E', m, b)$ aus $\mathfrak{a} f$ definieren wir $d \in \Phi(E+E', n+m)$ durch

$$d(x+y, p) := \begin{cases} a(x, p) & \text{für } p \leqslant n \\ b(y, p-n) & \quad\ p > n. \end{cases}$$

Dann gilt $A(E, n, a) + A(E', m, b) \subset A(E+E', n+m, d)$. Ist nämlich $z \in A(E, n, a) + A(E', m, b)$, so existieren $x \in E$, $y \in E'$, $k \in \mathbf{N}^N$, $k' \in \mathbf{N}^M$, so dass gilt:

$$z = x + \sum_{p=1}^{n} a_{k(p)}^p(x) + y + \sum_{q=1}^{m} b_{k'(q)}^q(y).$$

Mit $k^* \in \mathbf{N}^{N+M}$, $k^*(p) := k(p)$ für $p \leqslant n$, $k^*(p) := k'(p-n)$ für $p > n$ gilt $z = x + y + \sum_{p=1}^{n+m} d_{k^*(p)}^p(x+y)$, also $z \in A(E+E', n+m, d)$.

(e) Jede Folge aus Ff ist ω-beschränkt, also auch alle $A(E, n, a)$. Damit gilt $\mathbf{V}[A] \geqslant \mathbf{V}$ für $A \in \mathfrak{a} f$.

(b) ergibt sich aus der Konstruktion von Ff.

Als Beispiel soll eine weitere Limitierung von $\underline{\mathbf{R}}$ aufgezeigt werden:

Sei r die Folge der reziproken natürlichen Zahlen abgeändert durch $r_1 := 0$. $f := \{r\}$ definiert einen LVR $\mathbf{R}^f$ auf $\underline{\mathbf{R}}$. Für $E \in v$, $n \in \mathbf{N}$ $a \in \Phi(E, n)$, $x \in E$, $i \in N$ ist $a(x, i) = \{0, \lambda/2, \lambda/3, \ldots\}$ durch ein $\lambda \in \underline{\mathbf{R}}$ festgelegt, so dass $A(E, n, a)$ durch eine Abbildung von $E \times N$ in $\underline{\mathbf{R}}$, $(x, i) \to \lambda^i(x)$ bestimmt ist:

$$A(E, n, a) = \left\{ x + \sum_{p=1}^{n} (\lambda^p(x)/n_p) \mid x \in E,\ n_p \in \mathbf{N} \right\}.$$

Jede Menge dieser Form ist nicht leer, ω-beschränkt und hat abzählbaren Abschluss. Deshalb ist jeder $\mathbf{R}^f$-konvergente Filter $\mathbf{R}^\sigma$-konvergent. Jedoch ist $\mathbf{R}^f \neq \mathbf{R}^\sigma$. Ist nämlich $A(E, n, \lambda^p(x))$ in $\mathfrak{a}f$, so liegen alle seine Punkte im Erweiterungskörper $Q[E \cup \{\lambda^p(x)\} \mid x \in E, p \in N]$ des Körpers Q der rationalen Zahlen, also in einem Erweiterungskörper von Q, der algebraisch oder von endlichem Transzendenzgrad ist. $\underline{\mathbf{R}}$ besitzt Teilmengen C, die abzählbar, ω-abgeschlossen und ω-beschränkt sind, so dass $Q[C]$ nichtendlichen Transzendenzgrad hat. (Man vergleiche etwa [18].) Die Filter $[C] + \mathbf{V}$ konvergieren in $\mathbf{R}^\sigma$, nicht jedoch in $\mathbf{R}^f$. Anderseits ist $\mathbf{R}^f$ echt gröber als $\mathbf{R}^v$, denn der Durchschnitt aller Mengen eines $\mathbf{R}^v$-konvergenten Filters ist endlich, was nicht für alle $\mathbf{R}^f$-konvergenten Filter zutrifft. Wegen 3.3. ist $\mathbf{R}^f$ von allen bisher aufgewiesenen eindimensionalen LVR verschieden. Die vorhergehenden Überlegungen lassen vermuten, das $\mathfrak{T}(\underline{\mathbf{R}})$ nicht endlich ist und dass die auf $\mathfrak{T}(\underline{\mathbf{R}})$ erklärte Ordnung keine Totalordnung ist.

4. Vertauschungseigenschaften

4.1.1. Unterräume und Funktoren $^\circ$ und $^\#$. Ist E ein LVR, E' ein Unterraum und bezeichnen $E^{\circ\prime}$ resp. $E^{\#\prime}$ die durch E' bestimmten Unterräume von E° resp. $E^\#$ so gelten: $E^{\circ\prime} \leqslant E'^\circ$, $E'^\# = E^{\#\prime}$ und $E^{\circ\#} \leqslant E^{\#\circ}$. Ist $0 < p < 1$ und E ein L^p-Raum ([6] p. 161f.) gilt $E^{\circ\prime} \neq E'^\circ$ für einen eindimensionalen Unterraum, ist E der Raum $\mathbf{R}^v$ von 3.1.2. gilt $E^{\circ\#} \neq E^{\#\circ}$.

4.2.1. Unterraum und Schnittlimitierung. Ist $\{E_s\}_{s \in S}$ eine Familie von LVR über demselben VR $\underline{E}$, $\underline{E}'$ ein linearer Unterraum, $(\bigwedge_S E_s)'$ der zugehörige Unterraum von $\bigwedge_S E_s$, so gilt: $\bigwedge_S (E_s') = (\bigwedge_S E_s)'$.

4.2.2. Schnittlimitierung und Funktor $^\circ$. Ist $\{E_s\}_{s \in S}$ eine Familie von LVR über demselben VR $\underline{E}$, so gilt:

$$(\bigwedge_S E_s)^\circ \geqslant \bigwedge_S (E_s^\circ).$$

Ein Gegenbeispiel für Gleichheit beim Schnitt zweier Limitierungen wurde von W. BUCHER angegeben.

4.2.3. Schnittlimitierung und Funktor $^{\#}$. Ist wieder $\{E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von LVR über demselben VR $\underline{E}$, dann gilt:

$$(\bigwedge_S E_s)^{\#} = \bigwedge_S (E_s^{\#}).$$

Beweis: – Zu $\mathfrak{F}\downarrow(\bigwedge_S E_s)^{\#}$ existiert ein gröberer ausgeglichener Filter $\mathfrak{G}$ der in $\bigwedge_S E_s$, damit in allen E_s und $E_s^{\#}$ konvergiert. Mit ihm konvergiert auch $\mathfrak{F}$ in $\bigwedge_S (E_s^{\#})$.

– Konvergiert $\mathfrak{F}$ bezüglich $\bigwedge_S (E_s^{\#})$, so existiert zu $s\in S$ ein gröberer Filter $\mathfrak{F}_s$ der ausgeglichen ist und in $E_s^{\#}$ und E_s konvergiert. $\{\bigcap_S F_s \mid F_s\in\mathfrak{F}_s,\ F_s\neq\underline{E}$ für endlich viele $s\in S\}$ ist Basis eines Filters $\mathfrak{G}$ der gröber als $\mathfrak{F}$, aber feiner als alle $\mathfrak{F}_s$ ist und also in $\bigwedge_S E_s$ konvergiert. Nach Verifikation der Ausgeglichenheit von $\mathfrak{G}$ ergibt sich die Konvergenz von $\mathfrak{F}$ in $(\bigwedge_S E_s)^{\#}$.

4.2.4. Schnittlimitierung und Schnittlimitierung. Für eine doppelt indizierte Familie $\{E_s^t\}_{s\in S}^{t\in T}$ ergibt sich:

$$\bigwedge_S \bigwedge_T E_s^t = \bigwedge_T \bigwedge_S E_s^t = \bigwedge_{S\times T} E_s^t.$$

4.3.1. Unterräume und Produktraum. Ist $\{E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von LVR, $\{E_s'\}_{s\in S}$ eine Familie von Unterräumen und $\{i_s: E_s'\to E_s\}_{s\in S}$ die Familie der Inklusionsabbildungen, so ist $\prod_S E_s'$ isomorph zum Unterraum $(\prod_S i_s)(\prod_S E_s')$ von $\prod_S E_s$.

4.3.2. Produktraum und Funktor $^{\circ}$. Für eine Familie $\{E_s\}_{s\in S}$ von LVR ist

$$(\prod_S E_s)^{\circ} \geqslant \prod_S (E_s^{\circ}).$$

Ist die Indexmenge S endlich folgt Gleichheit. Insbesondere gilt für zwei LVR E und F die von H. H. KELLER behauptete Beziehung:

$$(E\times F)^{\circ} = E^{\circ}\times F^{\circ}.$$

Beweis: Als lokalkonvexe topologische VR lassen sich beide Räume durch ihre stetigen Seminormen definieren. Zu zeigen ist, dass jede $(E\times F)^{\circ}$-stetige Seminorm $p: E\times F\to\mathbf{R}$ auch $(E^{\circ}\times F^{\circ})$-stetig ist. p ist jedenfalls $(E\times F)$-stetig. Ist $p_1: E\to\mathbf{R}$ definiert durch $p_1 x := p(x,0)$, so ist p_1 E-stetige Seminorm und deshalb E°-stetig. Ebenso ist $p_2: F\to\mathbf{R}$ mit $p_2 y := p(0,y)$ F°-stetig. Dann ist $p_1+p_2: E^{\circ}\times F^{\circ}\to\mathbf{R}$ $(E^{\circ}\times F^{\circ})$-stetig. Aus der Dreiecksungleichung für Seminormen folgt $p_1+p_2\geqslant p$ und daraus die $E^{\circ}\times F^{\circ}$-Stetigkeit von p in 0 und also allgemein.

4.3.3. Produktraum und Funktor $^{\#}$. Ist $\{E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von LVR, so gilt:

$$(\prod_S E_s)^{\#} = \prod_S (E_s^{\#}).$$

4.3.4. Schnitt- und Produktlimitierung. Sei $\{\underline{E}_s\}_{s\in S}$ eine Familie von VR und zu $s\in S$ $\{\underline{E}_s^t\}_{t\in T}$ eine Familie von LVR über $\underline{E}_s$, dann ergibt sich

$$\bigwedge_T \prod_S E_s^t = \prod_S \bigwedge_T E_s^t.$$

4.3.5. Produktlimitierung und Produktlimitierung. Ist $\{E_s^t\}_{s\in S}^{t\in T}$ eine doppelt indizierte Familie von LVR, so sind die Abbildungen

$$k: \prod_S \prod_T E_s^t \to \prod_T \prod_S E_s^t, \quad k := \prod_T \prod_S \mathrm{pr}_s^t \,\mathrm{pr}_s$$

und

$$l: \prod_S \prod_T E_s^t \to \prod_{S\times T} E_s^t, \quad l := \prod_{S\times T} \mathrm{pr}_s^t \,\mathrm{pr}_s$$

Isomorphismen.

4.4.1. Induktiver Limes und Unterraum. $\{E_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$ und $\{F_s, f'_{ss'}\}_{s\in S}$ seien zwei direkte Systeme aus $\mathfrak{T}$ und $\{i_s: F_s \to E_s\}_{s\in S}$ eine Familie von stetigen linearen Abbildungen, so dass für $s<s'$ gilt $f_{ss'} i_s = i_{s'} f'_{ss'}$. Sind E und F die induktiven Limites, $\{f_s\}_{s\in S}$ und $\{f'_s\}_{s\in S}$ die Familien der kanonischen Abbildungen in E und F, so ist $i: F\to E$, $ix := f_s i_s x_s$ für $x\in F$, $s\in S$, $x_s\in F_s$, so dass $f'_s x_s = x$, stetig und linear. Sind alle i_s injektiv, so auch i. Sind insbesondere die i_s Inklusionen, so ist die Limitierung des induktiven Limes der Unterräume F_s feiner als die vom induktiven Limes E auf seinem zugehörigen Unterraum induzierte Limitierung. Im allgemeinen sind die beiden Limitierungen nicht isomorph, wie sich aus folgendem Gegenbeispiel ergibt:

Sei $E := \prod_{\mathbf{N}} \mathbf{R}$ topologisches Produkt, $\{F_s\}_{s\in S}$ das System der endlichdimensionalen Unterräume von E, S gerichtet durch $s\leqslant s' :\Leftrightarrow F_s \subset F_{s'}$ und $f'_{ss'}: F_s \to F_{s'}$ für $s\leqslant s'$ die Inklusion. $\{F_s, f'_{ss'}\}_{s\in S}$ ist ein direktes System aus $\mathfrak{T}$. Für $s\in S$ sei $E_s := E$ gesetzt mit $f_{ss'} := \mathrm{id}_E$ für $s\leqslant s'$; dann ist auch $\{E_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$ ein direktes System, das $E \cong \operatorname{ind}_S E_s$ erfüllt. Mit $i_s: F_s \to E$ für $s\in S$ sind alle Voraussetzungen gegeben. $\underline{F}$ ist algebraisch isomorph zu $\underline{E}$, jedoch ist nach [12] p. 145 die Limitierung auf F keine Topologie.

4.4.2. Projektiver Limes und Unterraum. Ist $\{E^t, f^{tt'}\}_{t\in T}$ ein inverses System aus $\mathfrak{T}$ und für $t\in T$ ein Unterraum F^t von E^t mit der Inklusion $i^t: F^t \to E^t$ so gegeben, dass für $t'\leqslant t$ gilt $f^{tt'} F^t \subset F^{t'}$, dann ist $\{F^t, g^{tt'}\}_{t\in T}$ mit $g^{tt'}: F^t \to F^t$, $i^t g^{tt'} := f^{tt'}{}_{|F^t}$ für $t'\leqslant t$ ebenfalls ein inverses System aus $\mathfrak{T}$ und $F := \operatorname{proj}_{\leftarrow T} F^t$ ist isomorph zu einem Unterraum von $E := \operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t$.

4.5.1. Induktiver Limes und Funktor °. Ist $\{E_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$ ein direktes System der Kategorie $\mathfrak{T}$, so bildet $\{E_s^\circ, f_{ss'}\}_{s\in S}$ ein direktes System der Kategorie der lokalkonvexen topologischen VR und stetigen linearen Abbildungen. In dieser Kategorie hat jedes

direkte System einen induktiven Limes $\lim_{\rightarrow}$. Nach [10] p. 368 gilt:

$$(\operatorname{ind}_{\rightarrow S} E_s)^\circ = \lim_{\rightarrow S} (E_s^\circ).$$

4.5.2. Projektiver Limes und Funktor $^\circ$. Ist $\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$ ein inverses System der Kategorie $\mathfrak{T}$, so ist $\operatorname{proj}(E^{t\circ})$ nach [10] p. 374 eine lokalkonvexe Topologie, also zugleich projektiver Limes von $\{E^{t\circ}, f^{t'}\}_{t \in T}$ in der Kategorie $\mathfrak{T}$ und in der Kategorie der lokalkonvexen topologischen VR, wobei $\operatorname{proj}_{\leftarrow T}(E^{t\circ}) \leqslant (\operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t)^\circ$ gilt.

4.6.1. Induktiver Limes und Funktor$^\#$. Für ein direktes System $\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$ der Kategorie $\mathfrak{T}$ gilt:

$$(\operatorname{ind}_{\rightarrow S} E_s)^\# = \operatorname{ind}_{\rightarrow S} (E_s^\#).$$

4.6.2. Projektiver Limes und Funktor$^\#$. Ist $\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$ ein inverses System der Kategorie $\mathfrak{T}$, so gilt:

$$(\operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t)^\# = \operatorname{proj}_{\leftarrow T} (E^{t\#}).$$

4.7.1. Induktiver Limes und Schnittbildung. Sei $\{\underline{E}_s\}_{s \in S}$ eine Familie von VR und für $s \in S$ sei $\{E_s^t\}_{t \in T}$ eine Familie von LVR über $\underline{E}_s$, ferner sei S gerichtet und für $s \leqslant s'$ sei $f_{ss'}: E_s \to E_{s'}$ eine lineare Abbildung, so dass für alle $t \in T$ $\{E_s^t, f_{ss'}\}_{s \in S}$ ein direktes System ist. Dann ist $\{\bigwedge_T E_s^t, f_{ss'}\}_{s \in S}$ ebenfalls ein direktes System und es gilt:

$$\operatorname{ind}_{\rightarrow S} (\bigwedge_T E_s^t) \geqslant \bigwedge_T (\operatorname{ind}_{\rightarrow S} E_s^t).$$

Die beiden Räume sind jedenfalls dann isomorph, wenn T endlich ist und alle $f_{ss'}$ Injektionen sind:

$$\operatorname{ind}_{\rightarrow S} (\bigwedge_T E_s^t) = \bigwedge_T (\operatorname{ind}_{\rightarrow S} E_s^t).$$

Nachweis: Gilt $\mathfrak{F} \downarrow \bigwedge_{j=1}^{n} (\operatorname{ind}_{\rightarrow S} E_s^j)$, so konvergiert $\mathfrak{F}$ in allen $\operatorname{ind}_{\rightarrow S} E_s^j$, so dass zu $j \leqslant n$ ein $s_j \in S$ und ein Filter $\mathfrak{F}_j \downarrow E_{s_j}^j$ existierten, mit $f_{s_j} \mathfrak{F}_j \leqslant \mathfrak{F}$. Ist $s_0 \in S$ grösser als alle s_j, so konvergieren alle $f_{s_j s_0} \mathfrak{F}_j$ in $E_{s_0}^j$. Wegen der Injektivität der $f_{s_j s_0}$ ist $\{\bigcap_{j=1}^{n} f_{s_j s_0} F_j \mid F_j \in \mathfrak{F}_j\}$ Basis eines Filters $\mathfrak{G}$ der bezüglich aller j in $E_{s_0}^j$ konvergiert. Dann gilt auch $\mathfrak{G} \downarrow \bigwedge_{j=1}^{n} E_{s_0}^j$ und wegen $f_{s_0} \mathfrak{G} \leqslant \mathfrak{F}$ auch $\mathfrak{F} \downarrow \operatorname{ind}_{\rightarrow S} \bigwedge_{j=1}^{n} E_s^j$.

4.7.2. Projektiver Limes und Schnittbildung. Unter analogen Voraussetzungen für

inverse Systeme gilt die Isomorphie allgemein:

$$\underset{\leftarrow T}{\operatorname{proj}} \bigwedge_{S} E_s^t = \bigwedge_{S} \underset{\leftarrow T}{\operatorname{proj}} E_t^t.$$

4.8.1. Induktiver Limes und Produktlimitierung. Sei $\{E_s^t\}_{s\in S}^{t\in T}$ eine doppelt indizierte Familie von LVR, wobei S gerichtet sei und für $t\in T$ $\{E_s^t, f_{ss'}^t\}_{s\in S}$ ein direktes System bilde. Sind $f_s^t: E_s^t \to \underset{\rightarrow}{\operatorname{ind}} E_s^t$ die kanonischen Abbildungen, $\operatorname{pr}_s^t: \prod_T E_s^t \to E_s^t$ die Projektionen und ist $f_{ss'}: \prod_T E_s^t \to \prod_T E_{s'}^t$ definiert durch $\operatorname{pr}_{s'}^t f_{ss'} := f_{ss'}^t \operatorname{pr}_s^t$, so ist $\{\prod E_s^t, f_{ss'}\}_{s\in S}$ wieder ein direktes System. Ist nun für $s\in S$ $g_s: \prod_T E_s^t \to \prod_T \underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} E_s^t$ durch $\operatorname{pr}^t g_s := f_s^t \operatorname{pr}_s^t$ gegeben, so gilt für $s\leqslant s': g_s = g_{s'} f_{ss'}$, so dass aus (IL_3) von 2.1. die eindeutige Existenz einer linearen stetigen Abbildung $j: \underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} \prod_T E^t \to \prod_T \underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} E_s^t$ folgt, so dass $j f_s = g_s$ für $s\in S$ ist. Offenbar kann nur durch j ein Morphismus zwischen $\underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} \prod_T E_s^t$ und $\prod_T \underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} E_s^t$ in natürlicher Weise gefunden werden. Gegenbeispiele zeigen jedoch, dass j im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist.

4.8.2. Projektiver Limes und Produktlimitierung. Sei $\{E_s^t\}_{s\in S}^{t\in T}$ eine doppelt indizierte Familie von LVR und T gerichtet, $f_s^{tt'}: E_s^t \to E_s^{t'}$ für $t'\leqslant t$ eine Familie von linearen Abbildungen, so dass für $s\in S$ $\{E_s^t, f_s^{tt'}\}_{t\in T}$ ein inverses System aus $\mathfrak{T}$ ist. Bezeichnen $f_s^t: \underset{\rightarrow T}{\operatorname{proj}} E_s^t \to E_s^t$ die kanonischen Abbildungen und ist für $t'\leqslant t$ $f^{tt'}: \prod_S E_s^t \to \prod_S E_s^{t'}$ definiert durch $\operatorname{pr}_s^{t'} f^{tt'} := f_s^{tt'} \operatorname{pr}_s^t$, so bildet auch $\{\prod_S E_s^t, f^{tt'}\}_{t\in T}$ ein inverses System. Dann ist $j: \prod_S \underset{\leftarrow T}{\operatorname{proj}} E_s^t \to \underset{\leftarrow T}{\operatorname{proj}} \prod_S E_s^t$, $j := \prod_T \prod_S f_s^t \operatorname{pr}_s$ ein Isomorphismus.

4.9.1. Induktiver Limes und induktiver Limes. $\{E_s^t, f_{ss'}^t, f_s^{tt'}\}_{s\in S}^{t\in T}$ sei ein System von LVR und stetigen linearen Abbildungen, so dass für alle $s\in S$ $\{E_s^t, f_s^{tt'}\}_{t\in T}$ ein direktes System und für $t\in T$ $\{E_s^t, f_{ss'}^t\}_{s\in S}$ ebenfalls ein direktes System aus $\mathfrak{T}$ ist. Ferner gelte für $s\leqslant s'$, $t\leqslant t'$: $f_{s'}^{tt'} f_{ss'}^t = f_{ss'}^{t'} f_s^{tt'}$. Ist $\{f_s^t: E_s^t \to \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_s^t\}_{s\in S}^{t\in T}$ das System der kanonischen Abbildungen, so lassen sich für $s\leqslant s'$ Abbildungen $f_{ss'}: \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_s^t \to \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_{s'}^t$ durch $f_{ss'} x := f_{s'}^t f_{ss'}^t x_s^t$ für $x\in \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_s^t$ und $x_s^t \in E_s^t$ mit $f_s^t x_s^t = x$ so definieren, dass $\{\underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_s^t, f_{ss'}\}_{s\in S}$ wieder ein direktes System wird. Ist nun $I := S\times T$ gerichtet durch $(s,t)\leqslant (s',t') :\Leftrightarrow (s\leqslant s' \text{ und } t\leqslant t')$ so ist auch $\{E_s^t, f_{s'}^{tt'} f_{ss'}^t\}_{(s,t)\in I}$ ein direktes System. Die drei Räume $\underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E^t$, $\underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} \underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} E_s^t$ und $\underset{\rightarrow I}{\operatorname{ind}} E_s^t$ sind isomorph.

Bezeichnet nämlich für $s\in S$ $f_s: \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_s^t \to \underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_s^t$ die kanonische Abbildung, so gibt es zur Abbildungsfamilie $\{f_s f_s^t: E_s^t \to \underset{\rightarrow S}{\operatorname{ind}} \underset{\rightarrow T}{\operatorname{ind}} E_s^t\}_{s\in S}$ nach 2.1. (IL_3) eine

stetige lineare Abbildung $j\colon \operatorname{ind}_{\to I} E^t \to \operatorname{ind}_{\to S} \operatorname{ind}_{\to T} E^t_s$. Man verifiziert, dass j ein Isomorphismus ist.

4.9.2. Projektiver und projektiver Limes. $\{E^t_s, f^{tt'}_s, f^t_{ss'}\}^{t\in T}_{s\in S}$ sei ein System von LVR und stetigen linearen Abbildungen, so dass für alle $s\in S\{E^t_s, f^{tt'}_s\}_{t\in T}$ und für alle $t\in T$ $\{E^t_s, f^t_{ss'}\}_{s\in S}$ ein inverses System ist. Ferner gelte für $s'\leqslant s$, $t'\leqslant t: f^{tt'}_{s'} f^t_{ss'} = f^{t't'}_{ss'} f^{tt'}_s$. Ist $\{f^t_s\colon \operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s \to E^t_s\}^{t\in T}_{s\in S}$ das System der kanonischen Abbildungen, so lassen sich für $s'\leqslant s$ Abbildungen $f_{ss'}\colon \operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s \to \operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_{s'}$ durch $\operatorname{pr}^t_{s'} f_{ss'} := f^t_{ss'} f^t_s$ so definieren, dass $\{\operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$ wieder ein inverses System wird. Ist $I := S\times T$ gerichtet durch $(s', t')\leqslant(s, t) :\Leftrightarrow (s'\leqslant s$ und $t'\leqslant t)$, so ist auch $\{E^t_s, f^{t't'}_{ss'} f^{tt'}_s\}_{(s,t)\in I}$ ein inverses System. Die drei Räume $\operatorname{proj}_{\leftarrow S}\operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s$, $\operatorname{proj}_{\leftarrow T}\operatorname{proj}_{\leftarrow S} E^t_s$ und $\operatorname{proj}_{\leftarrow I} E^t_s$ sind isomorph. $\operatorname{proj}_{\leftarrow I} E^t_s$ ist nämlich Unterraum von $\prod_I E^t_s$, $\operatorname{proj}_{\leftarrow S}\operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s$ ist isomorph zu einem Unterraum von $\prod_S \prod_T E^t_s$ und der Isomorphismus 1 von 4.3.5. vermittelt einen Isomorphismus zwischen den beiden Unterräumen.

4.9.3. Induktiver Limes und projektiver Limes. $\{E^t_s, f^{tt'}_s, f^t_{ss'}\}^{t\in T}_{s\in S}$ sei ein System von LVR und stetigen linearen Abbildungen, so dass für alle $s\in S\{E^t_s, f^{tt'}_s\}_{t\in T}$ ein inverses System und für alle $t\in T$ $\{E^t_s, f^t_{ss'}\}_{s\in S}$ ein direktes System ist. Ferner gelte für $s\leqslant s'$, $t'\leqslant t: f^{t't'}_{ss'} f^{tt'}_s = f^{tt'}_{s'} f^t_{ss'}$. Seien $\{g^t_s: E^t_s \to \operatorname{ind}_{\to S} E^t_s\}^{t\in T}_{s\in S}$ und $\{f^t_s\colon \operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s \to E^t_s\}^{t\in T}_{s\in S}$ die Systeme der kanonischen Abbildungen. Für $s\leqslant s'$ definieren wir $f_{ss'}\colon \operatorname{proj} E^t \to \operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_{s'}, f_{ss'} := \prod_T f^t_{ss'} f^t_s$ und für $t'\leqslant t$ $f^{tt}\colon \operatorname{ind}_{\to S} E^t_s \to \operatorname{ind}_{\to S} E^t_{s'}, f^{tt'}\ x := g^{t'}_s f^{tt'}_s x_s$ für $x\in \operatorname{ind}_{\to S} E^t_s$, $s\in S$ und $x_s\in E^t_s$, so dass $g^t_s x_s = x$. Damit ist $\{\operatorname{ind}_{\to S} E^t_s, f^{tt'}\}_{t\in T}$ ein inverses System aus $\mathfrak{T}$ und $\{\operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s, f_{ss'}\}_{s\in S}$ ein direktes System aus $\mathfrak{T}$. $k\colon \operatorname{ind}_{\to S}\operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s \to \operatorname{proj}_{\leftarrow T}\operatorname{ind}_{\to S} E^t_s$, $k(x) := \prod_I g^t_s \operatorname{pr}^t_s x_s$ für $s\in S$, $x_s\in \operatorname{proj}_{\leftarrow T} E^t_s$ mit $f_s x_s = x$ ist natürlich definiert, linear, stetig, aber im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

5. Zwei allgemeine Sätze

Zum Beweis von Satz 6.1., wonach die natürliche Topologie die einzige zulässige separierte Limitierung des $\underline{\mathbf{R}}^n$ ist, benötigen wir die folgenden Verallgemeinerungen von Aussagen der Theorie der topologischen Vektorräume.

5.1. Vollständigkeit

Ein Filter $\mathfrak{F}\in\mathbf{F}(E)$ auf einem LVR E heisst ein *Cauchy-Filter*, falls $\mathfrak{F}-\mathfrak{F}$ in E gegen Null konvergiert.

Konvergiert $\mathfrak{F}$ gegen $x \in E$, so ist $\mathfrak{F}$ Cauchy-Filter.

Ein LVR E heisst *vollständig*, falls in ihm jeder Cauchy-Filter gegen mindestens einen Punkt des Raumes konvergiert.

Eine Teilmenge A des LVR E heisst nach [9] E-abgeschlossen, wenn gilt $\bar{A}=A$, wenn also aus $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$, $\mathfrak{F}\downarrow_x E$, $A \in \mathfrak{F}$ folgt $x \in A$.

SATZ 5.1.: *Ist E ein separierter* LVR *und H ein vollständiger Unterraum von E, so ist H abgeschlossen in E.*

Die Aussage verallgemeinert [2] II.3, prop. 8.

Beweis (a contrario): Ist $x \notin H$ und $\mathfrak{F}\downarrow_x E$ mit $H \in \mathfrak{F}$, so induziert $\mathfrak{F}$ auf H einen Cauchy-Filter $\mathfrak{G}$. H ist vollständig, so dass $y \in H$ existiert mit $\mathfrak{G}\downarrow_y H$. Dann gilt $[\mathfrak{G}]\downarrow_y E$, aber wegen $[\mathfrak{G}] \geqslant \mathfrak{F}$ auch $[\mathfrak{G}]\downarrow_x E$ im Widerspruch zur Separiertheit von E.

5.2. Stetigkeit von Linearformen und Abgeschlossenheit von Hyperebenen

SATZ 5.2.: *$f: E \to \mathbf{R}$ sei eine nicht verschwindende Linearform auf dem* LVR *E und $H := f^{-1}(0)$ Hyperebene in E. Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

a. *f ist E-stetig.*

b. *f ist E°-stetig.*

c. *H ist E-abgeschlossen.*

d. *H ist E°-abgeschlossen.*

Beweis: Aus [9] p. 297, Satz 11 und [4] I.2.th.1 ergibt sich die Aequivalenz von a., b. und d. Wegen $E^\circ \leqslant E$ folgt c. aus d. Es genügt also zu zeigen, dass aus c. a. folgt.

Ist H E-abgeschlossen, so ist nach 1.3.3. E/H separiert. E/H ist eindimensional und also wegen Satz 3.2. isomorph zu $\mathbf{R}$. Ist $\pi: E \to E/H$ die kanonische Abbildung auf den Quotientenraum und $h: E/H \to \mathbf{R}$ die durch $h := f \operatorname{cls}^{-1}$ definierte Linearform, so gilt $f = h\pi$. Jede Linearform auf E/H ist stetig, mit h und π ist dann auch f stetig.

6. Limitierungen von $\underline{\mathbf{R}}^n$

6.1. Separierte Limitierungen von $\underline{\mathbf{R}}^n$

SATZ 6.1.: *Jeder separierte n-dimensionale* LVR *ist isomorph zum $\mathbf{R}^n$ (mit der natürlichen Topologie).*

Beweis: Sei E^m ein separierter n-dimensionaler LVR. Wir führen den Beweis induktiv nach n. Der Satz gilt nach 3.2. für $n=1$. Er sei bewiesen für $m<n$. Ist $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Basis des E^n, so bezeichne H den von $\{x_1\}$ aufgespannten eindimensionalen Unterraum, H' sein algebraisches Komplement mit der Unterraumlimitierung. H' ist $(n-1)$-dimensional und als Unterraum eines separierten Raumes nach 1.3.2. separiert. Aus der Induktionsannahme folgt die Isomorphie von H' und $\mathbf{R}^{n-1}$. H' ist vollständiger Unterraum eines separierten Raumes und nach 5.1. abgeschlossen in E^n. Die Linearform $f: E^n \to \mathbf{R}$, definiert durch $f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) := \lambda_1$ ist wegen Satz 5.2. und

$f^{-1}(0)=H'$ stetig. H ist separiert und eindimensional, also isomorph zu $\mathbf{R}$, deshalb ist $g:\mathbf{R}\to H: g\lambda:=\lambda x_1$ stetig. Ist $i_1: H\to E^n$ die stetige Einbettung, so ist $u:=i_1 g f$ ein stetiger Projektor in E^n auf H. Aus Satz 2.3.4. ergibt sich die Isomorphie von E^n mit $H\times H'$, also mit $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}=\mathbf{R}^n$.

6.2. Ausgeglichene endlichdimensionale LVR

Nach 1.2.2. heisst ein LVR E ausgeglichen, falls $E^\sharp = E$ gilt.

SATZ 6.2.1.: *Ausgeglichene zulässige Limitierungen auf endlichdimensionalen* VR *sind Topologien.*

KORROLAR 6.2.2.: *Ist der n-dimensionale* LVR E *ausgeglichen, so existiert* m, $0\leqslant m\leqslant n$, *so dass* E^n *isomorph zu* $\mathbf{R}_t^m\times\mathbf{R}^{n-m}$ *ist.* ($\mathbf{R}_t^m$ ist mit der indiskreten Topologie auf $\dot{\underline{\mathbf{R}}}^m$ versehen.)

Beweis: (a) $n=1$. Der Filter der gegen Null konvergenten Filter eines ausgeglichenen LVR besitzt eine Basis aus ausgeglichenen Filtern. In $\mathbf{F}(\underline{\mathbf{R}})$ sind nur die drei Filter $\{\underline{\mathbf{R}}\}\leqslant\mathbf{V}\leqslant\dot{0}$ ausgeglichen. Alle möglichen Basen daraus definieren Topologien.

(b) E^n sei ein n-dimensionaler ausgeglichener LVR und der Satz sei bewiesen für $m<n$. Ist E^n separiert, so ist er nach 6.1. topologisch, ist E^n nicht separiert, so existiert $x\in E^n$, $x\neq 0$, sowie $\mathfrak{F}\in\mathbf{F}(E^n)$, $\mathfrak{F}=\mathbf{V}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\downarrow E^n$, $\mathfrak{F}\downarrow_x E^n$. $\mathfrak{F}-x$ konvergiert gegen 0. Ist $\mathfrak{G}$ ein gröberer ausgeglichener Filter der gegen 0 konvergiert, so liegt $-x$ in allen Mengen von $\mathfrak{G}$, da $\mathfrak{G}$ ausgeglichen ist enthält $\bigcap_{G\in\mathfrak{G}} G$ auch λx für alle $\lambda\in\mathbf{R}$. $\mathfrak{G}$ induziert auf dem durch $\{x\}$ bestimmten eindimensionalen Unterraum H die indiskrete Topologie. Ist H' algebraisches Komplement von H und $\{x_i\}_{i=1,\ldots n}$ eine Basis von E^n mit $x_1=x$, so ist $u: E^n\to E^n$, $u(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j):=\lambda_1 x_1$ ein stetiger Projektor auf H. Aus Satz 2.3.5. folgt die Isomorphie von E^n mit $H\oplus H'$. H' ist als Unterraum eines ausgeglichenen LVR ausgeglichen, nach der Induktionsannahme also ein topologischer VR.

6.3. Abspaltung eines Unterraumes mit indiskreter Topologie

SATZ 6.3.: *Jeder endlichdimensionale* LVR E^n *ist Limesprodukt eines indiskreten Unterraumes und eines Unterraumes, der auf keinem seiner Unterräume die indiskrete Topologie induziert.*

Beweis: Die Menge H der Punkte $x\in E^n$, so dass E^n auf dem durch x bestimmten eindimensionalen Unterraum die indiskrete Topologie induziert ist ein Unterraum mit indiskreter Topologie. Eine Projektion von E^n auf diesen Unterraum ist also stetig. Der Satz folgt mit 2.3.5.

6.4. Abspaltung eines Unterraumes mit natürlicher Topologie

SATZ 6.4.1.: *Jeder endlichdimensionale* LVR E *ist Limesprodukt eines Unterraumes*

H mit natürlicher Topologie und eines Unterraumes H', auf dem jede nicht verschwindende Linearform unstetig ist.

Beweis: $n=1$. Jede Limitierung auf $\underline{\mathbf{R}}$ ist separiert oder hat keine nicht verschwindende stetige Linearform, sie ist Produkt von sich mit dem nulldimensionalen topologischen VR.

– Der Satz sei bewiesen für $m<n$. E^n sei ein n-dimensionaler LVR. Besitzt E^n keine stetige nicht verschwindende Linearform, so ist E^n isomorph zu $\{0\}\times E^n$. Ist $f:E^n\to\mathbf{R}$ stetige Linearform und $\{x_i\}_{i,\dots n}$ eine Basis, so dass $f(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j)=\lambda_1$, so ist wegen der Stetigkeit der skalaren Multiplikation $g:E^n\to E^n: gx:=fx\cdot x_1$ ein stetiger Projektor auf den durch $\{x_1\}$ erzeugten eindimensionalen Unterraum H. H ist separiert, also isomorph zu $\mathbf{R}$. Die Behauptung folgt mit 2.3.5. aus der Induktionsannahme.

KORROLAR 6.4.2.: *Ist E^n ein n- dimensionaler* LVR, *so gibt es zwei ganze Zahlen m, r, $0\leqslant m$, $r\leqslant n$, $m+r\leqslant n$, so dass E^n isomorph zu $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_t^r\times F$ ist, wo F ein $(n-m-r)$-dimensionaler* LVR *ist, der auf keinem seiner Unterräume eine Topologie induziert, derart, dass $E^{n\#}$ isomorph zu $\mathbf{R}^{n-r}\times\mathbf{R}_t^r$ und $E^{n\circ}$ isomorph zu $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_t^{n-m}$ ist.*

6.5. *Darstellung endlichdimensionaler* LVR *durch Mengensysteme*

SATZ 6.5.: *Ist E^n ein n-dimensionaler* LVR, *so gibt es ein Mengensystem $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{P}(E^n)$ mit den Eigenschaften* (a)–(e) *von Satz* 1.4. *so, dass ein Filter $\mathfrak{F}$ genau dann in E^n gegen 0 konvergiert, wenn in $\mathfrak{a}$ ein A so existiert, dass $\mathfrak{F}$ feiner ist als $[A]+\mathfrak{U}$, wo $\mathfrak{U}$ der Nullumgebungsfilter der Topologie von $E^{n\#}$ ist.*

Beweis: Ist $E^n=E^m\times E^{n-m}$ nach 6.3. so zerlegt, dass E^{n-m} ein maximaler Unterraum mit indiskreter Topologie ist, so ist $E^{n\#}$ isomorph zu $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_t^{n-m}$. Gilt der Satz für E^m und E^{n-m} mit Mengensystemen $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{P}(E^m)$ und $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{P}(E^{n-m})$, so auch für E^n mit dem System $\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}'$, denn jeder E^n-konvergente Filter ist feiner als ein Filter $\mathfrak{F}\times\mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{F}$ in E^m, $\mathfrak{G}$ in E^{n-m} konvergiert. $\{E^{n-m}\}=:\mathfrak{a}'$ bestätigt aber die Aussage für E^{n-m}.

Der Satz ist also noch zu beweisen für E^m und den metrischen Nullumgebungsfilter $\mathbf{V}^m$ der natürlichen Topologie ω^m von E^m. Für $A\subset E^m$ bezeichne $\tilde{A}$ den ω^m-Abschluss von A. Wir definieren $B:\mathbf{F}(\underline{E}^m)\to\mathfrak{P}(\underline{E}^m)$ durch $B(\mathfrak{F}):=\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\tilde{F}$ und $\mathfrak{b}:=\{B(\mathfrak{F})\mid\mathfrak{F}\downarrow E^m\}$. Das Mengensystem $\mathfrak{b}$ erfüllt die Bedingungen (a) bis (e) von Satz 1.4.:

(b) ergibt sich aus $B(\lambda\mathfrak{F})=\lambda B(\mathfrak{F})$ für $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mathfrak{F}\downarrow E^m$.

(c) und (d) folgen aus Satz 1.1. mit $B(\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G})\supset B(\mathfrak{F})\cup B(\mathfrak{G})$ und $B(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})\supset B(\mathfrak{F})+B(\mathfrak{G})$.

(e) fordert, dass für $\mathfrak{F}\downarrow E^m$ $B(\mathfrak{F})$ ω^m-beschränkt ist. Falls $\mathfrak{F}$ eine ω^m-beschränkte Menge enthält, trifft das zu. Die Annahme, dass $\mathfrak{F}\downarrow E^m$ keine ω^m-beschränkte Menge

enthält, führt zu einem Widerspruch: Wegen $E^m \leqslant E^{m\#}$ gilt $\mathbf{V}^m \downarrow E^m$, also gilt mit $\mathfrak{G} := \mathbf{V}\mathfrak{F} + \mathbf{V}^m : \mathfrak{G} \downarrow E^m$. $\mathfrak{G}$ enthält auch keine ω^m-beschränkte Menge. E^m induziert auf keinem Unterraum die indiskrete Topologie, deshalb enthält $B(\mathfrak{G})$ keinen eindimensionalen Unterraum und zu $x \in \underline{E}^m$ existiert $\lambda \in \underline{\mathbf{R}}$, $\lambda \neq 0$ und $G \in \mathfrak{G}$, so dass $\lambda x \notin G$. Weil $\mathfrak{G}$ ausgeglichen ist, gilt $x \notin (1/\lambda) G \in \mathfrak{G}$. Ist $\{x_i\}_{i=1,\ldots,m}$ eine Basis von E^m und $K := \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \mid \lambda_j \in \underline{\mathbf{R}}, \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| = 1\}$, so gibt es insbesondere zu jedem $x \in K$ eine Menge $H_x \in \mathfrak{G}$, so dass $x \notin H_x$ gilt. H_x darf ω^m-abgeschlossen angenommen werden, da $\mathfrak{G}$ eine Basis aus ω^m-abgeschlossenen Mengen besitzt. $\{E^m \div H_x \mid x \in K\}$ ist eine ω^m-offene Überdeckung der ω^m-kompakten Menge K. Für eine endliche Teilüberdeckung $\{E \div H_j \mid j = 1, \ldots, q\}$ ist $H := \bigcap_{j=1}^{q} H_j$ in $\mathfrak{G}$ und ist disjunkt zu K. Da $\mathfrak{G}$ ausgeglichen ist, existieren $H', H'' \in \mathfrak{G}$, sowie $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, so dass $H' = I_\varepsilon H''$ Teilmenge von H ist. Aus $H' \cap K = \emptyset$ folgt die ω^m-Beschränktheit von H', also ein Widerspruch.

(a) Wegen $\dot{0} \downarrow E$ folgt $\mathfrak{b} \neq \emptyset$.

Nach Nachweis (e) existiert zu $\mathfrak{F} \downarrow E^m$ eine ω^m-beschränkte Menge $F_0 \in \mathfrak{F}$. Wäre $B(\mathfrak{F}) = \emptyset$, müsste zu $x \in \tilde{F}_0$ ein $F_x \in \mathfrak{F}$ mit $x \notin F_x$ existieren. $\{E^m \div F_x \mid x \in \tilde{F}_0\}$ wäre eine ω^m-offene Überdeckung der ω^m-kompakten Menge $\tilde{F}_0$. Für eine endliche Teilüberdeckung $\{E^m \div F_j \mid j = 1, \ldots, q\}$ müsste $F^* := \bigcap_{j=1}^{q} F_j$ zu $\mathfrak{F}$ gehören, was wegen $F^* \cap F_0 = \emptyset$ falsch ist.

Damit gibt es jedenfalls einen LVR $E^{\mathfrak{b}}$ mit $\underline{E^{\mathfrak{b}}} = \underline{E}^m$ und $\mathfrak{F} \downarrow E^{\mathfrak{b}} \Leftrightarrow$ (es existiert $\mathfrak{G} \downarrow E^m : \mathfrak{F} \geqslant [B(\mathfrak{G})] + \mathbf{V}^m$). Zu beweisen bleibt die $E^{\mathfrak{b}}$-Konvergenz jedes E^m-konvergenten Filters und die E^m-Konvergenz jedes $E^{\mathfrak{b}}$-konvergenten Filters. Das ergibt sich aus der Ungleichung:

$$\mathfrak{F} \geqslant \tilde{\mathfrak{F}} \geqslant [B(\mathfrak{F})] + \mathbf{V}^m \geqslant \tilde{\mathfrak{F}} + \mathbf{V}^m = \mathfrak{F} + \mathbf{V}^m \quad \text{für} \quad \mathfrak{F} \downarrow E^m,$$

wo $\tilde{\mathfrak{F}}$ den von der Filterbasis $\{\tilde{F} \mid F \in \mathfrak{F}\}$ bestimmten Filter bezeichnet. Die erste Ungleichung ist trivial. $\mathbf{V}^m$ besitzt die Filterbasis

$$\left\{ K_r := \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \mid \lambda_j \in \underline{\mathbf{R}}, \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| \leqslant r \right\} \mid r \in \underline{\mathbf{R}}, r > 0 \right\}.$$

Sei $r \in \underline{\mathbf{R}}$ so gewählt, dass $B(\mathfrak{F}) + K_1 \subset K_r \in \mathfrak{F}$ gilt, was möglich ist, da $\mathfrak{F}$ eine ω^m-beschränkte Menge enthält. Ist nun $F \in [B(\mathfrak{F})] + \mathbf{V}^m$, so existiert $\varepsilon \in \underline{\mathbf{R}}$, $0 < \varepsilon < 1$, mit $F \supset B(\mathfrak{F}) + K_\varepsilon$. $H := K_r \div (B(\mathfrak{F}) + K_\varepsilon)$ ist ω^m-kompakt und nicht leer. Für $x \in H$ ist $x \notin B(\mathfrak{F})$, also existiert $G_x \in \mathfrak{F} : x \notin \tilde{G}_x$. $\{E^m \div \tilde{G}_x \mid x \in H\}$ ist eine ω^m-offene Überdeckung von H. Für eine endliche Teilüberdeckung $\{E^m \div \tilde{G}_j \mid j = 1, \ldots, q\}$ ist $G_0 := \bigcap_{j=1}^{q} \tilde{G}_j$ disjunkt zu H. Da $G_0 \cap K_r$ ω^m-abgeschlossene Teilmenge von $B(\mathfrak{F}) + K_\varepsilon$ ist und zu $\tilde{\mathfrak{F}}$ gehört, ergibt sich $F \in \tilde{\mathfrak{F}}$ und damit die zweite Ungleichung. Die dritte ist trivial, die Gleichheit folgt aus $F \subset \tilde{F} \subset F + K_\varepsilon$ für $F \in \mathfrak{F}$, $\varepsilon \in \underline{\mathbf{R}}$, $\varepsilon > 0$.

LITERATUR

[1] BOURBAKI, N., *Théorie des ensembles* (Hermann, Paris 1956), chap. III.
[2] BOURBAKI, N., *Topologie générale* (Hermann, Paris 1960/63).
[3] ČECH E.: *Topological Spaces* (Wiley, London 1966).
[4] BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1953/55).
[5] SCHAEFER, H. H., *Topological Vector Spaces* (Macmillan, New York 1966).
[6] KÖTHE, G., *Topologische lineare Räume* (Springer, Berlin 1960).
[7] KELLEY, J. L. und NAMIOKA, I., *Linear Topological Spaces* (van Nostrand, Princeton N.J. 1963).
[8] KOWALSKY, H. J., *Limesräume und Komplettierung*, Math. Nachr. *12* (1954), 301–340.
[9] FISCHER, H. R., *Limesräume*, Math. Ann. *137* (1959), 269–303.
[10] WLOKA, J., *Limesräume und Distributionen*, Math. Ann. *152* (1963), 351–409.
[11] FRÖLICHER, A. und BUCHER, W., *Calculus in Vector Spaces Without Norm*, Lecture Notes in Math. (Springer, Berlin 1966).
[12] BINZ, E., *Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen*, Comment. Math. Helv. *41*, 2 (1966–67), 137–156.
[13] BINZ, E. und KELLER, H. H., *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Acad. Sci. Fenn. [Ser. A I] *383* (1966).
[14] MARINESCU, G., *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963).
[15] COOK, C. H. und FISCHER, H. R., *On Equicontinuity and Continuous Convergence*, Math. Ann. *159* (1965), 94–104.
[16] KELLER, H. H., *Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume*, Math. Ann. *159* (1965), 259–270.
[17] KELLER, H. H., *Über Probleme, die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten*, Festband R. Nevanlinna (Springer, Berlin 1967).
[18] V. D. WAERDEN, B. L., *Algebra* I, (Springer, Berlin 1930).

Eingegangen den 23. April 1968

Über fast-uniforme Untergruppen komplexer Liegruppen und auflösbare komplexe Mannigfaltigkeiten

Von WOLF BARTH und MICHAEL OTTE

Einleitung

Bekanntlich zeigten S. BOCHNER und D. MONTGOMERY, daß die Gruppe der komplex-analytischen Automorphismen $\mathrm{Aut}(X)$ einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X eine komplexe Liegruppe ist.

Ist X homogen und $G := \mathrm{Aut}^0(X)$ auflösbar, so nennt man X auflösbar. Jede auflösbare Mannigfaltigkeit in diesem Sinne ist komplex-parallelisierbar, d.h., das holomorphe Tangentialbündel ist trivial. Umgekehrt lassen sich die auflösbaren Mannigfaltigkeiten charakterisieren als kompakte komplex-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten mit auflösbarer Fundamentalgruppe (vergl. Satz 3.1) oder auf andere Weise: als homogene Torustürme (vergl. 4., insbesondere auch zur Begriffsbildung).

Diesen Ergebnissen geht die folgende allgemeinere Fragestellung voraus:

Ist H ein zusammenhängender komplexer Normalteiler in G, so sind die Bahnen aller Punkte $x \in X$ unter H homöomorph, und man fragt, ob die („typische") Bahn Hx wieder kompakt, und somit eine auflösbare Mannigfaltigkeit ist (oder äquivalent dazu, ob $\Gamma \cdot H$ eine abgeschlossene komplexe Untergruppe in G ist, wobei Γ die Isotropiegruppe eines beliebigen Punktes $x \in X$ darstellt). Es zeigt sich, daß dies für „ziemlich viele" Normalteiler in G richtig ist, z.B. für alle Glieder der Normalreihe von G, für das Nilradikal N oder, falls $G = N$, auch für die Glieder der absteigenden Zentralreihe.

Für den Beweis dieser Aussagen werden in Abschn. 1 zunächst Eigenschaften fast-uniformer (bzw. uniformer) Untergruppen komplexer Liegruppen zusammengestellt. Das sind Untergruppen $F \subset G$ derart, daß G/F nur konstante holomorphe Funktionen trägt (bzw. sogar kompakt ist).

Da beispielsweise jede arithmetische Untergruppe einer komplexen halbeinfachen einfachzusammenhängenden Liegruppe, etwa $SL(n, \mathbf{Z})$ in $SL(n, \mathbf{C})$, eine fast-uniforme Untergruppe ist, könnten diese Untergruppen möglicherweise auch von selbstständigem Interesse sein.

Ein Teil unserer Ergebnisse findet sich bereits in der Literatur (vgl. [7], [8]), jedoch stellt sich heraus, daß die Beweise bei Beschränkung auf den komplexen Fall durchgängig wesentlich einfacher werden. Vor allem sind sie „analytischer": an algebraischen Tatsachen wird nicht viel mehr als der Liesche Fahnensatz benötigt,

während andererseits der Remmertsche Abbildungssatz, der besagt, daß das Bild einer analytischen Menge unter einer eigentlichen holomorphen Abbildung wieder eine analytische Menge ist, eine wichtige Rolle spielt.

0. Vorbereitungen

Die *Kommutatorgruppe* (G_1, G_2) zweier komplexer Untergruppen einer komplexen Liegruppe G ist die von allen Kommutatoren $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, $\sigma\in G_1$, $\tau\in G_2$, erzeugte komplexe Untergruppe von G. Die *Normalreihe* von G ist

$$G =: G^0 \supset G' := (G, G) \supset G^{(2)} \supset \cdots \supset G^{(n)} := (G^{(n-1)}, G^{(n-1)}) \ldots,$$

die *Zentralreihe*

$$G =: G^0 \supset G' \supset \cdots \supset G^n := (G, G^{n-1}) \ldots.$$

G heißt *auflösbar* (bzw. *nilpotent*), falls für ein n gilt: $G^{(n+1)}=1$ (bzw. $G^{n+1}=1$). Das erste n mit dieser Eigenschaft heißt Länge der Normal-(bzw. Zentral-) Reihe. Das *Zentrum* von G bezeichnen wir mit Z_G, das *Nilradikal*, d.h. den maximalen zusammenhängenden nilpotenten Normalteiler, mit N_G. Der *Normalisator* einer Untergruppe $H\subset G$ sei $\mathcal{N}_G(H)$, der *Zentralisator* $\mathcal{Z}_G(H)$.

Jedem $\gamma\in G$ ordnen wir folgende holomorphe Abbildungen von G in sich zu:

$$\varphi_\gamma: G\ni\sigma\mapsto\sigma\gamma\sigma^{-1}\in G,$$
$$\mathrm{int}_\gamma: G\ni\sigma\mapsto\gamma\sigma\gamma^{-1}\in G,$$
$$\mathrm{ad}_\gamma: G\ni\sigma\mapsto\sigma\gamma\sigma^{-1}\gamma^{-1}\in G,$$

Die Liealgebra einer Gruppe wird mit dem entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnet. G^0 ist die Zusammenhangskomponente der Eins in der Gruppe G. Der Homomorphismus

$$G\ni\gamma\mapsto(d\,\mathrm{int}_\gamma)_1\in GL(n, \mathbf{C}),\ n := \dim_{\mathbf{C}} G$$

heißt *adjungierte Darstellung* von G. Sein Kern ist der Zentralisator von G^0. Da $GL(n, \mathbf{C})$ holomorph vollständig ist, ist die adjungierte Darstellung auf jeder kompakten zusammenhängenden analytischen Menge $K\subset G$ konstant. Insbesondere liegt jede kompakte komplexe zusammenhängende Untergruppe von G in Z_G.

Ist $F\subset G$ eine beliebige Untergruppe, so nennen wir eine holomorphe Funktion f auf G eine *F-invariante* (genauer: F-rechts-invariante) *Funktion*, falls

$$f(\sigma\tau)=f(\sigma)\quad\text{für alle}\quad\tau\in F.$$

$\mathcal{H}(G \bmod F)$ sei die $\mathbf{C}$-Algebra dieser Funktionen. Setzt man für ein holomorphes f und für $\varrho\in G$

$${}_\varrho f(\sigma) := f(\varrho\sigma),\qquad \sigma\in G,$$

so gehört mit f auch immer ${}_\varrho f$ zu $\mathcal{H}(G \bmod F)$. Daraus ergibt sich sofort die

FOLGERUNG: *Die Menge*

$$G^F := \{\sigma \in G : f(\sigma) = f(1) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{H}(G \bmod F)\}$$

ist eine abgeschlossene komplexe Untergruppe von G *mit* $F \subset G^F$.

G heißt *holomorph separabel*, falls $G^{\{1\}} = \{1\}$. ($G^{\{1\}}$ ist stets ein zentraler und zusammenhängender Normalteiler in G [13].*)

Wir nennen F *fast-uniform* in G, falls $G^F = G$. (Dies impliziert den Zusammenhang von G/F.) Jede abgeschlossene Untergruppe F mit kompaktem zusammenhängendem G/F ist fast-uniform. Ein derartiges F heißt üblicherweise *uniform*. Ist eine abgeschlossene Untergruppe $F \subset G$ vorgegeben, so nennen wir eine abgeschlossene komplexe Untergruppe (bzw. einen Normalteiler) $H \subset G$ eine *F-Untergruppe* (bzw. einen *F-Normalteiler*), falls die drei folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt sind:

a) $F \cdot H$ ist abgeschlossen in G,

b) $H/(H \cap F)$ ist abgeschlossen in G/F,

c) $F/(F \cap H)$ ist abgeschlossen in G/H.

Falls H zusammenhängend und F uniform in G ist, hat man noch Äquivalenz mit

d) $H \cap F$ ist uniform in H.

Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset G$ nennen wir *Gitter*. Eine abelsche Gruppe $\mathbf{C}^n/\Gamma$ heißt *toroid*, falls $\mathscr{H}(\mathbf{C}^n \bmod \Gamma) \simeq \mathbf{C}$, d.h. Γ fast-uniform ist. (Γ wird hier durch eine Periodenmatrix P gegeben, und es gilt: Γ ist fast-uniform genau dann, wenn $P = (E, T)$, wo E die $n \times n$-Einheitsmatrix ist und es zu T kein $\mathfrak{z} \in \mathbf{Z}^n$ gibt, derart daß $\mathfrak{z} \cdot T$ ganz ist; vergl. [10]).

1. Einige Dichte-Eigenschaften fast-uniformer und uniformer Untergruppen

Der bekannte Fahnensatz von S. LIE lautet: Es sei G eine auflösbare zusammenhängende komplexe Liegruppe und h: $G \to GL(n, \mathbf{C})$ ein holomorpher Homomorphismus. Dann gibt es ein $\sigma \in GL(n, \mathbf{C})$ so, daß alle Elemente aus $\sigma \cdot h(G) \cdot \sigma^{-1}$ Dreiecksmatrizen sind. Ähnlich wie in [4, Hilfssatz 3] folgern wir hieraus:

SATZ 1.1: *F sei fast-uniform in der auflösbaren komplexen Liegruppe G. Ist $H \subset G$ eine zusammenhängende komplexe Untergruppe mit*

$$F \subset \mathscr{N}_G(H),$$

so gilt:

$$\mathscr{N}_G(H) = G.$$

Beweis: Von der adjungierten Darstellung wird eine holomorphe Abbildung

$$a: G \to \text{Graß}(m, n), \quad m := \dim H, \quad n := \dim G,$$

$$a(\sigma) := (d \operatorname{int}_\sigma)_1 \mathfrak{h}$$

*) Bekanntlich ist ja jede holomorph separable Gruppe holomorph vollständig.

induziert. Weiter gibt es eine Einbettung b: Graß$(m, n) \subsetneq P^N(\mathbf{C})$ und einen Homomorphismus c: $G \to PGL(N, \mathbf{C})$ mit

$$b\,a(\tau\sigma) = c(\tau)\,b(a(\sigma)),\ \sigma, \tau \in G.$$

Da sich ba über $G \to G/F$ faktorisieren läßt, wird jede auf $A := ba(G)$ holomorphe Funktion f zu einer F-invarianten holomorphen Funktion $f \circ ba$ auf G geliftet. Nach Voraussetzung ist also jedes auf A holomorphe f konstant. Insbesondere trifft A jede Hyperebene $E \subset P^N(\mathbf{C})$. Der Liesche Fahnensatz, angewendet auf die auflösbare Gruppe $c(G)$ liefert uns eine Fahne

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_N \subset P^N(\mathbf{C}), \quad \operatorname{codim} E_\nu = \nu,$$

die unter $c(G)$ invariant ist. Da $c(G)$ auf A transitiv operiert, folgt induktiv

$$A \subset E_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

d.h., A ist einpunktig.

Satz 1.1 besagt insbesondere, daß jede auflösbare Mannigfaltigkeit X Quotient von $\operatorname{Aut}(X)^0$ nach einer diskreten Untergruppe ist. Nach WANG [15] ist dies äquivalent damit, daß X parallelisierbar ist.

KOROLLAR 1.2: *$F \subset G$ sei wie in* 1.1. *Zusätzlich sei G einfachzusammenhängend und $H \subset G$ eine abgeschlossene komplexe Untergruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten, die F umfaßt. Dann gilt schon*

$$H = G.$$

Beweis: Wegen $H^0 \cap F \subset \mathcal{N}_G(H^0)$ ist H^0 nach Lemma 1.2 normal in G, denn $H^0 \cap F$ ist ebenfalls fast-uniform in G. Der Quotient G/H^0 ist eine komplexe Liegruppe ohne nichtkonstante holomorphe Funktionen, also toroid. Falls $\dim G/H^0 > 0$, ergäbe die exakte Homotopiesequenz

$$\cdots \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H^0) \to 1$$

einen Widerspruch zu $\pi_1(G/H^0) \neq 1$.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, daß für uniformes und diskretes F in 1.1 und 1.2 die Voraussetzung: „G ist auflösbar" fallengelassen werden kann.

Beweis: Sei also $F \subset H \subset G$, G einfachzusammenhängend und H zusammenhängend, dann gilt $H = G$. In der Tat: Wegen des Zassenhaus-Lemmas (vgl. [1, Proposition 2]) und 1.2 oben genügt es, die Aussage für halbeinfaches G zu beweisen. Wie im Beweis zu Satz 1.1 läßt sich die aus der adjungierten Darstellung resultierende Operation von G auf Graß (n, h) $(h := \dim H)$ über G/H faktorisieren, und da G/H kompakt ist, ergibt sich wie dort, daß jede (maximale) auflösbare Untergruppe $B \subset G$ einen Fixpunkt besitzt; das heißt aber, daß der Normalisator $\mathcal{N}_G(H^*)$ einer konjugierten H^* von H parabolisch ist (d.h. eine maximale auflösbare Untergruppe von G umfaßt).

$\mathcal{N}_G(H^*)$ ist jedoch unimodular, da es ein uniformes Gitter enthält. Daher folgt aus [14, 2.4.] $\mathcal{N}_G(H^*)=G$, d.h., H^* und damit auch H ist Normalteiler in G. G/H ist als kompakte Gruppe ein Torus und, da G halbeinfach war, folgt also $G=H$.

SATZ 1.3, a: *F sei fast-uniform in der holomorph-separablen komplexen Liegruppe G. (G ist genau dann holomorph-separabel, wenn $Z_G^0 \simeq (\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{C}^q$ ist.) Dann gilt:*

$$\mathcal{Z}_G(F) = Z_G .$$

Beweis: Für alle $\gamma \in \mathcal{Z}_G(F)$, $\tau \in F$ und $\sigma \in G$ gilt

$$\varphi_\gamma(\sigma\tau) = \sigma\tau\gamma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\gamma\sigma^{-1} = \varphi_\gamma(\sigma),$$

d.h., jedes auf G holomorphe f wird durch φ_γ zu einer F-invarianten holomorphen Funktion $f \circ \varphi_\gamma$ auf G geliftet. Da diese konstant ist, muß schon $f \mid \varphi_\gamma(G)$ konstant sein. Wegen der Holomorph-Separabilität von G ist $\varphi_\gamma(G)$ einpunktig, d.h.,

$$\varphi_\gamma(G) = \varphi_\gamma(1) = \{\gamma\},$$

und $\gamma \in Z_G$, w.z.b.w.

Obige Aussage läßt sich für uniforme Untergruppen wie folgt verschärfen:

SATZ 1.3, b: *F sei eine uniforme komplexe Untergruppe der zusammenhängenden komplexen Liegruppe G. Dann gilt entweder*

i) $\mathcal{Z}_G(F) = Z_G$

oder

ii) *Z_G enthält einen kompakten Normalteiler positiver Dimension.*

Beweis: Für alle $\gamma \in \mathcal{Z}_G(F)$, $\tau \in F$ und $\sigma \in G$ gilt wie oben

$$\varphi_\gamma(\sigma\tau) = \sigma\tau\gamma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\gamma\sigma = \varphi_\gamma(\sigma),$$

d.h., die Abbildung φ_γ, $\gamma \in \mathcal{Z}_G(F)$, kann man über die Quotientenabbildung $\pi: G \to G/F$ faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & G \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\varrho} & \\ & G/F & \end{array}$$

Da π lokale Schnitte besitzt, ist mit φ_γ auch ϱ holomorph. Aus der Kompaktheit von G/F und dem Remmertschen Abbildungssatz [9] folgt, daß die kompakte Menge

$$\varphi_\gamma(G) = \varrho(G/F)$$

analytisch in G ist. Wenn G höchstens diskrete kompakte Untergruppen besitzt, ist $\varphi_\gamma(G)$ wegen des folgenden Lemmas 1.4 einpunktig, d.h.

$$\varphi_\gamma(G) = \varphi_\gamma(1) = \{\gamma\},$$

und $\gamma \in Z_G$, w.z.b.w.

LEMMA 1.4: *K sei eine irreduzible kompakte analytische Menge in der komplexen Liegruppe G mit* $1 \in K$. *Dann ist die von K erzeugte Untergruppe ein kompakter komplexer Normalteiler im Zentrum von G.*

Beweis: Wir definieren induktiv

$$K^1 := K$$
$$K^{2n} := K^{2n-1} K^{2n-1} := \{\sigma\tau : \sigma, \tau \in K^{2n-1}\}$$
$$K^{2n+1} := K^{2n}(K^{2n})^{-1} := \{\sigma\tau^{-1} : \sigma, \tau \in K^{2n}\}$$

für $n \geqslant 1$. Nach dem Remmertschen Abbildungssatz sind diese Mengen analytisch in G. Außerdem sind sie irreduzibel, da K es ist, und bilden wegen $1 \in K$ eine aufsteigende Kette

$$K^1 \subset K^2 \subset \cdots \subset G.$$

Aus Dimensionsgründen bricht diese Kette ab, es gibt also eine K umfassende, von K erzeugte kompakte analytische Menge $H \subset G$ mit $HH = HH^{-1} = H$. D.h., H ist eine kompakte Untergruppe und deswegen zentral, w.z.b.w.

Das algebraische Analogon zu Lemma 1.4 findet sich in [6]. Zu 1.2 und 1.3 vgl. [3, Cor. 4.3 und Cor. 4.4, p. 187].

Anwendung von Satz 1.3, a: Jede halbeinfache komplexe Gruppe G hat ein endliches Zentrum. Deswegen ist auch das Zentrum jeder fast-uniformen Untergruppe von G endlich!

2. Nilpotente Gruppen

SATZ 2.1: *Eine zusammenhängende komplexe Liegruppe G, die eine fast-uniforme Untergruppe F enthält, ist genau dann nilpotent, wenn F es ist.*

Beweis durch vollständige Induktion nach $\dim G$: Wir zeigen, daß Z_G positive Dimension besitzt, falls F nilpotent. Denn dann ist $F/(F \cap Z_G)$ nilpotent und fast-uniform in G/Z_G, und diese Gruppe ist nilpotent nach Induktionsannahme. Also ist auch G als zentrale Erweiterung von G/Z_G nilpotent.

Sei deshalb Z_G diskret. Dann muß G insbesondere holomorph-separabel sein [13]. Aus Satz 1.3, a ergibt sich

$$1 \neq Z_F \subset \mathscr{Z}_G(F) \subset Z_G,$$

und Z_F ist ebenfalls diskret. $\phi : G \to G^* := G/Z_F$ sei der natürliche Epimorphismus. $F^* := F/Z_F$ ist nilpotent und fast-uniform in G^*. Falls G^* holomorph separabel wäre, wäre (wieder nach 1.3, a)

$$Z_{F^*} \subset Z_{G^*}.$$

Z_{F^*} müßte diskret sein, denn sonst hätte Z_{G^*} und damit Z_G positive Dimension! Folglich wäre $\phi^{-1}(Z_{F^*})$ diskret und normal, also zentral in G. Man hätte den Widerspruch, daß $\phi^{-1}(Z_{F^*})$ zentral in F wäre und (wegen $Z_{F^*} \neq 1$) Z_F echt enthielte. Also kann G^*

nicht holomorph separabel sein. Dann ist Z_{G^*} und damit Z_G positiv-dimensional, Widerspruch!

Bemerkung: Sei F insbesondere uniform, dann lassen sich im Reellen leicht Gegenbeispiele zur Aussage des obigen Satzes angeben. (Im Reellen ist eben eine kompakte Untergruppe nicht notwendig zentral!)

In einer nilpotenten einfachzusammenhängenden zusammenhängenden Liegruppe G ist die Exponentialabbildung biholomorph. Daher ist der Durchschnitt zweier zusammenhängender Untergruppen von G ebenfalls eine zusammenhängende Untergruppe von G. Zu jeder Teilmenge $M \subset G$ existiert somit die kleinste abgeschlossene zusammenhängende M umfassende Untergruppe $\langle M \rangle_G$ von G.

LEMMA 2.2: *Es gelte* $\langle M \rangle_G = G$. $\mathrm{Aut}^M(G)$ *sei die Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(G)$, *die* M *auf sich abbildet, und* $\mathrm{Aut}(M)$ *die Gruppe aller Selbstabbildungen von* M *auf sich. Dann ist der natürliche Homomorphismus*

$$h: \mathrm{Aut}^M(G) \to \mathrm{Aut}(M)$$

injektiv.

Beweis: Ist $\alpha \in \ker h$, so induziert $(d\alpha)_1$ auf allen Vektorräumen $\mathbf{C} \cdot \exp^{-1}(m)$, $m \in M$, die Identität. Es folgt $(\mathrm{d}\alpha)_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ und $\alpha = \mathrm{id}_G$.

FOLGERUNG 2.3: *Für jedes Gitter* Γ *in* G *ist* $\mathrm{Aut}^\Gamma(\langle \Gamma \rangle_G)$ *eine diskrete Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(\langle \Gamma \rangle_G)$.

Beweis: $A := \mathrm{Aut}^\Gamma(\langle \Gamma \rangle_G)$ ist analytisch in $\mathrm{Aut}(\langle \Gamma \rangle_G)$. Liegen α und $\alpha' \in A$ in der gleichen Zusammenhangskomponente von A, so ist

$$\alpha \mid \Gamma = \alpha' \mid \Gamma$$

da Γ diskret vorausgesetzt. Aus 2.2 folgt $\alpha = \alpha'$. Da alle Zusammenhangskomponenten von A einpunktig sind, ist A diskret.

SATZ 2.4: *Für jedes fast-uniforme Gitter* Γ *in einer zusammenhängenden, einfachzusammenhängenden, nilpotenten komplexen Liegruppe* G *ist* Z_G *ein* Γ*-Normalteiler.*

Beweis: Wegen 1.2 ist $\langle \Gamma \rangle_G = G$. $\mathrm{Aut}^\Gamma(G)$ ist also diskret in $\mathrm{Aut}(G)$. Der Kern der Abbildung

$$\mathrm{int}: G \ni \sigma \mapsto \mathrm{int}_\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$$

ist gerade Z_G und das Bild $\mathrm{int}(\Gamma)$ als Teilmenge von $\mathrm{Aut}^\Gamma(G)$ abgeschlossen in $\mathrm{Aut}(G)$. Dann ist auch

$$Z_G \cdot \Gamma = \mathrm{int}^{-1}(\mathrm{int}\,\Gamma)$$

abgeschlossen in G.

Wir benötigen vor allem diese Folgerung aus Satz 2.4: Unter den Voraussetzungen von 2.4 besitzt G eine aufsteigende Kette

$$\{1\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m \subset L_{m+1} = G$$

von Γ-Normalteilern mit $L_{\mu+1}/L_\mu \subset Z_{G/L_\mu}$, $0 \leqslant \mu \leqslant m$. Diese Aussage liefert uns den Induktionsschluß für

SATZ 2.5 (s. auch MALCEV [7]): *Γ sei uniform und diskret in der nilpotenten zusammenhängenden komplexen Gruppe G. Dann ist G' ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: O.B.d.A. nehmen wir G einfachzusammenhängend an. Die Behauptung zeigen wir durch Induktion nach $\dim G$:

a) Zunächst setzen wir $G^2=(G, G')=1$ voraus. Wegen $\Gamma' \subset G' \subset Z_G$ ist dann Γ' ein Normalteiler. Γ/Γ' ist abelsch und uniform in G/Γ'. Nach 1.3, b ist dann entweder G/Γ' (und damit G) auch abelsch, oder G/Γ' enthält einen kompakten Normalteiler K positiver Dimension. Dessen Urbild in G sei L. Da $L^0/L^0 \cap \Gamma'$ kompakt ist, muß $L^0 \cap \Gamma'$ uniform in L^0 sein. Da $G' \cap L^0$ zusammenhängt, folgt aus 1.2

$$L^0 \subset G' .$$

Die Induktionsannahme für G/L^0 ergibt dann die Behauptung.

b) Im Allgemeinfall liefert uns 2.4 einen zusammenhängenden Γ-Normalteiler $L \subsetneq G$ mit $G' \subset L$. Nach Induktionsannahme für L ist L' ein Γ-Normalteiler. Auf G/L' ist dann a) anwendbar und ergibt die Behauptung.

3. Auflösbare Gruppen

Das Analogon zu Satz 2.1 gilt für auflösbare Untergruppen F (selbst für uniforme) i.a. nicht: Borelsche Untergruppen halbeinfacher Gruppen sind uniform und auflösbar. Man muß F zusätzlich diskret voraussetzen.

SATZ 3.1: *Γ sei ein uniformes Gitter in der zusammenhängenden komplexen Liegruppe G. Dann ist G genau dann auflösbar, wenn Γ es ist.*

Beweis: O.B.d.A. kann man G einfachzusammenhängend annehmen: $\pi: \tilde{G} \to G$ sei die universelle Überlagerung. Da $\ker \pi = \pi_1(G)$ abelsch ist, muß $\pi^{-1}(\Gamma)$ auflösbar sein. Wir ersetzen dann G durch $\tilde{G}$.

Ist die Gruppe G einfachzusammenhängend, so auch ihr Radikal R (der größte zusammenhängende auflösbare Normalteiler von G). $\varrho: G \to G/R$ sei die Projektion auf die halbeinfache Gruppe G/R. Nach dem ZASSENHAUS–Lemma [1] ist $\varrho\Gamma \subset G/R$ ein uniformes Gitter. Da G/R algebraisch ist, existiert die kleinste algebraische Untergruppe $H \subset G/R$, welche $\varrho\Gamma$ umfaßt. H ist ebenfalls auflösbar. Da H nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, kann man die Bemerkung nach 1.2 auf H^0 anwenden und erhält $H^0 = G/R$, d.h. $G = R$.

ABSPALTUNGSSATZ 3.2: *Die komplexe Gruppe G sei zusammenhängend, einfachzusammenhängend und auflösbar. $F \subset G$ sei eine abgeschlossene komplexe fast-uniforme Untergruppe. Dann gilt entweder*

i) *G ist nilpotent,*

oder

ii) *G besitzt einen echten abgeschlossenen komplexen F-Normalteiler L positiver Dimension.*

Beweis: Wegen Satz 1.1 ist F^0 ein F-Normalteiler in G. Wir können also o.B.d.A. $F=\Gamma$ diskret annehmen. Nach Satz 1.1 ist $S=\langle\Gamma'\rangle_{G'}$ Normalteiler in G. Der Homomorphismus

$$\alpha: G \ni \sigma \mapsto \mathrm{int}_\sigma \mid S \in \mathrm{Aut}(S)$$

bildet Γ in die nach 2.3 diskrete Untergruppe $\mathrm{Aut}^{\Gamma'}(S)$ von $\mathrm{Aut}(S)$ ab. Da $\alpha(\Gamma)$ abgeschlossen, ist $L:=K^0$, $K:=\ker\alpha$, ein Γ-Normalteiler in G. Wegen

$$\dim Z_{G'} > 0$$

ist L positiv-dimensional. Falls $L=G$, läge Γ' in Z_G und Γ wäre nilpotent. Nach 2.1 müßte dann auch G nilpotent sein.

Für den Rest des Paragraphen werde die komplexe Gruppe G zusammenhängend, einfachzusammenhängend und auflösbar vorausgesetzt. $\Gamma\subset G$ sei ein uniformes Gitter. Wir zeigen, daß dann alle Glieder der Normalreihe und der Zentralreihe von G wieder Γ-Normalteiler sind. Voraus schicken wir eine Reihe von Hilfssätzen:

LEMMA 3.3: *$A\subset G$ sei ein zusammenhängender abgeschlossener abelscher komplexer Γ-Normalteiler. Dann ist auch $\langle(\Gamma, \Gamma\cap A)\rangle_A$ ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: A ist ein $\mathbf{C}$-Vektorraum und $\langle(\Gamma, \Gamma\cap A)\rangle_A=\mathbf{C}\cdot(\Gamma, \Gamma\cap A)$ ein $\mathbf{C}$-Untervektorraum. Für jedes $\gamma\in G$ ist $\mathrm{int}_\gamma \mid A$ und dann auch

$$\mathrm{ad}_\gamma \mid A = \mathrm{int}_\gamma \mid A - \mathrm{id}_A$$

eine $\mathbf{C}$-lineare Selbstabbildung von A. Da $\Gamma\cap A$ uniform in A ist, gilt

$$A = \mathbf{R}\cdot(\Gamma\cap A),$$

und es folgt für alle $\gamma\in\Gamma$

$$i\cdot\mathrm{ad}_\gamma(\Gamma\cap A) = \mathrm{ad}_\gamma(i\cdot(\Gamma\cap A)) \subset \mathrm{ad}_\gamma(\mathbf{R}(\Gamma\cap A)) = \mathbf{R}\cdot\mathrm{ad}_\gamma(\Gamma\cap A).$$

Deswegen ist $\mathbf{C}\cdot(\Gamma, \Gamma\cap A)=\mathbf{R}\cdot(\Gamma, \Gamma\cap A)$ eine Γ-Untergruppe von G. Weil $(\Gamma, \Gamma\cap A)$ Normalteiler in Γ ist, muß auch $\mathbf{C}\cdot(\Gamma, \Gamma\cap A)$ nach Lemma 1.1 ein Normalteiler in G sein.

LEMMA 3.4: *A und $\Gamma\subset G$ seien wie in* 3.3. *Dann gilt*

$$(G, A) = \mathbf{C}(\Gamma, \Gamma\cap A).$$

Beweis: Die Inklusion $W:=\mathbf{C}\cdot(\Gamma, \Gamma\cap A)\subset(G, A)$ ist trivial. – Wir bezeichnen die Restklassenabbildung $G\to G/W$ mit w. Zunächst ist $(\Gamma, A)\subset W$, denn $\Gamma\cap A$ erzeugt A und $\mathrm{ad}_\gamma \mid A$ ist für alle $\gamma\in\Gamma$ eine komplex lineare Abbildung. Dann folgt

aber $(G, A) \subset W$. In der Tat: Für alle $\gamma \in \Gamma$, $\sigma \in G$ und $\tau \in A$ ist mit

$$\beta := \gamma\tau\gamma^{-1}\tau^{-1} \in (\Gamma, A) \subset W$$
$$w \operatorname{ad}_\tau(\sigma\gamma) = w(\sigma\gamma\tau\gamma^{-1}\sigma^{-1}\tau^{-1}) = w(\sigma\beta\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) =$$
$$= w\big((\sigma\beta\sigma^{-1})(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})\big) = w \operatorname{ad}_\tau(\sigma).$$

$w \operatorname{ad}_\tau: G \to A/W$ ist also über G/Γ faktorisierbar und deswegen konstant. Es folgt $\operatorname{ad}_\tau(\sigma) \in W$ für alle $\sigma \in G$, w.z.b.w.

LEMMA 3.5: *G sei eine zusammenhängende, einfachzusammenhängende, auflösbare, komplexe Liegruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete uniforme Untergruppe. Für jeden zusammenhängenden abgeschlossenen Γ-Normalteiler $H \subset G$, dessen Kommutatorgruppe H' wieder ein Γ-Normalteiler ist, ist dann auch (G, H) ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: Der natürliche Epimorphismus $G \to G/H'$ bildet H auf einen abelschen Normalteiler $H^* \subset G^* := G/H'$ ab. Nach 3.4 und 3.3 ist (G^*, H^*) ein $\Gamma/\Gamma \cap H'$-Normalteiler in G. Dessen Urbild ist ein Γ-Normalteiler in G und stimmt mit (G, H) überein, da $H' \subset (G, H)$.

LEMMA 3.6: *$\Gamma \subset G$ sei wie oben. Dann gilt*

i) *$G^\infty := \bigcap G^n$ ist Γ-Normalteiler.*

ii) *G' ist Γ-Normalteiler.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß für G auch ii) erfüllt ist, falls i) für G gilt. Dazu setzen wir $G^* = G/G^\infty$ und $\Gamma^* := \Gamma/\Gamma \cap G^\infty$. Da G^* nilpotent ist, ist $(G^*)'$ wegen 2.5 ein Γ^*-Normalteiler in G^*. Aus $G^\infty \subset G'$ folgt, daß dann auch G' ein Γ-Normalteiler ist.

Wir zeigen nun i) durch Induktion nach $\dim_{\mathbb{C}} G$. Der Induktionsanfang $(\dim_{\mathbb{C}} G = 1)$ ist trivial. Als Induktionsannahme sei ii) erfüllt für alle auflösbaren komplexen Gruppen kleinerer Dimension als G. Nach dem Abspaltungssatz 3.2 findet man einen abgeschlossenen Γ-Normalteiler L mit

$$G' \subset L.$$

Nach Induktionsannahme ist L' ein $\Gamma \cap L$-Normalteiler in L und deswegen auch Γ-Normalteiler in G. Ebenso sind nach 3.5 alle Gruppen

$$(G, (G, (\ldots(G, L).)))$$

Γ-Normalteiler in G. Wegen $G' \subset L$ läßt sich auch G^∞ in dieser Form darstellen, w.z.b.w.

Lemma 3.5 und 3.6 zusammen ergeben schließlich den angestrebten Verträglichkeitssatz.

SATZ 3.7: *$\Gamma \subset G$ sei wie oben. Dann ist mit $H \subset G$ auch (G, H) ein Γ-Normalteiler in G.*

SATZ 3.8: *$\Gamma \subset G$ sei wie oben. Dann ist das Nilradikal N_G ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst für abelsches G^∞. Dazu betrachten wir den Homomorphismus

$$a: G \ni \sigma \mapsto \mathrm{int}_\sigma \mid G^\infty .$$

Mit G ist auch aG auflösbar und nach LIE besitzt der $\mathbf{C}$-Vektorraum G^∞ also eine Basis, bezüglich der alle Transformationen $a(\sigma)$ obere Dreiecksgestalt haben. Die Gruppe aller Transformationen aus $\mathrm{Aut}(G^\infty)$, welche bezüglich dieser Basis obere Dreiecksgestalt haben, sei D. $D' \subset D$ ist die Gruppe der Matrizen, welche nur den Eigenwert 1 haben. Dann gilt

$$N_G = a^{-1}(D').$$

Ist $C \subset D$ die Gruppe der Diagonalmatrizen, so schreibt sich D als halbdirektes Produkt

$$D = C \circ D' .$$

Definiert man kanonisch

$$b: D \to D/D' = C ,$$

so gilt

$$b\left(D \cap \mathrm{Aut}^{\Gamma \cap G^\infty}(G^\infty)\right) \subset \mathrm{Aut}^{\Gamma \cap G^\infty}(G^\infty),$$

denn $b(\sigma)$, $\sigma \in D$, ist ein Polynom in der Matrix σ (s. etwa [5, § 5]). Nach 2.3 ist also $ba(\Gamma)$ diskret in C. Weil

$$N_G = \ker b\, a ,$$

ist diese Untergruppe ein Γ-Normalteiler.

Die allgemeine Aussage beweisen wir durch Induktion nach $\dim_{\mathbf{C}} G$: Wegen 3.6 ist $\Gamma^* := \Gamma / \Gamma \cap (G^\infty)'$ uniform und diskret in $G^* := G/(G^\infty)'$. Wir wissen bereits, daß $N_G{}^*$ ein Γ^*-Normalteiler in G^* ist. Das Urbild H von $N_G{}^*$ in G ist auch ein Γ-Normalteiler und von G verschieden, falls $G^\infty \neq 1$, was wir o.B.d.A. ja annehmen können. Wegen $N_G \subset H$ gilt

$$N_G = N_H ,$$

und die Induktionsannahme liefert die Behauptung.

4. Homogene Torustürme

Wir geben zunächst die

DEFINITION: Ein *Torus- (Prinzipal-) Turm der Länge* 1 ist ein komplexer Periodentorus. Ein *Torus- (Prinzipal-) Turm der Länge* $n > 1$ ist ein holomorphes Torus- (Prinzipal-) Bündel über einem Torus- (Prinzipal-) Turm der Länge $n-1$.

SATZ 4.1: *Für eine kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeit X sind*

äquivalent:

i) $\mathrm{Aut}(X)^0$ *ist auflösbar (bzw. nilpotent).*

ii) X *ist Torusturm (bzw. Torusprinzipalturm).*

Beweis durch vollständige Induktion nach $\dim X$:

i) $\succ$ ii) Nach 1.1 ist $X = G/\Gamma$ mit $G = \mathrm{Aut}(X)^0$ und einem uniformen Gitter $\Gamma \subset G$. Nun sei

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n \supset G_{n+1} = 1$$

die Normalreihe (bzw. Zentralreihe von G). Nach 3.6 ist G_n ein Γ-Normalteiler in G. Wegen [12, p. 30] ist $X = G/\Gamma$ ein holomorphes Faserbündel über $X' := G/\Gamma G_n$ mit Faser $G_n/\Gamma \cap G_n$ und Strukturgruppe ΓG_n, die auf $G_n/\Gamma \cap G_n = \Gamma G_n/\Gamma$ durch Linkstranslation operiert. Da die Faser ein Torus ist, und die Basis

$$X' = G/G_n \Big/ \Gamma/\Gamma \cap G_n$$

nach Induktionsvoraussetzung ein Torusturm, so ist auch X ein Torusturm. (Für nilpotentes G ist Γ Normalteiler in ΓG_n und X daher ein Prinzipalbündel über dem Torusturm X', der nach Induktionsvoraussetzung ein Prinzipalturm ist.)

ii) $\succ$ i) Nach Definition gibt es eine holomorphe Faserung

$$\pi: X \to X^*, \dim X^* < \dim X,$$

mit komplexen Tori als Fasern. Nach [11] hat man eine exakte Gruppensequenz

$$0 \to H \to G \to G^*$$

wo $G := \mathrm{Aut}(X)^0$, $G^* := \mathrm{Aut}(X^*)^0$ und H der Durchschnitt der Isotropiegruppen aller π-Fasern.

Ist $R \subset G$ das Radikal von G (d.h. der maximale auflösbare zusammenhängende Normalteiler), so gibt es nach Levi eine halbeinfache komplexe Untergruppe $S \subset G$ mit $S \cdot R = G$. Da G^* nach Induktionsannahme auflösbar ist, gilt

$$S \subset H.$$

Ist A_x die Translationsgruppe einer π-Faser $F_x := \pi^{-1}(\pi x)$, $x \in X$, so liegt S^0 sogar im Kern der kanonischen Abbildung

$$H^0 \to A_x.$$

Da dies für alle $x \in X$ gilt, folgt $S^0 = \{1\}$, d.h. $G = R$ ist auflösbar.

(Falls π ein Prinzipalbündel ist, sind die Translationen der Fasern mit den Übergangsfunktionen des Bündels vertauschbar. Also ist H kompakt und in Z_G enthalten. Mit dem nach Induktionsannahme nilpotenten G^* ist dann auch G nilpotent.)

LITERATUR

[1] L. AUSLANDER, *On radicals of discrete subgroups of Lie groups*, Am. Journal of Math. *85* (1963), 145–150.
[2] S. BOCHNER and D. MONTGOMERY, *Groups on analytic manifolds*, Ann. Math. *48* (1947), 659–669.
[3] A. BOREL, *Density properties for certain subgroups of semi-simple Groups without compact components*, Ann. of Math. *72* (1960), 179–188.
[4] A. BOREL und R. REMMERT, *Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. *145* (1962), 429–439.
[5] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. VII.
[6] Seminaire Chevalley, Volume 1.
[7] A. J. MALCEV, *On a class of homogeneous spaces*, AMS Transl. Series 1, vol. *9*.
[8] G. D. MOSTOW, *Factor spaces of solvable groups*, Ann. of Math. *60* (1954).
[9] R. REMMERT, *Projektionen analytischer Mengen*, Math. Ann. *130* (1956), 410–441.
[10] R. REMMERT, *Abelsche komplexe Liegruppen*, unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript.
[11] R. REMMERT und T. VAN DE VEN, *Zur Funktionentheorie homogener komplexer Mannigfaltigkeiten*, Topology *2* (1963), 137–157.
[12] N. STEENROD, *Topology of Fibre Bundles* (Princeton 1951).
[13] K. STEIN, *Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume*, Archiv. d. Math. *7* (1956), 354–361.
[14] J. TITS, *Espaces homogenes complexes compacts*, Commentarii Math. Helv. *37* (1962), 111–120.
[15] H. C. WANG, *Complex parallelisable manifolds*, Proc. Am. Math. Soc. *5* (1954), 771–776.

Eingegangen den 12. Juli 1968

A Note on a Paper of J. T. Marti.

by S. R. Caradus

Recently, J. T. Marti showed [1] that, under a certain commutativity condition on the operators involved, it was possible to obtain an operational calculus for pairs of closed linear operators. The purpose of this note is to observe that Marti's conclusions are valid under more general conditions which, moreover, permit extension of the theory to n-tuples of operators.

Let X be a Banach space and T_i closed linear operators with domains D_i and ranges in X, $i=1, 2$. We shall also write D_{12} for the domain of $T_1 T_2$ i.e. $D_{12}=\{x\in D_2: T_2 x\in D_1\}$. Similarly we define D_{21}. Following [1], we define

$$\mathscr{C}(X)=\{(T_1, T_2): D_1\subseteq D_2;\ T_2 D_1\subseteq D_1;\ T_1 T_2 x=T_2 T_1 x \quad \text{for all} \quad x\in D_{21}\}.$$

Then for $(T_1, T_2)\in\mathscr{C}(X)$, suppose $\sigma_e(T_i)\subseteq V_i$, $i=1, 2$, where V_i is a Cauchy domain and let $H(V)$ denote the complex algebra of functions $\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$, locally holomorphic in $V=V_1\times V_2$, vanishing outside V. The main result of [1], (Theorem 2), asserts the existence of a proper homomorphism Φ of $H(V)$ into $B(X)$, mapping $(\lambda-\lambda_i)^{-1}\mid V$ onto $(\lambda-T_i)^{-1}$ for each $\lambda\notin V_i$ such that Φ is given by a Cauchy integral. The essential step is to show that the assumption $(T_1, T_2)\in\mathscr{C}(X)$ implies that the resolvent operators $R_i=(\lambda_i-T_i)^{-1}$ commute, $\lambda_i\in\varrho(T_i)$, $i=1, 2$.

Proposition. *The resolvent operators R_1 and R_2 commute if and only if*

$$\text{(i)}\quad D_1\cap D_{12}=D_2\cap D_{21}$$

and

$$\text{(ii)}\quad T_1 T_2 x=T_2 T_1 x \quad \text{for} \quad x\in D_{12}\cap D_{21}$$

Proof. Suppose R_1 and R_2 commute. Then it is easy to verify that, for any x, $R_1 R_2 x\in D_{21}$. For D_i is the range of R_i so that $R_1 R_2 x\in D_1$ and hence $(\lambda_1-T_1)R_1 R_2 x$ is defined and equal to $R_2 x$ which lies in D_2. Thus $R_1 R_2 x\in D[T_2(\lambda_1-T_1)]=D_2\cap D_{21}$. Similarly $R_2 R_1 x\in D_{12}$ so that since $R_1 R_2 x=R_2 R_1 x$, we have $R_1 R_2 x\in D_{12}\cap D_{21}$.

Consider now the equation

$$0=(R_1 R_2-R_2 R_1)x=R_1 R_2[(\lambda_1-T_1)(\lambda_2-T_2)-(\lambda_2-T_2)(\lambda_1-T_1)]R_2 R_1 x. \quad (1)$$

Since $R_2 R_1 x\in D_{12}\cap D_{21}$, (1) is valid for all x and can be rewritten

$$0=R_1 R_2[T_2 T_1-T_1 T_2]R_2 R_1 x.$$

This implies

$$[T_2 T_1-T_1 T_2]R_2 R_1 x=0 \quad \text{for all} \quad x\in X.$$

But every $y\in D_{12}\cap D_{21}$ can be expressed as $R_2 R_1 x$. For let $x=(\lambda_1-T_1)(\lambda_2-T_2)y$. Hence condition (ii) is satisfied.

To prove (i), let $x \in D_1 \cap D_{12}$ and define $x' = (\lambda_1 - T_1)(\lambda_2 - T_2)x$. Clearly x' is well defined since $D[(\lambda_1 - T_1)(\lambda_2 - T_2)] = D_1 \cap D_{12}$. Hence $x = R_2 R_1 x' = R_1 R_2 x'$. But $R_1 R_2 x' \in D_2 \cap D_{21}$. Hence $D_1 \cap D_{12} \subseteq D_2 \cap D_{21}$. The reverse inclusion is obtained similarly.

Now suppose that conditions (i) and (ii) hold. Let $x \in X$. Then there exists $x_2 \in D_2$ such that $(\lambda_2 - T_2)x_2 = x$ and $x_1 \in D_1$ such that $(\lambda_1 - T_1)x_1 = x_2$. Hence $x = (\lambda_2 - T_2) \times (\lambda_1 - T_1)x_1$ and evidently $x_1 \in D_{21} \cap D_2$. By assumption (i), $(\lambda_1 - T_1)(\lambda_2 - T_2)x_1$ is defined and by assumption (ii), it must equal x. Hence $x_1 = R_1 R_2 x = R_2 R_1 x$.

COROLLARY 1. *Theorem* 2 *of* [1] *is valid whenever* T_1 *and* T_2 *satisfy conditions* (i) *and* (ii).

Proof. An examination of the proof of Theorem 2 shows that the commutativity assumption involved in the definition of $\mathscr{C}(X)$ was used only to establish the commutativity of R_1 and R_2.

COROLLARY 2. *If* $(T_1, T_2) \in \mathscr{C}(X)$, *then* $T_1 D_1 \subseteq D_2$.

Proof. By [1] Lemma 1, R_1 and R_2 commute. Hence, in particular, by the above proposition, $D_1 \cap D_{12} = D_2 \cap D_{21}$. But $D_1 \cap D_{12} = \{x \in D_1 \cap D_2 : T_2 x \in D_1\} = D_1 \cap D_2 = D_1$. Hence $D_1 = D_2 \cap D_{21}$ and since $D_{21} \subseteq D_1 \subseteq D_2$, we must have $D_{21} = D_1$ i.e. $D_1 = \{x \in D_1 : T_1 x \in D_2\}$ i.e. $T_1 D_1 \subseteq D_2$.

COROLLARY 3. *Theorem* 2 *of* [1] *can now be extended in the obvious way to an operational calculus of n-tuples* $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ *of closed operators such that pairs* (T_i, T_j) *satisfy conditions* (i) *and* (ii). *The other results of* [1] *also have obvious extensions.*

REFERENCE

[1] J. T. MARTI, *Operational Calculus for Two Commuting Closed Operators*, Comment. Math. Helv. *43* (1968), 87–97.

Institute of Advanced Studies,
Australian National University,
Canberra

Received July 19, 1968

Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen im Raum

H. M. REIMANN (Zürich)

Einleitung

Für den 3-dim. euklidschen Raum E^3 wurde eine Theorie der quasikonformen Abbildungen entwickelt (siehe z.B. GEHRING [4], VÄISÄLÄ [10]), die viele Merkmale der Theorie für die Ebene beibehält. Die Definition der quasikonformen Abbildungen im Raum stützt sich auf den Begriff der konformen Kapazität von Ringen. Ein Ring R in E^3 ist das homömorphe Bild von $\{x \mid 0<a<|x|<b\}$. Betrachtet man alle stetig differenzierbaren Funktionen u mit dem Randwert 0 auf der einen Randkomponente und dem Randwert 1 auf der anderen, so heisst die Grösse $M_3 = \inf_u \int_R |\operatorname{grad} u|^3 \, dx$ „konforme Kapazität" von R (nach LOEWNER). Eine quasikonforme Abbildung im Raum ist dann ein Homöomorphismus von einem Gebiet G in E^3 auf ein Gebiet G' mit der Eigenschaft, dass für eine gewisse Konstante K und für alle Ringe R mit $\bar{R} \subset G$ und Bild R' die Ungleichung $M_3(R) \leqslant K M_3(R')$ besteht. Die vorliegende Studie befasst sich mit den Abbildungen, die man erhält, wenn die konforme Kapazität in dieser Definition durch die harmonische $M_2(R) = \inf_u \int_R |\operatorname{grad} u|^2 \, dx$ ersetzt wird. Die harmonische Kapazität eines Ringes ist gleich dem Wert des Dirichletintegrals derjenigen harmonischen Funktion in R, welche das verallgemeinerte Dirichlet-Randwertproblem mit den Werten 0 und 1 auf den beiden Randkomponenten löst. Der Kapazitätsbegriff wird im folgenden durch den allgemeineren Begriff des Moduls ersetzt. Diese beiden Begriffe fallen für Ringe zusammen (vgl. (1.7)).

Die Methoden, welche die Untersuchung derartiger Abbildungen gestatten, stammen grösstenteils aus der Theorie der quasikonformen Abbildungen. Handelt es sich im ersten Abschnitt noch um Diffeomorphismen, so werden im zweiten und dritten die gewonnenen Resultate auf Homöomorphismen ohne a priori Regularitätsvoraussetzungen übertragen. Das Schwergewicht liegt hier demzufolge bei der Abklärung von Regularitätseigenschaften. Der letzte Abschnitt dient der Herleitung einer Normalfamilien-Eigenschaft. Die Resultate, die sich wesentlich von der Theorie der quasikonformen Abbildungen abheben, sind in den Sätzen 1 und 3 enthalten.

Herrn Prof. A. PFLUGER möchte ich an dieser Stelle für die mannigfachen Anregungen und für das rege Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegenbrachte, meinen ganz besonderen Dank aussprechen.

I. Ein Äquivalenz-Satz

In diesem Abschnitt werden Diffeomorphismen mit gewissen speziellen Eigenschaften studiert. Die Abbildung h, die ein Gebiet $G \subset E^3$ auf ein Gebiet $G' \subset E^3$ abbildet, ist im Punkte $x^* \in G$ differenzierbar, wenn es eine lineare Transformation H gibt, für welche die Beziehung

$$h(x) = h(x^*) + H(x - x^*) + o(|x - x^*|)$$

besteht. Wird die Abbildung mit Hilfe kartesischer Koordinaten beschrieben, so ist $H = H(x^*)$ die Funktionalmatrix im Punkte x^*. h ist eine in G stetig differenzierbare Abbildung, falls $H(x)$ in G definiert ist und stetig ist. h ist ein Diffeomorphismus, falls die inverse Abbildung h^{-1} existiert und falls h und h^{-1} stetig differenzierbar sind. Ist h ein Diffeomorphismus von G auf G', so ist H als Matrix in allen Punkten von G regulär. Es werden nur Abbildungen in E^3 (3-dim. euklidscher Raum) betrachtet, obwohl sich gewisse Resultate ohne weiteres auf höhere Dimensionen übertragen lassen. Alle betrachteten Gebiete G, G' liegen also in E^3.

Den Ausgangspunkt bilden Diffeomorphismen, für welche die relative Änderung des Dirichletintegrals beschränkt ist.

Wir sagen, der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ habe die Eigenschaft (D), falls eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass für alle in G stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen u mit $u' = u \circ h^{-1}$ die Ungleichung

$$\int_G \operatorname{grad}^2 u \, dm \leqslant K \int_{G'} \operatorname{grad}^2 u' \, dm \tag{D}$$

gilt. (Mit m wird das 3-dim. Lebesgue-Mass bezeichnet, das Volumenelement entsprechend mit dm. Zur Kennzeichnung der Variablen wird dafür auch dx geschrieben.)

Zuerst soll gezeigt werden, dass (D) mit einer lokalen Eigenschaft (L) gleichwertig ist. Ist H^* die Transponierte der Funktionalmatrix H, so besitzt HH^* nach einem Satz der linearen Algebra drei reelle positive Eigenwerte $\lambda_1^2 \geqslant \lambda_2^2 \geqslant \lambda_3^2 > 0$ Diese Eigenwerte sind stetige Funktionen von x und es gilt

$$\lambda_1 = \max_{|x|=1} |Hx|, \qquad |\det H| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich eine Eigenschaft (L) formulieren:

Der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ besitzt die Eigenschaft (L), falls eine Zahl K existiert mit

$$\lambda_1 / \lambda_2 \lambda_3 \leqslant K \quad \text{für alle } x \text{ in } G \tag{L}$$

Bemerkungen

1) Zusammen mit der Konvention $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ ist die Bedingung $\lambda_1 / \lambda_2 \lambda_3 \leqslant K$ mit den drei Ungleichungen $\lambda_i \lambda_j / \lambda_k \leqslant K$ für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ aequivalent. Ist nämlich $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, so gilt $\lambda_1 / \lambda_2 \lambda_3 \geqslant \lambda_2 / \lambda_1 \lambda_3 \geqslant \lambda_3 / \lambda_1 \lambda_2$.

2) Der Ausdruck $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3$ ist invariant gegenüber der Zusammensetzung von h mit einer Translation oder einer Rotation.
3) Aus $\lambda_i/\lambda_j\lambda_k \leqslant K$ für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ folgt $\lambda_i \geqslant K^{-1}$ $i=1, 2, 3$ aber nicht umgekehrt, wie das Beispiel $h(x)=(ax_1, K^{-1}x_2, K^{-1}x_3)$ mit $a>K^{-1}$ zeigt. Aus der Bedingung $\lambda_i \geqslant K^{-1}$ folgt, dass der inverse Diffeomorphismus h^{-1} in jedem konvexen Teilgebiet von G' einer Lipschitzbedingung der Form

$$|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| \leqslant K|x - y| \quad \text{genügt.}$$

Dass aus der Eigenschaft (L) die Eigenschaft (D) folgt sieht man leicht:

$$\begin{aligned}\int_G \operatorname{grad}^2 u \, dm &= \int_{G'} (H \operatorname{grad} u')^2 \, |\det H|^{-1} \, dm \\ &\leqslant \int_{G'} \max_{|x|=1} |Hx|^2 \operatorname{grad}^2 u' \, \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \, dm \\ &= \int_{G'} \frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3} \operatorname{grad}^2 u' \, dm \leqslant K \int_{G'} \operatorname{grad}^2 u' \, dm\end{aligned}$$

für alle in G stetig differenzierbaren Funktionen u.

Die Umkehrung ist der Inhalt von

LEMMA 1. *Erfüllt ein Diffeomorphismus $h: G \to G'$ die Bedingung* (D), *so erfüllt er auch die Bedingung* (L).

Der Beweis verläuft indirekt. Es sei $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 = C > K$ im Punkte $x^* \in G$. Wegen der Invarianz der Bedingungen (D) und (L) gegenüber Translationen und Rotationen, kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $x^* = 0$ und

$$h(x) = Hx + o(|x|) \quad \text{mit} \quad H = H(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(Bekanntlich lässt sich eine $n \times n$ Matrix M mit Hilfe von orthogonalen Matrizen O_1 und O_2 in der Form $M = O_1 H O_2$ darstellen, wobei H eine Diagonalmatrix ist). Die zur Funktionalmatrix $H(x)$ inverse Matrix $H^{-1}(x)$ schreiben wir in der Form $H^{-1}(x) = (v_{ij}(x))$. Dann ist

$$v_{ij}(0) = \delta_{ij} v_i \quad \text{mit} \quad v_i^{-1} = \lambda_i$$

Da die v_{ij} nach Voraussetzung stetige Funktionen sind, gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < |v_1 v_2 v_3|$, ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned}&A = \{x \mid |x_i| < \delta, \, i = 1, 2, 3\} \subset G \quad \text{und dass für alle } x \in A \\ &|v_{ij}(x) - v_{ij}(0)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\det H(x)| < (|v_1 v_2 v_3| - \varepsilon)^{-1}\end{aligned}$$

Wir verwenden die Familie von stetig differenzierbaren Funktionen:

$$u_{(n,\varepsilon)}(x) = u(x) = \begin{cases} \left(1+\cos\frac{n\pi x_1}{\delta}\right)\left(1+\cos\frac{\pi x_2}{\delta}\right)\left(1+\cos\frac{\pi x_3}{\delta}\right) & \text{für } x\in A \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$n=1,2\ldots\ 0<\varepsilon<|\,v_1\,v_2\,v_3\,|$. Es ist

$$\operatorname{grad} u(x) = -\frac{\pi}{\delta}\left(n\sin\frac{n\pi x_1}{\delta}\left(1+\cos\frac{\pi x_2}{\delta}\right)\left(1+\cos\frac{\pi x_3}{\delta}\right),\right.$$
$$\left(1+\cos\frac{n\pi x_1}{\delta}\right)\sin\frac{\pi x_2}{\delta}\left(1+\cos\frac{\pi x_3}{\delta}\right),$$
$$\left.\left(1+\cos\frac{n\pi x_1}{\delta}\right)\left(1+\cos\frac{\pi x_2}{\delta}\right)\sin\frac{\pi x_3}{\delta}\right)$$
$$\text{für } x\in A$$
$$=0 \quad \text{sonst, und} \quad \int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm = g\pi^2(n^2+2)\,\delta$$

Mit $u'(h(x))=u(x)$ erhält man aus

$$\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm = \int_G (\operatorname{grad} u\cdot H^{-1})^2\,|\det H|\, dm$$

nach einiger Rechnung die Abschätzung

$$\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm \leqslant \frac{\pi^2\delta}{|v_1\,v_2\,v_3|-\varepsilon}\left[g\,n^2(|v_1|+\varepsilon)^2 + c_1\varepsilon^2 n^2 + c_2\varepsilon n + O(\varepsilon)\right]$$

c_1 und c_2 sind von n und ε unabhängige Konstanten. Daraus schliesst man, dass

$$\frac{\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm}{\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm} \leqslant \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{-1}\left[\frac{(|v_1|+\varepsilon)^2}{|v_1\,v_2\,v_3|-\varepsilon} + O(\varepsilon^2) + O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)\right]$$

Da über n und ε noch frei verfügt werden kann, setzen wir jetzt $\varepsilon=n^{-1}$. Der Grenzwert für $n\to\infty$ der rechten Seite der letzten Ungleichung ist dann C^{-1}. Es lässt sich also ein n_0 finden, derart dass

$$\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm > K\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm \quad \text{für } u = u_{(n_0,\,1/n_0)}.$$

Um eine dritte, aequivalente Eigenschaft zu formulieren, verwenden wir den Be-

griff des Moduls einer Kurvenschar. Wir stützen uns dabei auf die Untersuchungen von FUGLEDE [2] und VÄISÄLÄ [10] und [11].

Linienintegrale

Eine Teilmenge γ von E^3 ist eine Kurve, falls γ homöomorph zu einem offenen, halboffenen oder abgeschlossenem Intervall ist. Eine rektifizierbare Kurve der Länge l kann mit Hilfe der Bogenlänge parametrisiert werden: $x=x(s)$. Das Linienintegral der nicht negativen, Borel-messbaren Funktion ϱ über γ ist dann als

$$\int_\gamma \varrho \, ds = \int_0^l \varrho(x(s)) \, ds$$

definiert. (Der Wert ∞ ist zugelassen.) Ist die Kurve lokal rektifizierbar, so ist das Integral als uneigentliches Integral definiert.

Der Modul einer Kurvenschar Γ

Wir bezeichnen mit $F(\Gamma)$ die Familie der nicht negativen, Borel-messbaren Funktionen $\varrho(x)$, die der Bedingung

$$\int_\gamma \varrho \, ds \geqslant 1$$

für alle lokal rektifizierbaren Kurven $\gamma \in \Gamma$ genügen.

DEFINITION: *Sei $p \geqslant 1$, m das 3-dim. Lebesgue-Mass. Der p-Modul einer beschränkten Kurvenschar Γ ist die reelle Zahl*

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in F(\Gamma)} \int_{E^3} \varrho^p \, dm$$

Die nicht lokal rektifizierbaren Kurven der Schar treten also in dieser Definition gar nicht in Erscheinung. Wird das Integral einer Funktion über eine nicht lokal rektifizierbare Kurve mit Hilfe des 1-dim. Hausdorff-Masses definiert, so lässt sich zeigen, dass $M_p(\Gamma)=0$, wenn das System Γ nur aus nicht lokal rektifizierbaren Kurven besteht.

Beispiele

1) Ein Tripel $Z=(Q, E_0, E_1)$ nennen wir einen Zylinder in E^3, wenn es einen Homöomorphismus h vom Einheitszylinder $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2+x_2^2 \leqslant 1, 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\}$ auf die abgeschlossene Hülle des Gebietes Q gibt, der $x_3=0$ $(x_1^2+x_2^2 \leqslant 1)$. Auf E_0 und $x_3=1$ auf E_1 abbildet. Die Kurven in Q mit Anfangs- und Endpunkt in E_0 bezw. E_1 stellen eine Kurvenschar Γ_Z dar. Unter dem p-Modul $M_p(Z)$ eines Zylinders versteht man den p-Modul dieser Schar.

Der Modul eines geraden Zylinders mit der (ebenen) Grundfläche E_0 und der Höhe h lässt sich leicht berechnen: Wählt man $\varrho = h^{-1}$ so gilt $\int_\gamma h^{-1}\, ds \geqslant 1$ und daher

$$M_p(Z) \leqslant \int_Q h^{-p}\, dm = h^{-p}\, m(Q)$$

Anderseits gilt für alle Funktionen $\varrho \in F(\Gamma)$ und für alle Kurven $\gamma' \in \Gamma_Z$ parallel zur Zylinderachse:

$$1 \leqslant \left(\int_{\gamma'} \varrho\, ds\right)^p \leqslant \left(\int_{\gamma'} \varrho^p\, ds\right) \cdot h^{p-1}$$

und daher

$$\int_Q \varrho^p\, dm = \int_{E_0} \int_{\gamma'} \varrho^p\, dm \geqslant m(Q)\, h^{-p}.$$

Daraus schliesst man, dass $M_p(Z) = m(Q)\, h^{-p}$. Setzt man für einen beliebigen Zylinder anstelle von h den Abstand d von E_0 und E_1 ein, so erhält man mit $\varrho = d^{-1}$ ein Analogon zur Rengelschen Ungleichung:

$$M_p(Z) \leqslant m(Q)\, d^{-p} \tag{1.1}$$

2) Ein Ring R ist ein beschränktes Gebiet in E^3, das homöomorph zu $R(a, b) = \{x \mid a < |x| < b,\ 0 < a < b\}$ ist. Der Rand von R besitzt zwei Komponenten: eine innere D_0 und eine äussere D_1. Der Modul eines Ringes, $M_p(R)$, ist der Modul derjenigen Kurvenschar Γ_R, welche aus den Kurven in R besteht, die D_0 und D_1 verbinden. Zur Berechnung des p-Moduls von $R(a, b)$ für $p > 1$ werden folgende Funktionen verwendet:

$$\varrho_p = \frac{p-3}{p-1} \frac{1}{b^{(p-3)/(p-1)} - a^{(p-3)/(p-1)}}\, r^{2/(1-p)} = k_p\, r^{2/(1-p)} \quad \text{für } p \neq 3$$

$$\varrho_3 = \frac{1}{\log(b/a)}\, r^{-1} = k_3\, r^{-1}$$

Dann gilt für eine Integration entlang eines Radius

$$1 = \int_a^b \varrho\, dr = \int_a^b \varrho\, r^{2/p} \cdot r^{-2/p}\, dr$$

$$\leqslant \left(\int_a^b \varrho^p\, r^2\, dr\right) \left(\int_a^b r^{-2/(p-1)}\, dr\right)^{p-1} = k_p^{1-p} \cdot \int_a^b \varrho^p\, r^2\, dr$$

Also gilt für beliebige ϱ

$$\int_R \varrho^p\, dm = 4\pi \int_a^b \varrho^p\, r^2\, dr \geqslant k_p^{p-1} \cdot 4\pi$$

mit Gleichheit für ϱ_p. Für $p=2$ ergibt sich insbesondere:

$$M_2(R) = \frac{4\pi}{a^{-1} - b^{-1}} \tag{1.2}$$

Es besteht eine einfache Beziehung zwischen dem Modul von $R(a, b)$ und den Moduln der Zylinder, die man durch Aufschneiden des Ringes erhält: Wird $R(a, b)$ von Kegeln durch den Nullpunkt in endlich viele Zylinder Z_i zerlegt, so gilt

$$\sum_i M_p(Z_i) = M_p(R) \tag{1.3}$$

Für Zylinder Z, die durch Kegel mit der Spitze im Nullpunkt und dem Raumwinkel w aus $R(a, b)$ herausgeschnitten werden ist $M_p(Z)=wk^{p-1}$.
Der Zylinder $Z=(Q, E_0, E_1)$ zum Beispiel mit

$$Q = \{x \mid a < |x| < b, \quad x_1 > 0\}$$
$$E_0 = \{x \mid |x| = a, \quad x_1 > 0\}, \quad E_1 = \{x \mid |x| = b, \quad x_1 > 0\}$$

hat also den Modul

$$M_p(Z) = 2\pi k^{p-1} \tag{1.4}$$

Diese Behauptungen folgen unmittelbar aus der Herleitung des Wertes für den Modul von $R(a, b)$.
Für beliebige Ringe gilt die schwächere Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} M_p(Z_i) \leqslant M_p(R) \tag{1.5}$$

für eine beliebige endliche Zerlegung des Ringes in disjunkte Zylinder $Z_i=(Q^{(i)}, E_0^{(i)}, E_1^{(i)})$ mit $E_0^{(i)} \subset D_0$, $E_1^{(i)} \subset D_1$ und $Q^{(i)} \subset R$, $i=1, 2, \ldots, n$. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen: Ist χ_i die charakteristische Funktion von $Q^{(i)}$ und ist $\varrho \in F(\Gamma_R)$, so ist $\varrho_i = \varrho\chi_i$ eine zulässige Funktion für Z_i: $\varrho_i \in F(\Gamma_{Z_i})$ $i=1, \ldots, n$.

Man schliesst daraus die gewünschte Ungleichung

$$\inf_{\varrho \in F(\Gamma_R)} \int \varrho^p \, dm \geqslant \sum_i \inf_{\varrho_i \in F(\Gamma_{Z_i})} \int \varrho_i^p \, dm$$

Die zu (1.1) analoge Ungleichung für Ringe folgt auch hier mit $\rho=d^{-1}$, d Abstand von D_0 und D_1:

$$M_p(R) \leqslant m(R)\, d^{-p} \tag{1.6}$$

Für den Fall $p=2$ erhält man nach FUGLEDE [2] auch eine Abschätzung in der anderen Richtung (eine entsprechende Betrachtung für den Fall $p=3$ siehe GEHRING [3] oder [4] p. 369): Eine Lipschitz-Fläche σ ist eine 2-dim. Mannigfaltigkeit in E^3, auf der mit Hilfe von Funktionen f_i, $i=1, 2, \ldots$ ein System von Parameterumgebungen

definiert ist, wobei die f_i auf Gebieten $G_i \subset E^2$ definiert sind und einer zweiseitigen Lipschitz-Bedingung genügen:

$$c_i^{-1}|x-y| \leqslant |f_i(x)-f_i(y)| \leqslant c_i^{-1}|x-y|\ x, y \in E^2;\ f_i(x), f_i(y) \in \sigma .$$

Das Integral $\int_\sigma \varrho\, ds$ einer Borelfunktion ϱ über eine Lipschitz-Fläche σ kann unter Verwendung der Resultate von RADEMACHER [8] folgendermassen definiert werden: Die $f_i(x)=f_i(x_1, x_2)$ sind f.ü. differenzierbar, die Koeffizienten E, F, G der ersten Fundamentalform messbar und die Form $\sqrt{EG-F^2}\, dx_1\, dx_2$ ist unabhängig von der gewählten Lipschitz-Darstellung f_i. Eine Unterteilung von σ in disjunkte Borelmengen B_i mit $\bigcup_i B_i = \sigma$, derart dass B_i im Bildbereich von f_i liegt, gestattet dann die Definition:

$$\int_\sigma \varrho\, ds = \sum_i \int_{f_i^{-1}(B_i)} \varrho(f_i(x))\sqrt{EG-F^2}\, dx_1\, dx_2$$

Der Modulbegriff kann somit auf natürliche Art auf Systeme Σ von Lipschitzflächen ausgedehnt werden. Wir setzen

$$M_p(\Sigma) = \inf_{\varrho \in F(\Sigma)} \int_{E^3} \varrho^p\, dm$$

Das Infimum erstreckt sich über alle nicht-negativen Borel-Funktionen $\varrho \in F(\Sigma)$ mit der Eigenschaft

$$\int_\sigma \varrho\, ds \geqslant 1 \qquad \text{für alle } \sigma \in \Sigma$$

Σ_R sei nun die Schar der Lipschitzflächen, welche die Randkomponenten D_0 und D_1 des Ringes R trennen. Dann gilt nach FUGLEDE [2] Satz 9 p. 200 und Bemerkung p. 207

$$M_2(\Gamma_R) = 1/M_2(\Sigma_R) = \int_R \operatorname{grad}^2 u\, dm \tag{1.7}$$

u löst hier das verallgemeinerte Dirichlet-Randwertproblem mit den Randwerten 0 auf D_0 bzw 1 auf D_1.

Setzt man $S(R)=S=\inf_{\sigma \in \Sigma_R} \int_\sigma ds$ so ist $\varrho = S^{-1}$ zulässig ($S^{-1} \in F(\Sigma)$) und somit

$$M_2(\Sigma_R) \leqslant \int_R S^{-2}\, dm = m(R)\, S^{-2}$$

Aus (1.7) folgt dann

$$M_2(\Gamma_R) \geqslant S^2/m(R) \tag{1.8}$$

Die dritte zu (D) und (L) aequivalente Eigenschaft ist eine Aussage über das Verhalten der Moduln von Kurvenscharen:

Der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ besitzt die Eigenschaft (M) falls eine Konstante K existiert, so dass $M_2(\Gamma) \leqslant K M_2(\Gamma')$ für alle Kurvenscharen $\Gamma \subset G$ mit $\Gamma' = h(\Gamma)$. Die Aequivalenz ergibt sich sofort aus den folgenden Lemmata 2 und 3.

LEMMA 2. *Ein Diffeomorphismus $h: G \to G'$ mit der Eigenschaft* (L) *erfüllt* (M).

Beweis:

Für $\varrho' \in F(\Gamma')$, $\gamma \in \Gamma$ und $x' = h(x)$ gilt

$$\int_{\gamma} \varrho'(h(x))\, \lambda_1(x)\, ds \geqslant \int_{h(\gamma)} \varrho'(y)\, ds$$

(vgl. die Definition für $\lambda_1(x)$ auf p. 285). Die Funktion $\varrho'(h(x))\, \lambda_1(x)$ gehört also zu $F(\Gamma)$.

$$M_2(\Gamma) \leqslant \int_G \varrho'^2 \lambda_1^2\, dm \leqslant K \int_G \varrho'^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\, dm = K \int_{G'} \varrho'^2\, dm$$

denn $K \geqslant \lambda_1/\lambda_2\lambda_3$,

daraus folgt $M_2(\Gamma) \leqslant K M_2(\Gamma')$.

LEMMA 3. *Ein Diffeomorphismus $h: G \to G'$, der die Bedingung $M_2(Z) \leqslant K M_2(Z')$ für alle Zylinder $Z = (Q, E_0, E_1)$ mit $\bar{Q} \subset G$ erfüllt, hat die Eigenschaft* (L).

Aus diesem Lemma ist ersichtlich, dass es genügt, (M) durch die schwächere Forderung

$$M_2(Z) \leqslant K M_2(Z') \qquad (M^*)$$

für alle Zylinder Z in G mit Bild $h(Z) = Z'$ zu ersetzen.

Beweis von Lemma 3: Die Eigenschaften (L) und (M) sind beide invariant unter Translation und Rotation. Um zu zeigen, dass $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \leqslant K$ im Punkte $x \in G$, können wir daher (wie im Beweis zum Lemma 1) annehmen, dass $x = 0$ und dass $h(x) = Hx + o(|x|)$, $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung des Zylinders $Z_t = (Q, E_0, E_1)$, $Q = \{x \mid |x_1| < t/2, x_2^2 + x_3^2 < t\}$ $E_1 = \{x \mid x_1 = \pm t/2, x_2^2 + x_3^2 < t\}$ liefert:

$$M_2(Z) = \pi t^3/t^2 \leqslant K M_2(Z') \leqslant K \frac{t^3 \pi \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + o(t^3)}{t^2 \lambda_1^2 + o(t^2)}$$

nach der Ungleichung (1.1). Daraus schliesst man

$$1 \leqslant K \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + t^{-3} o(t^3)}{\lambda_1^2 + t^{-2} o(t^2)}$$

und daher $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \leqslant K$, die gewünschte Ungleichung.

Mit der gleichen Methode lässt sich zeigen, dass (M) auch durch folgende Bedingung ersetzt werden kann: Der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ genügt der Ungleichung

$$M_2(R) \leqslant K M_2(R') \text{ für alle Ringe } R \text{ mit } \bar{R} \subset G. \qquad (M^{**})$$

Beweis: Wir normieren h wie oben. Als Ring $R' = R'_n(t)$ wählen wir mit beliebigem $n > 1$ den „Zylinder" $\{x' \mid |x'_1| < t/n,\ x'^2_2 + x'^2_3 < (t + t/n)^2\}$, aus dem die Kreisscheibe $\{x' \mid x'^2_2 + x'^2_3 \leqslant t^2,\ x'_1 = 0\}$ entfernt wird. Nach den Ungleichungen (1.6) und (1.8) gilt:

$$(t + t/n)^2\, 2\pi n/t = m(R')\, d^{-2}(R') \geqslant M_2(R') \geqslant K^{-1} M_2(R)$$

$$S(R) = \frac{2\pi t^2}{\lambda_2 \lambda_3} + o(t^2)$$

$$m(R) = \frac{2\pi}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{t}{n} \left(t + \frac{t}{n}\right)^2 + o(t^3)$$

$$M_2(R) \geqslant \frac{4\pi^2 t^4 (\lambda_2 \lambda_3)^{-2} + o(t^4)}{2\pi \left(t + \frac{t}{n}\right)^2 \cdot \frac{t}{n} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} + o(t^3)}$$

Die beiden Ungleichungen ergeben

$$K n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \geqslant \frac{(\lambda_2 \lambda_3)^{-2} + t^{-4} o(t^4)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 n^{-1} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} + t^{-3} o(t^3)}$$

und mit dem Grenzübergang $t \to 0$ folgt

$$K(1 + 1/n)^4 \geqslant \lambda_1/\lambda_2 \lambda_3$$

und schliesslich $K \geqslant \lambda_1/\lambda_2 \lambda_3$

(Ein entsprechender Beweis für den Fall $p = 3$ findet sich bei GEHRING [4] p. 374/375.)

Die Ergebnisse dieses Abschnittes lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

AEQUIVALENZ-SATZ. *Ist h ein Diffeomorphismus eines Gebietes $G \subset E^3$ auf ein Gebiet $G' \subset E^3$, so sind folgende Aussagen aequivalent:*

(D) $\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm \leqslant K \int_{G'} \operatorname{grad}^2 (u \circ h^{-1})\, dm$ *für alle in G stetig differenzierbaren Funktionen u.*

(L) $\lambda_1/\lambda_2 \lambda_3 \leqslant K$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$ *in allen Punkten $x \in G$ ($\lambda_i^2 = 1, 2, 3$ ist Eigenwert von HH^*, H ist die Funktionalmatrix von h im Punkte x).*

(M) $M_2(\Gamma) \leqslant K M_2(\Gamma')$ *für alle Kurvenscharen $\Gamma \subset G$ mit $\Gamma' = h(\Gamma)$. Es genügt*

(M*) $M_2(Z) \leqslant K M_2(Z')$ *für alle Zylinder mit $\bar{Q} \subset G$ oder*

(M**) $M_2(R) \leqslant K M_2(R')$ *für alle Ringe mit $\bar{R} \subset G$ zu fordern.*

KOROLLAR 1. *Ist h ein Diffeomorphismus $G \to G'$, so sind folgende Bedingungen aequivalent:*

(D^{-1}) $\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm \geqslant C^{-1} \int_{G'} \operatorname{grad}^2 (u \circ h^{-1})\, dm$ *für alle stetig differenzierbaren Funktionen u.*

(L^{-1}) $\lambda_3/\lambda_2\lambda_1 \geqslant C^{-1}(\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0)$ in G.

(M^{-1}) $M_2(\Gamma) \geqslant C^{-1} M_2(\Gamma')$ *für alle Kurvenscharen* $\Gamma \subset G$.

Korollar 1 ist eine Anwendung des Aequivalenz-Satzes auf den inversen Diffeomorphismus h^{-1}.

KOROLLAR 2. *Ist h ein Diffeomorphismus* $G \to G'$, *der die Ungleichungen*

$$C^{-1} M_2(Z') \leqslant M_2(Z) \leqslant K M_2(Z') \tag{1.9}$$

für alle Zylinder in G erfüllt, so gilt lokal

$$K^{-1}|x - y| \leqslant |h(x) - h(y)| \leqslant C|x - y|$$

Nach dem Aequivalenz-Satz und nach der Bemerkung 3 auf Seite 286 ergibt sich aus (1.9), dass $K^{-1} \leqslant \lambda_i \leqslant C$ $i = 1, 2, 3$ und daraus die Lipschitz-Bedingung.

Korollar 2 dient als Ausgangspunkt für den zweiten und dritten Abschnitt, wo auf die Differenzierbarkeits-Voraussetzung für h verzichtet wird. Es wird dort gezeigt, dass sich aus der Voraussetzung (1.9) und der Forderung, dass h ein Homöomorphismus ist, trotzdem eine Lipschitz-Stetigkeit nachweisen lässt. Daraus folgt dann insbesondere, dass h fast überall differenzierbar sein muss. Gewisse Aussagen aus dem Aequivalenz-Satz lassen sich sodann übertragen.

Beispiele

1) Für Streckungen $h(x) = vx$, v reell und positiv, gilt $\lambda_i/\lambda_j\lambda_k \equiv v^{-1}$ für alle Permutationen (i, j, k) von (1, 2, 3). Ist umgekehrt h ein Diffeomorphismus mit $\lambda_i/\lambda_j\lambda_k \equiv K$ für alle $x \in G$ und für alle Permutationen (i, j, k) von (1, 2, 3), so folgt daraus sofort $\lambda_i \equiv K^{-1}$ $i = 1, 2, 3$. Nach einer Verallgemeinerung des Satzes von LIOUVILLE (siehe GEHRING [4], p. 389, Satz 16) muss h die Restriktion einer Möbiustransformation auf G sein. Somit ist h abgesehen von Rotationen und Translationen eine Streckung im Verhältnis K^{-1}.
2) *Konforme Abbildung der Einheitskugel auf sich.*
Ist h eine Möbiustransformation (konforme Abbildung) der Einheitskugel $|x| < 1$ auf sich, welche die x_1-Achse auf sich abbildet und den Punkt $(a, 0, 0)$, $0 \leqslant a < 1$, in den Nullpunkt überführt, so induziert h auf jeder Ebene durch (0, 0, 0) und $(a, 0, 0)$ eine Abbildung w, die sich in komplexer Schreibweise als

$$w(z) = (z - a)/(1 - a\,z)$$

darstellen lässt. Die x_1-Achse wurde als reelle Achse gewählt. Da es sich um eine

Möbiustransformation handelt, gilt für festes x: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$. Setzt man

$$K^{-1}=\inf_{|x|<1}\lambda(x)=\inf_{|z|<1}\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1-a}{1+a}$$
$$C=\sup_{|x|<1}\lambda(x)=\sup_{|z|<1}\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1+a}{1-a}$$

so schliesst man daraus, dass h für alle x, $|x|<1$, der Bedingung

$$C^{-1}\leqslant\lambda/\lambda\,\lambda(x)=\lambda^{-1}(x)\leqslant K$$

genügt.

3) *Kugelringe*

Zwei Kugelringe $R_i=\{x\mid 1<|x|<a_i\}$ $i=1,2$ sollen diffeomorph aufeinander abgebildet werden. Wir setzen $G=R_1$, $G'=R_2$, $a_1<a_2$, und berechnen die kleinste Konstante K mit der Eigenschaft, dass bei diesem Diffeomorphismus h die Bedingungen des Aequivalenz-Satzes erfüllt sind. Dazu geben wir h als eine symmetrische Abbildung vor (in Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned}(r',\vartheta',\varphi')&=h(r,\vartheta,\varphi)\\ \vartheta'&=\vartheta\\ \varphi'&=\varphi\\ (1/r'-1/a_2)/(1-1/a_2)&=(1/r-1/a_1)/(1-1/a_1)\end{aligned}$$

und zeigen, dass diese Abbildung im erwähnten Sinne die beste ist. Die Konstante K wird mit Hilfe der Bedingung (L) berechnet. Wegen der Symmetrie gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{d(r')}{dr},\qquad \lambda_2=\lambda_3=r'/r\\ \frac{d(r')}{dr}&=\frac{r'^2\,d(1/r')}{r^2\,d(1/r)}=\frac{r'^2(1-1/a_2)}{r^2(1-1/a_1)}\\ &>1,\quad\text{denn}\quad a_1<a_2\\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3}&=\frac{1-1/a_2}{1-1/a_1}=\frac{M_2(R_1)}{M_2(R_2)}\\ \lambda_2/\lambda_1\lambda_3&=\lambda_3/\lambda_1\lambda_2=\lambda_1^{-1}<1\end{aligned}\qquad\text{(siehe (1.2))}$$

Daraus schliesst man, dass $K=M_2(R_1)/M_2(R_2)$. Die Bedingung (M**) des Aequivalenz-Satzes liefert $K\geqslant M_2(R_1)/M_2(R_2)$ für alle Diffeomorphismen h.

II. Absolute Stetigkeit

Im ersten Abschnitt wird von den untersuchten Abbildungen stets vorausgesetzt, dass sie stetig differenzierbar seien. Auf diese einschränkende Voraussetzung soll jetzt verzichtet werden. Die Bedingungen (D) und (L) im Aequivalenzsatz lassen sich

dann nicht mehr so formulieren, jedoch lassen sich die Bedingungen (M), (M*) und (M**) auf beliebige Homöomorphismen h übertragen.

Zur Untersuchung der Regularitätseigenschaften von h benötigen wir einige Begriffe und Resultate aus der reellen Analysis. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei LEHTO–VIRTANEN [5], Kap. III, § 2.

Ein reelles Borelsches Mass τ heisst absolut stetig bezüglich dem Borel-Lebesgue Mass m, falls $\tau(N)=0$ für jede m-Nullmenge N. Der Homöomorphismus $h: G \to G'$ induziert durch $B \to h(B)$ eine Abbildung der Borelmengen in G auf Borelmengen in G'. Wir setzen

$$\tau_h(B) = m(h(B)) \tag{2.1}$$

für Borelmengen B in G. $\tau_h(B)$ ist ein positives Borelsches Mass auf G.

DEFINITION. *Der Homöomorphismus $h: G \to G'$ heisst absolut stetig in G, falls das zugeordnete Mass τ_h auf G absolut stetig ist.*

Ist $K(r, x)$ die konzentrische Kugel mit Mittelpunkt $x \in G$ und Radius r und existiert der Grenzwert

$$\tau'(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\tau(K(r, x) \cap G)}{m(K(r, x))}$$

so heisst $\tau'(x)$ die Derivierte von τ im Punkte x. Nach dem Satz von Lebesgue besitzt ein positives, beschränktes Borelsches Mass τ in G fast überall eine Derivierte und es gilt für jede Borelmenge B in G:

$$\tau(B) \geqslant \int_B \tau' \, dm$$

Gleichheit besteht genau dann, wenn τ in G absolut stetig ist.

DEFINITION. *Die in $G \subset E^3$ stetige Funktion f mit Werten in E^3 ist absolut stetig auf Linien* (ACL), *falls folgendes gilt: In jedem Quader $Q = \{x \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, 3\} \subset G$ ist f absolut stetig auf fast allen achsenparallelen Strecken in Q. Die Vereinigung der achsenparallelen Strecken $l \subset Q$, auf denen f nicht absolut stetig ist, hat 3-dimensionales Lebesgue-Mass 0.*

SATZ 1. *Erfüllt der Homöomorphismus $h: G \to G'$ die Bedingung* (M*): $M_2(Z) \leqslant K M(Z')$ *für alle Zylinder $Z = (Q, E_0, E_1)$ mit $\bar{Q} \subset G$ und $Z' = h(Z)$, so ist die inverse Abbildung h^{-1} absolut stetig und es gilt $m(B) \leqslant K^3 m(h(B))$ für alle Borelmengen $B \subset G$.*
Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir drei Hilfsätze.

HILFSATZ 1. *Erfüllt der Homöomorphismus h die Voraussetzungen von Satz* 1, *so gilt* (M**):

$$M_2(R) \leqslant K M_2(R') \quad \text{für alle Ringe } R \text{ mit } \bar{R} \subset G.$$

Für den Beweis dieses Hilfsatzes benützen wir Resultate von FUGLEDE [2].

R sei ein beliebiger Ring, $\bar{R} \subset G$. Wir setzten zunächst voraus, dass die Randkomponenten von R keine irregulären Punkte bezüglich des Dirichlet-Randwertproblems enthalten. Es gilt dann

$$\int_R \operatorname{grad}^2 u \, dm = M_2(R)$$

wobei u die harmonische Funktion mit den Randwerten $u=0$ auf D_0 und $u=1$ auf D_1 ist. Wir verwenden das Verfahren, das auf die Gleichung (1.3) geführt hat: Der Ring R wird durch eine Fläche F in zwei Zylinder Z_1, Z_2 zerlegt. Von F wird vorausgesetzt, dass für jede Stromlinie s (orthogonale Trajektorie zu den Niveauflächen u=const.) entweder $s \cap F = \emptyset$ oder $s \cap F = s$ gilt. Von den beiden Zylindern muss gezeigt werden, dass $\varrho = |\operatorname{grad} u|$ extremal ist, woraus dann folgt:

$$M_2(Z_i) = \int_{Q_i} \operatorname{grad}^2 u \, dm \qquad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Auf eine Ausführung des Beweises kann verzichtet werden, da sich die Methode von FUGLEDE [2] (Punkt 3^0 p. 202–205) auf unseren Fall übertragen lässt. Aus (2.4) und (1.5) erhält man

$$M_2(R) = M_2(Z_1) + M_2(Z_2) \leqslant K\left(M_2(Z_1') + M_2(Z_2')\right) \leqslant K M_2(R').$$

Besitzt nun aber D_0 oder D_1 irreguläre Punkte, so kann $R' = h(R)$ bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ durch einen Ring R_0, $\bar{R}_0 \subset R'$, approximiert werden für den die Ungleichung

$$M_2(R_0) \leqslant M_2(R') + \varepsilon \tag{2.3}$$

gilt.[1] Zu einem solchen R_0 wählen wir einen Ring R_1 mit $h^{-1}(R_0) \subset R_1 \subset R$, dessen Randkomponenten nur aus regulären Punkten bestehen (z.B. den Ring, der aus den Punkten besteht, die von $h^{-1}(R_0)$ einen geeigneten Abstand haben). Wie soeben bewiesen wurde, ist $M_2(R_1) \leqslant K M_2(R_1')$. Daraus folgt:

$$M_2(R) \leqslant M_2(R_1) \leqslant K M_2(R_1') \leqslant K M_2(R_0) \leqslant K M_2(R') + K\varepsilon$$

da $R_1 \subset R$ und $R_0 \subset R_1'$, und damit

$$M_2(R) \leqslant K M_2(R').$$

---

[1]) Nach CHOQUET [1] p. 146/147 ist $M_2(R)$ gleich der Kapazität des inneren Komplementes I von R bezüglich der Green'schen Funktion des Gebietes $R \cup I$. Da I kompakt ist, gilt

$$M_2(R) = \operatorname{cap} I = \inf_{O \supset I} \operatorname{cap} O.$$

Das Infimum erstreckt sich über die offenen Mengen O, die I enthalten. Wegen der Monotonie des Moduls gibt es daher einen Ring R^* mit äusserer Randkomponente D_1, dessen innere Randkomponente D_0^* ganz in R liegt und für den

$$M_2(R^*) \leqslant M_2(R) + \varepsilon/2$$

gilt. Eine Spiegelung am Einheitskreis mit dem Zentrum in I und nochmalige Anwendung des beschriebenen Verfahrens liefert das gewünschte Resultat.

HILFSATZ 2. *Ist R ein beliebiger Ring mit innerem Komplement I, und ist R^* der durch zwei konzentrische Kugelflächen berandete Ring mit $m(R)=m(R^*)$ und $m(I)=m(I^*)$, so gilt*

$$M_2(R^*) \leqslant M_2(R).$$

Dieser Satz stammt von SZEGÖ [9]. Wir sagen im Folgenden, R^* entstehe aus R durch Symmetrisierung.

HILFSATZ 3. *Ist $R'=\{x' \mid a'<|x'-x_0'|<b'\}\subset G'$, $R=h^{-1}(R')$ und R^* der aus R durch Symmetrisierung entstandene Ring, so folgt aus den Voraussetzungen des Satzes 1:*

$$K^{-1} < a'/a^* + K^{-1}\, a'/b' \tag{2.6}$$

Beweis: Nach den Hilfsätzen 1 und 2 gilt:

$$K\, M_2(R') \geqslant M_2(R) \geqslant M_2(R^*).$$

Sind a^* und b^* $(a^*<b^*)$ die Radien der begrenzenden Kugelflächen von R^*, so ergibt dies zusammen mit der Gleichung (1.2)

$$K\, 4\pi(1/a' - 1/b')^{-1} \geqslant 4\pi(1/a^* - 1/b^*)^{-1}$$

und daraus

$$1/a' - 1/b' \leqslant K(1/a^* - 1/b^*)$$

$$K^{-1} + a'/b^* \leqslant a'/a^* + K^{-1}\, a'/b'$$

und (2.6).

Folgerungen

1) Für eine Folge konzentrischer Ringe R_i' mit

$$a_i' < 1,\ b_i' = \sqrt{a_i'} > a_i' \quad \text{und} \quad a_i' \to 0$$

schliesst man aus (2.6):

$$K^{-1} < a_i'/a_i^* + K^{-1}\sqrt{a_i'}$$

und durch Grenzübergang:

$$K^{-3} \leqslant \liminf_{i\to\infty}(a_i'/a_i^*)^3 = \liminf_{i\to\infty}(m(I_i')/m(h^{-1}(I_i')) \tag{2.7}$$

wo I_i' das innere Komplement des Ringes R_i' ist, also eine Kugel vom Radius a_i'.

2) Ist $b'=2\varepsilon$ und $a' \leqslant \varepsilon$, so folgt aus (2.6)

$$K^{-1} = a'/a^* + K^{-1}/2$$

und daher besteht für jede Kugel I' mit Radius $<\varepsilon$, deren Abstand zum Rand von G grösser als ε ist, die Ungleichung

$$m(I')/m(I) = (a'/a^*)^3 \geqslant K^{-3}/8, \quad I = h^{-1}(I') \tag{2.8}$$

Aus diesen beiden Folgerungen ergibt sich leicht ein

Beweis des Satzes 1: Eine Lebesgue-Nullmenge $N' \subset G'$ kann durch Kugeln überdeckt werden, derart dass die Summe ihrer Inhalte beliebig klein ist. Daraus und aus (2.8) schliesst man, dass $N = h^{-1}(N') \subset G$ wieder eine Nullmenge ist. h^{-1} ist also in G' absolut stetig. Die h^{-1} zugeordnete Mengenfunktion $\tau_h{}^{-1}$ (siehe (2.1)) ist in jeder kompakten Teilmenge von G' beschränkt. Nach dem Satz von Lebesgue existiert die Derivierte $(\tau_h{}^{-1})'$ f.ü. in G' und nach (2.7) ist f.ü.

$$(\tau_{h^{-1}})' \leqslant K^3$$

Wegen der absoluten Stetigkeit von $\tau_h{}^{-1}$ gilt für alle Borelmengen $B \subset G$

$$m(B) = m(h^{-1}(B')) = \int_{B'} (\tau_{h^{-1}})' \, dm$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

SATZ 2. *h sei ein Homöomorphismus $G \to G'$. Ist dann für ein $p > 1$*

$$M_p(Z) \leqslant K M_p(Z')$$

für alle Zylinder in G, so ist h absolut stetig auf Linien (ACL).

Die Beweismethode dieses Satzes geht auf PFLUGER [7] zurück. Der Fall mit Dimension $d = 3$ und $p = d$ ist bei VÄISÄLÄ [11] behandelt. Es genügt hier zu bemerken, dass der Beweis von VÄISÄLÄ auch für $d \neq n$ Gültigkeit besitzt.

III. Lipschitz-Stetigkeit

In diesem Abschnitt wird sich herausstellen, dass die Homöomorphismen h von G auf G', für die eine „zweiseitige" Ungleichung

$$K^{-1} M_2(Z) \leqslant M_2(Z') \leqslant C M_2(Z) \tag{3.1}$$

gilt, eine Lipschitzbedingung erfüllen. Deshalb sind diese f.ü. differenzierbar, ein Umstand, der grundlegend ist für die Übertragung der Ergebnisse aus dem ersten Teil. Ob sich die Differenzierbarkeit f.ü. von h bereits aus der „einseitigen" Ungleichung (Voraussetzung im zweiten Abschnitt) herleiten lässt, ist eine offene Frage. Im Gegensatz zur Theorie der quasikonformen Abbildungen in E^3 ist es jedoch unmöglich, aus der einseitigen Ungleichung eine zweiseitige herzuleiten. Der Homöomorphismus $h(r, \varphi, z) = (r^2, \varphi, z)$ (in Zylinderkoordinaten), der $\{x = (r, \varphi, z) \mid 0 < z < 1, 0 \leqslant r < 1\}$ auf sich abbildet, belegt diese Behauptung.

SATZ 3. *Gelten für den Homöomorphismus $h: G \to G'$ die Ungleichungen*

$$K^{-1} M_2(Z) \leqslant M_2(Z') \leqslant C M_2(Z)$$

für alle Zylinder $Z = (Q, E_0, E_1)$, $\bar{Q} \subset G$, so erfüllt h (lokal) eine Lipschitzbedingung

der Form

$$\sqrt{K^{-3}C^{-1}}\,|x-y| \leqslant |h(x)-h(y)| \leqslant \sqrt{KC^3}\,|x-y| \tag{3.2}$$

KOROLLAR. *h und h^{-1} sind f.ü. differenzierbar.*

Dies ist eine Folgerung des Satzes von RADEMACHER

Wir beweisen die zweite Ungleichung in (3.2). Die erste folgt dann durch Anwendung auf die inverse Abbildung h^{-1}. Es muss vorausgesetzt werden, dass die Verbindungsstrecke der Punkte x, y, in G liegt. In diesem Sinne ist der Satz nur eine lokale Aussage. Durch x und y legen wir sodann die Symmetrieachse eines geraden, offenen Kreiszylinders Q, $\bar{Q} \subset G$, dessen Grund- und Deckebene E_0 und E_1 die Punkte x bzw. y enthalten. Wir verwenden die Ungleichung (1.1), die für $Z=(Q, E_0, E_1)$ in Gleichheit übergeht:

$$M_2(Z) = m(Q)\,|x-y|^{-2}$$
$$M_2(Z') \leqslant m(Q')\,d^{-2}$$

Konvergiert der Radius r des Kreiszylinders gegen Null, so strebt d gegen $|h(x)-h(y)|$. Nach Satz 1 gilt nun

$$m(Q') \leqslant C^3\,m(Q),$$

und daraus folgt

$$m(Q)\,|x-y|^{-2} = M_2(Z) \leqslant K\,M_2(Z') \leqslant K\,m(Q')\,d^{-2} \leqslant K\,C^3\,m(Q)\,d^{-2}$$

Division mit $m(Q)$ und anschliessender Grenzübergang $r \to 0$ führen auf die zweite Ungleichung in (3.2).

Satz 3 besitzt nach FUGLEDE [2] (Beweis zu Satz 4 p. 188) folgende Umkehrung: Aus der (lokalen) Voraussetzung:

$$c^{-1}\,|x-y| \leqslant |h(x)-h(y)| \leqslant c\,|x-y|$$

folgt

$$c^{-5}\,M_2(\Gamma) \leqslant M_2(\Gamma') \leqslant c^5\,M_2(\Gamma)$$

für alle Kurvenscharen $\Gamma \subset G$.

Aus Satz 3 ergeben sich eine ganze Reihe von Folgerungen:

1) Die partiellen Ableitungen von h, die fast überall existieren, sind lokal in L_∞, denn sie sind durch $\sqrt{KC^3}$ beschränkt.
2) Aus den Voraussetzungen des Satzes 3 folgt die Eigenschaft (L) (siehe p. 285) für alle Punkte $x \in G$, in denen h differenzierbar ist:

$$\lambda_1/\lambda_2\,\lambda_3 \leqslant K \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0 \tag{3.3}$$

Daraus erhält man

$$\lambda_3 \geqslant K^{-1} \tag{3.4}$$

Der Beweis auf p. 13/14 benützt nur die Differenzierbarkeit in den betreffenden Punkten. Darum kann dieses Ergebnis auch folgendermassen formuliert werden:

Ist der Homöomorphismus h f.ü. differenzierbar und gilt $K^{-1}M_2(Z)\leqslant M_2(Z')$ für alle Zylinder in G, so gilt (3.3) in allen Punkten, in denen h differenzierbar ist. Insbesondere ist (3.3) unabhängig von der Grösse von C. Die folgende Umkehrung lässt sich unmittelbar von einem Ergebnis von VÄISÄLÄ ([10] Satz 6.5) übertragen: Ist h ACL, f.ü. in G differenzierbar und gilt (3.3) in fast allen Punkten, in denen h differenzierbar ist, so folgt daraus:

$$M_2(\Gamma)\leqslant K M_2(\Gamma')$$

für alle Kurvenscharen $\Gamma\subset G$.

Weil sich die entsprechenden „zweiseitigen" Ungleichungen immer durch die Betrachtung des inversen Höomorphismus ergeben, gilt

$$K^{-1}M_2(\Gamma)\leqslant M_2(\Gamma')\leqslant C M_2(\Gamma) \tag{3.5}$$

für alle Kurvenscharen, sobald diese Ungleichungen für Zylinder bestehen.

3) Die Ungleichungen

$$\lambda_1\lambda_1/\lambda_2\lambda_3\leqslant KC$$
$$\lambda_3\lambda_3/\lambda_1\lambda_2\geqslant (KC)^{-1} \tag{3.6}$$

für Punkte $x\in G$, in denen h differenzierbar ist, sind eine direkte Konsequenz von (3.3), (3.4) und den entsprechenden Ungleichungen für h^{-1}. (3.6) zusammen mit der Differenzierbarkeit f.ü. und der absoluten Stetigkeit auf Linien bedeuten, dass ein Homöomorphismus h, der den Voraussetzungen des Satzes 3 genügt, (KC)-quasikonform ist (im Sinne von VÄISÄLÄ [10] Satz 6.13)[2]). Dieses Ergebnis lässt sich auch folgendermassen formulieren:

SATZ 4[3]) *Erfüllt der Homöomorphismus h die Ungleichungen*

$$K^{-1}M_2(\Gamma)\leqslant M_2(\Gamma')\leqslant C M_2(\Gamma)$$

für alle Kurvenscharen $L\subset G$, so gilt für diese auch

$$(KC)^{-1}M_3(\Gamma)\leqslant M_3(\Gamma')\leqslant KC M_3(\Gamma)$$

Das Beispiel $h(x_1, x_2, x_3)=b(ax_1, x_2, x_3)$, $a\geq 1$ zeigt, dass die Konstante KC nicht verbessert werden kann $(KC=a^2)$.

4) Es ist bekannt (siehe MORREY [6] Kapitel 3), dass ein Homöomorphismus $h: G\to G'$, der (3.2) erfüllt, die Klasse der reellwertigen ACL-Funktionen u, deren partielle Ableitungen lokal in $L_p(p\geq 1)$ sind, invariant lässt: u, definiert auf einem Gebiet $Q\subset G$, und $u'=u\circ h^{-1}$, definiert auf $Q'=h(Q)$, gehören gleichzeitig zur erwähnten Klasse. Zudem besteht f.ü. in Q die Gleichung

grad $u=H$ grad u'.

(H ist die Funktionalmatrix von h.)

---

[2]) Im Sinne von GEHRING [4], Satz 4, ist $h(KC)^{1/2}$-quasikonform.

[3]) Dieses Resultat ist etwas besser als dasjenige, welches in den C.R. de l'Acad. Sci. Paris *266*, 274 (1968) angekündigt wurde.

Nach derselben Begründung wie auf Seite 286 erhält man daraus folgendes Resultat: Mit den Voraussetzungen des Satzes 3 gilt

$$K^{-1}\int_{Q}\operatorname{grad}^2 u\,dm \leqslant \int_{Q'}\operatorname{grad}^2 u'\,dm \leqslant C\int_{Q}\operatorname{grad}^2 u\,dm$$

für alle in einem Gebiet $Q\subset G$ definierten ACL-Funktionen u, deren partielle Ableitungen lokal in L_2 sind.

Als Umkehrung zur Folgerung 4 beweisen wir:

SATZ 5. *Lässt der Homöomorphismus $h: G\to G'$ die Klasse der in Teilgebieten Q von G definierten ACL-Funktionen u, deren partielle Ableitungen lokal in L_p $(p>1)$ sind, invariant, und gilt*

$$\int_{Q}|\operatorname{grad} u|^p\,dm \leqslant K\int_{Q'}|\operatorname{grad} u'|^p\,dm$$

für alle diese Funktionen, so folgt daraus

$$M_p(Z)\leqslant K\,M_p(Z')$$

für alle Zylinder $Z=(Q, E_0, E_1)$, $\bar{Q}\subset G$.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 5 geben wir für den Modul eines Zylinders eine zweite Definition an. Diese lässt sich auch für Ringe in dieser Art formulieren, was im Falle $p=3$ bereits von GEHRING [3] gezeigt worden ist.

Zweite Definition:

Der Modul eines Zylinders $Z=(Q, E_0, E_1)$ ist die reelle Zahl

$$A_p(Z)=\inf_{u}\int_{Q}|\operatorname{grad} u|^p\,dm \qquad (p>1)$$

Das Infimum erstreckt sich über alle in Q definierten ACL-Funktionen u, die auf E_0 und E_1 durch die Konstanten 0 bzw. 1 stetig fortgesetzt werden können.

Es muss gezeigt werden, dass $A_p(Z)=M_p(Z)$.

a) $$M_p(Z)\leqslant A_p(Z)$$

Ist $|\operatorname{grad} u|$ in L_p, so ist u für alle $\gamma\in\Gamma_Z$, mit Ausnahme einer Schar Γ_1 vom p-Modul 0, absolut stetig entlang jeder kompakten Teilkurve von γ (VÄISÄLÄ [10] Lemma 4.1). Aus der Bedingung $u=0$ bzw. $u=1$ auf $E_0(E_1)$ folgt daher für diese Kurven:

$$\int_{\gamma}|\operatorname{grad} u|\,ds\geqslant 1$$

Wird $|\operatorname{grad} u|$ durch eine Borelfunktion f mit $f=|\operatorname{grad} u|$ f.ü. ersetzt, so gilt

$$\int_\gamma f\,ds = \int_\gamma |\operatorname{grad} u|\,ds$$

für alle Kurven mit Ausnahme einer Schar Γ_2 vom p-Modul 0 (FUGLEDE [2] Theorem 3d). Da Γ_1 und Γ_2 nichts zum Modul $M_p(Z)$ beitragen, erhält man daraus

$$M_p(Z) \leqslant A_p(Z)$$

b) Die umgekehrte Ungleichung stützt sich auf eine Konstruktion von GEHRING [3] und auf ein Regularisierungsverfahren.

$f \geq 0$ sei eine Borel-Funktion mit $\int_\gamma f\,ds \geq 1$ für alle $\gamma \in \Gamma_Z$ und $\int_Q f^p\,dm < \infty$. Ist die zweite Bedingung für kein f erfüllt, so ist $M_p(Z)=\infty$ und daher $A_p(Z) \leqslant M_p(Z)$. Mit ϱ bezeichnen wir die in Q definierte Hilfsfunktion

$$\varrho(x) = \operatorname{Min}\{1, (1/2)\,\delta(x)\}$$

$\delta(x)$ bezeichnet den Abstand von x zum Rand von Q. $\varrho(x)$ ist Lipschitz-stetig:

$$|\varrho(x) - \varrho(x')| \leqslant 2^{-1}\,|x - x'| \tag{3.7}$$

t ist ein Ortsvektor in $B_\varepsilon = \{t \mid |t| < \varepsilon \leqslant 1\} \subset E^3$ und figuriert als Parameter. Die Beziehung $y(x)=y_t(x)=x+t\varrho(x)$ definiert für jedes $t \in B_\varepsilon$ eine eineindeutige Abbildung von Q auf sich.

Die Funktion

$$g(x, \varepsilon) = \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(y_t(x))\,dm(t)$$

ist für festes ε in x stetig, denn f ist integrierbar und $\varrho(x)$ ist stetig. Zudem gilt:

$$\int_\gamma g(x, \varepsilon)\,ds(x) \geqslant (1 + \varepsilon/2)^{-1}$$

für alle $\gamma \in \Gamma_Z$, denn

$$\begin{aligned}\int_\gamma g(x, \varepsilon)\,ds(x) &= \int_\gamma ds(x)\,\frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(x + t\varrho)\,dm(t) \\ &= \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} dm(t) \int_{y(\gamma)} f(y)\,\frac{ds(x)}{ds(y)}\,ds(y)\end{aligned}$$

(nach FUBINI). Für die Transformation des Bogenelementes erhält man nach (3.7):

$$ds(y) = ds(x + t\varrho) \leqslant (1 + |t|\,|\operatorname{grad}\varrho|)\,ds(x) \leqslant (1 + |t|/2)\,ds(x)$$

Mit der Voraussetzung $\int_\gamma f\,ds \geq 1$ für alle $\gamma \in \Gamma_Z$ folgt daraus:

$$\int_\gamma g(x,\varepsilon)\,ds(x) \geqslant \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} dm(t)\,\frac{1}{1+\varepsilon/2} = \frac{1}{1+\varepsilon/2} \tag{3.9}$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $g(x,\varepsilon)$ in der L_p-Norm gegen f:

$$\begin{aligned}\int_Q |g(x,\varepsilon) - f(x)|^p\,dm &= \int_Q dm(x) \left| \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} (f(x+t\varrho) - f(x))\,dm(t) \right|^p \\ &\leqslant \int_Q \frac{dm(x)}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} |f(x+t\varrho) - f(x)|^p\,dm(t) \\ &= \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} dm(t) \int_Q |f(x+t\varrho) - f(x)|^p\,dm(x)\end{aligned}$$

Wird f in L_p durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximiert, so ist ersichtlich, dass der letzte Ausdruck mit ε gegen 0 konvergiert. Weil Q beschränkt ist, konvergieren daher auch die (in x) stetigen Funktionen

$$v(x,\varepsilon) = \frac{g(x,\varepsilon)}{1+\varepsilon/2}$$

in L_p gegen f und erfüllen wegen (3.9) die Bedingung

$$\int_\gamma v(x,\varepsilon)\,ds \geqslant 1 \qquad \text{für alle } \gamma \in \Gamma_Z$$

Wir definieren eine Funktion $u(x,\varepsilon)$ durch die Gleichung

$$u(x,\varepsilon) = \operatorname{Min}\left\{1, \inf_\beta \int_\beta v(x,\varepsilon)\,ds(x)\right\}$$

Das Infimum erstreckt sich über alle rektifizierbaren Kurven β in Q, die E_0 mit x verbinden. Wegen der Stetigkeit von $v(x,\varepsilon)$ genügt $u(x,\varepsilon)$ lokal einer Lipschitzbedingung und ist daher eine ACL-Funktion mit $|\operatorname{grad} u(x,\varepsilon)| \leqslant v(x,\varepsilon)$. Damit kann zu jeder Borelfunktion $f \geq 0$ mit $\int_\gamma f\,ds \geq 1$ für alle $\gamma \in \Gamma_Z$ und zu jedem $\delta > 0$ eine ACL-Funktion $u(x,\varepsilon)$ angegeben werden, die sich durch 0 (bzw 1) stetig auf E_0 (bzw E_1) erweitern lässt und für die

$$\int_Q |\operatorname{grad} u|^p\,dm \leqslant \int_Q f^p\,dm + \delta$$

gilt. Daraus schliesst man die gesuchte Ungleichung

$$A_p(Q) \leqslant M_p(Q)$$

Mit dieser Vorbereitung gestaltet sich der Beweis zum Satz 5 sehr einfach:
Zu einem beliebigen Zylinder $Z' = (Q', E_0', E_1')$, $\bar{Q}' \subset G'$, gibt es eine Folge von ACL-Funktionen $u_n' = u_n \circ h^{-1}$, die in Q' definiert sind, mit Randwerten 0 auf E_0 und 1 auf E_1 und die

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q'} |\operatorname{grad} u_n'|^p \, dm = M_p(Z')$$

erfüllen. Nach der Voraussetzung zu Satz 5 gilt daher

$$K \int_{Q'} |\operatorname{grad} u_n'|^p \, dm \geqslant \int_{Q} |\operatorname{grad} u_n|^p \, dm \geqslant M_p(Z)$$

Mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daraus

$$K M_p(Z') \geqslant M_p(Z)$$

Gestützt auf Satz 3 mit den Folgerungen 2 und 4 und auf Satz 5 formulieren wir in Analogie zum ersten Abschnitt (vgl. p. 293) folgenden

AEQUIVALENZ-SATZ. *Ist h ein Homöomorphismus eines Gebietes $G \subset E^3$ auf ein Gebiet $G' \subset E^3$, so sind folgende drei Aussagen aequivalent:*

(1) $K^{-1} M_2(Z) \leqslant M_2(Z') \leqslant C\, M_2(Z)$ *für alle Zylinder Z mit $\bar{Q} \subset G$*

(2) *h und h^{-1} sind ACL, f.ü. differenzierbar und in den Punkten, in denen h differenzierbar ist, gilt $C^{-1} \leqslant \lambda_i/\lambda_j\lambda_k \leqslant K$ für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$*

(3) *h und h^{-1} lassen die Klasse der ACL-Funktionen, die in Teilgebieten Q von G (bzw. Q' von G') definiert sind und deren partielle Ableitungen lokal in L_2 sind invariant, und es gilt für diese Funktionen:*

$$K^{-1} \int_{Q} \operatorname{grad}^2 u \, dm \leqslant \int_{Q'} \operatorname{grad}^2 u' \, dm \leqslant C \int_{Q} \operatorname{grad}^2 u \, dm$$

IV. Normalfamilien-Eigenschaft

DEFINITION. *Eine Familie F von stetigen Funktionen heisst normal, falls jede unendliche Folge $\{f_n\}$ in G definierter Funktionen aus F eine Teilfolge besitzt, die auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmässig gegen eine Funktion f oder gegen die Konstante $\pm\infty$ konvergiert. Gehört f jeweils wieder zu F, so ist F eine vollständige Normalfamilie.*

Die Forderung, dass alle Funktionen f_n auf G definiert sein müssen, kann abge-

schwächt werden. Es sollen auch Folgen $\{f_n\}$ von Funktionen aus F zugelassen werden, deren Definitionsbereiche $\{G_n\}$ eine beliebige kompakte Teilmenge des Gebietes G von einem gewissen Index an enthalten.

SATZ 6. *Die Familie F der Homöomorphismen, die den Voraussetzungen des Satzes 3 genügen, ist eine vollständige Normalfamilie.*

Nach dem Satz von ARZELA-ASCOLI ist F eine Normalfamilie, wenn die Homöomorphismen in F gleichgradig stetig sind. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit (Satz 3) ist diese Bedingung erfüllt, und es muss nur noch die Vollständigkeit gezeigt werden. Es sei also $\{h_n\}$ eine Folge von Homöomorphismen aus F, die auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmässig gegen h konvergiert. Wir verwenden folgende Abschätzung:

$$|h(x)-h(y)| \geqslant \big|\, |h_n(x)-h_n(y)| - |h(x)-h_n(x)+h_n(y)-h(y)| \,\big|$$

Bei gegebenem ε, $0<\varepsilon<1$, gilt für $n>n(\varepsilon, x, y)$

$$\begin{aligned} |h(x)-h_n(x)+h_n(y)-h(y)| &\leqslant |h(x)-h_n(x)|+|h(y)-h_n(y)| \\ &\leqslant \varepsilon\sqrt{K^{-3}C^{-1}}\,|x-y| \quad \text{für } x\neq y \end{aligned}$$

und daher

$$|h(x)-h(y)| \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{K^{-3}C^{-1}}\,|x-y|>0 \quad \text{für } x\neq y$$

h ist also wieder ein Homöomorphismus und insbesondere wieder Lipschitz-stetig. (Die Ungleichung

$$|h(x)-h(y)| \leqslant \sqrt{KC^3}\,|x-y|$$

folgt aus

$$|h(x)-h(y)| \leqslant |h(x)-h_n(x)|+|h_n(x)-h_n(y)|+|h_n(y)-h(y)|)$$

Mit dem Satz von RADEMACHER schliesst man wieder, dass h f.ü. differenzierbar ist. Es genügt dann, die Ungleichungen

$$K^{-1}M_2(R) \leqslant M_2(R') \leqslant CM_2(R)$$

nur für Ringe R, $\bar{R}\subset G$, zu beweisen. Mit dem Beweis auf Seite 293 erhält man nämlich

$$C^{-1} \leqslant \lambda_i/\lambda_j\lambda_k \leqslant K$$

in allen Punkten $x\in G$, in denen h differenzierbar ist und für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$. Nach der zweiten Bemerkung Seite 305 folgt daraus (3.5) und damit (3.1) als Spezialfall.

Zu einem beliebig gewählten Ring R, $\bar{R}\subset G$, betrachten wir die Folge der Ringe $R_n'=h_n(R)$. Wir können voraussetzen, dass $M_2(R_n')\geq K^{-1}M_2(R)$ (vgl. Hilfsatz 1 Seite 296). Wählen wir nun nach der Beziehung (2.3) einen Ring R^*, $\bar{R}^*\subset R'=h(R)$ mit

$$M_2(R^*) \leqslant M_2(R')+\varepsilon$$

so ist R^* von einem gewissen Index an in $R_n'=h_n(R)$ enthalten. ($\bar{R}$ ist nach Definition kompakt). Daher gilt:

$$M_2(R')+\varepsilon \geqslant M_2(R^*) \geqslant M_2(R_n') \geqslant K^{-1}M_2(R)$$

Da ε beliebig gewählt ist, folgt daraus

$$M_2(R') \geqslant K^{-1} M_2(R).$$

Weil die inversen Homöomorphismen auch eine Normalfamilie bilden, gibt es eine Teilfolge von $\{h_n^{-1}\}$, die auf jeder kompakten Teilmenge in $G'=h(G)$ gleichmässig gegen h^{-1} konvergiert. Die analoge Überlegung, angewandt auf diese Teilfolge, liefert

$$M_2(R') \leqslant C M_2(R)$$

Der Beweis ist vollständig.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] CHOQUET, G., *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier *5* (1953/1954), 131–295.

[2] FUGLEDE, B., *Extremal length and functional completion*, Acta Math. *98* (1957), 171–219.

[3] GEHRING, F. W., *Extremal length definitions for the conformal capacity in space*, Michigan. Math. J. *9* (1962), 137–150.

[4] GEHRING, F. W., *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. *103* (1962), 353–393.

[5] LEHTO, O. und VIRTANEN, K. I., *Quasikonforme Abbildungen* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1965).

[6] MORREY, C. B., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1966).

[7] PFLUGER, A., *Über die Äquivalenz der geometrischen und der analytischen Definition quasikonformer Abbildungen*, Comment. Math. Helv. *33* (1959), 23–33.

[8] RADEMACHER, H., *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale*, Math. Ann. *79* (1919), 340–359.

[9] SZEGÖ, G., *Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z. *31* (1930), 583–593.

[10] VÄISÄLÄ, J., *On quasiconformal mappings in space*, Ann. Acad. Sc. Fenn. [A I] *298* (1961), 1–36.

[11] VÄISÄLÄ, J., Two new characterisations for quasiconformality, Ann. Acad. Sc. Fenn. [A I] *362* (1965), 1–12.

Eingegangen, 24. Juli 1968

Homotopy-associative H-spaces which are Sphere Bundles over Spheres

ROY R. DOUGLAS and FRANÇOIS SIGRIST

1. Introduction

Let $S^q \to E \to S^n$ be a q-sphere bundle over the n-sphere (q, n positive). The following theorem is proven, first in [2], and then more briefly in [3].

THEOREM 1. *If E is an H-space, then either*
(i) *both q and n belong to the set $\{1, 3, 7\}$, or*
(ii) *the pair (q, n) is $(1, 2)$, $(3, 4)$ or $(3, 5)$.*

In this note we study the further restrictions imposed on the pair (q, n), in case E supports a homotopy-associative H-space multiplication. Precisely, our main result is the following.

THEOREM 2. *If E supports a homotopy-associative H-space multiplication, then either*
(i) *both q and n belong to the set $\{1, 3\}$, or*
(ii) *the pair (q, n) is $(1, 2)$, $(3, 5)$ or $(3, 7)$.*

Remark: Product bundles in case (i), and $SO(3)$, $SU(3)$ and $Sp(2)$, respectively, in case (ii), provide examples of Lie groups E with $S^q \to E \to S^n$ a fibration. Thus, the restrictions in Theorem 2 are the best possible.

COROLLARY. *$S^3 \times S^7$ can not support homotopy-associative H-space multiplications.*

2. Proof of Main Result

LEMMA 1. *Let X be (the total space of) a 3-sphere bundle over S^4. If X is an H-space, then X has the homotopy type of S^7.*

Proof: The mod 2 cohomology of X can not be an exterior algebra on two generators of respective dimensions 3 and 4, by ADAMS' theorem in [1]. Thus X is a mod 2 cohomology 7-sphere. By a classical theorem of BOREL, X is a mod p cohomology 7-sphere, for all odd primes p. Therefore, X is an integral cohomology 7-sphere, and a generator of $\pi_7(X)$ is a homotopy equivalence.

LEMMA 2. *If X is (the total space of) a q-sphere bundle over S^n, with $(q, n) = (1, 7)$ or $(7, 1)$, then the universal covering space $\tilde{X}$ of X has the homotopy type of S^7.*

(The proof is an elementary exercise in covering space theory, together with an application of a theorem of WHITEHEAD [5].)

LEMMA 3. *If X is a homotopy-associative H-space and $H^*(X; \mathbf{Z})$ is ring isomorphic*

to $H^*(S^3 \times S^7; \mathbf{Z})$, *then the* mod 3 *Steenrod operation*

$$\mathscr{P}_3^1 : H^3(X; \mathbf{Z}_3) \to H^7(X; \mathbf{Z}_3)$$

is an isomorphism.

Proof: Let $P_3 X$ be the projective 3-space of (some homotopy-associative multiplication on) X, as defined by STASHEFF [4]. $H^*(P_3 X; \mathbf{Z})$ is torsion-free, and contains a truncated polynomial algebra on two generators x and y (of degrees 4 and 8, respectively), truncated at height 4. The relation $y^3 = \mathscr{P}_3^4(y) = \mathscr{P}_3^1 \mathscr{P}_3^3(y)$ implies that $\mathscr{P}_3^3(y) = \pm x y^2$. Consequently, $\mathscr{P}_3^1(x) = \pm y + \alpha x^2$ (for some $\alpha \in \mathbf{Z}_3$), which implies that $\mathscr{P}_3^1 : H^4(\Sigma X; \mathbf{Z}_3) \to H^8(\Sigma X; \mathbf{Z}_3)$ is an isomorphism (naturality with respect to inclusion of suspension $\Sigma X \to P_3 X$). Desuspending, we obtain Lemma 3.

LEMMA 4. *If X is (the total space of) a 7-sphere bundle over the 7-sphere, then X can not support a homotopy-associative H-space multiplication.*

(We omit the proof of Lemma 4, as it is essentially the same as the proof that S^7 can not be a homotopy-associative H-space.)

Proof of Theorem 2: By Theorem 1, it suffices to exclude the following pairs (q, n): (3, 4), (1, 7), (7, 1), (7, 3) and (7,7).

(3, 4) is eliminated by Lemma 1; (7, 7) by Lemma 4; and both (7, 1) and (1, 7) are excluded by Lemma 2, if we observe that the universal covering space of a homotopy-associative H-space is again a homotopy-associative H-space.

Suppose now that $S^7 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^3$ is a bundle with fibre S^7 and base S^3. The Serre exact sequence for cohomology implies that $i^* : H^7(E; \mathbf{Z}_3) \to H^7(S^7; \mathbf{Z}_3)$ is an isomorphism. But then the following

$$\begin{array}{ccc} H^7(E; \mathbf{Z}_3) & \xrightarrow{i^*} & H^7(S^7; \mathbf{Z}_3) \\ \uparrow \mathscr{P}_3^1 & & \uparrow \mathscr{P}_3^1 \\ H^3(E; \mathbf{Z}_3) & \xrightarrow{i^*} & H^3(S^7; \mathbf{Z}_3) \end{array}$$

commutative diagram, together with Lemma 3, implies that E can not be homotopy-associative. This completes the proof of Theorem 2.

REFERENCES

[1] J. F. ADAMS, *H-spaces with few cells*, Topology *1* (1962), 67–72.

[2] R. R. DOUGLAS and F. SIGRIST, *Sphere bundles over spheres which are H-spaces*, Rendic. Acc. Naz. Lincei, *44* No. 4 (1968).

[3] R. R. DOUGLAS and F. SIGRIST, *Sphere bundles over spheres and H-spaces* (to appear).

[4] J. D. STASHEFF, *Homotopy associativity of H-spaces.* I, Trans. Amer. Math. Soc. *108* (1963), 275–292.

[5] J. H. C. WHITEHEAD, Combinatorial Homotopy, Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 213–245.

The University of British Columbia
Vancouver, Canada
Université de Neuchâtel
Neuchâtel, Suisse

Received July 29, 1968

A Note on the Fundamental Theorem of Projective Geometry

M. OJANGUREN and R. SRIDHARAN[1])

Introduction

The aim of this note is to prove a generalisation to commutative rings of the classical fundamental theorem of projective geometry. In § 1, we introduce the notions of projective spaces and projectivities. In § 2, we prove the main theorem. The method of proof is similar to the proof of the theorem in the classical case as found for example in ARTIN [1]. The proof, as in the classical case, is elementary, but is trickier. In § 3, we give an example to show that a bijection between projective spaces of the same dimension which preserves collinear points is not necessarily a projectivity. This is in contrast to what happens in the case of projective spaces over fields.

§ 1. Projective Spaces and Projectivities

Let A be a cummutative ring with 1 and let M be a free A-module. Let $P(M)$ denote the set of all A-free direct summands of rank 1 of M. This set is called the *projective space associated to* M. Clearly, any element of $P(M)$ is of the form Ae where e is a unimodular element of M, i.e. there exists a linear form $g: M \to A$ with $g(e)=1$. If $(e_1, \ldots, e_n)$ is a basis for the A-module M and $e=\sum a_i e_i$, then we note that e is unimodular if and only if $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} Ae_i = A$. If the ring A is such that every projective module of rank 1 is free, then $P(M)$ coincides with the usual projective space of algebraic geometry [2, p. 13].

DEFINITION. *Let M and N be free modules over commutative rings A and B respectively. A map $\alpha: P(M) \to P(N)$ is called a projectivity if α is bijective and for $p_1, p_2, p_3 \in P(M)$, we have $\alpha p_1 \subset \alpha p_2 + \alpha p_3$ in N if and only if $p_1 \subset p_2 + p_3$ in M.*

This definition generalises the classical notion of projectivity between projective spaces over fields.

We note that by the very definition, $\alpha^{-1}: P(N) \to P(M)$ is also a projectivity. For later purposes, we need the following

LEMMA 1. *With the notation above, if $e_1, \ldots, e_n$ is a basis of M and $e \in M$ a unimodular element such that $Ae \subset \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} Ae_i$, then $\alpha Ae \subset \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha Ae_i$.*

---

[1]) The authors thank Prof. ECKMANN for having given them the opportunity to work at the Forschungsinstitut für Mathematik, ETH.

Proof. We prove the lemma by induction on k. Let $e=\sum_{1\leqslant i\leqslant k} a_i e_i$. Then $e'=\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1} a_i e_i+e_k$ is unimodular and $Ae\subset Ae'+Ae_k$. By definition this implies that $\alpha Ae\subset\alpha Ae'+\alpha Ae_k$. Let $e''=\sum_{1\leqslant i\leqslant k-2} a_i e_i+e_k$. Since $e'\in Ae''+Ae_{k-1}$, we again have $\alpha Ae'\subset\alpha Ae''+\alpha Ae_{k-1}$. We thus have $\alpha Ae\subset\alpha Ae''+\alpha Ae_{k-1}+\alpha Ae_k$. By induction,

$$\alpha Ae''\subset\sum_{1\leqslant i\leqslant k-2}\alpha Ae_i+\alpha Ae_k \quad\text{and hence}\quad \alpha Ae\subset\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\alpha Ae_i.$$

Let A and B be rings and $\sigma: A\to B$ a homomorphism. If M and N are modules over A and B respectively, then a map $\Phi: M\to N$ is called *σ-semilinear* if Φ is additive and $\Phi(am)=\sigma(a)\,\Phi(m)$ for all $a\in A$, $m\in M$. If M and N are free modules over A and B of the same rank and $\Phi: M\to N$ a σ-semilinear map which takes a basis $(e_1,\ldots,e_n)$ of M into a basis of N, then if $e=\sum a_i e_i$ is a unimodular element of M, then $\Phi(e)=$ $=\sum\sigma(a_i)\,\Phi(e_i)$ is unimodular in N. For, if $\sum\lambda_i a_i=1$, $\lambda_i\in A$, we have $\sum\sigma(\lambda_i)\,\sigma(a_i)=1$ which implies $\Phi(e)=\sum\sigma(a_i)\,\Phi(e_i)$ is unimodular. It is clear that we have an induced map $P(\Phi):P(M)\to P(N)$ by setting for any unimodular element e of M, $P(\Phi)\,(Ae)=$ $=B\Phi(e)$. We then have the following rather obvious

PROPOSITION 1: *With the same notation as above, for any $p_1,p_2,p_3\in P(M)$ with $p_1\subset p_2+p_3$, $P(\Phi)\,p_1\subset P(\Phi)\,p_2+P(\Phi)\,p_3$. If σ is an isomorphism, then $P(\Phi)$ is a projectivity.*

§ 2 The Theorem

Our object in this section is to prove the following theorem which generalises to commutative rings the classical "Fundamental theorem of projective geometry".

THEOREM. *Let M and N be free modules of finite rank $\geqslant 3$ over commutative rings A and B respectively. If $\alpha: P(M)\to P(N)$ is a projectivity, then there exists an isomorphism $\sigma: A\to B$ and a σ-semilinear isomorphism $\Phi: M\to N$ such that $\alpha=P(\Phi)$. If $\sigma_i: A\to B$, $i=1,2$, are isomorphisms and $\Phi_i: M\to N$ are σ_i-semilinear isomorphisms such that $P(\Phi_1)=P(\Phi_2)$, then there exists a $b\in B$ such that $\Phi_1=b\cdot\Phi_2$ and $\sigma_1=\sigma_2$.*

Proof. Let $e_1,\ldots,e_n$ be a basis for M and let $\alpha Ae_i=Bf_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. We assert that $f_1,\ldots,f_n$ generate the B-module N. Since any element of N is a linear combination of elements of a basis for N, it is enough to check that any unimodular element $f\in N$ is a linear combination of $f_1,\ldots,f_n$. If $e\in M$ is a unimodular element with $\alpha Ae=Bf$ and $e=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i e_i$, we have $Ae\subset\sum_{1\leqslant i\leqslant n} Ae_i$ and by lemma 1, we get $Bf\subset\sum_{1\leqslant i\leqslant n} Bf_i$.

This proves that $f_1,\ldots,f_n$ generate N. Since B is a commutative ring, this implies that rank $N\leqslant n$. Since α^{-1} is also a projectivity, it follows that rank $M=$rank N and $f_1,\ldots,f_n$ is a basis for N.

Let $\alpha A e_1 = Bf_1$ and $\alpha A e_2 = Bg_2$. Now e_1+e_2 is unimodular and $A(e_1+e_2) \subset$ $\subset Ae_1 + Ae_2$ which implies that $\alpha A(e_1+e_2) \subset Bf_1 + Bg_2$. Hence $\alpha A(e_1+e_2) = B(b_1 f_1 +$ $+ b_2 g_2)$. Since $Ae_2 \subset Ae_1 + A(e_1+e_2)$ we have $Bg_2 \subset Bf_1 + B(b_1 f_1 + b_2 g_2)$. Thus $g_2 = bf_1 + c(b_1 f_1 + b_2 g_2)$. Since f_1, g_2 are independent, it follows that $cb_2 = 1$, i.e. b_2 is a unit in B. Similarly b_1 is also a unit. Writing $f_2 = b_1^{-1} b_2 g_2$, we see that f_2 is unimodular, $Bf_2 = Bg_2$ and $\alpha A(e_1+e_2) = B(f_1+f_2)$. Doing this for any $i>1$, we get a basis $f_1, f_2, \ldots, f_n$ of N such that

$$\begin{aligned} &\alpha A e_i = B f_i && 1 \leqslant i \leqslant n \\ &\alpha A(e_1 + e_i) = B(f_1 + f_i) && 2 \leqslant i \leqslant n . \end{aligned} \tag{1}$$

It is clear as before that for any $a \in A$ $\alpha A(e_1 + ae_2) = B(b_1 f_1 + b_2 f_2)$ with b_1 a unit of B. Thus we can write

$$\alpha A(e_1 + a e_2) = B(f_1 + \sigma(a) f_2), \tag{2}$$

where $\sigma : A \to B$ is a well defined map. Clearly

$$\sigma(0) = 0 \quad \text{and} \quad \sigma(1) = 1 . \tag{3}$$

For any fixed $i>2$, we can similarly define $\tau : A \to B$ by

$$\alpha A(e_1 + a e_i) = B(f_1 + \tau(a) f_i) \tag{4}$$

and we have

$$\tau(0) = 0 \quad \text{and} \quad \tau(1) = 1 . \tag{5}$$

Since $e_1 + ae_2 + a' e_i \in A(e_1 + ae_2) + Ae_i$, we have $\alpha A(e_1 + ae_2 + a' e_i) \subset B(f_1 + \sigma(a) f_2)$ $+ Bf_i$. Hence $\alpha A(e_1 + ae_2 + a' e_i) = B(b(f_1 + \sigma(a) f_2) + b' f_i)$. Similarly, $\alpha A(e_1 + ae_2 +$ $+ a' e_i) = B(c(f_1 + \tau(a') f_i) + c' f_2)$.
Combining the above equations, we find that

$$\alpha A(e_1 + a e_2 + a' e_i) = B(f_1 + \sigma(a) f_2 + \tau(a') f_i) . \tag{6}$$

Since $ae_2 + e_i \in A(e_1 + ae_2 + e_i) + Ae_1$, using (6) and (5) we have $\alpha A(ae_2 + e_i) =$ $= B(b(f_1 + \sigma(a) f_2 + f_i) + cf_1)$. Since $\alpha A(ae_2 + e_i) \subset Bf_2 + Bf_i$, we get $b + c = 0$ and this proves

$$A(a e_2 + e_i) = B(\sigma(a) f_2 + f_i) . \tag{7}$$

Now using (6) and (5), we have for $a, a' \in A$, $\alpha A(e_1 + (a+a') e_2 + e_i) = B(f_1 + \sigma(a+$ $+ a') f_2 + f_i)$. But $\alpha A(e_1 + (a+a') e_2 + e_i) \subset \alpha A(e_1 + ae_2) + \alpha A(a' e_2 + e_i)$. Using (7), we therefore have $\alpha A(e_1 + (a+a') e_2 + e_i) \subset B(f_1 + \sigma(a) f_2) + B(\sigma(a') f_2 + f_i)$. Using the above, we see that for $a, a' \in A$, we have

$$\sigma(a + a') = \sigma(a) + \sigma(a') . \tag{8}$$

Now for $a, a' \in A$, we have, using (6), that $\alpha A(e_1 + aa' e_2 + ae_i) = B(f_1 + \sigma(aa') f_2 +$

$+\tau(a) f_i)$. On the other hand, $\alpha A(e_1+aa'e_2+ae_i) \subset \alpha A e_1+\alpha A(a'e_2+e_i)$ which implies that $\alpha A(e_1+aa'e_2+ae_i)=B(bf_1+b'(\sigma(a')f_2+f_i))$. Comparing coefficients, we find that $\sigma(aa')=\tau(a)\,\sigma(a')$. Setting $a'=1$, we get

$$\sigma(a)=\tau(a) \quad \text{for all} \quad a\in A \tag{9}$$

and

$$\sigma(a\,a')=\sigma(a)\,\sigma(a') \quad \text{for } a,\, a'\in A\,. \tag{10}$$

Thus, the map $\sigma: A\to B$ defined by (2) is a homomorphism. Replacing α by α^{-1}, we can define a homomorphism $\sigma': B\to A$ satisfying

$$\alpha^{-1} B(f_1+b f_2)=A(e_1+\sigma'(b)\,e_2)$$

and clearly σ and σ' are inverses of each other. Thus $\sigma: A\to B$ is an isomorphism.

We now show that, for $a_2,\ldots, a_n\in A$, we have

$$\alpha A(e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)=B(f_1+\sigma(a_2)f_2+\cdots+\sigma(a_n)f_n)\,. \tag{11}$$

We can assume by induction that

$$\alpha A(e_1+a_2e_2+\cdots+a_{n-1}e_{n-1})=B(f_1+\sigma(a_2)f_2+\cdots+\sigma(a_{n-1})f_{n-1})\,.$$

Since

$$\alpha A(e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)\subset \alpha A(e_1+a_2e_2+\cdots+a_{n-1}e_{n-1})+\alpha A e_n,$$

we have

$$\alpha A(e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)=B(b(f_1+\sigma(a_2)f_2+\cdots+\sigma(a_{n-1})f_{n-1})+b'f_n)\,.$$

On the other hand, we also have

$$\alpha A(e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)\subset \alpha A(e_1+a_ne_n)+\alpha A e_2+\cdots+\alpha A e_{n-1}\,.$$

Comparing coefficients we find that $b'=b\sigma(a_n)$ and this proves (11).

If $a_2,\ldots, a_n\in A$ are such that $a_2e_2+\cdots+a_ne_n\in M$ is unimodular, we have

$$\alpha A(a_2e_2+\cdots+a_ne_n)\subset A(e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)+\alpha A e_1\,.$$

Using (11) we have

$$\alpha A(a_2e_2+\cdots+a_ne_n)=B(b(f_1+\sigma(a_2)f_2+\cdots+\sigma(a_n)f_n)+b'f_1)\,.$$

We also have

$$\alpha A(a_2e_2+\cdots+a_ne_n)\subset Bf_2+\cdots+Bf_n\,.$$

Combining these two facts, we get

$$\alpha A(a_2e_2+\cdots+a_ne_n)=B(\sigma(a_2)f_2+\cdots+\sigma(a_n)f_n)\,. \tag{12}$$

We now assert that for any $a_1,\ldots, a_{i-1}, a_{i+1},\ldots, a_n\in A$ and $i=2,\ldots, n$,

$$\alpha A(e_i+a_1e_1+\cdots+a_{i-1}e_{i-1}+a_{i+1}e_{i+1}+\cdots+a_ne_n) = B(f_i+\sigma(a_1)f_1+\cdots+\sigma(a_n)f_n)\,. \tag{13}$$

To prove (13), we first observe, using (1) and (12) that $\alpha A(e_i+e_j)=B(f_i+f_j)$ for any $j\neq i$. Fixing an i and replacing e_1 by e_i, we can repeat the previous arguments to get an isomorphism $\varrho: A\to B$ such that for $a_1,\ldots, a_{i-1}, a_{i+1},\ldots, a_n\in A$, we have the following equation:

$$\alpha A(e_i + a_1 e_1 +\cdots+ a_{i-1}e_{i-1} + a_{i+1}e_{i+1} +\cdots+ a_n e_n) = B(f_i + \varrho(a_1) f_1 +\cdots+ \varrho(a_n) f_n). \quad (14)$$

instead of (11).

Taking in (14) $a_1=0$ and comparing this equation with (12), we find that $\sigma=\varrho$. Now (14) gives (13).

Let $e=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i e_i\in M$ be a unimodular element. We now show that

$$\alpha A(a_1 e_1 +\cdots+ a_n e_n) = B(\sigma(a_1) f_1 +\cdots+ \sigma(a_n) f_n). \quad (15)$$

Since for $i=1, 2, 3$, we have $\alpha Ae\subset \alpha Ae_i+\alpha A(e_i+\cdots+\widehat{a_i e_i}+\cdots)$ (where $\wedge$ indicates that the corresponding term is omitted), we can write $\alpha Ae=Bf$ where

$$\begin{aligned} f &= b_1\sigma(a_1) f_1 + c_1\sigma(a_2) f_2 + c_1\sigma(a_3) f_3 +\cdots \\ &= c_2\sigma(a_1) f_1 + b_2\sigma(a_2) f_2 + c_2\sigma(a_3) f_3 +\cdots \\ &= c_3\sigma(a_1) f_1 + c_3\sigma(a_2) f_2 + b_3\sigma(a_3) f_3 +\cdots. \end{aligned}$$

Comparing coefficients, we find

$$\left.\begin{aligned} &b_1\sigma(a_1)\sigma(a_2) = c_3\sigma(a_1)\sigma(a_2) = c_1\sigma(a_1)\sigma(a_2) \\ &\text{and for every } i\geqslant 3, \text{ we have} \\ &b_1\sigma(a_1)\sigma(a_i) = c_2\sigma(a_1)\sigma(a_i) = c_1\sigma(a_1)\sigma(a_i). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Since $e=\sum a_i e_i$ is unimodular, it follows that $\sum\sigma(a_i) f_i$ is unimodular and hence there exist $k_1,\ldots, k_n\in B$ such that $\sum\sigma(a_i) k_i=1$. Set

$$d = b_1\sigma(a_1) k_1 + c_1\sigma(a_2) k_2 +\cdots+ c_1\sigma(a_n) k_n.$$

Using the equations (16), we easily verify that $d\sigma(a_1)=b_1\sigma(a_1)$ and $d\sigma(a_i)=c_1\sigma(a_i)$ for $i\geqslant 2$. Then d is a unit and (15) is proved.

Let $\Phi: M\to N$ be the σ-semilinear isomorphism $M\to N$ defined by $\Phi(e_i)=f_i$. The equation (15) shows that $\alpha=P(\Phi)$. The proof of the second statement of the theorem is the same as in the classical case which can be found for instance in E. ARTIN [1, chap. II].

§ 3 A Counter-Example

If M, N are finite dimensional vector spaces of the same rank over fields A and B respectively and if $\alpha: P(M)\to P(N)$ is a bijection which is such that for any $p_1, p_2, p_3, \in P(M)$ with $p_1\subset p_2+p_3$, we have $\alpha p_1\subset\alpha p_2+\alpha p_3$, it can be proved (see for instance Artin [1, chap. II]) that α is a projectivity. We now give an example to show that this need not be the case if A and B are arbitrary rings.

Let K be a field; let $A=K\langle x\rangle$ be the ring of formal power series in x and B the

quotient field of A. The canonical inclusion $\sigma: A \to B$ induces a σ-semilinear map $A^3 \to B^3$ which in turn gives rise to a map $P(\sigma): P(A^3) \to P(B^3)$.

PROPOSITION 2.*) *The map $P(\sigma)$ is a bijection such that for any $p_1, p_2, p_3 \in P(A^3)$ with $p_1 \subset p_2 + p_3$, we have $P(\sigma)\, p_1 \subset P(\sigma)\, p_2 + P(\sigma)\, p_3$. However $P(\sigma)$ is not a projectivity.*

Proof. Let (a_1, a_2, a_3), (a'_1, a'_2, a'_3) be unimodular elements of A^3 which represent the same element of $P(B^3)$. We then have $a, a' \in A$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ such that $a'(a'_1, a'_2, a'_3) = a(a_1, a_2, a_3)$, i.e. $a' a'_i = a a_i \, 1 \leqslant i \leqslant 3$. If $\sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} a_i k_i = 1$, we have $a' \lambda = a$ with $\lambda = \sum a_i k_i A$. Similarly, $a\mu = a$ for some $\mu \in A$. This implies that a and a' differ by a unit of A and hence $A(a_1, a_2, a_3) = A(a'_1, a'_2, a'_3)$. This proves that $P(\sigma)$ is injective. Given any element of $P(B^3)$, we can write it in the form Be where $e \in A^3$. Dividing if necessary by a suitable power of x, we may assume that at least one coordinate of e has a nonzero constant term and hence is a unit in A. Therefore we may assume that e is a unimodular element of A^3 and this proves that $P(\sigma)$ is surjective. If $p_1, p_2, p_3 \in P(A^3)$ are such that $p_1 \subset p_2 + p_3$, it is trivial to check that $P(\sigma)\, p_1 \subset P(\sigma)\, p_2 + P(\sigma)\, p_3$. Now, $P(\sigma)\, A(1, 0, 0) = B(1, 0, 0) = B(x, 0, 0) \subset P(\sigma)\, A(x, 1, 0) + P(\sigma)\, A(0, 1, 0)$. However, $(1, 0, 0) \notin A(x, 1, 0) + A(0, 1, 0)$. This shows that $P(\sigma)$ is not a projectivity.

REFERENCES

[1] ARTIN, E., *Geometric Algebra* (Interscience, New York 1957).
[2] GABRIEL, P., Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1965/66, Exposé 1.

Forschungsinstitut für Mathematik, E.T.H. Zürich,
Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

Received July 1, 1968

*) (Added in proof.) This proposition and its proof are valid equally for any unique factorisation domain.

Nicht-hyperelliptische Schottky-Verdoppelungen

HEINZ HUBER (Basel)

Im Rahmen der geometrischen Funktionentheorie ist es wünschenswert, zu jeder natürlichen Zahl $g>2$ eine möglichst einfache kompakte Fläche vom Geschlecht g zu konstruieren, die nicht hyperelliptisch ist. Zu diesem Ende betrachten wir ein $(g+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet G der komplexen Ebene, dessen Randkomponenten g kongruente Kreise mit den Zentren ε^k, $(0\leqslant k\leqslant g-1$, $\varepsilon=\exp(2\pi i/g)$, $g\geqslant 2)$, und ein Kreis mit dem Zentrum 0 sind. Die Abbildung $z\to\varepsilon z$ von G auf sich induziert einen konformen Automorphismus Φ der Schottky-Verdoppelung S von G, der genau zwei Fixpunkte auf S besitzt. Wir werden zeigen:

I: Die beiden Fixpunkte von Φ sind keine Weierstrasspunkte von S.

Da die von Φ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung g als Permutationsgruppe auf der Menge der Weierstrasspunkte wirkt, und weil die Fixpunktmenge dieser Gruppe nur aus den beiden Fixpunkten von Φ besteht, so folgt aus I als Korollar:

II: Die Anzahl der Weierstrasspunkte von S ist teilbar durch g.

Da jede hyperelliptische Fläche vom Geschlecht g genau $2g+2$ Weierstrasspunkte besitzt, so ergibt sich aus II:

III: Für $g>2$ ist S niemals hyperelliptisch.

Für den Beweis von I ist es zweckmässig, die Schottky-Verdoppelung S von G folgendermassen zu beschreiben:

$$S=\{(z,1)\mid z\in\bar{G}\}\cup\{(z,2)\mid z\in\bar{G}\}$$

mit der Identifikation

$$(z,1)=(z,2)\quad\forall z\in\partial G.$$

Topologie und konforme Struktur von S werden in bekannter Weise derart definiert, dass die zwei Teilgebiete von S:

$$S_1=\{(z,1)\mid z\in G\},\qquad S_2=\{(z,2)\mid z\in G\}$$

durch die Abbildungen

$$\varphi_1:(z,1)\to z,\qquad \varphi_2:(z,2)\to\bar{z}$$

konform auf G abgebildet werden. S besitzt die konformen Automorphismen

$$\Phi:(z,1)\to(\varepsilon z,1),\quad (z,2)\to(\varepsilon z,2),$$
$$\Psi:(z,1)\to(\bar{z},2),\quad (z,2)\to(\bar{z},1),$$

sowie den antikonformen Automorphismus

$$\theta:(z,1)\to(z,2),\quad (z,2)\to(z,1).$$

Wir nehmen jetzt an, es sei $(0, 2)$ ein Weierstrasspunkt, und m die zugehörige minimale Nicht-Lücke. Dann ist

$$1 < m \leqslant g, \tag{1}$$

und es gibt eine auf S meromorphe Funktion p, welche in $(0, 2)$ einen Pol der Ordnung m besitzt und sonst überall holomorph ist. Durch Addition einer geeigneten Konstanten kann erreicht werden, dass $p(0, 1)=0$. Weiter kann durch Multiplikation mit einer passenden Zahl bewirkt werden, dass die Laurententwicklung von p in $(0, 2)$ folgendermassen normiert ist:

$$p(\bar{z}, 2) = 1/z^m + a/z^{m-1} + \cdots \tag{2}$$

Dann folgt

$$(p \circ \Phi)(\bar{z}, 2) = p(\varepsilon \bar{z}, 2) = p(\overline{\varepsilon^{-1} z}, 2) = \varepsilon^m/z^m + a\,\varepsilon^{m-1}/z^{m-1} + \cdots$$

Die Funktion $p \circ \Phi - \varepsilon^m p$ besitzt somit in $(0, 2)$ einen Pol der Ordnung $\leqslant m-1$, ist sonst überall holomorph, und verschwindet in $(0, 1)$. Daher muss sie, gemäss Definition von m, überall verschwinden:

$$p \circ \Phi = \varepsilon^m p. \tag{3}$$

Jetzt betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von p in $(0, 1)$:

$$p(z, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

Dann ist

$$(p \circ \Phi - \varepsilon^m p)(z, 1) = p(\varepsilon z, 1) - \varepsilon^m p(z, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon^k - \varepsilon^m)\, b_k z^k.$$

Wegen (3) folgt daraus: $(\varepsilon^k - \varepsilon^m) b_k = 0 \;\; \forall k \geqslant 1$, und somit wegen (1): $b_k = 0$ für $k = 1, \ldots, m-1$. Da die Gesamtanzahl der Nullstellen von p auf S gleich m ist, folgt daraus:

$$p(z, 1) = b z^m + \cdots, \quad b \neq 0, \tag{4}$$

und p besitzt ausser $(0, 1)$ keine weiteren Nullstellen auf S.

Aus (2) und (4) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} (p \circ \Psi)(z, 1) &= p(\bar{z}, 2) = 1/z^m + a/z^{m-1} + \cdots \\ (p \circ \Psi)(\bar{z}, 2) &= p(z, 1) = b z^m + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Das Produkt $p(p \circ \Psi)$ ist daher überall holomorph und somit konstant:

$$p \circ \Psi = b/p. \tag{6}$$

Weiter ergibt sich aus (2) und (4):

$$\begin{aligned} \overline{(p \circ \theta)}(z, 1) &= \overline{p(z, 2)} = 1/z^m + \bar{a}/z^{m-1} + \cdots \\ \overline{(p \circ \theta)}(\bar{z}, 2) &= \overline{p(\bar{z}, 1)} = \bar{b} z^m + \cdots \end{aligned}$$

Daraus und aus (5) folgt, dass die meromorphe Funktion $\overline{p \circ \theta} - p \circ \Psi$ in (0, 1) einen Pol der Ordnung $\leqslant m-1$ besitzt, überall sonst holomorph ist, und in (0, 2) von einer Ordnung $\geqslant m$ verschwindet; sie verschwindet daher überall, und wegen (6) folgt:

$$p \circ \theta = \bar{b}/\bar{p}.$$

Für $z \in \partial G$ folgt daraus wegen $\theta(z, 1) = (z, 1) : p(z, 1) = \bar{b}/\overline{p(z, 1)}$. Somit gibt es ein $r > 0$ so, dass $b = r^2$ und $|p(z, 1)| = r \ \forall z \in \partial G$. Sei jetzt $\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_g$ der Randzyklus von G. Dann hat die Funktion

$$f(z) = p(z, 1), \quad z \in \bar{G},$$

offenbar folgende Eigenschaften:

a) f ist holomorph auf $\bar{G}$, verschwindet im Nullpunkt von der Ordnung m und sonst nirgends in $\bar{G}$.

b) Die Bildzyklen $f(\gamma_j)$ liegen auf der Kreislinie mit dem Zentrum 0 und Radius r.

Wir betrachten die Umlaufszahlen dieser Bildzyklen um den Nullpunkt:

$$n_j = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_j} df/f, \quad j = 0, 1, \ldots, g.$$

Wegen a) ist

$$\sum_{j=0}^{g} n_j = m,$$

und wegen b) gilt: Auf γ_j nimmt f jeden Wert c, $|c| = r$, in mindestens $|n_j|$ verschiedenen Stellen an. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

1.) Sind alle $n_j \neq 0$, so nimmt f etwa den Wert r auf jedem γ_j mindestens einmal an. f besitzt also auf ∂G mindestens $g+1$ verschiedene r-Stellen. Damit besitzt aber p auf S mindestens $g+1 > m$ verschiedene r-Stellen. Das ist unmöglich.

2.) Ist $n_{j_0} = 0$, so wähle man einen Punkt $z_0 \in \gamma_{j_0}$. Dann nimmt f den Wert $c = f(z_0)$ auf γ_{j_0} mindestens einmal, auf jedem anderen γ_j mindestens $|n_j|$ mal an. Für die Gesamtzahl N der verschiedenen c-Stellen von f auf ∂G ergibt sich also

$$N \geqslant 1 + \sum_{j \neq j_0} |n_j| \geqslant 1 + \left| \sum_{j \neq j_0} n_j \right| = 1 + m.$$

Das ist wiederum nicht möglich.

Somit kann (0, 2) kein Weierstrasspunkt sein; dann ist aber auch $(0, 1) = \Psi(0, 2)$ keiner.

Eingegangen 26.9.68

Die Extremalität gewisser Teichmüllerscher Abbildungen des Einheitskreises

Von EUGEN BLUM (Zürich)

I. Einleitung

In seiner Arbeit [4] über quasikonforme Abbildungen hat Strebel Riemannsche Flächen R vom hyperbolischen Typ mit unendlichem Flächeninhalt betrachtet und geometrische Bedingungen dafür angegeben, dass jede zu $\varphi = \Phi'^2$ und k, $0<k<1$, gehörende Teichmüllersche Abbildung f_k extremal oder eindeutig extremal ist, wobei Φ eine beliebige konforme Abbildung von $|Z|<1$ auf R ist. Die vorliegende These ist im wesentlichen eine Fortsetzung dieser Arbeit. Die verwendeten Methoden sind zum Teil schon in den Arbeiten von Strebel [4, 5] und Sethares [3] enthalten.

In den folgenden Abschnitten betrachten wir einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen R mit unendlichem Flächeninhalt, die der z-Ebene überlagert und zum Einheitskreis $|Z|<1$ konform äquivalent sind. Φ sei eine konforme Abbildung von $|Z|<1$ auf R. Wir bilden die z-Ebene durch die affine Abbildung F_K: $w = Kx + iy$, $K>1$, auf die w-Ebene ab. F_K erzeugt durch „Mitdeformieren" von R eine Fläche S und eine K-quasikonforme Abbildung von R auf S, die bis auf Decktransformationen eindeutig bestimmt ist. Den Punkten der Fläche R mit der Spur z entsprechen dabei die Punkte auf S mit der Spur $w = Kx + iy$. Wir zeichnen, falls es mehrere gibt, eine dieser Abbildungen aus und bezeichnen sie wieder mit F_K. Die Fläche S ist ebenfalls zum Einheitskreis $|W|<1$ konform äquivalent. Ist Ψ eine konforme Abbildung von $|W|<1$ auf S, so ist $\Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi$ eine K-quasikonforme Abbildung von $|Z|<1$ auf $|W|<1$. Wir sagen, die quasikonforme Abbildung $F: R \to S$ stimme auf dem Rande von R mit F_K überein, wenn $f_k = \Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi$ und $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ die gleiche Randabbildung induzieren. f_k hat die komplexe Dilatation

$$\kappa = (K-1)\,\bar{\Phi}'^2/(K+1)\,|\Phi'|^2 = k\,\bar{\Phi}'^2/|\Phi'|^2$$

ist also eine zum quadratischen Differential $\varphi = \Phi'^2$ gehörende Teichmüllersche Abbildung. Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die Familie der quasikonformen Abbildungen von R auf S, die auf dem Rande mit F_K übereinstimmen, mit $\mathfrak{G}$ die Menge aller quasikonformen Abbildungen von $|Z|<1$ auf $|W|<1$, die auf $|Z|=1$ mit f_k übereinstimmen. Die Abbildung $F \in \mathfrak{F}$ und die induzierte Abbildung $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi \in \mathfrak{G}$ sind gleichzeitig extremal oder eindeutig extremal.[1])

[1]) D.h. Die Abbildung hat die kleinste maximale Dilatation, bezw. ist die einzige mit dieser Eigenschaft.

$\Gamma_y=\{\Gamma_y^\lambda\}$ sei ein beliebiges System von Querschnitten von R, die über der Geraden Im $z=y$ liegen. Wier nennen Γ_y^λ einen Horizontalquerschnitt von R. Mit $l(y)$ bezeichnen wir die totale Länge von Γ_y, mit $L(y)$ die Länge des Systems $F(\Gamma_y)=\{F(\Gamma_y^\lambda)\}$. A sei eine beliebige Vereinigungsmenge von Systemen Γ_y mit endlichem Inhalt $|A|$. (Im folgenden bezeichnen wir den Flächeninhalt einer messbaren Menge G immer mit $|G|$.) Wir nennen A einen Horizontalstreifen. Für eine beliebige Abbildung $F\in\mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $T(A)$ die Punktmenge $F(A)-F_K(A)$.

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

SATZ 1. a) *Gibt es in R eine Folge (A_n) von Horizontalstreifen mit den Eigenschaften:* $\lim_{n\to\infty}|A_n|=\infty$, $\lim_{n\to\infty}|T(A_n)|/|A_n|=0$, *so ist F_K in $\mathfrak{F}$ extremal.*

b) *Hat $F\in\mathfrak{F}$ die maximale Dilatation K und erfüllt (A_n) die strengeren Bedingungen:* $\lim_{n\to\infty}A_n=R$, $\lim_{n\to\infty}|T(A_n)|=0$, *so ist $F=F_K\cdot F_K$ ist also in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. (A_n) sei eine Folge von Horizontalstreifen, die die Voraussetzungen a) erfüllt. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Strebel [4] hat gezeigt, dass die Enden von $F_K(\Gamma_y^\lambda)$ von den entsprechenden Enden von $F(\Gamma_y^\lambda)$ für fast alle y den Abstand Null haben und dass für fast alle y gilt:

$$Kl(y)\leqslant L(y)=\int_{\Gamma_y}|p+q|\,dx \tag{1}$$

Dabei ist $p=F_z$, $q=F_{\bar{z}}$. Durch Integration und Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt aus (1):

$$\left.\begin{aligned} &K^2|A_n|^2\leqslant\left(\int L(y)\,dy\right)^2\leqslant\\ &\iint_{A_n}(|p|^2-|q|^2)\,dx\,dy\iint_{A_n}\frac{|p+q|^2}{|p|^2-|q|^2}\,dx\,dy\leqslant|F(A_n)|\,\tilde{K}|A_n| \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Für $|F(A_n)|$ gilt die Abschätzung:

$$|F(A_n)|\leqslant K|A_n|+|T(A_n)| \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$K^2\leqslant K\tilde{K}+\tilde{K}|T(A_n)|/|A_n| \tag{4}$$

Da $\underline{\lim}_{n\to\infty}|T(A_n)|/|A_n|=0$ ist, folgt aus 4): $K\leqslant\tilde{K}$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, nehmen wir an, F habe die maximale Dilatation K. Die Ungleichung (2) lässt sich verbessern, wenn man den Integranden $|p+q|^2/(|p|^2-|q|^2)$ genauer abschätzt. Es gilt:

$$|p+q|^2/(|p|^2-|q|^2)\leqslant K-2(k-\operatorname{Re}\tilde{\kappa})/(1-k^2) \tag{5}$$

wobei $\tilde{\kappa}=q/p$ die komplexe Dilatation von F ist. (Vergleiche Strebel [5]) Aus (2), (3) und (5) folgt:

$$K^2|A_n|^2 \leqslant (K|A_n| + |T(A_n)|)\left(K|A_n| - \frac{2}{1-k^2}\iint\limits_{A_n}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy\right) \tag{6}$$

Da $\operatorname{Re}\tilde{\kappa} \leqslant |\tilde{\kappa}| \leqslant k < 1$ ist, gilt:

$$\frac{2}{1-k^2}\iint\limits_{A_n}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy \geqslant 0 \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt schliesslich die Ungleichung:

$$0 \leqslant \frac{2}{1-k^2}\iint\limits_{A_n}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy \leqslant |T(A_n)| \tag{8}$$

Ist $\lim_{n\to\infty} A_n = R$ und $\lim_{n\to\infty}|T(A_n)| = 0$, so folgt aus (8):

$$\iint\limits_{R}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy = 0 \tag{9}$$

Es gilt also fast überall in R: $\operatorname{Re}\tilde{\kappa} = k$. Aus der Ungleichung $k = \operatorname{Re}\tilde{\kappa} \leqslant |\tilde{\kappa}| \leqslant k$ folgt schliesslich: $\tilde{\kappa} = k$ fast überall in R, wobei $k=(K-1)/(K+1)$ die komplexe Dilatation von F_K ist. Die komplexen Dilatationen von F und F_K stimmen also fast überall in R überein. Dann haben auch f und f_k fast überall in $|Z|<1$ die gleiche komplexe Dilatation. Daher gilt: $f = g \circ f_k$, wobei g eine lineare Transformation von $|W|<1$ ist. Da f auf $|Z|=1$ mit f_k übereinstimmt, muss g die identische Abbildung sein und es ist $f=f_k$ und daher $F=F_K$.

II. Ein Beispiel

Wir betrachten das folgende schlichte Gebiet G der z-Ebene:

$$G = \{z = x + iy \mid y > |x|^{\alpha},\ \alpha > 3\}$$

Die affine Abbildung $w = F_K(x+iy) = Kx+iy$, $K>1$, bildet G auf ein Gebiet G' der w-Ebene ab. Es ist bekannt, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist. (Vergleiche: Sethares [3].)

Wir beweisen den folgenden Satz:

SATZ 2. *F_K ist in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Γ_y ist der Horizontalquerschnitt von G, der auf der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegt. Es gilt:

$l(y)=2y^{1/\alpha}=2y^{\beta}$, $\beta=1/\alpha<\frac{1}{3}$. Wir betrachten eine Folge (y_n), $y_n\geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n=\infty$, und definieren: $G_n=G\cap\{\mathrm{Im}\, z<y_n\}$. Da (G_n) eine Folge von Horizontalstreifen ist, die G ausschöpft, genügt es, die Existenz einer monotonen, divergierenden Folge (y_n) nachzuweisen, für welche $\lim_{n\to\infty}|T(G_n)|=0$ ist, falls $\tilde{K}=K$ ist. Wir definieren: $d(y)=\sup_{z\in\Gamma_y}|\mathrm{Im}\, F(z)-y|$. Strebel [5] hat den folgenden Verzerrungssatz bewiesen:

VERZERRUNGSSATZ. *G sei ein schlichtes Gebiet der z-Ebene. $F\in\mathfrak{F}$ habe die maximale Dilatation $\tilde{K}$. Γ_y sei das System aller Querschnitte von G auf der Geraden $\mathrm{Im}\, z=y$ und $l(y)$ erfülle die Bedingung:*

$$l(y)\leqslant M<\infty \quad \text{für} \quad 0\leqslant|y-y_0|\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}.$$

Dann gilt: $d(y_0)\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$.

Wir beweisen den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 1. *Hat F die maximale Dilatation $\tilde{K}$, so gilt für $1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}>0$ die Abschätzung:*

$$d(y_0)\leqslant\frac{2\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta}}{1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}}=M\sqrt{K\tilde{K}} \tag{1}$$

Beweis. Wir wählen y_0 so, dass $1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}>0$ ist. Für $y\leqslant y_0$ gilt: $l(y)\leqslant 2y_0^{\beta}$. Für $0<y-y_0\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$ erhalten wir für $l(y)$ die Abschätzung:

$$l(y)=2y^{\beta}\leqslant 2y_0^{\beta}+2\beta(y_0)^{\beta-1}(y-y_0)\leqslant 2y_0^{\beta}+2\beta(y_0)^{\beta-1}M\sqrt{K\tilde{K}}=M$$

Für $|y-y_0|\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$ gilt also: $l(y)\leqslant M$. Aus dem Verzerrungssatz von Strebel folgt: $d(y_0)\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$, q.e.d.

Ist $G(y_0,y)=G\cap\{z\mid y_0<\mathrm{Im}\, z<y\}$, so erhalten wir für $|T(G(y_0,y))|$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}|T(G(y_0,y))|&\leqslant K\int_{y}^{y+d(y)}l(\eta)\,d\eta+K\int_{y_0-d(y_0)}^{y_0}l(\eta)\,d\eta\\&\leqslant Kl(y+d(y))\,d(y)+Kl(y_0)\,d(y_0)\end{aligned}$$

Für alle genügend grossen y gilt wegen (1): $d(y)<4\sqrt{K\tilde{K}}\,y^{\beta}<y$ und daher:

$$|T(G(y_0,y))|\leqslant 8\cdot 2^{\beta}K\sqrt{K\tilde{K}}y^{2\beta}+Kl(y_0)\,d(y_0)=Cy^{2\beta}+C_0 \tag{2}$$

Da $|G(y_0, y)| = 2(y^{\beta+1} - y_0^{\beta+1})/(\beta+1)$ ist, gilt:

$$\lim_{y\to\infty} |T(G(y_0, y))|/|G(y_0, y)| = 0.$$

Daraus folgt, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist.

Es sei nun $\tilde{K} = K$. Wir setzen $M(y) = K\int_y^{y+d(y)} l(y)\,dy$ und zeigen, dass eine monoton wachsende, divergierende Folge (y_n) existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} M(y_n) = 0$ ist. Da $|T(G_n)| \leqslant M(y_n)$ ist, gilt für eine solche Folge (y_n): $\lim_{n\to\infty} |T(G_n)| = 0$. Für alle genügend grossen y gilt nach (2):

$$M(y) \leqslant \text{const.}\, y^{2\beta} \tag{3}$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass eine monotone, divergierende Folge (y_{1k}) existiert so, dass für eine geeignete Konstante C_1 gilt: $M(y_{1k}) \leqslant C_1 (y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}$. Dazu nehmen wir an, es gebe ein y_0 so, dass für alle $y \geqslant y_0$ und gewissen Konstanten $\gamma > -1$, $c > 0$ gilt:

$$L(y) \geqslant K l(y) + c\, y^{\gamma} \tag{4}$$

Aus (I2), (I3), (2) und (4) folgt dann für alle $y \geqslant y_0$:

$$K^2 |G(y_0, y)|^2 + \frac{2Kc}{\gamma+1} |G(y_0, y)| (y^{\gamma+1} - y_0^{\gamma+1}) \leqslant \left(\int_{y_0}^{y} L(\eta)\,d\eta\right)^2 \leqslant$$

$$K^2 |G(y_0, y)|^2 + K |G(y_0, y)| (C y^{2\beta} + C_0)$$

Schliesslich erhalten wir für alle $y \geqslant y_0$ die Ungleichung:

$$\frac{2c}{\gamma+1} (y)^{\gamma+1} \leqslant C y^{2\beta} \left(1 + \frac{C_0}{C y^{2\beta}} + \frac{2c}{C(\gamma+1)} \frac{(y_0)^{\gamma+1}}{y^{2\beta}}\right) = C y^{2\beta} H(y) \tag{5}$$

Da $\lim_{y\to\infty} H(y) = 1$ ist, folgt aus (5): $\gamma + 1 \leqslant 2\beta$. Wir wählen $\gamma = 2\beta - 1$. Dann muss $c \leqslant C(\gamma+1)/2 = C\beta$ sein. Für $c > C\beta$ ist also die Annahme (4) falsch. Wählen wir $c > C\beta$, so existieren daher beliebig grosse y, für welche $L(y) < Kl(y) + c(y)^{2\beta-1}$ ist, und damit eine monotone, divergierende Folge (y_{1k}) so, dass gilt:

$$L(y_{1k}) < K l(y_{1k}) + c(y_{1k})^{2\beta-1} \tag{6}$$

Für $d(y)$ erhalten wir mit Hilfe einer einfachen geometrischen Überlegung die Abschätzung:

$$(d(y))^2 \leqslant (L(y))^2/4 - K^2 (l(y))^2/4 \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$(d(y_{1k}))^2 < (K l(y_{1k}) + c(y_{1k})^{2\beta-1})^2/4 - K^2 (l(y_{1k}))^2/4 =$$

$$Kc(y_{1k})^{3\beta-1} + (c^2/4)(y_{1k})^{\beta-2} = Kc(y_{1k})^{3\beta-1} (1 + (c/4K)(y_{1k})^{\beta-1})$$

Da $\beta-1<-\frac{2}{3}$ und $(\frac{3}{2})\,\beta-\frac{1}{2}<0$ ist, gilt für genügend grosse k:

$$d(y_{1k})<(2Kc)^{1/2}(y_{1k})^{(3\beta-1)/2}=c_1(y_{1k})^{\beta+(\beta-1)/2};\quad \lim_{k\to\infty} d(y_{1k})=0. \tag{8}$$

Wir erhalten daher für $M(y_{1k})$ die Abschätzung:

$$M(y_{1k})<Kl(y_{1k}+d(y_{1k}))\,d(y_{1k})\leqslant K2^{\beta+1}c_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\quad \text{q.e.d.} \tag{9}$$

Ist $\beta<\frac{1}{5}$, so ist $2\beta+(\beta-1)/2<0$ und es gilt daher:

$$\lim_{k\to\infty} M(y_{1k})=\lim_{k\to\infty}|T(G_{1k})|=0.$$

Es bleibt somit der Fall $\beta\geqslant\frac{1}{5}$ übrig. Wir nehmen an, es gebe ein k_0 so, dass für alle $y\geqslant y_{k_0}$ wiederum (4) gilt und betrachten das Gebiet $G(y_{1k_0}, y_{1k})$, wobei $k>k_0$ ist. Für $|T(G(y_{1k_0}, y_{1k}))|$ gilt wegen 9) die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}|T(G(y_{1k_0}, y_{1k}))|&\leqslant C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\\&\quad+Kl(y_{1k_0})\,d(y_{1k_0})=C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}+C_{01}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus (I2), (I3), (4) und (10) folgt für alle $k>k_0$ die Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2c}{\gamma+1}(y_{1k})^{\gamma+1}\leqslant C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\\&\left(1+\frac{C_{01}}{C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}}+\frac{2c}{C_1(\gamma+1)}\frac{(y_{1k_0})^{\gamma+1}}{(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}}\right)\\&=C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}H_1(y_{1k})\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Falls nun $\beta=\frac{1}{5}$ ist, so ist $H_1(y_{1k})\,(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}$ konstant und es müsste daher entgegen unserer Annahme $\gamma\leqslant-1$ sein. Zu gegebenen Konstanten $-\frac{3}{5}>\gamma>-1$ und $c>0$ gibt es daher eine monotone, divergierende Folge $(\tilde{y}_{2k})$, für welche gilt:

$$L(\tilde{y}_{2k})<Kl(\tilde{y}_{2k})+c(\tilde{y}_{2k})^{\gamma} \tag{12}$$

Aus (7) und (12) erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(d(\tilde{y}_{2k}))^2&<(Kc/2)\,l(\tilde{y}_{2k})(\tilde{y}_{2k})^{\gamma}+(c^2/4)(\tilde{y}_{2k})^{2\gamma}\\&=Kc(\tilde{y}_{2k})^{\gamma+1/5}(1+(c/4K)(\tilde{y}_{2k})^{\gamma-1/5})\end{aligned}$$

Für alle genügend grossen k und eine Konstante C_2 gilt daher:

$$d(\tilde{y}_{2k})<(2Kc)^{1/2}(\tilde{y}_{2k})^{1/10+\gamma/2};\quad M(\tilde{y}_{2k})<C_2(\tilde{y}_{2k})^{3/10+\gamma/2}$$

Da $\frac{3}{10}+\gamma/2<0$ ist, so gilt: $\lim_{k\to\infty} M(\tilde{y}_{2k})=\lim_{k\to\infty}|T(g_{2k})|=0$.

Wenn $\beta>\frac{1}{5}$ und $c>C_1(5\beta-1)/4$ ist, so können wir wie oben auf die Existenz

einer Folge (y_{2k}) schliessen, für welche die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $L(y_{2k}) < Kl(y_{2k}) + c(y_{2k})^{\beta+(3/2)(\beta-1)}$

b) $d(y_{2k}) < c_2(y_{2k})^{\beta+(3/4)(\beta-1)}$; c) $M(y_{2k}) < C_2(y_{2k})^{2\beta+(3/4)(\beta-1)}$

Dabei sind c_2 und C_2 positive Konstanten.
Ist $\beta < \frac{3}{11}$, so ist $2\beta + (\frac{3}{4})(\beta-1) = (\frac{11}{4})\beta - \frac{3}{4} < 0$. Ist $\beta \geqslant \frac{3}{11}$, so setzen wir das Verfahren fort. Nach r Schritten können wir schliesslich die Existenz einer divergierenden Folge (y_{rk}) nachweisen, welche für genügend grosse k und eine geeignet gewählte Kontsante C_r die folgende Bedingung erfüllt:

$$M(y_{rk}) < C_r(y_{rk})^{2\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}$$

$(2^r-1)/2^r$ strebt monoton gegen 1. Der Exponent $2\beta+(2^r-1)(\beta-1)/2^r$ wird negativ, sobald $(2^r-1)/2^r > 2\beta/(1-\beta)$ ist. Ist r_0 die ganze Zahl, für welche gilt: $(2^{r_0}-1)/2^{r_0} > 2\beta/(1-\beta) \geqslant (2^{r_0-1}-1)/2^{r_0-1}$ so erhalten wir nach r_0 Schritten eine Folge $(y_{r_0 k})$, für welche gilt:

a) $\lim_{k\to\infty} y_{r_0 k} = \infty$; b) $\lim_{k\to\infty} |T(G_{r_0 k})| = 0$.

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Falls $\alpha \leqslant 3$ ist, so versagt das im Beweis angewendete Iterationsverfahren.

III. Extremale quasikonforme Abbildung einer Klasse von Überlagerungsflächen mit unendlichem Flächeninhalt

R sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die der z-Ebene überlagert ist. Jedes System $\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ zerlegt R in endlich oder unendlich viele Teilgebiete. Für jedes dieser Teilgebiete ist bestimmt, ob es sich an mindestens einen der Querschnitte Γ_y^λ nach oben anschliesse. Mit $G_y = \{G_y^\mu\}$ bezeichnen wir die Gesamtheit dieser Teilgebiete. Wir wählen nun ein festes System Γ_{y_0} so, dass jedes dieser Teilgebiete $G_{y_0}^\mu$ ganz oberhalb der Geraden $\mathrm{Im}\, z = y_0$ liegt. Die Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn wir für Γ_{y_0} das System aller Querschnitte von R über $\mathrm{Im}\, z = y_0$ wählen. Für $y > y_0$ bezeichnen wir mit $\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ das System aller Querschnitte von R, die über der Geraden $\mathrm{Im}\, z = y$ und in G_{y_0} liegen. $G_y = \{G_y^\mu\}$ liegt ganz oberhalb der Geraden $\mathrm{Im}\, z = y$. Den zwischen den Geraden $\mathrm{Im}\, z = y_1 \geqslant y_0$ und $\mathrm{Im}\, z = y > y_1$ liegenden Teil von G_{y_0} bezeichnen wir mit $G(y_1, y)$.

DEFINITION. *Wir nennen G_{y_0} einen oberen Arm oder einen Arm in der Richtung*

$\pi/2$, *falls gilt:*

a) $|G_{y_0}| = \infty$

b) *Es existiert ein* $a < 1$ *so, dass* $\overline{\lim}_{y\to\infty}(y)^{-(a+1)} \int_{y_0}^{y} l(\eta)\, d\eta = C_0$, $0 \leqslant C_0 < \infty$ *ist.*

Wir beweisen den folgenden Satz:

SATZ 3. *Falls R mindestens einen oberen Arm hat, so ist* F_k *in* $\mathfrak{F}$ *extremal.*

Beweis. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Da $G(y_1, y)$ für alle $y > y_1 > y_0$ ein Horizontalstreifen ist, genügt es nach dem Satze 1 zu zeigen, dass für ein $y_1 > y_0$ $\underline{\lim}_{y\to\infty} |T(G(y_1, y))|/|G(y_1, y)| = 0$ ist. Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 2. *Ist* $d^+(y) = \sup_{z\in\Gamma_y}(\operatorname{Im} F(z) - y)$, *so gilt die Abschätzung:*

$$(d^+(y))^2 \leqslant K\tilde{K} \int_{y+(d^+(y)/2)}^{y+d^+(y)} l(\eta)\, d\eta \left(\int_{y}^{y+(d^+(y)/2)} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \right)^{-1} \tag{2a}$$

Ist $d^-(y) = \inf_{z\in\Gamma_y}(\operatorname{Im} F(z) - y)$, *so gilt, falls* $F(\Gamma_y)$ *ganz in* $F_k(G_{y_0})$ *liegt, die Abschätzung:*

$$(d^-(y))^2 \leqslant K\tilde{K} \int_{y+d^-(y)}^{y+(d^-(y)/2)} l(\eta)\, d\eta \left(\int_{y+(d^-(y)/2)}^{y} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \right)^{-1} \tag{2b}$$

Beweis. $d^-(y)$ und $d^+(y)$ sind nach unten halbstetige Funktionen. Sind sie für eine in einem Intervall überall dichte Punktmenge beschränkt, so bleiben sie daher im ganzen Intervall beschränkt. Da die Enden von $F(\Gamma_y^\lambda)$ und $F_k(\Gamma_y^\lambda)$ für fast alle y den Abstand Null haben, können wir uns bei der Abschätzung von $d^+(y)$ und $d^-(y)$ auf Querschnittssysteme Γ_y beschränken, die diese Eigenschaft haben. Wir nehmen an, es gebe ein $y_1 > y$ und einen Punkt $P \in \Gamma_y$ so, dass $F(P)$ für ein $\tilde{y} > y_1$ auf $F_k(\Gamma_{\tilde{y}})$ liegt. $F(\Gamma_y)$ hat dann Punkte mit $F_k(\Gamma_{y_1})$ gemeinsam und es gibt in $F_K(G_{y_1})$ Punkte, die nicht in $F(G_y)$ liegen. $F_K(G_{y_1})$ ist also keine Teilmenge von $F(G_y)$. Jedes System $F(\Gamma_{y+\Delta y})$, $0 < \Delta y < y_1 - y$, trifft dann $F_K(\Gamma_{y_1})$ ebenfalls. Wäre dies nicht der Fall, so würde nämlich gelten: $F_K(G_{y_1}) \subset F(G_{y+\Delta y}) \subset F(G_y)$, was einen Widerspruch darstellt.

Gibt es ein y_2, $y_0 \leqslant y_2 < y$ und einen Punkt $P \in \Gamma_y$ so, dass $F(P)$ für ein $\tilde{y} < y_2$ auf $F_K(\Gamma_{\tilde{y}})$ liegt, so trifft $F(\Gamma_y)$ das System $F_K(\Gamma_{y_2})$ und es gilt: $F(G_y) \not\subset F_K(G_{y_2})$. Für $0 < \Delta y < y - y_2$ trifft auch $F(\Gamma_{y-\Delta y})$ das System $F_K(\Gamma_{y_2})$. Sonst wäre ja $F(G_y) \subset$ $\subset F(G_{y-\Delta y}) \subset F_K(G_{y_2})$, was im Widerspruch zur Aussage $F(G_y) \not\subset F_K(G_{y_2})$ steht.
Wir betrachten nun die Kurvenscharen:

$$\mathfrak{H} = \left\{ \Gamma_\eta \;\middle|\; y \leqslant \eta \leqslant y + \frac{y_1 - y}{2} \right\}; \qquad \mathfrak{H}' = \{F(\Gamma_\eta) \mid \Gamma_\eta \in \mathfrak{H}\}$$

Um eine obere Schranke für $d^+(y)$ zu erhalten, schätzen wir die extremalen Längen $\lambda=\lambda(\mathfrak{H})$ und $\lambda'=\lambda(\mathfrak{H}')$ ab. Die extremale Länge λ einer Schar $\mathfrak{C}$ von lokal rektifizierbaren Kurven C können wir nach Lehto und Virtanen [2] so definieren:

$$(\lambda(\mathfrak{C}))^{-1} = \inf_{\varrho\in\mathfrak{P}} m_\varrho(\Omega)\Big(\inf_{\mathfrak{C}\ni C} l_\varrho(C)\Big)^{-2}$$

Dabei ist $\mathfrak{P}$ die Familie der nicht-negativen Borel-messbaren Funktionen, Ω die von der Kurvenschar $\mathfrak{C}$ überstrichene Menge,

$$l_\rho = \int_C \rho\,|dz|; \quad m_\rho(\Omega) = \iint_\Omega \rho^2\,dx\,dy$$

Für eine feste Metrik ϱ_0 gilt also:

$$1/\lambda' \leqslant m_{\varrho_0}(\inf_{\mathfrak{H}'} l_{\varrho_0})^{-2}$$

Wir wählen ϱ_0 wie folgt: $\varrho_0=1$ in $F_K(G((y+y_1)/2, y_1))$
$\varrho_0=0$ sonst.
Aus den vorangehenden topologischen Überlegungen folgt mit Hilfe der Metrik ϱ_0:

$$\lambda' \geqslant (y_1-y)^2\left(K\int_{(y+y_1)/2}^{y_1} l(\eta)\,d\eta\right)^{-1} \tag{3}$$

Da F $\tilde{K}$-quasikonform ist, gilt:

$$\tilde{K} \geqslant \lambda'/\lambda \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt die Ungleichung:

$$(y_1-y)^2 \leqslant K\tilde{K}\int_{(y+y_1)/2}^{y_1} l(\eta)\,d\eta\left(\int_y^{(y+y_1)/2}\frac{1}{l(\eta)}\,d\eta\right)^{-1} \tag{5}$$

Gehen wir in (5) zur oberen Grenze über, so erhalten wir die Abschätzung (2a). Ist $F(\Gamma_y)$ in $F_K(G_{y_0})$ enthalten, so führen analoge Überlegungen zur Ungleichung (2b).

Wir brauchen nun eine vorläufige Abschätzung von $d(y)=\max(d^+(y), |d^-(y)|)$, welche für alle genügend grossen y gilt und beweisen daher den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 3. *Zu jeder Konstanten $\varepsilon>0$ existiert ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ so, dass für $y\geqslant\tilde{y}(\varepsilon)$ gilt: $d(y)<\varepsilon y$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gebe zu einer Konstanten $c>0$ beliebig grosse y so,

dass $d^+(y) \geqslant cy$ ist. Ist $1 > a' > a$, so existiert wegen 1b) ein y^* so, dass für $y \geqslant y^*$ gilt:

$$\int_{y+(d^+(y)/2)}^{y+d^+(y)} l(\eta)\, d\eta < c(y + d^+(y))^{a'+1}/4 \tag{6}$$

Mit I bezeichnen wir das Intervall $y \leqslant \eta \leqslant (1 + c/2)\, y$ und betrachten für $a' < b < 1$ die folgende Menge E_b:

$$E_b = \{\eta \mid \eta \in I,\ l(\eta) \geqslant y^b\}$$

Für das Mass $\mu(E_b)$ von E_b gilt wegen 1b) für $y \geqslant y^*$:

$$\mu(E_b) < \text{const.}\,(y)^{1+a'-b}.$$

Daraus folgt:

$$\mu(I - E_b) > (c/2)\,(1 - \text{const.}\,(y)^{a'-b})\, y$$

Da $a' - b < 0$ ist, können wir annehmen, für $y \geqslant y^*$ sei $\mu(I - E_b) > cy/4$. Wir wählen $y \geqslant y^*$ so, dass $d^+(y) \geqslant cy$ ist. Es gilt dann:

$$\int_{y}^{y+(d^+(y)/2)} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \geqslant \int_{I} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \geqslant \int_{I-E_b} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta > \mu(I - E_b)\, y^{-b} > c(y)^{1-b}/4 \tag{7}$$

Aus (2a), (6) und (7) folgt: $(d^+(y))^2 < K\tilde{K}(y + d^+(y))^{a'+1}(y)^{b-1}$. Da $b - 1 < 0$ und $a' + 1 < 2$ ist, existiert ein $\tilde{y} \geqslant y^*$ so, dass $d^+(y) < cy$ ist für $y \geqslant \tilde{y}$, was einen Widerspruch darstellt. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ so, dass $d^+(y) < \varepsilon y$ ist für $y \geqslant \tilde{y}(\varepsilon)$.

$Q(y)$ sei die Menge aller y', für welche gilt: *a)* $y_0 < y' < y$; b) Es existiert ein Punkt $P \in \Gamma_y$ so, dass $F(P) \in F_K(\Gamma_{\tilde{y}})$ für ein $\tilde{y} < y'$. Für jedes $y' \in Q(y)$ gilt:

$$(y - y')^2 \leqslant K\tilde{K} \int_{y'}^{(y+y')/2} l(\eta)\, d\eta \left(\int_{(y+y')/2}^{y} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \right)^{-1}$$

Auf gleiche Weise, wie oben lässt sich zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ existiert so, dass für alle $y \geqslant \tilde{y}(\varepsilon)$ gilt: $\inf Q(y) \geqslant (1 - \varepsilon)\, y$. Ist $\varepsilon < \frac{1}{2}$, so ist für $y > \max(2y_0, \tilde{y}(\varepsilon))$ $\inf Q(y) > y_0$. Dann liegt $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_K(G_{y_0})$ und es gilt daher: $y - \inf Q(y) = |d^-(y)| < \varepsilon y$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Gleichzeitig haben wir gezeigt, dass für genügend grosse y $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_K(G_{y_0})$ liegt.

Wir wählen y_1 so gross, dass $F(\Gamma_{y_1})$ in $F_K(G_{y_0})$ liegt und suchen eine divergierende Folge (y_n), für die wir eine möglichst kleine Schranke für $|T(G(y_1, y_n))|$ angeben

können. Wir definieren die Menge B:

$$B = \left\{ b \mid b < 1, \overline{\lim_{y \to \infty}} (y)^{-b-1} \int_{y_0}^{y} l(\eta)\, d\eta = 0 \right\}$$

Ist $b_0 = \inf B$, so folgt aus 1): a) $-1 \leqslant b_0 \leqslant a$; b) Falls $b_0 = -1$ ist, so liegt b_0 nicht in B.

Wir wählen b_1 wie folgt: $b_1 = b_0$, falls $b_0 \in B$ ist, $b_1 = b_0 + \varepsilon$, falls $b_0 \notin B$ ist, wobei $0 < \varepsilon < (1 - b_0)/2$ ist. Da b_1 in B liegt, existiert für ein beliebig gegebenes $c > 0$ eine monotone, divergierende Folge (y_n) so, dass für genügend grosse n gilt:

$$y_n/2 > y_1; \quad \int_{y_n/2}^{y_n} l(\eta)\, d\eta < c (y_n)^{b_1 + 1} \tag{8}$$

I_n sei das Intervall $y_n/2 \leqslant y \leqslant y_n$. Nach dem Hilfssatz 3 gilt für eine Nullfolge (ε_n) und $y \in I_n : d(y) < \varepsilon_n y_n$. Ist $\inf_{y \in I_n} d^+(y) = 0$, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen daher an, es sei $\inf_{y \in I_n} d^+(y) > 0$. Wir unterteilen das Intervall I_n durch die folgenden Teilpunkte a_{ni}:

$$a_{n0} = y_n/2; \quad a_{n1} = a_{n0} + d^+(a_{n0}); \quad a_{ni} = a_{n,i-1} + d^+(a_{n,i-1})$$

Es gelte: $a_{nk} \leqslant y_n$; $a_{n,k+1} > y_n$.

Wir betrachten die Intervalle $I_{ni} = [a_{n_1 i-1}, a_{ni}]$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Da für $y \in I_n$ $d(y) < \varepsilon_n y_n$ ist, können wir annehmen, es gelte:

$$\sum_{i=1}^{k} d^+(a_{n,i-1}) > y_n/4$$

Es gibt mindestens ein Intervall I_{nl} so, dass gilt:

$$\int_{I_{nl}} l(\eta)\, d\eta < 4c\, d^+(a_{n,l-1})\, (y_n)^{b_1} \tag{9}$$

Wäre nämlich für alle $i \int_{I_{ni}} l(\eta)\, d\eta \geqslant 4c (y_n)^{b_1} d^+(a_{n,i-1})$, so würde gelten:

$$\int_{I_n} l(\eta)\, d\eta \geqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{I_{ni}} l(\eta)\, d\eta \geqslant 4c (y_n)^{b_1} \sum_{i=1}^{k} d^+(a_{n,i-1}) > c (y_n)^{b_1 + 1},$$

was im Widerspruch zu (8) steht.

Wir betrachten nun für ein $\delta > 0$ die Menge E_{nl}^{δ}:

$$E_{nl}^{\delta} = \{ \eta \mid \eta \in I_{nl},\ l(\eta) \geqslant (y_n)^{b_1 + \delta} \}$$

und schätzen ihr Mass $\mu(E_{nl}^{\delta})$ ab. Es gilt:

$$4c(y_n)^{b_1} d^+(a_{n,l-1}) > \int_{I_{nl}} l(\eta)\, d\eta \geqslant \int_{E_{nl}^{\delta}} l(\eta)\, d\eta \geqslant \mu(E_{nl}^{\delta})(y_n)^{b_1+\delta}$$

Daraus folgt: $\mu(E_{nl}^{\delta}) < 4cd^+(a_{n,l-1})(y_n)^{-\delta}$.
Für genügend grosse n gilt:

$$\mu(E_{nl}^{\delta}) < d^+(a_{n,l-1})/4 \tag{10}$$

Wir definieren: $I_{nl}^1 = [a_{n,l-1}, (a_{n,l-1}+a_{nl})/2]$.
Mit Hilfe von (10) erhalten wir die Abschätzung:

$$\int_{I_{nl}^1} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta > \int_{I_{nl}^1 - I_{nl}^1 \cap E_{nl}^{\delta}} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta > (y_n)^{-b_1-\delta} d^+(a_{n,l-1})/4 \tag{11}$$

Aus (2a), (9) und (11) folgt: $d^+(a_{n,l-1}) < \text{const.}(y_n)^{b_1+\delta/2}$.
Wir setzen: $a_{n,l-1} = y_n'$. Da $y_n/2 \leqslant y_n' \leqslant y_n$ ist, gilt:.

$$\lim_{n\to\infty} y_n' = \infty; \qquad d^+(y_n') < \text{const.}(y_n')^{b_1+\delta/2} \tag{12}$$

Aus (9) und (12) folgt:

$$|T(G(y_1, y_n'))| \leqslant \int_{y_1+d^-(y_1)}^{y_1} l(\eta)\, d\eta + \int_{y_n'}^{y_n'+d^+(y_n')} l(\eta)\, d\eta < C_1 + \text{const.}(y_n')^{2b_1+\delta/2}$$

Da $b_1-\varepsilon$ nicht in B liegt, gilt: $\underline{\lim}_{n\to\infty}(y_n')^{-(1+b_1-\varepsilon)} \int_{y_1}^{y_n'} l(\eta)\, d\eta \geqslant C_0$, wobei $0 < C_0 \leqslant \infty$ ist. Für genügend grosse n gilt also:

$$|T(G(y_1, y_n'))|/|G(y_1, y_n')| < C_1/|G(y_1, y_n')| + \text{const.}(y_n')^{b_1+\delta/2+\varepsilon-1}$$

Wählen wir $\varepsilon = \delta/2 = (1-b_1)/4$, so ist $b_1+\delta/2+\varepsilon-1 = (b_1-1)/2 < 0$. Daher gilt: $\lim_{n\to\infty}|T(G(y_1, y_n'))|/|G(y_1, y_n')| = 0$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Durch eine Drehung um den Winkel α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ geht die Fläche R in eine Fläche $\tilde{R}$ über. Hat R einen oberen Arm, so sagen wir, $\tilde{R}$ habe einen Arm in der Richtung $\pi/2+\alpha$. Wir sprechen von einem rechten (bezw. linken oder unteren) Arm, wenn $\alpha = -\pi/2$ (bezw. $\alpha = \pi/2$ oder $\alpha = \pi$) ist.

Es lässt sich zeigen, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist, wenn die Fläche R einen Arm in einer beliebigen Richtung besitzt.

Im Beweis des Satzes 3 wird die Struktur der Fläche R ausserhalb des Armes G_{y_0} nicht benützt. F_K ist daher extremal, wenn R eine beliebige, der z-Ebene überlagerte

Riemannsche Fläche ist, welche ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet mit einem Arm enthält.

In einem rechten oder linken Arm G_{x_0} definieren wir Γ_x, $l(x)$, G_x und $G(x_1, x_2)$ auf analoge Weise wie Γ_y, $l(y)$, G_y und $G(y_1, y_2)$. Ist $\tilde{\Gamma}_{K_x}=F_K(\Gamma_x)$, so definieren wir:

$$D(x) = \sup_{P \in \tilde{\Gamma}_{Kx}} | R_l \; F^{-1}(P) - x|$$

Wir betrachten nun eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche R, die einen vertikalen oder horizontalen Arm besitzt, der anstelle von (1b) die strengere bedingung (1b′) erfüllt:

$$l(y) \leqslant \text{const.}\,|y|^{\beta} \quad (\text{bezw. } l(x) \leqslant \text{const.}\,|x|^{\beta}), \quad 0 < \beta < \tfrac{1}{3} \tag{1b′}$$

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz

HILFSSATZ 4. *$F \in \mathfrak{F}$ habe die maximale Dilatation K.*

a) *Hat R einen oberen (bezw. unteren) Arm, der die Bedingung* (1b′) *erfüllt, so existiert eine monotone, divergierende Folge (y_n) (bezw. $(\bar{y}_n)$), für welche gilt:*

$$\left.\begin{aligned} &d(y_n) < \text{const.}\,(y_n)^{-\eta-\beta}; \\ &M(y_n) = \int_{y_n - d(y_n)}^{y_n + d(y_n)} l(y)\,dy \leqslant \text{const.}\,(y_n)^{-\eta}, \quad \eta > 0. \\ &(\text{bezw. } d(\bar{y}_n) < \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta-\beta}; \quad M(\bar{y}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta}) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

b) *Hat R einen rechten (bezw. linken) Arm, der* (1b′) *erfüllt, so existiert eine monotone, divergierende Folge (x_n) (bezw. $(\bar{x}_n)$), für welche gilt:*

$$\left.\begin{aligned} &D(x_n) < \text{const.}\,(x_n)^{-\beta-\eta}; \quad \tilde{M}(x_n) = \int_{x_n - D(x_n)}^{x_n + D(x_n)} l(x)\,dx \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta} \\ &(\text{bezw. } D(\bar{x}_n) < \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\beta-\eta}; \quad \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta}) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Beweis. Wir nehmen an, R habe einen oberen Arm G_{y_0}. Es gibt ein $y^* > y_0$ so, dass für $y \geqslant y^*$ $F(\Gamma_y) \subset F_K(G_{y_0})$ ist. Aus der Bedingung (1b′) und aus dem Hilfssatz 2 folgt, dass für alle genügend grossen y gilt:

$$d(y) \leqslant \text{const.}\,(y)^{\beta} < y \tag{15}$$

Daraus erhalten wir für $M(y)$ die Abschätzung:

$$M(y) \leqslant \sup_{y - d(y) \leqslant \eta \leqslant y + d(y)} (l(\eta))\, 2\, d(y) \leqslant 2\, d(y) \text{const.}\,(y + d(y))^{\beta} \leqslant \text{const.}\,(y)^{2\beta} \tag{16}$$

Wir nehmen an, es gebe ein $\tilde{y} \geqslant y^*$ so, dass für $y \geqslant \tilde{y}$ und gewisse Konstanten $\gamma > -1$

und $c>0$ gilt:

$$L(y) \geqslant K\,l(y) + c(y)^{\gamma} \tag{17}$$

In gleicher Weise wie im Kapitel II folgt aus (16) und (17):

$$2\,c(y)^{\gamma+1}/(\gamma+1) < C(y)^{2\beta}\,(1 + (\tilde{C}/(y)^{2\beta}))$$

wobei C und $\tilde{C}$ positive Konstanten sind. Daraus können wir schliessen, dass eine monotone, divergierende Folge (y_{1k}) existiert so, dass für $c>C\beta$ gilt:

$$L(y_{1k}) < K\,l(y_{1k}) + c(y_{1k})^{2\beta-1}$$

Um eine Abschätzung für $d(y_{1k})$ zu erhalten, betrachten wir das Querschnittssystem $\Gamma_{y_{1k}} = \{\Gamma^{\nu}_{y_{1k}}\}$. Die Länge von $\Gamma^{\nu}_{y_{1k}}$ bezeichnen wir mit l_{ν}.
Für $d_i = \sup_{z \in \Gamma^{i}_{y_{ik}}} |F(z) - y_{1k}|$ gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(d_i)^2 &\leqslant (L(y) - K \sum_{i \neq k} l_i)^2/4 - K^2 l_i^2/4 < (K l_i + c(y_{1k})^{2\beta-1})^2/4 - K^2 l_i^2/4 \\ &= K\,c\,l_i (y_{1k})^{2\beta-1}/2 + c^2 (y_{1k})^{4\beta-2}/4 \leqslant C_1 (y_{1k})^{3\beta-1} + c^2 (y_{1k})^{4\beta-2}/4 \\ &= C_1 (y_{1k})^{3\beta-1}(1 + C_2 (y_{1k})^{\beta-1})\end{aligned}$$

Da $\beta - 1 < 0$ ist, gilt für genügend grosse k:

$$d_i(y_{1k}) \leqslant c_1 (y_{1k})^{\beta+(\beta-1)/2}; \qquad d(y_{1k}) = \sup_i d_i(y_{1k}) \leqslant c_1 (y_{1k})^{\beta+(\beta-1)/2}$$

Daraus erhalten wir für $M(y_{1k})$ die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned} M(y_{1k}) &\leqslant 2\,d(y_{1k}) \Big(\sup_{y_{1k}-d \leqslant y \leqslant y_{1k}+d} l(y) \Big) \\ &\leqslant d(y_{1k})\,\text{const.}\,(y_{1k} + d(y_{1k}))^{\beta} \leqslant C_1 (y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das im Kapitel II eingeführte Iterationsverfahren lässt sich daher auch auf Arme G_{y_0} anwenden, welche die Bedingung 1b') erfüllen. Nach r Schritten können wir die Existenz einer Folge (y_{rk}) nachweisen, für welche gilt:

$$d(y_{rk}) < c_r (y_{rk})^{\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}; \qquad M(y_{rk}) < C_r (y_{rk})^{2\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}$$

Da $\beta < \frac{1}{3}$ ist, finden wir nach endlich vielen Schritten eine monotone, divergierende Folge (y_n), für welche (13) gilt. Hat R einen unteren Arm, so verläuft der Beweis genau gleich.

Hat R einen horizontalen, z.B. einen rechten Arm, so betrachten wir die Abbildungen:

$$\varphi_1 : z \to w^* = i z; \qquad (F^*_K)^{-1} : w^* = u^* + i v^* \to z^* = (u^*/K) + i v^*$$
$$\varphi_2 : z^* \to w = -\,i K z^*$$

Es gilt:

$$\varphi_2 \circ (F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1 = F_K; \quad F_K^* = \varphi_1 \circ F_K^{-1} \circ \varphi_2$$

Ist F eine Vergleichsabbildung von F_K mit der maximalen Dilatation K, so ist $F^* = \varphi_1 \circ F^{-1} \circ \varphi_2$ eine Vergleichsabbildung von F_K^*. Da φ_1 und φ_2 konform sind, hat F^* ebenfalls die maximale Dilatation K. $(F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1$ bildet R auf eine Fläche R^* mit einem oberen Arm, der die Bedingung (1b') erfüllt, ab. Nach dem soeben bewiesenen Teil des Hilfssatzes existiert eine divergierende Folge (y_n^*), für welche gilt:

$$d(y_n^*) = \sup_{P^* \in \Gamma_{yn^*}} |\operatorname{Im} F^*(P^*) - y_n^*| < \text{const.}\,(y_n^*)^{-(\eta+\beta)};$$
$$M(y_n^*) < \text{const.}\,(y_n^*)^{-\eta}, \quad \eta > 0.$$

φ_2 bildet $\Gamma_{y_n^*}$ auf ein System $\tilde{\Gamma}_{u_n}$ von Vertikalquerschnitten von $F_K(R)$ ab, wobei $u_n = K y_n^*$ ist. Wir wählen auf $\tilde{\Gamma}_{u_n}$ einen beliebigen Punkt P. Es gilt:

$$\operatorname{Re} F^{-1}(P) = \operatorname{Re}(\varphi_1^{-1} \circ F^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im}(F^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im} F^*(P^*)$$
$$\operatorname{Re} F_K^{-1}(P) = \operatorname{Im}(F_K^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im} F_K^*(P^*)$$

Da $P^* = \varphi_2^{-1}(P)$ auf $\Gamma_{y_n^*}$ liegt, folgen daraus die Abschätzungen:

$$\left.\begin{aligned} &|\operatorname{Re} F^{-1}(P) - \operatorname{Re} F_K^{-1}(P)| = |\operatorname{Im} F^*(P^*) - y_n^*| < \text{const.}\,(y_n^*)^{-(\beta+\eta)} \\ &D(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\beta-\eta}; \quad \text{wobei } x_n = u_n/K = y_n^* \text{ ist.} \\ &\tilde{M}(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Wir beweisen schliesslich den folgenden Eindeutigkeitssatz:

SATZ 4. *Die Fläche R besitze mindestens einen Arm. Es sei möglich, höchstens vier Arme, zwei vertikale und zwei horizontale, die wir mit G_{y_0}, $G_{\bar{y}_0}$, G_{x_0}, $G_{\bar{x}_0}$ bezeichnen, so abzutrennen, dass $|R - G_{y_0} - G_{\bar{y}_0} - G_{x_0} - G_{\bar{x}_0}| < \infty$ ist. Falls für genügend grosse $|x|$ und $|y|$; $l(x) \leqslant c|x|^\beta$ und $l(y) \leqslant c$; $|y|^\beta$, $0 < \beta < 1/3$, ist, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. Da R einen Arm besitzt, ist F_K extremal. F sei eine Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation K. Aus dem Hilfssatz 4 folgt die Existenz von vier monotonen, divergierenden Folgen (y_n), $(\bar{y}_n)$, (x_n) und $(\bar{x}_n)$ mit den Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} &d(y_n) \leqslant \text{const.}\,(y_n)^{-(\eta+\beta)}; \quad M(y_n) \leqslant \text{const.}\,(y_n)^{-\eta}; \\ &d(\bar{y}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta-\beta}; \quad M(\bar{y}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta} \\ &D(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta-\beta}; \quad \tilde{M}(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta}; \\ &D(\bar{x}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta-\beta}; \quad \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta}; \quad \eta > 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Sind $\tilde{G}_{K x_n}$ und $\tilde{G}_{K \bar{x}_n}$ die durch $F_K(\Gamma_{x_n})$ und $F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ von $F_K(R)$ abgetrennten Gebiets-

systeme, so definieren wir: $G^*_{x_n}=F^{-1}(\tilde{G}_{Kx_n})$, $G^*_{\bar{x}_n}=F^{-1}(\tilde{G}_{K\bar{x}_n})$. Wir betrachten den folgenden Teil R_n der Fläche R: $R_n=R-G_{y_n}-G_{\bar{y}_n}-G^*_{x_n}-G^*_{\bar{x}_n}$. R_n hat endlichen Inhalt. $\mathfrak{C}$ sei die Familie aller Horizontalquerschnitte von R_n. Wir unterscheiden die folgenden Teilmengen $\mathfrak{C}_i$ von $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}_1$ sei die Menge der Querschnitte, deren beide Endpunkte auf dem Rand von R liegen, $\mathfrak{C}_2$ die Familie der Querschnitte, die den Rand von R mit $F^{-1}\circ F_K(\Gamma_{x_n})$ verbinden und nicht in $G_{x_n-D(x_n)}$ enthalten sind. $\mathfrak{C}_3$ bestehe aus den Querschnitten, die auf dem Rand von R und auf $F^{-1}\circ F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ enden und nicht ganz in $G_{\bar{x}_n+D(\bar{x}_n)}$ liegen, $\mathfrak{C}_4$ aus allen Querschnitten, die $F^{-1}\circ F_K(\Gamma_{x_n})$ mit $F^{-1}\circ F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ verbinden, $\mathfrak{C}_5$ aus allen übrigen Querschnitten.

Mit E_{ni} bezeichnen wir die Punktmenge, mit A_{ni} die Ordinatenmenge, welche von $\mathfrak{C}_i$ überstrichen wird. Es gilt:

$$|E_{n5}| \leqslant M(x_n) + M(\bar{x}_n) \tag{21}$$

Ist $\mu(A_{ni})$ das Mass von A_{ni}, so gilt:

$$\mu(A_{n2}) \leqslant \text{const.}(x_n)^\beta; \quad \mu(A_{n3}) \leqslant \text{const.}|\bar{x}_n|^\beta; \quad \mu(A_{n4}) \leqslant l(x_0) \tag{22}$$

Ist $l_i(y)$ die Länge eines Querschnittes aus $\mathfrak{C}_i$, der über der Geraden $\operatorname{Im} z=y$ liegt und $L_i(y)$ die Länge seines F-Bildes, so gelten für fast alle y die folgenden Abschätzungen:

$$K l_1(y) \leqslant L_1(y); \quad K l_2(y) - K D(x_n) \leqslant L_2(y)$$
$$K l_3(y) - K D(\bar{x}_n) \leqslant L_3(y); \quad K l_4(y) - K(D(x_n) + D(\bar{x}_n)) \leqslant L_4(y)$$

Durch Integration erhalten wir die Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&K|E_{n1}| \leqslant \iint\limits_{E_{n1}} |p+q|\,dx\,dy;\\
&K|E_{n2}| - K D(x_n)\,\mu(A_{n2}) \leqslant \iint\limits_{E_{n2}} |p+q|\,dx\,dy\\
&K|E_{n3}| - K D(\bar{x}_n)\,\mu(A_{n3}) \leqslant \iint\limits_{E_{n3}} |p+q|\,dx\,dy\\
&K|E_{n4}| - K(D(x_n) + D(\bar{x}_n))\,\mu(A_{n4}) \leqslant \iint\limits_{E_{n4}} |p+q|\,dx\,dy
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Addieren wir die Ungleichungen (23), so erhalten wir die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}
&K|R_n| - K|E_{n5}| - K\{D(x_n)(\mu(A_{n2}) + \mu(A_{n4})) + D(\bar{x}_n)(\mu(A_{n3})\\
&\quad + \mu(A_{n4})\} = K|R_n| - B_n \leqslant \iint\limits_{R_n} |p+q|\,dx\,dy
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung:

$$K^2|R_n|^2 - 2K|R_n|\,B_n \leqslant |F(R_n)|\left\{K|R_n| - \frac{2}{1-k^2}\iint (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy\right\} \tag{25}$$

wobei $\tilde{\kappa}$ die komplexe Dilatation von F ist.
Ist $\tilde{R}_n = R - G_{x_n} - G_{\bar{x}_n} - G_{y_n} - G_{\bar{y}_n}$, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} &|\tilde{R}_n| - \tilde{M}(x_n) - \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant |R_n| \leqslant |\tilde{R}_n| + \tilde{M}(x_n) + \tilde{M}(\bar{x}_n) \\ &K(|\tilde{R}_n| - M(y_n) - M(\bar{y}_n)) \leqslant |F(R_n)| \leqslant K(|\tilde{R}_n| + M(y_n) + M(\bar{y}_n)) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Aus (20), (21), (22), (25) und (26) folgt schliesslich:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy = \iint_{R} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy = 0.$$

Daher ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Aus dem Satz 4 folgt insbesondere, dass F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal ist, wenn R ein schlichtes Gebiet ist, welches in $G = \{x+iy \mid y > c|x|^{\alpha},\ \alpha > 3\}$ enthalten ist.

IV. Extremale quasikonforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche eines zweifach zusammenhängenden, beschränkten Gebietes

SATZ 5. *Ist $\tilde{G}$ die universelle Überlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden, beschränkten Gebietes G, dessen innere Randkomponente γ_1 nicht punktförmig ist, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, die Projektion von γ_1 auf die y-Achse sei ein Intervall $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d$, $d > 0$. Bezeichnen wir mit g_y die Gerade $\operatorname{Im} z = y$, so ist für $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d$ $g_y \cap \gamma_1 \neq \emptyset$. Wir definieren: $z_0(y) = x_0(y) + iy$, $x_0(y) = \max\{\operatorname{Re} z \mid z \in g_y \cap \gamma_1\}$. Mit Γ_y^0 bezeichnen wir den Horizontalquerschnitt von G dessen linker Endpunkt $z_0(y)$ ist. Der zweite Endpunkt von Γ_y^0 liegt auf der äusseren Randkomponente γ_2 von G. Wir betrachten die folgenden Familien von Horizontalquerschnitten:

$$B = \{\Gamma_y^0 \mid y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d/2\};\quad C = \{\Gamma_y^0 \mid y_0 + d/2 \leqslant y \leqslant y_0 + d\};\quad D = B \cup C$$

$\tilde{\Gamma}_i$, $-\infty < i < +\infty$, seien die Überlagerungswege von $\Gamma_{y_0 + d/2}$. Sie seien so numeriert, dass das durch $\tilde{\Gamma}_{i-1}$ und $\tilde{\Gamma}_i$ aus $\tilde{G}$ herausgeschnittene Gebiet $\tilde{S}_i$ schlicht über der z-Ebene liegt. Mit $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$ und $\tilde{D}_i$ bezeichnen wir die Kurvenfamilien im Blatte $\tilde{S}_i$ mit den Spuren B, C und D. Es gilt: $\tilde{B}_i \cap \tilde{C}_{i+1} = \tilde{\Gamma}_i$. $\tilde{G}_n = (\bigcup_{-n}^{+n} \tilde{S}_i) \cup (\bigcup_{i=-n}^{n-1} \tilde{\Gamma}_i)$ ist ein einfach zusammenhängender Horizontalstreifen. F_K ist daher in $\mathfrak{F}$ extremal, wenn für jedes $F \in \mathfrak{F}$ $\varliminf_{n\to\infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0$ ist. Ist insbesondere $|T(\tilde{G}_n)|$ gleichmässig beschränkt, so ist $\lim_{n\to\infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0$.

Um eine Schranke für $|T(\tilde{G}_n)|$ anzugeben, schätzen wir ab, wieviele Blätter $F_K(\tilde{S}_k)$ ein Jordanbogen $F(\tilde{\Gamma}_i)$ höchstens treffen kann. Wir sagen, $F(\tilde{\Gamma}_i)$ winde sich r-mal im positiven (bezw. negativen) Sinn um die Randkomponente $F_K(\gamma_1)$ von $F_K(G)$ herum, falls $F(\tilde{\Gamma}_i)$ mit jedem Horizontalquerschnitt der Streifen $F_K(\tilde{D}_{i+k})$, wobei $1 \leqslant k \leqslant r$ (bezw. $-r \leqslant k \leqslant 0$) ist, Punkte gemeinsam hat, aber nicht mit allen Horizontalquerschnitten von $F_K(\tilde{D}_{i+r+1})$ (bezw. $F_K(\tilde{D}_{i-r})$).

Wir nehmen an, $F(\tilde{\Gamma}_n)$ winde sich s-mal im positiven Sinn, $F(\tilde{\Gamma}_{-n-1})$ r-mal im negativen Sinn um $F_K(\gamma_1)$ herum. Es gibt dann in $F_K(\tilde{D}_{n+s+1})$ einen Horizontalquerschnitt $\tilde{\Gamma}^*$ so, dass $F(\tilde{\Gamma}_n) \cap \tilde{\Gamma}^* = \emptyset$ ist. In $F_K(\tilde{D}_{-n-r-1})$ liegt ein Horizontalquerschnitt $\tilde{\Gamma}'$, der $F(\tilde{\Gamma}_{-n-1})$ nicht trifft. $\tilde{\Gamma}^*$ und $\tilde{\Gamma}'$ trennen von $\tilde{G}$ ein Gebiet $\tilde{E}$ ab, für welches gilt:

$$F(\tilde{G}_n) \subset \tilde{E} \subset \left(\bigcup_{-r-n-1}^{n+s+1} F_K(\tilde{S}_i) \right) \cup \left(\bigcup_{-n-r-1}^{n+s} F_K(\tilde{\Gamma}_i) \right) \tag{1}$$

Aus (1) erhalten wir für $|T(\tilde{G}_n)|$ die Abschätzung:

$$|T(\tilde{G}_n)| \leqslant (r + s + 2)\, K\, |G| \tag{2}$$

Wir schätzen nun s nach oben ab, wobei wir $s > 1$ voraussetzen dürfen. Dazu betrachten wir die Familie $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}$ von Horizontalquerschnitten und die Kurvenschar:

$$\tilde{H}_{n+1} = \{F(\tilde{\Gamma}_y^0) \mid \tilde{\Gamma}_y^0 \in \tilde{\mathcal{C}}_{n+1}\}$$

λ sei die extremale Länge von $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}$, λ' die extremale Länge von $\tilde{H}_{n+1}$. Hat $F \in \mathfrak{F}$ die maximale Dilatation $\tilde{K}$, so gilt: $\tilde{K} \geqslant \lambda'/\lambda$. Ist $l_0(y)$ die Länge von $\Gamma_y^0 \in D$, so definieren wir: $a = \sup_D l_0(y)$. Für λ gilt die Abschätzung:

$$1/\lambda \geqslant d/2a \tag{3}$$

Benützen wir die gleichen Bezeichnungen wie im Kapitel III, so gilt für eine beliebige Borel-messbare Metrik ϱ:

$$\lambda' \geqslant (\inf_{\tilde{H}_{n+1}} l_\varrho)^2 / m_\varrho$$

Wir wählen ϱ wie folgt: $\varrho = 1$ in $\bigcup_{k=2}^{r} \tilde{D}_{n+k}$, $\varrho = 0$ sonst. Es lässt sich leicht zeigen, dass sich jeder Bogen aus $\tilde{H}_{n+1}$ mindestens s-mal um $F_K(\gamma_1)$ herumwindet. Es gelten daher die folgenden Abschätzungen:

$$m_\varrho \leqslant K a d (s-1); \quad l_\varrho \geqslant (s-1)\, 2d; \quad \lambda' \geqslant 4d(s-1)/Ka \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$s \leqslant (K \tilde{K} a^2 / 2d^2) + 1 \tag{5}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir für r die Abschätzung:

$$r \leqslant (K \tilde{K} a^2 / 2d^2) + 1 \tag{6}$$

$((K\tilde{K}a^2/d^2)+4)\,K|G|$ ist wegen (2), (5) und (6) eine gleichmässige Schranke für $|T(G_n)|$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Wir zeigen nun, dass zu jeder Abbildung $F\in\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation K eine Folge $(\tilde{A}_n)$ von Horizontalstreifen existiert, welche $\tilde{G}$ ausschöpft und für welche $\lim_{n\to\infty}|T(\tilde{A}_n)|=0$ ist. Dann ist nämlich nach dem Satze 1 F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Wir definieren: $R=\{z \mid y_0+d/4\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant y_0+3d/4\}\cap G$. Mit $\tilde{R}_i$ bezeichnen wir den Teil des Blattes $\tilde{S}_i$, der die Spur R hat. Wir nehmen an, es gebe eine Konstante $c>0$ und ein m so, dass für $i\geqslant m$ in $\tilde{R}_i$ gilt: $L(y)\geqslant Kl(y)+c$. $\tilde{G}_{m\,n}$ sei das Gebiet $(\bigcup_{i=m}^{n}\tilde{S}_i)\cup\cup(\bigcup_{i=m}^{n-1}\tilde{\Gamma}_i)$. Hat $F\in\mathfrak{F}$ die maximale Dilatation K, so folgt aus unserer Annahme und aus (12) für jedes $n>m$ die Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned} K^2|\tilde{G}_{m\,n}|^2+Kcd(n-m)\,|\tilde{G}_{m\,n}| &\leqslant \left(\int L(y)\,dy\right)^2\\ &\leqslant K^2|\tilde{G}_{m\,n}|^2+K|T(\tilde{G}_{m\,n})|\,|\tilde{G}_{m\,n}| \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Da $|T(\tilde{G}_{m\,n})|$ gleichmässig beschränkt ist, folgt aus (7): $c\leqslant C/(n-m)$, wobei C eine positive Konstante ist. Da $\lim_{n\to\infty}C/(n-m)=0$ ist, muss $c\leqslant 0$ sein, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Die Annahme ist also falsch. Es gibt daher eine Nullfolge (ε_k) und eine streng monoton wachsende Folge (j_k) von ganzen Zahlen so, dass in $\tilde{R}_{j_k}$ ein Querschnittssystem $\tilde{\Gamma}_{y_{j_k}}$ existiert, für welches gilt:

$$L(y_{j_k})\leqslant Kl(y_{j_k})+\varepsilon_k \tag{8}$$

Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass eine monoton fallende Folge (i_l) existiert so, dass es in R_{i_l} ein Querschnittssystem $\tilde{\Gamma}_{y_{i_l}}$ gibt, für welches gilt:

$$L(y_{i_l})\leqslant Kl(y_{i_l})+\varepsilon_l \tag{9}$$

Ist $d(y)=\sup_{z\in\Gamma_y}|\operatorname{Im}F(z)-y|$, so folgt aus (8) und (9):

$$\lim_{k\to\infty}d(y_{j_k})=\lim_{l\to\infty}d(y_{i_l})=0.$$

Ist $\tilde{\Gamma}_{j_n}$ der Querschnitt aus $\Gamma_{y_{j_n}}$, der in $\tilde{B}_{j_n}\cup\tilde{C}_{j_n}$ und Γ_{i_n} der Querschnitt aus $\Gamma_{y_{i_n}}$, der in $\tilde{B}_{i_n}\cup\tilde{C}_{i_n}$ liegt, so bezeichnen wir mit $\tilde{A}_n$ das Gebiet mit endlichem Inhalt, welches durch $\tilde{\Gamma}_{j_n}$ und $\tilde{\Gamma}_{i_n}$ aus $\tilde{G}$ herausgeschnitten wird. Ist $l_0=\sup_G l(y)$, so gilt für genügend grosse n die Abschätzung:

$$|T(A_n)|\leqslant l_0(d(y_{j_n})+d(y_{i_n}))$$

$(\tilde{A}_n)$ ist also eine Ausschöpfung von $\tilde{G}$, für welche gilt: $\lim_{n\to\infty}|T(\tilde{A}_n)|=0$. F_K ist daher in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Ist die innere Randkomponente γ_1 eine horizontale Strecke, so betrachten wir die Abbildungen: $\varphi_1: z\to z^*=iz$;

$$(F_K^*)^{-1}: z^*=x^*+iy^*\to w^*=(x^*/K)+iy^*;\qquad \varphi_2: w^*\to w=-iKw^*$$

Durch φ_1 wird γ_1 auf eine vertikale Strecke γ_1^* abgebildet. $(F_K^*)^{-1}$ ist also in der Klasse $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ aller Abbildungen, die auf dem Rande von $\varphi_1(\tilde{G})$ mit $(F_K^*)^{-1}$ übereinstimmen, die einzige extremale Abbildung. Es gilt:

$$\varphi_2 \circ (F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1 = F_K; \quad (F_K^*)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ F_K \circ \varphi_1^{-1} \tag{10}$$

Ist F eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$, so liegt $(F^*)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$. Da φ_1 und φ_2 konform sind, hat $(F^*)^{-1}$ ebenfalls die maximale Dilatation $\tilde{K}$. Da $(F_K^*)^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ extremal ist, gilt: $\tilde{K} \geqq K$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal. Falls $\tilde{K} = K$ ist, so ist $(F^*)^{-1} = (F_K^*)^{-1}$, da $(F_K^*)^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ eindeutig extremal ist. Wegen (10) muss dann gelten: $F = F_K$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Wir beweisen schliesslich den folgenden Satz:

SATZ 6. *G_0 sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet. Ist $z_0 \in G_0$ und $\tilde{G}$ die universelle Überlagerungsfläche von $G = G_0 - \{z_0\}$, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ extremal.*

Beweis. Zur Vereinfachung führen wir den Beweis für den Fall, in welchem G_0 einen analytischen Rand hat. Wir können $z_0 = 0$ setzen. g, $g(0) = 0$ sei eine konforme Abbildung von G_0 auf $|z'| < 1$. Ist $C = \{z' \mid 0 < |z'| < 1\}$ und $\tilde{C}$ die universelle Überlagerungsfläche von C, so induziert g eine konforme Abbildung $\tilde{g}$ von $\tilde{G}$ auf $\tilde{C}$, die bis auf Decktransformationen bestimmt ist. ϱ_0 sei der Radius von C, der auf der positiven reellen Achse liegt. $\gamma_0 = g^{-1}(\varrho_0)$ hat eine endliche Länge l_0. Die Überlagerungswege $\tilde{\varrho}_i$ von ϱ_0 seien so numeriert, dass das Gebiet $\tilde{S}_i$ mit endlichem Flächeninhalt, welches durch $\tilde{\varrho}_{i-1}$ und $\tilde{\varrho}_i$ aus $\tilde{C}$ herausgeschnitten wird, schlicht über der z'-Ebene liegt. $\tilde{C}_n = (\bigcup_{-n+1}^{n} \tilde{S}_i) \cup (\bigcup_{-n+1}^{n-1} \tilde{\varrho}_i)$ ist einfach zusammenhängend. $\zeta = \varphi(z') = \log z'$ bildet $\tilde{C}$ auf die linke Halbebene $E: \mathrm{Re}\,\zeta < 0$ ab. Wir normieren φ so, dass $\tilde{C}_n$ in den Streifen $E_n: -2\pi i n < \mathrm{Im}\,\zeta < 2\pi i n$ übergeht. $(\tilde{G}_n) = (\tilde{g}^{-1}(\tilde{C}_n))$ ist eine Ausschöpfung von $\tilde{G}$. $\tilde{\gamma}_n = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\varrho}_n)$ und $\tilde{\gamma}_{-n} = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\varrho}_{-n})$ sind die in $\tilde{G}$ liegenden Randbogen von $\tilde{G}_n$. Ist $\gamma_{P,P'} \subset F_K(\tilde{G})$ ein Bogen, der P mit P' verbindet und $|\gamma_{P,P'}|$ seine Länge, so definieren wir:

$$\delta(P, P') = \inf_{\{\gamma_{P,P'}\}} |\gamma_{P,P'}|; \qquad B_i = \sup_{P \in \tilde{\gamma}_i} \delta(F(P), F_K(P))$$

Nach einem allgemeinen Satz von Sethares [3] ist F_K extremal, wenn für jede Vergleichsabbildung F gilt:

$$\lim_{n \to \infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0; \qquad \lim_{n \to \infty} (B_n + B_{-n})/|\tilde{G}_n| = 0 \tag{11}$$

Um (11) zu beweisen, benützen wir den folgenden

VERZERRUNGSSATZ VON TEICHMÜLLER [7]. Ist h eine quasikonforme Abbildung von E auf sich mit der maximalen Dilatation K, die den Rand von E identisch abbildet, so liegt $h(\zeta_0)$ im nicht-euklidischen Kreis mit dem Mittelpunkt

ζ_0 und dem Radius $d(K)$, wobei $d(K)$ eine monoton wachsende und stetige Funktion von K ist.

$\psi_K = F_K \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}$ bildet E auf $F_K(\tilde{G})$ ab. Liegt F in $\mathfrak{F}$, so stimmt $\psi = F \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}$ auf dem Rande von E mit ψ_K überein. $\psi_K^{-1} \circ \psi$ bildet den Rand von E identisch ab. Sind $\tilde{K}$ und K^* die maximalen Dilatationen von F und $\psi_K^{-1} \circ \psi$, so gilt: $K^* \leqslant K\tilde{K}$.

Wir untersuchen zunächst, wie die Strahlen $g_k: \operatorname{Im}\zeta = 2\pi k$ durch $\psi_K^{-1} \circ \psi$ transformiert werden. Ist $\zeta_0 = \xi_0 + 2\pi i k$, so liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta_0)$ nach dem Verzerrungssatz von Teichmüller im nichteuklidischen Kreis $C_{\zeta_0, d(K\tilde{K})}$ mit dem Radius $d(K\tilde{K})$ und dem Mittelpunkt ζ_0. Für den euklidischen Radius $r(K\tilde{K})$ und den euklidischen Mittelpunkt ζ_0^* gelten die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0^* &= \xi_0 \cos h\left(d(K\tilde{K})\right) + 2\pi i k = \xi_0 b + 2\pi i k \\ r(K\tilde{K}) &= |\xi_0| \sin h\left(d(K\tilde{K})\right) = |\xi_0| a \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Sind g_k' und g_k'' die Tangenten von $C_{\zeta_0, d(K\tilde{K})}$, welche sich in $\zeta = 2\pi i k$ schneiden, so liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta)$ zwischen g_k' und g_k''. Mit Hilfe von (12) erhalten wir für g_k' und g_k'' die Gleichungen:

$$g_k': \eta = 2\pi k - a\xi; \qquad g_k'': \eta = 2\pi k + a\xi \tag{13}$$

Da (13) nicht von ξ_0 abhängt, liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(g_n)$ ganz im Winkelgebiet, welches durch g_n' und g_n'' begrenzt wird. Ist P_n das Gebiet, welches durch die Strahlen g_n' und g''_{-n} aus E herausgeschnitten wird, so gilt:

$$\psi_k^{-1} \circ \psi(E_n) = \psi_K^{-1} \circ F \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}(E_n) = \psi_K^{-1}\left(F(\tilde{G}_n)\right) \subset P_n$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} &F(\tilde{G}_n) - F_K(\tilde{G}_n) \subset \psi_K(P_n) - F_K(\tilde{G}_n) = \psi_K(P_n - E_n); \\ &|T(\tilde{G}_n)| \leqslant |\psi_K(P_n - E_n)| \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$P_n - E_n$ besteht aus zwei getrennten Winkelgebieten Q_{n1} und Q_{n2}, wobei $Rd(Q_{n1}) = g_n \cup g_n'$, $Rd(Q_{n2}) = g_{-n} \cup g''_{-n}$ ist. Es gilt daher: $|\psi_K(P_n - E_n)| = |\psi_K(Q_{n1})| + |\psi_K(Q_{n2})|$. $\varphi^{-1}(g_n')$ ist eine logarithmische Spirale mit der Gleichung:

$$r(\alpha) = e^{-(\alpha - 2\pi k)/a}; \qquad r = |z'|, \quad \alpha = arg\, z'$$

Daraus folgt: $|\varphi^{-1}(Q_{n1})| = a/4$.

Ist M eine Schranke von $|d\tilde{g}^{-1}(z')/dz'|$, so erhalten wir schliesslich die Abschätzung:

$$|\psi_K(Q_{n1})| \leqslant K M^2 a/4$$

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass $KM^2 a/4$ eine Schranke von $|\psi_K(Q_{n2})|$ ist. $|T(\tilde{G}_n)|$ ist daher gleichmässig beschränkt.

Um B_n abzuschätzen, wählen wir $P \in \tilde{\gamma}_n$ beliebig. Ist $\zeta = \varphi \circ \tilde{g}(P)$, so liegt $\zeta' = \psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta)$ in $C_{\zeta, d(K,\bar{K})}$. Der Bogen $\Gamma \subset C_{\zeta, d(K,\bar{K})}$ verbinde ζ mit ζ' und bestehe aus höchstens zwei Strecken Γ_1 und Γ_2, wobei Γ_1 horizontal und Γ_2 vertikal ist. Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$|\varphi^{-1}(\Gamma_1)| \leqslant 1; \quad |\varphi^{-1}(\Gamma_2)| \leqslant \text{const.}\, 2\pi r |\log r|; \quad r = |\varphi^{-1}(\zeta)|$$

Da $\lim_{r \to 0} 2\pi r \log r = 0$ ist, so ist $|\varphi^{-1}(\Gamma)|$ und daher auch $|\psi_K(\Gamma)|$ beschränkt. Da $\psi_K(\Gamma) F_K(P)$ mit $F(P)$ verbindet, ist B_n gleichmässig beschränkt.

Wir betrachten zum Schluss die universelle Überlagerungsfläche $\tilde{C}.\Phi(Z) = e^{(Z-1)/(Z+1)}$ bildet den Einheitskreis $|Z| < 1$ konform auf $\tilde{C}$ ab. Nach dem Satze 6 ist jede zu $\varphi(Z) = (\Phi'(Z))^2 = 4e^{(Z-1)/(Z+1)}/(Z+1)^4$ und einem beliebigen k, $0 < k < 1$, gehörende Teichmüllersche Abbildung extremal. Es lässt sich leicht überprüfen, dass $\varphi(Z)$ keine der von Sethares [3] angegebenen hinreichenden Bedingungen für die Extremalität von f_k erfüllt. Nach einer dieser Bedingungen müsste z.B. für jedes $\delta > 0$ $\lim_{Z \to -1} |\varphi(Z)|\, |Z+1|^{2+\delta} = 0$ sein. Ist K ein Kreis, der in $|Z| < 1$ liegt und $|Z| = 1$ in $Z = -1$ berührt, so gilt für $Z \in K$: $\operatorname{Re}(Z-1)/(Z+1) = \text{const.}$ Daraus folgt:

$$\lim_{\substack{z \to -1 \\ z \in K}} |\varphi(z)|\, |z+1|^{2+\delta} = \lim_{\substack{z \to -1 \\ z \in K}} \text{const.}\, |z+1|^{\delta - 2} = \infty \quad \text{für} \quad 0 < \delta < 2.$$

LITERATUR

[1] L.V. Ahlfors: On quasiconformal mappings. J. d'analyse math. III (1953/54), 1–58.

[2] O. Lehto und K.I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1965).

[3] G.C. Sethares: The extremal property of certain Teichmüller mappings. Comment. Math. Helv. *43* (1968) 98–119.

[4] K. Strebel: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises. Comment. Math. Helv. *36* (1962) 306–323.

[5] K. Strebel: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II. Comment. Math. Helv. *39* (1964) 77–89.

[6] O. Teichmüller: Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. Abh. Preuss. Acad. Wiss. math. Kl. *22* (1939), 1–197.

[7] O. Teichmüller: Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung. Deutsche Math. *7* (1944), 336–343.

Eingegangen den 26. Juli 1968

Stable Secondary Cohomology Operations

by JOHN R. HARPER

Introduction

The purpose of this paper is to investigate for each positive integer n the stable secondary cohomology operations which are defined on every mod 2 cohomology class of dimension n. Such operations correspond to relations in the mod 2 Steenrod algebra A of the form $0=\Sigma a_i b_i$ with excess b_i greater than n. The set of all such operations is a left A-module. Thus we derive a basis for the module of operations. We shall call operations in a basis *basic operations* and their corresponding relations *basic relations.*

Let $B(n)$ denote the left A-ideal of the Steenrod algebra which annihilates all mod 2 cohomology of dimension n or less. In [9] it is shown that the set of admissible monomials of excess greater than n is a basis for $B(n)$ as a Z_2-module. In his paper [1], J. F. Adams uses homological algebra to find relations in A. For our problem the generators of $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(B(n), Z_2)$ for $s=0, 1$ as a Z_2-module are in one to one correspondence with a minimal set of A-generators and basic relations respectively for $B(n)$. Wall formalizes the connection between generator and relations, and homological algebra [10].

Our main results are the following.

THEOREM A. $\mathrm{Ext}_A^{0,t}(B(n)\, Z_2)\cong Z_2$ *for pairs* (n, t) *such that either*

(a) $t=2^i$ *and* $0\leqslant n<t$, *or*

(b) $t\equiv 2^i(2^{i+1})$, $t>2^i$, *and* $n=t-r$ *for* $0<r<2^{i+1}$.

Otherwise the group is 0. *The corresponding generator of* $B(n)$ *can be chosen as* Sq^t.

THEOREM B. *For* $t\leqslant 3n+4$, $\mathrm{Ext}_A^{1,t}(B(n), Z_2)\cong Z_2$ *for pairs* (n, t) *satisfying all of the following:*

(a) *Given* t *determine all non-negative integers* i, j *such that* $t=m+3\cdot 2^j$, $m\equiv 2^i(2^{i+1})$, m *may be negative.*

(b) $n=m+2^j-r \quad 0\leqslant r<2^{i+1}-1$

(c) $n\not\equiv 2^j(2^{j+1})$

For any element $\theta\in A$ we define $H(\theta)\in A\otimes A$ as follows. Let $\psi: A\to A\otimes A$ be the coproduct. Since A is co-commutative, $\psi(\theta)=\Sigma\theta_i'\otimes\theta_i''+\eta\otimes\eta+\Sigma\theta_i''\otimes\theta_i'$. Let $H(\theta)=\Sigma\theta_i'\otimes\theta_i''$. If x is a cohomology class, we define $H(\theta)x=\Sigma\theta_i'x\cup\theta_i''x$.

THEOREM C. *Let* $0=a\mathrm{Sq}^{n+1}+\Sigma a_i\mathrm{Sq}^i (i>n+1)$ *be a relation in* $B(n)$. *There exists*

a stable secondary operation Φ such that on the fundumental class $\iota_n \in H^n(Z_2, n; Z_2)$ we have $(H(a)\,\iota_n) \subset \Phi(\iota_n)$ and if $\dim x < n$, $(0) \subset \Phi(\iota_n)$.

The first two theorems are proved in Section 2. Theorem *C* is proved in Section 3. There some relations are listed.

This work includes part of my University of Chicago dissertation directed by Professor A. L. Liulevicius. I am grateful to him for suggesting this problem and helping in its development, especially in Section 3. I am also indebted to Professor J. P. May for many helpful comments.

Section 1. Algebraic Preliminaries

In this section we obtain some results on the structure of $B(n)$ and related A-modules. Let A^* denote the dual of A. We use the Cartan basis of admissible monomials for A and the Milnor basis of monomials in ξ_i for A^* [9]. We employ the conventious of writing $\mathrm{Sq}(I)$, $\xi(I)$ and $\xi_1(i)\,\xi_2(j) \ldots \xi_p(k)$, where $I=(i, j, \ldots k)$ is a finite sequence of non-negative integers, to denote $\mathrm{Sq}^i\mathrm{Sq}^j \ldots \mathrm{Sq}^k$ and $\xi_1^i \xi_2^j \ldots \xi_p^k$ in A and A^* respectively. We first summarize those results of Milnor [8] which we require.

THEOREM 1.1 (a) *As an algebra A^* is a graded polynomial algebra over Z_2 on generators ξ_i of grade 2^i-1 $i \geqslant 1$.*

(b) *The coproduct $\varphi^*: A^* \to A^* \otimes A^*$ is a homomorphism of algebras given by* $\varphi^*(\xi_k) = \Sigma_{i+j=k} \xi_i(2^j) \otimes \xi_j$.

(c) *The evaluation $\langle \mathrm{Sq}^k, \xi_1^k \rangle = 1$ and $\langle \mathrm{Sq}^k, \alpha \rangle = 0$ for α any other monomial in the ξ_i.*

(d) *Let $\mathrm{Sq}(I)$ with $I=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ be an admissible monomial in A. Form the sequence $I'=(i_1', i_2', \ldots, i_k')$ where $i_k'=i_k$ and $i_j'=i_j-2i_{j+1}$ for $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Then grade* $\mathrm{Sq}(I) = \mathrm{grade}\ \xi(I')$ *and $\langle \mathrm{Sq}(I), \xi(I') \rangle = 1$. We call $\xi(I')$ the monomial associated with* $\mathrm{Sq}(I)$.

We consider $B(n)$ as a graded A-module with the grading and module action that inherited as a submodule. We shall need dual information for $B(n)^*$.

DEFINITION. *Let $\xi(I)$ for $I=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ be a monomial in A^*. The multiplicity of $\xi(I)$, written either as $m\xi(I)$ or $m(I)$, is defined to be Σi_j.*

PROPOSITION 1.2 *$B(n)^*$ is the quotient of A^* by $B(n)^\dagger$, the annihilator of $B(n)$, spanned by all monomials of multiplicity less than or equal to n. $B(n)^\dagger$ is a sub A^*-comodule of A^* and $B(n)^*$ has the induced comodule structure.*

Proof. Since the coproduct φ^* in A^* has the property that if $\varphi^*(\alpha) = \Sigma \alpha' \otimes \alpha''$, then $m(\alpha'') \leqslant m(\alpha)$, the only non-trivial statement is the description of $B(n)^\dagger$. Let α be a monomial in A^* with $m(\alpha) > n$. Let $\mathrm{Sq}(J)$ be the admissible monomial in A such that

α is the associated monomial of $\mathrm{Sq}(J)$. Then $\langle \mathrm{Sq}(J), \alpha\rangle = 1$ and excess $\mathrm{Sq}(J) = m(\alpha)$. Hence α is not in $B(n)^\dagger$. Now let the monomial α have $m(\alpha) \leqslant n$. Let X be an n-fold product of RP^∞. Let $u \in H^n(X; Z_2)$ be the element such that $p_i^*(x_i) = u$ where $p_i: X \to RP^\infty$ is the i-th projection and x_i generates $H^1(RP^\infty; Z_2)$. Consider the formula [9]

$$\theta(u) = \textstyle\sum_{m(I)\leqslant n} < \theta, \xi(I) > x(I),$$

where $\theta \in A$, $\xi(I) \in A^*$ and $x(I)$ are linearly independent elements of $H^*(X; Z_2)$. We can assume θ is admissible. If $\theta \in B(n)$ then $\theta(u) = 0$. Hence by the linear independence of the $X(I)$, $\langle \theta, \xi(I)\rangle = 0$ for all I with $m(I) \leqslant n$. Thus $B(n)^\dagger$ is as described.

We use the basis for $B(n)^*$ consisting of all classes $[\alpha]$ of monomials in the Milnor generators for which $m(\alpha) \geqslant n+1$. The next few lemmas concern primitives of the co-action $\varphi^*: B(n)^* \to A^* \otimes B(n)^*$. Primitives are those elements for which $\varphi^*[\alpha] = 1 \otimes [\alpha]$. In 1.3–1.6 β always denotes a homogeneous (in grade) sum of monomials in A^*, $\beta = \Sigma \alpha_i$.

LEMMA 1.3. *Suppose $m(\alpha_i) > m$ for all i and $[\beta]$ is primitive in $B(n)^*$ for some $n < m$. Then $[\beta]$ is primitive in $B(k)^*$ for all k such that $n \leqslant k < p$, $p = \max_i(m(\alpha_i))$.*

Proof. The hypothesis says that in A^*, $\varphi^*(\beta) = 1 \otimes \beta + \Sigma \alpha_i' \otimes \alpha_1''$ with $m(\alpha_i'') \leqslant n$, from which the lemma is obvious.

LEMMA 1.4. *Suppose $m(\alpha_i) = m$ for all i and $\beta \neq \xi_1^m$. Then $[\beta]$ is not primitive in $B(m-1)^*$.*

Proof. Write each $\alpha_i = \xi(n_{i,1}, n_{i,2}, \ldots, n_{ik})$ with k large enough to be independent of i (some $n_{i,k}$ may be zero). Define a lexicographic type ordering $\alpha_i > \alpha_j$ provided there is an integer J (depending on the pair) such that $n_{i,J} > n_{j,J}$ and $n_{i,p} = n_{j,p}$ for all $p > J$. The ordering is well defined because it is transitive. Since the α_i are all of the same grade and multiplicity, no two of them can differ only in the ξ_1 and ξ_2 factors. Thus any J involved in the determination of order is greater than 2. Now let J be the integer which determines $\alpha_1 > \alpha_2$, α_1 being the first ordered element. The coproduct $\varphi^*(\xi_J(n_{1,J}))$ contains the summand $\xi_{J-1}(2n_{1,J}) \otimes \xi_1(n_{1,J})$. Since we are interested in those summands $\alpha_1' \otimes \alpha_i'' \subset \varphi^*(\alpha_i)$ for which $\alpha_i'' \neq 1$ and $m(\alpha_i'') = m$, the factor $\xi_p(n_{i,p}) \otimes 1$ cannot be involved in forming $\alpha_i' \otimes \alpha_i''$. Since J is greater than 2, the appearance of ξ_{J-1} on the left of $\otimes$ in the coproduct of a monomial means that monomial must have a factor ξ_p with $p \geqslant J$. Now $\varphi^*(\alpha_1)$ contains the summand

$$\xi_{J-1}(2n_{1,J}) \otimes \xi(n_{1,1} + n_{1,J}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,J-1}, 0, n_{1,J+1}, \ldots, n_{1,k}). \tag{1}$$

This term is not cancelled in $\varphi^*(\alpha_1)$. Since α_1 is ordered first, its exponents after the 0

are all respectively greater than or equal to the corresponding exponents of any other α_i. There are two cases. Either $n_{1,J} > n_{i,J}$ or $n_{1,p} > n_{i,p}$ for some $p > J$. In the latter case such α_i cannot have (1) in their coproducts since they cannot produce the term on the right of $\otimes$. For the former case the remarks about the appearence of ξ_{J-1} on the left of $\otimes$ indicate that α_i has a factor $\xi_p(n_{i,p})$ for $p \geqslant J$. But $n_{1,p} = n_{i,p}$ for $p \geqslant J+1$ means only the term $1 \otimes \xi_p(n_{i,p})$ can be used if $\varphi^*(\alpha_i)$ can possible contain (1). Thus $p = J$. But $n_{1,J} > n_{i,J}$. In passing to $B(m-1)^*$ we note that (1) is a non-zero element of $A^* \otimes B(m-1)^*$.

The argument is illustrated by $\xi(27, 3, 6, 3, 1) > \xi(15, 21, 0, 3, 1) > \xi(21, 6, 12, 0, 1)$.

LEMMA 1.5. *Let grade $\beta = t$ and $[\beta]$ primitive in $B(n)^*$. Then one of the $\alpha_i = \xi_1^t$ and $[\beta]$ is the only primitive in $B(n)^*$ in this grade.*

Proof. By 1.4 not all α_i have the same multiplicity. Let $\beta' = \Sigma_{m(\alpha_i) > n+1} \alpha_i$. Then by 1.3 $[\beta']$ (non-zero) is a primitive in $B(n+1)^*$ and has fewer summands. Inductively we obtain a monomial primitive which is $[\xi_1^t]$. If there was another primitive $[\gamma]$ of the same grade, then $[\beta + \gamma]$ would be a primitive in $B(n)^*$ not having the summand ξ_1^t (over Z_2).

LEMMA 1.6. *Let $m = \min_i(m(\alpha_i))$. Suppose for some α_i with $m(\alpha_i) = m$, $\alpha_i = \xi(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ with some n_j odd. Then $[\beta]$ is not primitive in $B(m-2)^*$.*

Proof. In A^* the coproduct $\varphi^*(\alpha_i)$ contains the summand $\xi_j \otimes \xi(n_1, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_k)$ which is not in the coproduct of any other α in A^*.

Some other modules and algebras we shall employ are the following. Let $C(n+1) = B(n)/B(n+1)$. Let $a^*: A^* \to A^*$ be the squaring map $a^*(\alpha) = \alpha^2$. Let $A_e^* = \operatorname{Im} a^*$, $B(n)_e^\dagger = B(n)^\dagger \cap A_e^*$, $B(n)_e^* = A_e^*/B(n)_e^\dagger$. Let N be the dual of A^*/A_e^*, P the dual of $A^*//A_e^* = A^*/A_e^*$. $I(A^*)$. If we let $a: A \to A$ be the dual of a^*, then it is well known that $P \to A$ is an inclusion of Hopf algebras, P is normal in A and $\ker a = A \cdot I(P)$, [3]. It is easy to see that $\operatorname{Ext}_P^{*,*}(Z_2, Z_2) = Z_2[q_0, q_1, \ldots]$ where q_i are all generators of bidegree $(1, 2^{i+1}-1)$. We shall call this polynomial algebra W. Recall that an A-module is *cyclic* if it is generated by a single element. The next proposition summarizes the information we shall need about the above structures.

PROPOSITION 1.7. (a) *$C(n)^*$ is spanned by all classes of monomials $[\alpha]$ for which $m(\alpha) = n$.*

(b) *$C(n)$ is isomorphic as an A-module to a cyclic module $A/R(n)$ on a single generator (n) of grade n. The generator corresponds to* Sq^n.

(c) *N is a submodule of $R(n)$ and $R(n)/N \cong B(2n)_e$.*

(d) *Since $B(2n)_e^* = 0$ in grades $t \leqslant 2n+1$, $C(n)^* = A_e^* \cdot (n)$ as A^* comodules in this*

range. This isomorphism is given by $[\alpha]\to\alpha'(n)$ *where* $\varphi^*(\alpha)$ *has the summand* $\alpha'\otimes\xi_1^n$.

(e) $t\leqslant 3n+1$, $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(C(n), Z_2)$ *is a free* W *module over* Z_2 *on a single generator* (n) *of bidegree* $(0, n)$.

Proof. (a) is obvious. To show (b) let $f: A\to C(n)$ be the A-map defined by $f(1)=\mathrm{Sq}^n$. Since f^* is adjoint to multiplication by Sq^n, an application of 1.1(c) shows that if $\alpha=\xi(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ with $\Sigma n_i=n$ then $f^*([\alpha])=(2n_2, 2n_3, \ldots, 2n_k)$. It is immediate that f^* is monic. We let $R(n)=\ker f$. We obtain (c) via dualizing. $R(n)^*=\mathrm{coker}\, f^*=A^*/B(2n)_e^\dagger$ as A^*-comodules. Since $B(2n)_e^*=A_e^*/B(2n)_e^*$ we have $R(n)^*/B(2n)_e^*\cong$ $\cong A^*/A_e^*$. This also gives (d). We obtain (e) for $t\leqslant 2n+1+n=3n+1$ from the sequence of isomorphisms,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^{s,t}(C(n), Z_2) &\cong \mathrm{Ext}_A^{s-1,t-n}(N, Z_2)\\ &\cong \mathrm{Ext}_A^{s-1,t-n}(\ker a, Z_2)=\mathrm{Ext}_A^{s,t-n}(A/A\cdot I(P), Z_2)\\ &\cong \mathrm{Ext}_P^{s,t-n}(Z_2, Z_2)\cong W(n).\end{aligned}$$

The penultimate isomorphism is an application of Cor 1.5 of [3].

We shall use the following maps.

DEFINITION. *The map* $s_0: B(n)^*\to B(n+1)^*$ *is given as a map of* Z_2*-modules by* $s_0[\alpha]=[\xi_1\alpha]$. *The map* s_i *is defined as* s_0^{2i}. *In particular* $s_i[\alpha]=[\xi_1(2^i)\alpha]$. *The codomain of* s_i *is* $B(n+2^i)^*$.

The next lemma is an easy exercise with the co-action and its proof is omitted. It accounts for the periodicity in Theorems A and B.

LEMMA 1.8. *The map* $s_0: B(n)_t^*\to B(n)_{t+1}^*$ *is an isomorphism of* Z_2*-modules in a range of grades* $t\leqslant 3n+4$. *The map* $s_i: B(n)_t^*\to B(n+2^i)_{t+2^i}^*$ *is an* A^**-comodule isomorphism in a range of grades* $t\leqslant\min(n+2^i, 3n+4)$.

Section 2. Computations

The main idea of this section is to investigate the spectral sequence obtained from the exact couple $\langle D, E\rangle$ where D, E are triply graded Z_2-modules;

$$\begin{aligned}E_{p,q,t} &= \mathrm{Ext}_A^{p+q,t}(C(p), Z_2)\\ D_{p,q,t} &= \mathrm{Ext}_A^{p+q,t}(B(p-1), Z_2),\\ &\qquad p\geqslant 0,\ p+q\geqslant 0.\end{aligned}$$

With maps induced from

$$0\to B(p)\xrightarrow{i} B(p-1)\xrightarrow{j} C(p)\to 0.$$

We observe that if $x \in E_{p,q,t}$, then x is a non-bounding r-1 cycle if and only if x pulls back via $r-1$ iterates of i^* to a non-zero class in $\mathrm{Ext}_A^{p+q,t}(B(p-r), Z_2)$.

The computations are facilitated by employing 1.7 to introduce products in the exact (compare [7]) in a certain range of t. We show that the various differentials are derivations. We shall obtain a product P,

$$P: \mathrm{Ext}_A^{s,t}(C(p), Z_2) \otimes \mathrm{Ext}_A^{u,v}(C(q), Z_2) \to \mathrm{Ext}_A^{s+u,t+v}(C(p+q), Z_2) \quad \text{for} \quad t+v \leqslant 3(p+q)+1.$$

We employ the method of Mac Lane [6 p. 220]. First let X and Y be A free resolutions of $C(p)$ and $C(q)$ respectively. Using the Hom-$\otimes$ interchange we have an external cohomology product p which commutes with connecting homomorphisms and in this case is an isomorphism

$$H^s(\mathrm{Hom}_A(X, Z_2)) \otimes H^u(\mathrm{Hom}_A(Y, Z_2)) \to H^{s+u}(\mathrm{Hom}_A(X, Z_2) \otimes \mathrm{Hom}_A(Y, Z_2))$$

$$\searrow^{p} \qquad \downarrow$$

$$H^{s+u}(\mathrm{Hom}_{A\otimes A}(X \otimes Y, Z_2)).$$

Let $\psi: A \to A \otimes A$ be the coproduct in A. ψ induces a change of rings $\psi^{\#}$,

$$\psi^{\#}: H^{s+u}(\mathrm{Hom}_{A\otimes A}(X \otimes Y, Z_2)) \to H^{s+u}(\mathrm{Hom}_A(X \otimes Y, Z_2)).$$

Using 1.7 we obtain an A-map $\Delta: C(p+q) \to C(p) \otimes C(q)$ for grades $t \leqslant 3(p+q)+1$ from $\Delta^*: A_e^*(p) \otimes A_e^*(q) \to A_e^*(p+q)$ by multiplication in A_e^*, $\Delta^*(\alpha(p)\,\beta(q)) = \alpha\beta(p+q)$. Let Δ^* also denote the induced map in Ext,

$$\Delta^*: \mathrm{Ext}_A^{s+u}(C(p) \otimes C(q), Z_2) \to \mathrm{Ext}_A^{s+u}(C(p+q), Z_2).$$

Then the product P is defined to be $P = \Delta^* \psi^{\#} p$. P commutes with connecting homomorphisms because all the factors do.

We next compute P in terms of the information of 1.7(e). Since p is an isomorphism, we identify $\mathrm{Ext}_A^s(C(p), Z_2) \otimes \mathrm{Ext}_A^u(C(q), Z_2)$ with $\mathrm{Ext}_{A\otimes A}^{s+u}(C(p) \otimes C(q), Z_2)$. We analyze the change of rings directly using the method of [6 p. 91]. We first compute $\mathrm{Ext}_A(C(p) \otimes C(q), Z_2)$. By 1.7 we have $N = \ker a$ in the range we are considering. Since $\ker a = A \cdot I(C)$ we have A_e a Hopf algebra obtained from A as a quotent of A by a Hopf ideal [9]. Let ${}_D(A \otimes A)$ and ${}_L(A \otimes A)$ denote $A \otimes A$ considered as an A-module via ψ and left action alone respectively. Then there exists a map $h: {}_D(A \otimes A) \to {}_L(A \otimes A)$ which is an isomorphism of A-modules. h is the composite $(1 \otimes \varphi) \circ (\psi \otimes 1)$, [5]. The remarks about the construction of A_e show that h projects to an isomorphism of ${}_D(A_e \otimes A_e)$ with ${}_L(A_e \otimes A_e)$. We thus obtain

$$\mathrm{Ext}_A(C(p) \otimes C(q), Z_2) = \mathrm{Ext}_A(C(p+q), Z_2) \otimes \mathrm{Ext}_A({}_L(A \otimes A_e), Z_2). \tag{2}$$

From our computations of Ext we can obtain a resolution X of $C(p) \otimes C(q)$ as an $A \otimes A$ module. Pulling back along ψ makes ${}_\psi X$ an A free resolution of ${}_\psi(C(p) \otimes C(q))$.

Let X' be a resolution for ${}_D(C(p)\otimes C(q))$ as an A-module obtained from (2). The following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} {}_\psi(C(p)\otimes C(q)) & \leftarrow & {}_\psi X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ {}_D(C(p)\otimes C(q))/ & \leftarrow & X' \end{array}$$

where f is a lifting of the identity, shows that a class in $W(p)\otimes W(q)$ maps to the obvious product class in $W(p+q)\otimes 1$ under the change of rings.

Finally lifting Δ to a map of resolutions we obtain P as

$$P: W(p)\otimes W(q)\to W(p+q); \quad \alpha(p)\otimes\beta(q)\to\alpha\beta(p+q).$$

We next study how the differentials in the spectral sequence behave in the algebra under P.

PROPOSITION 2.1. *The differential d^r coincides with the connecting homomorphism associated with the short exact sequence*

$$0\to B(p-r)/B(p)\to B(p-r-1)/B(p)\to C(p-r)\to 0,$$

when d^r is defined.

Proof. For $r=1$ consider,

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & B(p-1) & \to & B(p-2) & \to & C(p-1) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \| & \\ 0\to & C(p) & \to & B(p-2)/B(p) & \to & C(p-1) & \to 0. \end{array}$$

The rows are exact and the squares commute, thus we obtain

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_A^s(C(p)) & \xrightarrow{\delta'} & \mathrm{Ext}_A^{s+1}(C(p-1)) \\ {\scriptstyle j^*}\downarrow & & \| \\ \mathrm{Ext}_A^s(B(p-1)) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Ext}_A^{s+1}(C(p-1)). \end{array}$$

Thus $\delta' = \delta j^* = d^1$. The proof is completed inductively by giving the same argument on

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & B(p-r) & \to & B(p-r-1) & \to & C(p-r) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\ 0\to & B(p-r)/B(p) & \to & B(p-r-1)/B(p) & \to & C(p-r) & \to 0. \end{array}$$

Using 2.1 we obtain that each d^r is a derivation in the range where P is defined because P commutes with connecting homomorphism and maps i^*, j^*.

We now carry out the calculations of Theorems A and B. We obtain Theorem A by a direct approach. This information gives us $d^r(n)$ which, when used with the algebra structure, gives us Theorem B.

We first interpret 1.5 in the setting of the exact couple. Let ξ_1^p represent (p) in $\mathrm{Ext}_A^{0,p}(B(p-1), Z_2)$. The proposition says that if $[\beta]$ represents a non-zero element in $\mathrm{Ext}_A^{0,p}(B(p-r), Z_2)$ then (p) pulls back via $r-1$ iterates of $(i^*)^{-1}$ to $[\beta]$. We also remark that 1.5 along with 1.1(c) implies we can choose Sq^p as the representative generator in $B(p-r)$.

PROPOSITION 2.2. $(3\cdot 2^i)$ *pulls back exactly to* $\mathrm{Ext}_A^{0,3\cdot 2^i}(B(2^i+1), Z_2)$.

Proof. We show that there are elements (not monomials in general) $p_i \in A^*$ of grade $3\cdot 2^i (i \geqslant 0)$ such that $[p_i]$ is primitive in $B(2^i+1)^*$ (and hence in $B(n)^*$ for $2^i+1 \leqslant n < 3\cdot 2^i$) but not primitive in $B(2^i)^*$. Prop 1.5 then gives the result. We obtain the p_i inductively, $p_0 = \xi_1^3$ and $p_1 = \xi_1^6 + \xi_1^3\xi_2$. By inspection these elements satisfy the proposition. The inductive hypothesis for $i \geqslant 2$ is that (a) p_{i-1} is constructed, (b) $[p_{i-1}]$ is primitive in $B(2^{i-1}+1)^*$ but not primitive in $B(2^{i-1})^*$, (c) one of the summands of p_{i-1} is $\xi_1(2^{i-1}+1)\,\xi_i$. Now by squaring, $[p_{i-1}^2]$ is primitive in $B(2^i+3)^*$. Consider the exact sequence,

$$\mathrm{Ext}_A^{0,t}(B(n), Z_2) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Ext}_A^{0,t}(B(n+1), Z_2) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_A^{1,t}(C(n+1), Z_2).$$

By 1.7 the third term is non-zero for $t \leqslant 3n+4$ only for $t = n+2^j$. Let $n = 2^i+2$. Since the grading requirements are met and $3\cdot 2^i \neq 2^i+2+2^j$, we have $[p_{i-1}^2]$ in the image of i^*. Now let $n = 2^i+1$. Again $3.2^i \neq 2^i+1+2^j$ so $[p_{i-1}^2]$ is in the image of $i^* \circ i^*$. Let p_i be a representative in A^* such that $i^* \circ i^*([p_i]) = [p_{i-1}^2]$. By 1.5 p_i must contain p_{i-1} as a summand, and *a fortiori* $\xi_i(2^i+2)\,\xi_i(2) = S$ as a summand. The coproduct in $B(2^i+1)^*$ of S contains the summand $\xi_i(2) \otimes [\xi_1(2^i+2)]$. This must be cancelled by some other summand of p_i in order for $[p_i]$ to be primitive in $B(2^i+1)^*$. The only other monomial in A^* which can do this is $\xi_1(2^i+1)\,\xi_{i+1}$. Thus the induction is completed by invoking 1.6 to obtain the whole statement (b). This completes the proof.

2.3. *Proof of Theorem A.* We show

(a) $d^r(2^i) = 0$ all r and i

(b) $d^r(n) = q_i(n-r)$ for $r = 2^{i+1}-1$ $n \equiv 2^i(2^{i+1})$, $n > 2^i$.

(a) is immediate since $\xi_1(2^i)$ is a primitive in $I(A^*) = B(0)^*$. The previous result establishes that $d^r(n) \neq 0$ for the lowest value of n in each residue class. But the maps s_j of 1.8 are comodule isomorphisms in the grades involved necessary to assert $d^r(n) \neq 0$ for all n in the residue class. The values given in (b) are the only ones possible in view of 1.7 (e).

2.4. *Proof of Theorem B.* In the gradings we are considering, E_1 of the exact couple consists of all $q_j(n)$ such that $n+2^{j+1}-1 \leqslant 3n+1$ or $2^j \leqslant n+1$. Those which are eventually boundaries are by 2.3 all $q_j(n-r)$ with $r \equiv 2^j (2^{j+1})$, $n > 2^j$ and $r = 2^{j+1}-1$. These can be rewritten using P as $q_j(2^j+1)\,(k)$ with $k \equiv 0 (2^{j+1})$. If we write $q_j(n) = q_j(2^j+1)\,(m)$ with $n = 2^j+1+m$, $m \not\equiv 0 (2^{j+1})$, $m \geqslant 0$ we obtain the non-boundaries except those classes which would formally correspond to $m = -2, -1$. But these exceptional cases are such that any class to which they pull back lies outside the gradings of Theorem B. They sit in the line $t = 3n+4$ in table I. Hence in the proof of Theorem B the representation is adequate. In the gradings where we have the product, Theorem A implies the following,

$$\begin{aligned} d^r q_j(2^j+1)\,(m) &= q_j(2^j+1)\,d^r(m) \\ &= q_j q_i(2^j+1)\,(m-r), \quad m \equiv 2^i(2^{i+1}) \quad r = 2^{i+1}-1 \end{aligned}$$

or

$$= 0 \quad \text{if} \quad r < 2^{i+1}-1.$$

For values of m small with respect to 2^j (near $t = 3n+4$ in Table I) the computation is invalid because either the differentials land outside the range where we have P or are not defined in the exact couple. However we can use the isomorphisms of 1.8 to obtain the results for these values of m. The statement of Theorem B is just a restatement in terms of (n, t) of the above.

For convenience, Table I is a graph of Theorem B. It also includes some further information obtained in [2] for $t > 3n+4$.

A dot or x in position (n, t) of Table I represents an additive generator of $\mathrm{Ext}^{1,t}(B(n), Z_2)$. For $t \leqslant 3n+4$ the information is complete. The classes denoted by x represent generators determined by the rest of E_1 of the exact couple. They come from $B(2n)_e$ as indicated by Prop. 1.7. However, in this range many differentials are unknown. First, are there classes in the region $t > 3n+4$ which are pull backs of classes in the region $t \leqslant 3n+4$? The answer is "no" for $t \leqslant 16$ by direct computation. Second, what is the action of differentials where a "?" is placed? In low grades direct computation gives the result indicated.

Section 3. Evaluation of the Operations

We use the method of universal examples as developed in [4] to evaluate the operations. We can assume that a typical relation in $B(n)$ is $0 = a_1 \mathrm{Sq}^{n+1} + \Sigma a_i \mathrm{Sq}^i$ with $i > n+1$. For each positive integer m let (E_m, B_m, F_m, p_m) be the fibre space over $B_m = K(Z_2, m)$ with fiber F_m a cartesian product $K(Z_2, m+n)\, x X_i K(Z_2, m+i-1)$ $i > n+1$, and k-invariants Sq^{n+1} and Sq^i from the relation. We let ι_m and η_{m+n}, η_i denote the fundumental classes of the base and factors in the fibre respectively. Let

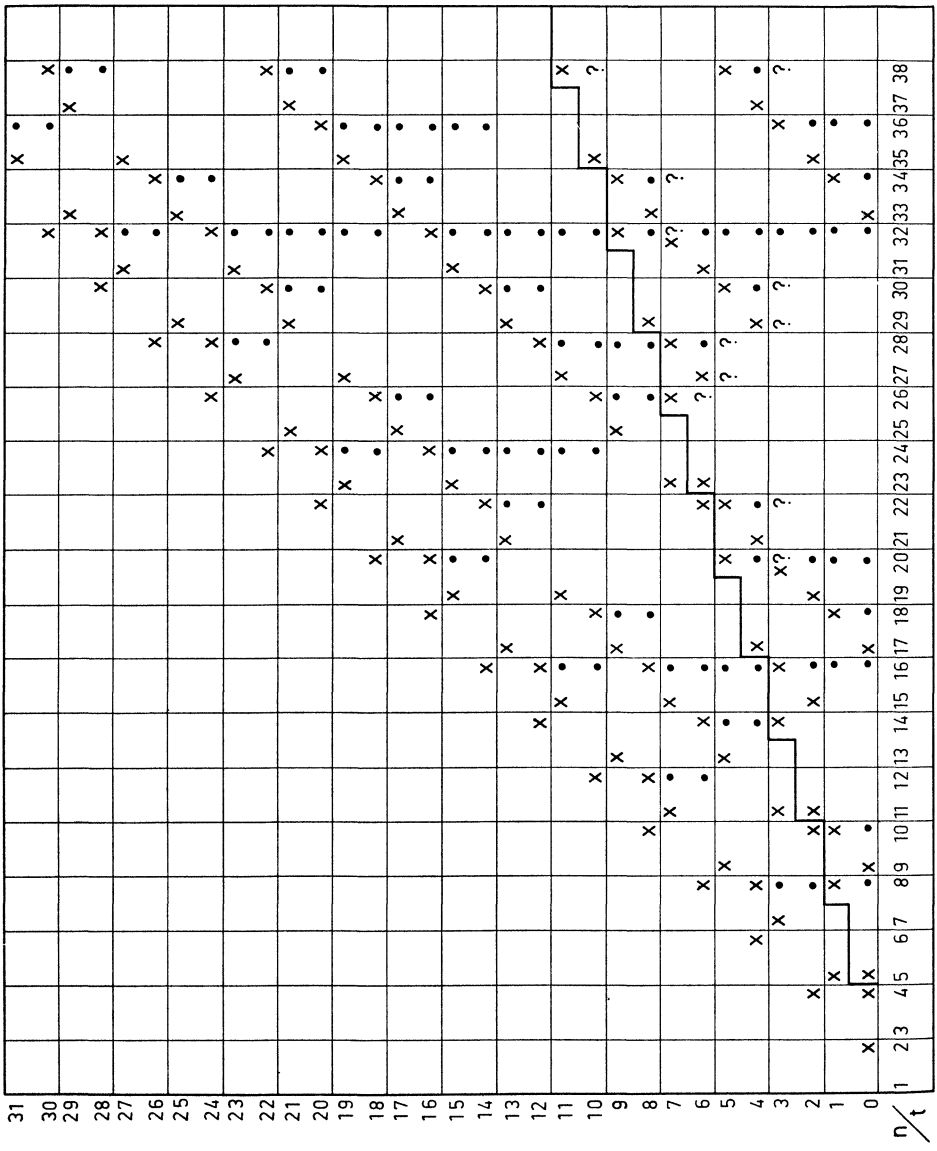


Table I

Graph of Theorem B in low dimensions, × represents class in E_2, ? refers to unknown differentials on ×-classes for $t \geq 3n+4$.

$\kappa_m = p_m^*(\iota_m)$. Since F_m is $(m+n-1)$-connected, the Serre sequence (coefficients Z_2)

$$H^j(B_m) \xrightarrow{p^*} H^j(E_m) \xrightarrow{i^*} H^j(F_m) \xrightarrow{\tau} H^{j+1}(B_m)$$

is exact for $j<2m+n-1$. Let m be large, then

$$\tau(a_1\eta_{n+m} + \Sigma a_i\eta_i) = a_1 \mathrm{Sq}^{n+1}\iota_m + \Sigma a_i \mathrm{Sq}^i \iota_m = 0.$$

By exactness, there exists a class $e_m \in H^j(E_m)$, $j=m+k-1$, where k is the grade of the (homogeneous) relation, such that $i^*(e_m) = a_1\eta_{n+m} + \Sigma a_i\eta_i$. If we perform the construction of the fibre spaces in such a way that $E_m = \Omega E_{m+1}$, we can assume e_m is primitive in the Hopf algebra $H^*(E_m)$. For small values of m, we can obtain a class e_m with the same properties by applying Ω. There is an indeterminacy in the choice of e_m. In [1] it is shown that this indeterminacy is the subgroup $\Sigma a_i H^{b_i}(E_m)$ $(i \geqslant n+1)$ where deg $a_i + b_i = k-1$. We shall denote the indeterminacy by $Q(r, m)$, r denoting the relation involved. We let Φ_m denote the secondary operation defined on κ_m with $\Phi(\kappa_m)$ equal to the coset of e_m modulo $Q(r, m)$. The collection $\{\Phi_m\}$ is the stable secondary operation associated with r.

In [1], Adams formalizes the procedure for directly connecting a relation with a universal example. The following proposition is an easy consequence of Theorem 3.7.2 [1], and its proof is omitted. We need it because there may be some choice in a relation representing a class in $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(B(n), Z_2)$.

PROPOSITION 3.1. *Let $(C, \varepsilon\, d)$ and (C, ε', d') be two resolutions of $B(n)$. Let f be a chain equivalence of C with C'. Let r and r' be relations representing the same class in* Ext, *i.e. $f(r) = r'$. Then the secondary operations satisfy*

$$\Phi_m \bmod Q(r, m) = \Phi'_m \bmod Q(r', m) + c$$

where c is a primary operation.

3.2. *Proof of Theorem C.* All coefficients are Z_2. We use the universal examples $(E_m, B_m, F_m, \kappa_m, e_m)$ with $m=n, n+1$. The spaces are displayed in the commutative diagram below,

$$\begin{array}{ccccc}
F_n & \to & PF_{n+1} & \xrightarrow{f} & F_{n+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
E_n & \to & PE_n & \xrightarrow{g} & E_{n+1} \\
\downarrow{\scriptstyle p_n} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{n+1}} \\
B_n & \to & PB_{n+1} & \xrightarrow{h} & B_{n+1},
\end{array}$$

in which the rows and columns are fibrations, all spaces are H-spaces, all maps H-maps, the Serre cohomology spectral sequences are sequences of Hopf algebras, all

differentials are Hopf algebra maps and the vertical maps induce maps of spectral sequences which are maps of differential Hopf algebras.

For $m=n$, all k-invariants are 0 and E_n is homotopically equivalent to $B_n x F_n$, however as an H-space it does not split this way. To find the H-space structure of E_n it is enough to determine the coproducts of the fundumental classes in the factors of F_n, η_{2n} and η_i. For $i>n+1$ it is easy to see that η_i is in the image of the suspension σ associated with the fibration g. This is because the k-invariants for $i>n+1$ are still zero in the fibration p_{n+1}. Thus these η_i are primitive. In the spectral sequence of g, we have $d_n(\kappa_n)=\kappa_{n+1}$. Thus $d_n(\kappa_n\otimes\kappa_{n+1})=\kappa_{n+1}^2$. But $\kappa_{n+1}^2=p^*(\iota_{n+1}^2)$ and $\iota_{n+1}^2=$ $=\mathrm{Sq}^{n+1}\iota_{n+1}$ is the lowest dimensional k-invariant for p_{n+1}. Therefore $\kappa_{n+1}^2=0$. Since PE_{n+1} is acyclic we have $\kappa_n\otimes\kappa_{n+1}$ in the image of d_n. But the elements η_{2n} and κ_n^2 generate $H^{2n}(E_n)$. Since $d_n(\kappa_n^2)=0$ the only remaining possibility is $d_n(\eta_{2n})=\kappa_n\otimes\kappa_{n+1}$. Both κ_n and κ_{n+1} are primitive so $\kappa_n\otimes\kappa_{n+1}$ is not primitive. Since d_n is an H-map, η_{2n} is not primitive. By dimensionality the coproduct of η_{2n} is

$$1\otimes\eta_{2n}+\kappa_n\otimes\kappa_n+\eta_{2n}\otimes 1\,.$$

Since $i^*(e_n)=\eta_{2n}+\Sigma a_i\eta_i$ and e_n is primitive, e_n must have the summand $H(a_1)\,\kappa_n$. Projecting into B_n gives the result.

We conclude by listing some low dimensional ($t\leqslant n+8$) relations representing classes of Theorem B. They were obtain from minimal resolutions. We use $i=(i^*)^{-1}$ to represent pull backs.

Table II

Class in Ext	*Congruence class of n*	*Relation*
$q_0(n+1)$	0(2)	$\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^{n+1}$
$q_1(n+1)$	3(4)	$\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^{n+3}$
$q_1(n+1)$	0(4) $n>0$	$\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^{n+2}$
$q_1(n+1)$	1(4)	$\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^{n+1}$
$iq_1(n+1)$	3(4)	$\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^{n+3}$
$i^2q_1(n+1)$	2(4)	$\mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^{n+1}$
$q_2(n+1)$	5(8)	$\mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^{n+3}+\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^{n+7}$
$q_2(n+1)$	6(8)	$\mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^{n+1}+(\mathrm{Sq}^6+\mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^1)\,\mathrm{Sq}^{n+2}+\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^{n+6}$
$q_2(n+1)$	7(8)	$\mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^{n+5}$
$q_2(n+1)$	0(8) $n>0$	$\mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^6\mathrm{Sq}^{n+2}+\mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^{n+4}$
$q_2(n+1)$	1(8) $n>1$	$\mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^{n+3}$
$q_2(n+1)$	2(8)	$\mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^{n+1}+\mathrm{Sq}^6\mathrm{Sq}^{n+2}$
$q_2(n+1)$	3(8)	$\mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^{n+1}$

BIBLIOGRAPHY

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. Math. *72* (1960), 20–104.

[2] J. R. HARPER, *Stable secondary cohomology operations*, University of Chicago Disseration, Chicago, Illinois (1967).
[3] A. L. LIULEVICIUS, *Notes on homotopy of Thom spectra*, Amer. J. Math. *86* (1964), 1–16.
[4] ——, *The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. *42* (1962).
[5] ——, *The cohomology of Massey–Peterson algebras*, to appear.
[6] S. MACLANE, *Homology* (Academic Press, New York 1963).
[7] W. S. MASSEY, *Products in exact couples*, Ann. Math. *59* (1954), 558–569.
[8] J. W. MILNOR, *The Steenrod algebra and its dual*, Ann. Math. *67* (1958), 150–171.
[9] N. E. STEENROD and D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology Operations* (Princeton University Press, 1962).
[10] C. T. C. WALL, *Generators and relations for the Steenrod algebra*, Ann. Math. *72* (1960), 429–444.

The University of Chicago and
Massachusetts Institute of Technology

Received September 3, 1968

Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques

par JOSEPH HERSCH (Ecole polytechnique fédérale, Zürich)

§1. Introduction

Des applications bien connues de la représentation conforme à des problèmes plans de physique mathématique reposent sur *l'invariance de l'intégrale de Dirichlet* lors d'une «transplantation conforme» [9]: Soit $\zeta(z)$ une application conforme (univalente) d'un domaine plan G_z sur un autre G_ζ; la transplantée d'une fonction $f(\zeta)$, donnée dans G_ζ, est la fonction $\tilde{f}(z)=f(\zeta(z))$ et l'on a $D(\tilde{f})=D(f)$, où $D(f)=\iint_{G_\zeta} \operatorname{grad}^2 f\, dA_\zeta$ et dA est l'élément d'aire.

Nous allons étudier ici deux extensions de cette transplantation, qui restent applicables à des domaines de types topologiques différents et de dimensions N, $\tilde{N}$ quelconques. La première de ces extensions («transplantation harmonique») a été brièvement annoncée dans une note aux *Comptes rendus* ([7]; voir aussi [3]); elle permet de transplanter une fonction ayant les mêmes surfaces de niveau qu'une fonction harmonique. La seconde en revanche («transplantation par modules») n'est pas soumise à cette restriction; c'est pourquoi elle peut fournir des bornes inférieures pour la fréquence propre fondamentale d'une membrane: nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème isopérimétrique de Rayleigh–Faber–Krahn.

Toutes les considérations qui suivent restent valables pour N quelconque; pour faciliter le langage, elles seront exprimées ici pour $N=3$ dimensions.

§2. La «transplantation harmonique»

2.1. Soit G un domaine de l'espace, dont la frontière Γ se compose de trois parties $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_a$. Nous supposons l'existence de la solution $h(x, y, z)=h(X)$ du problème de Dirichlet suivant:

$$h = h_0 = \text{const} \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \qquad h = h_1 = \text{const} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$
$$\partial h/\partial n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a, \qquad \Delta h = 0 \quad \text{dans} \quad G.$$

Soit γ une surface, ou un système de surfaces, séparant Γ_0 de Γ_1 dans G: une «rive» de γ est connexe à Γ_0 dans $G-\gamma$, l'autre «rive» de γ est connexe à Γ_1; soit $\partial/\partial n$ la dérivée normale dirigée vers Γ_1. On sait que le flux $\iint_\gamma \partial h/\partial n\, dS$ est indépendant

de γ, donc

$$\frac{1}{\mu} = 4\pi C = \frac{1}{(h_1 - h_0)^2} D(h)$$

$$= \frac{1}{(h_1 - h_0)^2} \left\{ \iint_{\Gamma_1} h \frac{\partial h}{\partial n} \, dS - \iint_{\Gamma_0} h \frac{\partial h}{\partial n} \, dS \right\} = \frac{1}{h_1 - h_0} \iint_{\gamma} \frac{\partial h}{\partial n} \, dS,$$

où $\mu = \mu_{\Gamma_0 \Gamma_1}$ est le «module», C la «capacité», $D(h) = \iiint_G \operatorname{grad}^2 h \, d\tau$ l'intégrale de Dirichlet, $d\tau$ l'élément de volume, dS l'élément de surface.

Soit $\psi(h)$ une fonction de classe C^1 dans l'intervalle $h_0 \leqslant h \leqslant h_1$; que vaut l'intégrale de Dirichlet $D(f)$ de la fonction $f(X) = \psi(h(X))$, $X \in G$? Partageons G par toutes les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}} (h = \hat{h})$ de h; l'élément de volume peut s'écrire $d\tau = dn \, dS$, où dn est la distance entre les surfaces $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h}+d\hat{h}}$ au point considéré, et dS est sur $\gamma_{\hat{h}}$;

$$D(f) = \iiint_G \psi'^2 \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)^2 dn \, dS = \int_{h_0}^{h_1} \psi'^2(\hat{h}) \, d\hat{h} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{\partial h}{\partial n} \, dS = \frac{D(h)}{h_1 - h_0} \int_{h_0}^{h_1} \psi'^2 \, dh. \qquad (1)$$

Le quotient

$$\frac{D(f)}{D(h)} = \frac{1}{h_1 - h_0} \int_{h_0}^{h_1} \psi'^2 \, dh \qquad (2)$$

ne dépend donc que des nombres h_0 et h_1 et de la fonction $\psi(h)$.

2.2. Procédons de même pour un autre domaine $\tilde{G}$, *qui n'est pas nécessairement topologiquement équivalent à G* (et peut même avoir une dimension $\tilde{N}$ différente de N). Décomposons sa frontière $\tilde{\Gamma}$ en trois parties $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_a$; appelons $\tilde{h}$ la fonction harmonique dans $\tilde{G}$ qui vaut h_0 sur $\tilde{\Gamma}_0$, h_1 sur $\tilde{\Gamma}_1$, et dont la dérivée normale s'annule sur $\tilde{\Gamma}_a$.

DÉFINITION. – *La fonction $\tilde{f}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{h}(\tilde{X}))$ sera appelée la* **transplantée harmonique** *de la fonction $f(X) = \psi(h(X))$.*

La formule (2) reste valable pour $\tilde{f}$ et $\tilde{h}$, d'où

$$\frac{D(\tilde{f})}{D(\tilde{h})} = \frac{D(f)}{D(h)}. \qquad (2')$$

En particulier, si $D(\tilde{h}) = D(h)$, c'est-à-dire *si* $\tilde{\mu} = \mu$, alors $D(\tilde{f}) = D(f)$ et l'intégrale de Dirichlet est *invariante* par cette transplantation harmonique.

2.3. Soit G un domaine de l'espace, de frontière Γ décomposée en Γ_0 et Γ_a. Nous supposons l'existence d'une *fonction de Green $g(X, Q)$* (X, point variable; Q, point

fixe dans G), définie par $g=0$ pour $X\in\Gamma_0$, $\partial g/\partial n_X=0$ pour $X\in\Gamma_a$, et $-\Delta_X g=\delta_Q$ (mesure de Dirac au point Q). Cette fonction de Green $g(X, Q)=h(X)$, harmonique dans $G-Q$, jouera le même rôle que la fonction h de 2.1. Soit γ une surface, ou un système de surfaces, séparant Q de Γ_0 dans G, nous avons ici $\iint_\gamma \partial h/\partial n\, dS=1$, d'où par (1), pour une fonction $f(X)=\psi(h(X))$,

$$D(f)=\int_0^\infty \psi'^2\, dh. \tag{1'}$$

Soit $\tilde{h}(\tilde{X})=\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Q})$ une fonction de Green dans un autre domaine $\tilde{G}$ avec $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_0+\tilde{\Gamma}_a$, nous pouvons «transplanter» f de G sur $\tilde{G}$ en définissant $\tilde{f}(\tilde{X})=\psi(\tilde{h}(\tilde{X}))$. Alors $D(\tilde{f})=D(f)$.

2.4. Pour généraliser la notion de «rayon conforme», nous définissons (grâce à la fonction de Green) le «*rayon harmonique*» $R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ d'un domaine G en un point $Q\in G$, relatif à Γ_0 et Γ_a ($\Gamma_0+\Gamma_a=\Gamma$ frontière de G); $R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ est le rayon de la boule sphérique B_N de même dimension N (par exemple $N=3$) que G, de centre $\tilde{Q}$, et telle que, avec $\tilde{\Gamma}_0=\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_a$ vide, $g_B(\tilde{X}, \tilde{Q})-g_{G;\Gamma_0,\Gamma_a}(X, Q)\to 0$ lorsque ($\tilde{Q}$ et Q restant fixes) $|\tilde{X}\tilde{Q}|=|XQ|\to 0$. (Définition voisine de celle de la constante de Robin.) – Pour $N=3$, on a $4\pi g(X, Q)=|XQ|^{-1}-R_Q^{-1}+o(1)$.

Le *rayon harmonique maximum* $\dot{R}(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ est défini par

$$\dot{R}(G; \Gamma_0, \Gamma_a)=\max_{Q\in G} R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a).$$

Si G est un domaine plan simplement connexe et si $\Gamma_0=\Gamma$ (Γ_a vide), alors $\dot{R}(G)$ est égal au rayon conforme maximum $\dot{r}(G)$ [9].

2.5. Un LEMME (cf. Carleman [1] et Szegö [11]):

Soit G un domaine borné de l'espace, dont la frontière est formée de n surfaces fermées $\Gamma_1^{(1)}+\Gamma_1^{(2)}+\cdots+\Gamma_1^{(n)}=\Gamma_1$ *intérieures* et d'une frontière *extérieure* Γ_0 (Γ_a vide); soient V_G le volume de G et V_0 ($>V_G$) le volume de tout le domaine borné délimité par Γ_0; *de tous ces domaines G ayant mêmes* V_0 *et* V_G, *le domaine limité par deux sphères concentriques réalise le Maximum du module* $\mu=\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}$.

Remarque – Il est bien connu (conséquence immédiate du principe de Dirichlet) que le module est une fonctionnelle de domaine monotone; la proposition suivante est donc équivalente au lemme:

V_0 et μ étant donnés, V_G est un Minimum pour le domaine compris entre deux sphères concentriques.

Démonstration du lemme. – Nous considérons la fonction h harmonique dans G,

qui vaut 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1, et nous partageons G par toutes les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}$ ($h=\hat{h}$) de h.

$$\mu^{-1} = D(h) = \iint_{\Gamma_1} h \frac{\partial h}{\partial n}\, dS - \iint_{\Gamma_0} h \frac{\partial h}{\partial n}\, dS = \iint_{\Gamma_1} \frac{\partial h}{\partial n}\, dS = \iint_{\gamma_{\hat{h}}} |\operatorname{grad} h|\, dS$$

pour tout $0 \leqslant \hat{h} \leqslant 1$. – D'autre part, le volume infinitésimal compris entre $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h}+d\hat{h}}$ vaut $|dV| = \iint_{\gamma_{\hat{h}}} dn\, dS = d\hat{h} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} |\operatorname{grad} h|^{-1}\, dS$; donc, par l'inégalité de Schwarz puis l'inégalité isopérimétrique géométrique dans l'espace,

$$\mu^{-1}\, |dV| \geqslant d\hat{h} \cdot \left(\iint_{\gamma_{\hat{h}}} dS \right)^2 \geqslant d\hat{h} \cdot (36\pi)^{2/3}\, V(\hat{h})^{4/3}, \tag{3}$$

où $V(\hat{h})$ est le volume de tout le domaine borné délimité par $\gamma_{\hat{h}}$; $V(0)=V_0$; $V(1)=V_0-V_G$; $|dV| = -(dV/d\hat{h})\, d\hat{h}$; donc, par (3), $-V^{-4/3}\, dV \geqslant (36\pi)^{2/3}\, \mu\, d\hat{h}$; d'où en intégrant ($\hat{h}$ va de 0 à 1):

$$(V_0 - V_G)^{-1/3} - V_0^{-1/3} \geqslant \tfrac{1}{3}(36\pi)^{2/3}\, \mu = (48\pi^2)^{1/3}\, \mu .$$

On a l'égalité dans le cas de deux sphères concentriques Γ_0 (rayon R_0, $V_0 = 4\pi R_0^3/3$) et Γ_1 (rayon R_1, $V_0 - V_G = 4\pi R_1^3/3$): *alors* $(48\pi^2)^{-1/3}\, [(V_0-V_G)^{-1/3} - V_0^{-1/3}] = (4\pi R_1)^{-1} - (4\pi R_0)^{-1} = \mu$.

Remarque. – Le lemme et sa démonstration restent valables si l'on admet que Γ_0 soit formée de plusieurs surfaces fermées (dont l'une est la frontière extérieure); les volumes séparés de G par les composantes intérieures de Γ_0 ne doivent alors *pas* être comptés dans V_0. (Ce cas peut être considéré comme cas limite du précédent: on peut relier entre elles les diverses composantes de Γ_0 par des «tuyaux» minces.)

2.6. Le LEMME analogue, relatif au rayon harmonique maximum:

De tous les domaines G de l'espace, de volume V_G donné et dont la frontière Γ_0 consiste en une ou plusieurs surfaces fermées, la sphère a le plus grand rayon harmonique maximum $\dot{R}$.

En d'autres termes: $V_G \geqslant (4/3)\, \pi \dot{R}(G)^3$.

Remarque heuristique. – Ce lemme peut être considéré comme un cas limite du précédent, Γ_1 étant une sphère infinitésimale.

Démonstration. – Soit $Q \in G$ tel que $R_Q(G) = \dot{R}$; lorsque $X \to Q$, la fonction de Green $g(X, Q)$ est de la forme $4\pi g(X, Q) = |XQ|^{-1} - \dot{R}^{-1} + o(1)$. Soit V_K le volume du sous-domaine $G_K = \{X \in G \mid 0 < g(X, Q) < K\}$; le module de G_K vaut K; donc, par le lemme de 2.5, V_K est au moins égal au volume compris entre deux sphères concentriques de

rayons R_0 et $R_K < R_0$, la sphère extérieure ayant le volume V_G et le module étant K: $(4/3)\,\pi R_0^3 = V_G$, $(4\pi R_K)^{-1} - (4\pi R_0)^{-1} = K$; $V_G - V_K \leqslant 4\pi R_K^3/3$, donc *il existe un point* X *tel que* $|XQ| \leqslant R_K$ *et* $g(X, Q) \leqslant K$.

Par la définition de $\dot{R} = R_Q(G)$,

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{r}{\exists}\ \underset{|XQ|<r}{\forall}\ g(X, Q) > \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|XQ|} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon;$$

choisissons $K = (4\pi r)^{-1} - (48\pi^2 V_G)^{-1/3}$, alors $R_K = r$; $\exists X$ tel que $|XQ| \leqslant r$ et $g(X, Q) \leqslant K$;

$$K \geqslant g(X, Q) > \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|XQ|} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon \geqslant \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon$$
$$= K + (48\pi^2 V_G)^{-1/3} - (4\pi\dot{R})^{-1} - \varepsilon;$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $(4\pi\dot{R})^{-1} > (48\pi^2 V_G)^{-1/3} - \varepsilon$, donc $V_G \geqslant 4\pi\dot{R}^3/3$.

2.7. *Extension du théorème isopérimétrique* $\lambda_1 r^2 \leqslant j_0^2$ *de Pólya–Szegö* [9].

Nous considérons le problème de la «membrane vibrante à N dimensions»: $\Delta u + \lambda^G u = 0$ dans le domaine G et $u = 0$ sur la frontière Γ.

THÉORÈME. – *Parmi tous les domaines* G *à* N *dimensions admettant une fonction de Green, la boule sphérique* B_N *réalise le Maximum de* $\lambda_1^G \dot{R}(G)^2$.

Démonstration (exprimée ici pour $N = 3$). – Soient $\tilde{Q}$ le centre d'une boule sphérique $B = B_N$ de rayon $R = \dot{R}(G)$; Q un point de G où $R_Q(G) = \dot{R}(G)$; $\tilde{u}_1(\tilde{X}) = \psi(\tilde{g}_B(\tilde{X}, \tilde{Q}))$ la fonction propre fondamentale de B; sa «transplantée» $U(X) = \psi(g_G(X, Q))$ s'annule sur Γ, elle est admissible pour le principe de Rayleigh dans G:

$$\lambda_1^G \leqslant R[U] = D(U) \Big/ \iiint_G U^2\, d\tau;$$

on va montrer que ce quotient de Rayleigh est

$$\leqslant D(\tilde{u}_1) \Big/ \iiint_B \tilde{u}_1^2\, d\tilde{\tau} = \lambda_1^B.$$

En effet, $D(U) = D(\tilde{u}_1)$ (cf. 2.3); d'autre part, le sous-domaine $\hat{G} = \{X \mid g_G(X, Q) > \hat{g}\}$ a la fonction de Green $g_{\hat{G}}(X, Q) = g_G(X, Q) - \hat{g}$, donc le rayon conforme maximum $\dot{R}(\hat{G}) \geqslant R_Q(\hat{G})$, où (cf. 2.4) $R_Q(\hat{G})^{-1} = \dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}$, $\dot{R}(\hat{G})^{-1} \leqslant \dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}$; en vertu du lemme 2.6 (cas $N = 3$), son volume $V_{\hat{G}} \geqslant (4/3)\,\pi\dot{R}(\hat{G})^3 \geqslant (4/3)\,\pi\,[\dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}]^{-3} = V_{\hat{B}}$, où $\hat{B}$ est la boule de rayon $\hat{R}$ dans laquelle $\tilde{g}_B(\tilde{X}, \tilde{Q}) > \hat{g}$; en effet, $\hat{R}$ est déterminée par $4\pi\hat{g} = \hat{R}^{-1} - \dot{R}(G)^{-1}$.

La fonction ψ étant monotone croissante,

$$\iiint_G U^2 \, d\tau = \int_{\hat{g}=0}^{\infty} V_{\hat{G}} \, d[\psi^2(\hat{g})] \geqslant \int_{\hat{g}=0}^{\infty} V_{\hat{B}} \, d[\psi^2(\hat{g})] = \iiint_B \tilde{u}_1^2 \, d\tilde{\tau}.$$

Ainsi s'achève la démonstration (ici pour $N=3$) de l'inégalité isopérimétrique $\lambda_1^G \leqslant \lambda_1^{B_N}$.

Remarque. – Nous avons utilisé ci-dessus $\dot{R}(\hat{G}) \geqslant R_Q(\hat{G})$; en fait, *on a l'égalité*, ce qui est un corollaire de la suradditivité des modules.

Pour $N=3$ dimensions, on a $\lambda_1^{B_3} = \pi^2/R^2$, donc

$$\lambda_1^G \dot{R}^2(G) \leqslant \pi^2. \tag{4}$$

2.8. Application de (4) à quelques domaines dont on connaît λ_1:

(a) Parallélépipède rectangle de côtés a, b, c: $\lambda_1 = \pi^2(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})$, d'où $\dot{R}^{-2} \geqslant a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$, soit $\dot{R} \leqslant 3^{-1/2}\mathfrak{M}_{-2}(a; b; c)$. ([4], pp. 12 ss.)

Comparaison: le lemme 2.6 donne $\dot{R}^3 \leqslant 3abc/4\pi$, soit $\dot{R} \leqslant (3/4\pi)^{1/3}\,\mathfrak{M}_0(a; b; c)$, qui est plus faible car $(3/4\pi)^{1/3} \simeq 0{,}620 > 0{,}577 \simeq 3^{-1/2}$ et $\mathfrak{M}_0 \geqslant \mathfrak{M}_{-2}$.

(b) Cas particulier $a=b=c$ (cube): $\lambda_1 = 3\pi^2/a^2$, d'où $\dot{R} \leqslant a/\sqrt{3} \simeq 0{,}57735a$. [Comparaisons: l'inégalité grossière de monotonie donne $\dot{R} > 0{,}5a$; le lemme 2.6 donne $\dot{R} \leqslant (3/4\pi)^{1/3}\, a \simeq 0{,}620a$.]

(c) Cas limite $b=c=\infty$: G est le domaine compris entre deux plans parallèles, de distance a; $\lambda_1 = \pi^2/a^2$, (4) donne $\dot{R} \leqslant a$; la valeur exacte est $\dot{R} = a/\ln 4 \simeq 0{,}72135a$. On a donc ici $\lambda_1 \dot{R}^2 = (\pi/\ln 4)^2 \simeq 0{,}52034\pi^2$. On a lieu de *conjecturer* que c'est, pour les domaines convexes à trois dimensions, la plus petite valeur possible de $\lambda_1 \dot{R}^2$. [De façon analogue, Pólya et Szegö ([9], p. 17) ont conjecturé que, parmi les domaines convexes plans, la bande infinie réalise le Minimum de $\lambda_1 \dot{r}^2$ ($\dot{r}$ = rayon conforme maximum).]

(d) Cylindre de révolution infini, de rayon R: $\lambda_1 = j_0^2/R^2$, (4) donne donc $\dot{R} \leqslant \pi R/j_0 \simeq$ $\simeq 1{,}3064R$.

(e) Cylindre de révolution tronqué (rayon R, hauteur H): $\lambda_1 = j_0^2/R^2 + \pi^2/H^2$, d'où $\dot{R}^{-2} \geqslant j_0^2\pi^{-2}R^{-2} + H^{-2}$, soit $\dot{R} \leqslant 3^{-1/2}\mathfrak{M}_{-2}(\sqrt{2\pi}R/j_0; \sqrt{2\pi}R/j_0; H)$.

Comparaison: le lemme 2.6 donne $\dot{R}^3 \leqslant 3R^2H/4$, soit $\dot{R} \leqslant (3j_0^2/8\pi^2)^{1/3}\,\mathfrak{M}_0(\sqrt{2\pi}R/j_0;$ $\sqrt{2\pi}R/j_0; H)$ qui est plus faible, car $(3j_0^2/8\pi^2)^{1/3} \simeq 0{,}603 > 0{,}577 \simeq 3^{-1/2}$ et $\mathfrak{M}_0 \geqslant \mathfrak{M}_{-2}$. ([4], pp. 12 ss.)

(f) Cas particulier $H=2R$: Nous obtenons $\dot{R} \leqslant (j_0^2\pi^{-2}+0{,}25)^{-1/2}R \simeq 1{,}094R$. [Comparaisons: l'inégalité grossière de monotonie donne $\dot{R} > R$; le lemme 2.6 donne $\dot{R} \leqslant (3/2)^{1/3}\, R \simeq 1{,}145R$.] [Par le théorème de Rayleigh–Faber–Krahn, le lemme 2.6 est *toujours* plus faible que (4).]

Inversement, la connaissance de $\dot{R}$ (ou d'une borne inférieure) fournira une borne supérieure pour λ_1.

2.9. *Extension d'une propriété isopérimétrique des membranes rectangulaires* [5, 6]. Considérons un domaine G (dimension N quelconque) de frontière $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_a$ (Γ_0, Γ_1, Γ_a disjointes). Nous supposons qu'il existe une fonction harmonique h dans G telle que $h=0$ sur Γ_0, $h=1$ sur Γ_1, $\partial h/\partial n=0$ sur Γ_a, et que $1/\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}=D(h)<\infty$. – Soit donnée dans G une «répartition de masses» $\varrho(x_1,\ldots,x_N)=\varrho(X)$; masse totale $M=\int_G \varrho\, d\tau$. – Considérons dans G deux problèmes de «membranes vibrantes inhomogènes»:

$\Delta u+\lambda\varrho u=0$ dans G, avec

0) $u=0$ sur Γ_0, $\partial u/\partial n=0$ sur Γ_1 et Γ_a; première valeur propre λ_{Γ_0};

1) $u=0$ sur Γ_1, $\partial u/\partial n=0$ sur Γ_0 et Γ_a; première valeur propre λ_{Γ_1}.

Alors

$$\lambda_{\Gamma_0}^{-1}+\lambda_{\Gamma_1}^{-1}\geqslant 8M\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}/\pi^2. \tag{5}$$

Cette inégalité est *isopérimétrique*: on a l'égalité notamment avec $\varrho=\text{const}$ pour tout cylindre (ou prisme) tronqué droit, de faces opposées Γ_0 et Γ_1. – Elle a d'abord été démontrée à l'aide de la représentation conforme [5, 6] pour les «quadrilatères» et les domaines doublement connexes dans le plan.

Démonstration de (5). – La fonction $f_0(X)=\sin[\pi h(X)/2]$ est admissible pour le principe de Rayleigh caractérisant λ_{Γ_0}; $f_1(X)=\cos[\pi h(X)/2]$ pour celui caractérisant λ_{Γ_1}; partageons G par les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}(h=\hat{h})$ de h, nous obtenons

$$D(f_0)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_G \cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)\operatorname{grad}^2 h\, d\tau$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_{\hat{h}=0}^{1}\cos^2\left(\frac{\pi\hat{h}}{2}\right)d\hat{h}\int_{\gamma_{\hat{h}}}\frac{\partial h}{\partial n}\,dS=\frac{\pi^2}{8\mu}=D(f_1);$$

$$\frac{1}{\lambda_{\Gamma_0}}+\frac{1}{\lambda_{\Gamma_1}}\geqslant\frac{1}{R[f_0]}+\frac{1}{R[f_1]}=\frac{8\mu}{\pi^2}\int_G\varrho\cdot(f_0^2+f_1^2)\,d\tau=\frac{8\mu}{\pi^2}M.$$

Remarque. – Pour les problèmes correspondants à 1 dimension dans l'intervalle $0<\tilde{x}<1$, nous avons la fonction harmonique $\tilde{h}=\tilde{x}$ et les fonctions propres fondamentales $\tilde{u}_0=\sin(\pi\tilde{x}/2)=\sin(\pi\tilde{h}/2)$ et $\tilde{u}_1=\cos(\pi\tilde{x}/2)=\cos(\pi\tilde{h}/2)$; les fonctions f_0 et f_1

utilisées dans la démonstration sont précisément les *transplantées harmoniques* de $\tilde{u}_0$ et $\tilde{u}_1$ (cf. 2.2).

§3. La «transplantation par modules»

3.1. La transplantation harmonique (§ 2) s'applique à des fonctions ayant les mêmes lignes de niveau qu'une fonction harmonique, ce qui est une forte restriction. Pour transplanter des fonctions n'ayant *pas* cette propriété, nous remarquons que *nous n'avons pas utilisé complètement l'harmonicité de h*! Nous avons utilisé (en 2.1) que le flux $\iint \partial h/\partial n \, dS$ est le même pour toutes les surfaces *de niveau* γ_h de h; tandis que l'harmonicité de h est équivalente à cette propriété pour *toute* surface γ. – On voit donc que, à l'aide de 2.1 et 2.2, nous saurons transplanter une fonction $f(X)$ (de classe C^1) dans G, constante sur Γ_0, constante sur Γ_1, et de dérivée normale nulle sur Γ_a, pourvu que nous sachions *construire une fonction* $h(X)$ *dans* G, *ayant les mêmes surfaces de niveau* γ_h $(h=\hat{h})$ *que* $f(X)$ *et dont le flux* $\iint_{\gamma_h} \partial h(X)/\partial n \, dS$ *soit indépendant de* $\hat{h}$. – Le problème de 2.1 est donc modifié ainsi: On donne de nouveau h_0 et h_1, mais *on impose*, en lieu et place de l'harmonicité, *toutes les surfaces de niveau* γ_h *de* h, et la condition $\iint_{\gamma_h} \partial h/\partial n \, dS = \text{const}$. Appelons k cette constante. La fonction h est complètement déterminée: c'est le potentiel électrostatique *en présence des «conducteurs parfaits»* γ_h. Il est clair que la différence $d\hat{h}$ des valeurs de h sur deux conducteurs voisins γ_h et γ_{h+dh} est proportionnelle au module infinitésimal (résistance électrique)

$$d\mu = \mu(dG) = [4\pi C(dG)]^{-1} = \left[\frac{1}{(d\hat{h})^2} D_{dG}(h)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{d\hat{h}} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{\partial h}{\partial n} dS\right]^{-1}$$

$$= \left[\iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{1}{dn} dS\right]^{-1} = \left(\frac{k}{d\hat{h}}\right)^{-1} = \frac{d\hat{h}}{k}, \qquad d\hat{h} = k \, d\mu.$$

On peut imposer *deux* des trois nombres h_0, h_1, k, la constante k (l'intensité) est proportionnelle à la différence $h_1 - h_0$. Sans aucune restriction essentielle, *nous choisirons dans ce travail* $h_0 = 0$ *et* $k = 1$, *ce qui détermine* h_1.

Nous avons donc

$$dh = d\mu$$

et, en désignant par γ_X la ligne de niveau passant par le point X,

$$h(X) = \int_{\Gamma_0}^{\gamma_X} d\mu = \mu^-(X);$$

nous introduisons la notation $\mu^-(X)$ (au lieu de $h(X)$), et nous dirons «le module au

point X» pour désigner cette fonction ainsi définie dans G. Le signe – dans μ^- veut rappeler que, par suite de la *suradditivité des modules*, $\mu^-(X)=\mu^-(\gamma_X)\leqslant\mu_{\Gamma_0\gamma_X}$: il ne faut pas confondre $\mu^-=\int d\mu$ et μ.

La fonction cherchée est ainsi simplement le «module» $h(X)=\mu^-(X)$. On va *vérifier* qu'elle a bien la propriété voulue.

3.2. THÉORÈME. – *Le flux du «module» à travers chaque surface de niveau vaut* 1.

Démonstration. – Considérons deux surfaces de niveau voisines $\check{\gamma}$ et $\hat{\gamma}$; $\mu^{\check{\gamma}}_{\hat{\gamma}}=d\mu=d\mu^-$; $dn(X)$ est la distance d'un point $X\in\hat{\gamma}$ à $\check{\gamma}$; par 3.1, nous avons

$$\iint\limits_{\hat{\gamma}}\frac{\partial\mu^-}{\partial n}\,dS=d\mu\iint\limits_{\hat{\gamma}}\frac{1}{dn}\,dS=d\mu\cdot\frac{1}{d\mu}=1\,.$$

Remarque. – Si Γ_1 se réduit à un point, le «module» $\mu^-(X)$ varie en général de 0 à $+\infty$. Ce n'est pas une fonction harmonique, mais son flux vaut 1 à travers chaque ligne de niveau: *c'est une extension naturelle de la notion de fonction de Green.*

3.3. Le «module» $\mu^-(X)$ ayant les mêmes lignes de niveau que $f(X)$, on peut écrire $f(X)=\psi(\mu^-(X))$, d'où (analogue à 2.1 et 2.3):

$$D(f)=\iiint\limits_G\psi'^2(\mu^-)\left(\frac{\partial\mu^-}{\partial n}\right)^2 dn\,dS=\int\limits_{\mu^-=0}^{\mu^-_{\max}}\psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\iint\limits_{\gamma_{\mu^-}}\frac{\partial\mu^-}{\partial n}\,dS$$
$$=\int\limits_{\mu^-=0}^{\mu^-_{\max}}\psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\,. \qquad (1'')$$

Dans le cas $0<\mu^-<\infty$ (cf. remarque ci-dessus), nous avons

$$D(f)=\int\limits_{\mu^-=0}^{\infty}\psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\,. \qquad (1''')$$

3.4. Etant donnés: (a) deux domaines G, $\tilde{G}$ (dont les dimensions N et $\tilde{N}$ ne sont même pas nécessairement égales), de frontières $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_a$ et $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_0+\tilde{\Gamma}_1+\tilde{\Gamma}_a$;

(b) une fonction f dans G, constante sur Γ_0, constante sur Γ_1, et de dérivée normale nulle sur Γ_a;

(c) une fonction F dans $\tilde{G}$, jouissant des propriétés analogues;

alors nous définissons la **transplantée par modules** $\tilde{f}(\tilde{X})$ *de* $f(X)$ comme suit:

$\mu^-(X)$ est définie dans G comme en 3.1, à l'aide des lignes de niveau de f; $\tilde{\mu}^-(\tilde{X})$ de même dans $\tilde{G}$ à l'aide des lignes de niveau de F; alors $f(X)$ est de la forme $f(X) = \psi(\mu^-(X))$. [Souvent $\mu^-_{\max} = \mu^-(\Gamma_1)$, $\tilde{\mu}^-_{\max} = \tilde{\mu}^-(\tilde{\Gamma}_1)$.]

DÉFINITION:

$$\tilde{f}(\tilde{X}) = \psi\left(\frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}}\tilde{\mu}^-(\tilde{X})\right). \tag{6}$$

On a alors, par 3.3,

$$D(\tilde{f}) = \left(\frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}}\right)^2 \int_{\mu^-=0}^{\mu^-\max} \psi'^2(\mu^-)\, d\left(\frac{\tilde{\mu}^-_{\max}}{\mu^-_{\max}}\mu^-\right) = \frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}} D(f),$$

$$\tilde{\mu}^-_{\max} D(\tilde{f}) = \mu^-_{\max} D(f). \tag{2''}$$

En particulier, *si* $\tilde{\mu}^-_{\max} = \mu^-_{\max}$, *et également ici si tous deux sont infinis, nous définissons*

$$\tilde{f}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{\mu}^-(\tilde{X})), \tag{6'}$$

d'où

$$D(\tilde{f}) = D(f). \tag{2'''}$$

3.5. *Une autre démonstration du théorème de Rayleigh–Faber–Krahn* [10, 2, 8, 9]

Ni la transplantation conforme, ni la transplantation harmonique (§ 2) ne peuvent servir à démontrer ce théorème $\lambda_1 A \geqslant \pi j_0^2$. ($A$ est l'aire du domaine, $j_0 \simeq 2{,}4048$ le premier zéro de la fonction de Bessel $J_0(x)$; on a l'égalité pour la membrane circulaire.) En effet, la fonction propre fondamentale $u_1(X)$ du domaine plan considéré G ($u_1 = 0$ sur la frontière Γ) n'a en général *pas* les mêmes lignes de niveau qu'une fonction harmonique. Quand on compare G à une membrane circulaire K, une transplantation conforme ou harmonique ne peut donc avoir lieu que de K sur G, le principe de Rayleigh est alors appliqué (à la fonction transplantée) *dans* G: il ne peut fournir que des bornes *supérieures* pour λ_1.

En revanche, la «transplantation par modules» permet d'utiliser les lignes de niveau de u_1 *dans* G *et de transplanter* u_1 *de* G *sur* K.

Le théorème pour N dimensions est bien connu: *De tous les domaines de dimension* N *et de* N*-volume* V *donnés, la boule sphérique donne la plus petite valeur propre fondamentale* λ_1. – La démonstration suivante sera, elle aussi, exprimée pour $N = 3$ dimensions, mais elle reste valable pour tout N.

Nous avons ici $\Gamma_0 = \Gamma$, Γ_a est vide, Γ_1 est formée par le point (ou les points) où u_1 atteint son maximum. – Dans le domaine G considéré, nous définissons la fonction $\mu^-(X)$, comme en 3.1, à partir des surfaces de niveau de $u_1(X)$. La fonction ψ est définie par $u_1(X) = \psi(\mu^-(X))$. – Soit K une sphère de centre $\tilde{Q}$ et de volume V_G égal

à celui de G: son rayon R est donné par $4\pi R^3/3 = V_G$. Le «module» $\tilde{\mu}^-(\tilde{X})$ dans K sera défini relativement aux sphères concentriques, d'où $\tilde{\mu}^-(\tilde{X}) = \tilde{\mu}(\tilde{X}) = (4\pi)^{-1}(|\tilde{X}\tilde{Q}|^{-1} - R^{-1})$. [Il est égal à $\tilde{g}_{\tilde{X}\tilde{Q}}$; on a *ici l'additivité* des modules.] La transplantée de $u_1(X)$ est $\tilde{u}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{\mu}(\tilde{X}))$; $\tilde{u} = 0$ sur la frontière sphérique $\tilde{\Gamma}$ de K. Par (2‴),

$$D_K(\tilde{u}) = \int_{\mu^- = 0}^{\infty} \psi'^2(\mu^-)\, d\mu^- = D_G(u_1) = \lambda_1^G \iiint_G u_1^2\, d\tau = \lambda_1^G \int_{\mu^- = 0}^{\infty} \psi^2(\mu^-) \frac{dV}{d\mu^-} d\mu^-, \tag{7}$$

où dV est le volume compris entre les surfaces de niveau γ_{μ^-} et $\gamma_{\mu^- + d\mu^-}$; soit $V(\xi)$ le volume du sous-domaine de G où $\mu^- < \xi$; $dV/d\mu^- = dV/d\xi$; il suit du lemme 2.5 (Carleman, Szegö) que la dérivée $dV/d\xi$ est, pour chaque ξ, plus grande que pour une sphère de volume $V_G - V(\xi)$; donc, avec $4\pi r^3/3 = V_G - V(\xi)$,

$$\frac{dV}{d\xi} \geqslant \frac{-4\pi r^2\, dr}{-dr/4\pi r^2} = (4\pi r^2)^2 = (36\pi)^{2/3} (V_G - V(\xi))^{4/3};$$

d'où, en intégrant et en tenant compte de $V(\xi = 0) = 0$,

$$[V_G - V(\xi)]^{-1/3} \geqslant (48\pi^2)^{1/3}\, \xi + V_G^{-1/3} = [V_G - \tilde{V}(\xi)]^{-1/3}$$

pour tout ξ (analogue: 2.5), c'est-à-dire $V(\xi) \geqslant \tilde{V}(\xi)$; $V(\xi = \infty) = V_G = V_K = \tilde{V}(\xi = \infty)$.

La fonction $\psi(\xi)$ étant monotone croissante, on a par (7):

$$D_K(\tilde{u}) = \lambda_1^G \int_{\xi = 0}^{\infty} \psi^2(\xi)\, dV(\xi) = \lambda_1^G \int_{\xi = 0}^{\infty} [V_G - V(\xi)]\, d[\psi^2(\xi)]$$

$$\leqslant \lambda_1^G \int_{\xi = 0}^{\infty} [V_K - \tilde{V}(\xi)]\, d[\psi^2(\xi)] = \lambda_1^G \int_{\xi = 0}^{\infty} \psi^2(\xi)\, d\tilde{V}(\xi) = \lambda_1^G \iiint_K \tilde{u}^2\, d\tau;$$

nous appliquons le principe de Rayleigh à la fonction $\tilde{u}(\tilde{X})$ *dans* K*:*

$$\lambda_1^K \leqslant R[\tilde{u}] = \frac{D_K(\tilde{u})}{\iiint_K \tilde{u}^2\, d\tau} \leqslant \lambda_1^G.$$

§4. Une interprétation-démonstration des théorèmes de Rayleigh–Faber–Krahn et de Pólya–Szegö: comparaison de cordes vibrantes inhomogènes de longueur infinie

4.1. Si nous considérons comme connues les surfaces de niveau de la fonction propre fondamentale $u_1(X)$ d'un domaine G (membrane à N dimensions, à frontière fixée), le problème de la vibration fondamentale devient équivalent à celui d'une corde inhomogène de longueur infinie, fixée à son extrémité gauche.

En effet, le quotient de Rayleigh (avec lignes de niveau γ_{μ^-} connues) est, par (1‴),

$$R[f]=\frac{D(f)}{\int_G f^2\,d\tau}=\frac{\int_{\mu^-=0}^{\infty}\left(\frac{d\psi}{d\mu^-}\right)^2 d\mu^-}{\int_{\mu^-=0}^{\infty}\frac{dV}{d\mu^-}\psi^2\,d\mu^-};$$

c'est le quotient de Rayleigh d'une telle corde inhomogène, avec la masse spécifique $\varrho(\mu^-)=dV/d\mu^-$, μ^- *étant simplement l'abcisse.* – La *masse totale* de la corde est $M=\int_{\mu^-=0}^{\infty}\varrho\,d\mu^-=V_G$. – La première valeur propre λ_1 et la première fonction propre $\psi(\mu^-)$ sont les mêmes pour la membrane et pour la corde.

4.2. *Interprétation du théorème de Rayleigh–Faber–Krahn.*

La comparaison entre une membrane G à N dimensions et une membrane dans une boule sphérique B_V (N dimensions aussi) de même N-volume V_G se ramène à la comparaison entre deux cordes inhomogènes (cf. 4.1) d'abcisse μ^-, de masses spécifiques $\varrho(\mu^-)$ et $\tilde{\varrho}(\mu^-)$ respectivement, mais *d'égale masse totale* $M=V_G$: $\lambda_1^G=\lambda_1^{\varrho}$, $\lambda_1^{B_V}=\lambda_1^{\tilde{\varrho}}$.

La démonstration donnée en 3.5 peut être interprétée ainsi: en vertu du lemme 2.5 (Carleman, Szegö), on a pour toute abcisse ξ:

$$\int_{\mu^-=0}^{\xi}\varrho\,d\mu^-\geqslant\int_{\mu^-=0}^{\xi}\tilde{\varrho}\,d\mu^-,\quad\text{donc aussi}\quad m(\xi)=\int_{\xi}^{\infty}\varrho\,d\mu^-\leqslant\int_{\xi}^{\infty}\tilde{\varrho}\,d\mu^-=\tilde{m}(\xi);$$

$m(0)=M=\tilde{m}(0)$: *on passe de* ϱ *à* $\tilde{\varrho}$ *en déplaçant des masses vers la droite. (Il est intuitif que cela abaisse* λ_1.*)* – On peut, sans modifier le Minimum du quotient de Rayleigh, se restreindre aux fonctions $\psi(\mu^-)$ positives, *monotones* croissantes (le quotient de Rayleigh diminue si l'on remplace partout $d\psi$ par $|d\psi|$); pour chaque telle fonction ψ,

$$\int_{\mu^-=0}^{\infty}\varrho\psi^2\,d\mu^-=\int_{\xi=0}^{\infty}m(\xi)\,d[\psi^2(\xi)]\leqslant\int_{\xi=0}^{\infty}\tilde{m}(\xi)\,d[\psi^2(\xi)]=\int_{\mu^-=0}^{\infty}\tilde{\varrho}\psi^2\,d\mu^-,$$

$$R[\psi]=\frac{\int_0^{\infty}\psi'^2\,d\mu^-}{\int_0^{\infty}\varrho\psi^2\,d\mu^-}\geqslant\frac{\int_0^{\infty}\psi'^2\,d\mu^-}{\int_0^{\infty}\tilde{\varrho}\psi^2\,d\mu^-}=\tilde{R}[\psi];\quad\text{d'où}\quad\lambda_1^G=\lambda_1^{\varrho}\geqslant\lambda_1^{\tilde{\varrho}}=\lambda_1^{B_V}.$$

4.3. *Interprétation du théorème de Pólya–Szegö.*

Soit $Q \in G$ tel que $R_Q(G) = \dot{R}$; on compare la membrane à N dimensions dans G, *modifiée par l'imposition des lignes de niveau de* $g(X, Q)$, *ce qui fait augmenter* λ_1, avec la boule sphérique $B_{\dot{R}}$ de rayon $\dot{R}$; cela revient à comparer deux cordes infinies de masses spécifiques ϱ et $\tilde{\varrho}$; la démonstration donnée en 2.7 peut être interprétée ainsi: par le lemme 2.6, on a ici $m(\xi) \geqslant \tilde{m}(\xi)$ (voir 4.2), d'où $\lambda_1^G \leqslant \lambda_1^{\varrho} \leqslant \tilde{\lambda}_1^{\tilde{\varrho}} = \lambda_1^{B_{\dot{R}}}$.

Conclusion

La transplantation harmonique permet de suppléer, dans certains cas, à la transplantation conforme lorsque celle-ci n'est plus à disposition; tandis que la transplantation par modules, plus souple, ramène l'étude de fonctionnelles de domaines à celle des modules déterminés par les surfaces de niveau des solutions inconnues. – L'idée de la transplantation harmonique est voisine de la méthode de Pólya et Szegö ([9], pp. 100–105) consistant à imposer les lignes de niveau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. CARLEMAN, *Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik*, Math. Z. *1*, 208–212 (1918)

[2] G FABER, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitzungsberichte der Bayrischen Akad. der Wiss. *1923*, 169–172.

[3] T. GASSER et J. HERSCH, *Über Eigenfrequenzen einer mehrfach zusammenhängenden Membran: Erweiterung von isoperimetrischen Sätzen von Pólya und Szegö*, Z. Angew. Math. Phys. *19*, 672–675 (1968).

[4] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA, *Inequalities* (Cambridge Univ. Press, 1959).

[5] J. HERSCH, *Deux propriétés isopérimétriques des membranes homogènes rectangulaires*, C.R. Acad. Sci. Paris *261*, 2299 (1965).

[6] J. HERSCH, *Anwendungen der konformen Abbildung auf isoperimetrische Sätze für Eigenwerte*, Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna (Springer-Verlag, 1966), 25–34.

[7] J. HERSCH, «*Transplantation harmonique*» *et extension de théorèmes isopérimétriques*, C.R. Acad. Sci. Paris *266*, 690 (1968).

[8] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Annalen *94*, 97–100 (1924).

[9] G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (Princeton Univ. Press, 1951).

[10] Lord RAYLEIGH, *The theory of sound*, 2nd edition (London 1894/96).

[11] G. SZEGÖ, *Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z. *31*, 583–593 (1930).

Summary

The "harmonic transplantation" allows to extend some isoperimetric theorems, so far proved by conformal mapping, to higher connectivity and to higher dimensions; for the first eigenvalue λ_1 of a membrane, it again can give only upper bounds. – The "transplantation by moduli" is much more flexible; for example, it leads to a simple one-dimensional interpretation of the Rayleigh–Faber–Krahn theorem.

Reçu le 16 octobre 1968

Foliations on Open Manifolds, II

by ANTHONY PHILLIPS

1. Introduction

Consider an n-dimensional smooth Riemannian manifold M which is open (i.e. has no compact components) and on M a field σ of tangent k-planes. This note gives a sufficient condition for σ to be homotopic to an integrable field. The condition is stated in terms of the complementary q-plane field $\sigma^{\perp}$ ($q=n-k$), which we may consider as a q-dimensional subbundle of TM, the tangent bundle of M.

THEOREM: *If the structural group of $\sigma^{\perp}$ can be reduced to a discrete group, then σ is homotopic to an integrable field.*

REMARKS: This theorem was suggested by the following result of Ehresmann ([1, p. 38], [2, p. 364]): Let $N \subset M$ be an embedded submanifold; then N is a leaf of a foliation of a neighborhood of N in M if and only if the structural group of the normal bundle of N in M can be reduced to a discrete group. It gives a partial answer to a question posed by Reeb [7], Haefliger [2] and Thomas [8]. Since the one-dimensional orthogonal group is discrete, this gives a simpler proof of [6], Theorem 1.2: every $(n-1)$-plane field on M is homotopic to an integrable field. The restriction to open manifolds allows the use of submersion theory.

The proof of this theorem is given in the next two sections; the last section contains an example.

Early drafts of this note contain a much more restricted theorem. I am very grateful to André Haefliger for pointing out this generalisation.

2. Proof of Theorem

Let $\tilde{M}$ be the universal cover of M, with $p:\tilde{M}\to M$ the projection, and denote by $\alpha:\tilde{M}\to\tilde{M}$ the covering transformation corresponding to the element α of the fundamental group π of M. We will use the notation $\alpha_*:T\tilde{M}\to T\tilde{M}$, etc., for the differential of $\alpha:\tilde{M}\to\tilde{M}$, etc. A field τ of tangent planes on $\tilde{M}$ satisfying

$$\alpha_*\tau = \tau \quad \text{for} \quad \alpha\in\pi \qquad (*)$$

projects on M to a field $p_*\tau$ which is integrable if and only if τ is. The fields σ, $\sigma^{\perp}$ are lifted up by p to fields $p^*\sigma$, $p^*\sigma^{\perp}$ on $\tilde{M}$ satisfying (*). Let us give $\tilde{M}$ the Riemannian metric pulled back from M by p; then $p^*\sigma^{\perp}=(p^*\sigma)^{\perp}$.

The universal covering $p:\tilde{M}\to M$ is a principal bundle over M with group π. The bundle $\sigma^{\perp}$, having discrete structural group, is isomorphic to $\tilde{M}\times_r R^q$, the q-plane bundle associated to $p:\tilde{M}\to M$ by a representation $r:\pi\to O(q)$. (Compare [3], Lemma 1.) To simplify notation, let $r_\alpha = r(\alpha)$. As usual, we construct $\tilde{M}\times_r R^q$ by dividing $\tilde{M}\times R^q$ by the relation $(x, y)\sim(\alpha(x), r_\alpha(y))$, for $\alpha\in\pi$. Let $\varphi:\sigma^{\perp}\to\tilde{M}\times_r R^q$ be the isomorphism, and $\tilde{p}:\tilde{M}\times R^q\to\tilde{M}\times_r R^q$ the canonical projection.

There exists a unique trivialisation $\Phi:p^*\sigma^{\perp}\to\tilde{M}\times R^q$ making the following square of bundle maps commute, as can easily be verified.

$$\begin{array}{ccc} p^*\sigma^{\perp} & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{M}\times R^q \\ {\scriptstyle p_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} \\ \sigma^{\perp} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{M}\times_r R^q \end{array}$$

The reason for defining Φ is to obtain the tangent bundle map $H:T\tilde{M}\to TR^q$ by the composition

$$T\tilde{M}\longrightarrow p^*\sigma^{\perp}\xrightarrow{\Phi}\tilde{M}\times R^q\xrightarrow{\text{proj.}}R^q = TR^q_0\subset TR^q$$

(the first map is orthogonal projection, and TR^q_0 denotes the tangent space at the origin.) This map has kernel $\ker H = p^*\sigma$; furthermore it is easy to check that H is a π-equivariant epimorphism in the sense that $H\circ\alpha_* = (r_\alpha)_*\circ H$, for $\alpha\in\pi$, and that $\operatorname{rank}(H) = q$.

LEMMA: *The map H is homotopic through π-equivariant epimorphisms to the differential f_* of a submersion $f:\tilde{M}\to R^q$.*

This lemma is proved in the next section. It yields the proof of the theorem, as follows. If H_t is the homotopy, $0\leqslant t\leqslant 1$, then $\ker H_t$ defines a homotopy between $p^*\sigma$ and the k-plane field $\ker(f_*)$, which is tangent to the foliation given by the manifolds $\{f = \text{constant}\}$. By equivariance each $\ker H_t$ satisfies (*), so $p_*\ker H_t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, gives a homotopy between σ and the integrable field $p_*\ker(f_*)$.

3. Proof of Lemma

First, following [5], Corollary 1.2, realize M as $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, an expanding union of compact manifolds with boundary, such that U_0 is an n-disc and either a) U_{i+1} retracts into U_i through embeddings which leave U_{i-2} fixed, or b) U_{i+1} is U_i with a handle of index $\leqslant n-1$ attached. We may assume that the $p^{-1}U_i$ give a similar decomposition for $\tilde{M}$; of course now in case b) $p^{-1}U_{i+1}$ will be $p^{-1}U_i$ with one handle attached for each element of π. This can be guaranteed, for instance, by taking neighborhoods of the simplexes of an $(n-1)$-dimensional spine of M (which exists by [9], Theorem 3.2) in a sufficiently fine triangulation.

For convenience in indexing, we will parametrize the homotopy by $[0, \infty]$. Let U_0^* be one component of $p^{-1}U_0$; then U_0^* is an n-disc and, by Lemma 2.1 of [5], $H \mid U_0^*$ is homotopic through bundle epimorphisms to the differential f'_* of a submersion $f': U_0^* \to R^q$. Let V_0 be an open set containing U_0^* and such that $V_0 \cap \alpha(V_0) = \emptyset$ for $\alpha \in \pi$, and let H'_t, $t \in [0, 1]$, be a homotopy, fixed outside V_0, between H and a bundle epimorphism H'_1 equal to f'_* on U_0^*. Such a homotopy, through bundle epimorphisms, exists by [5], Lemma 5.1. A π-equivariant homotopy $H_t: T\tilde{M} \to TR^q$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, is now defined by $\tilde{H}_t = H$ outside $p^{-1}p(V_0)$, and $H_t|_{\alpha(x)} = (r_\alpha)_* \circ H'_t|_x \circ \alpha_*^{-1}$ for $x \in V_0$, and $\alpha \in \pi$. Also define $f_0: p^{-1}U_0 \to R^q$ by $f_0 \circ \alpha(x) = r_\alpha \circ f'(x)$, for $x \in U_0^*$, $\alpha \in \pi$.

Induction hypothesis: between $t=0$ and $t=k$ we have deformed H through π-equivariant epimorphisms to a map H_k which over $p^{-1}U_k$ is the differential of a submersion f_k. Observe that the deformation between k and $k+1$ will leave this map fixed on $p^{-1}U_{k-2}$. The induction step will thus imply the existence of a well-defined homotopy, since for any $x \in p^{-1}U_k$, $H_t|_x = H_{k+2}|_x$ for $t \geqslant k+2$.

Proof of induction step: cases a) and b) must be distinguished. In case a) there is a homotopy h_t, $t \in [0, 1]$, of embeddings of U_{k+1} in itself, joining the identity map of U_{k+1} to $h_1: U_{k+1} \to U_k$, and such that each h_t is the identity on U_{k-2}. Covering this homotopy defines a unique similar homotopy $\tilde{h}_t$ on $p^{-1}U_{k+1}$. Let $f_{k+1} = f_k \circ \tilde{h}_1$. Extend the homotopy $(h_t)_*: TU_{k+1} \to TU_{k+1}$ to a homotopy of bundle epimorphisms $L_t: TM \to TM$ (see [5], Lemma 5.1); cover this homotopy to define $\tilde{L}_t: T\tilde{M} \to T\tilde{M}$, and finally let $H_{k+t} = H_k \circ \tilde{L}_t$, for $t \in [0, 1]$.

In case b), let U_{k+1}^* be one of the components of $p^{-1}U_{k+1} - p^{-1}U_k$. It follows from the proof of [5], Lemma 6.2 that $H_k \mid U_{k+1}^*$ is homotopic through epimorphisms fixed near $p^{-1}U_k$ to f'_*, where $f': U_{k+1}^* \to R^q$ is a submersion extending f_k. Proceed as in the case $k=0$ to define f_{k+1} and a homotopy from H_k to H_{k+1} satisfying the induction hypothesis.

4. An Example

Consider the punctured projective space $P^6 - x$. This manifold is doubly covered by $S^5 \times R$. On $S^5 \times R$ the 2-plane field spanned by v (the pullback of a non-zero vectorfield on P^5 via the projections $S^5 \times R \to S^5 \to P^5$) and $w = \partial/\partial t$ is invariant under the antipodal map and so defines a 2-plane field on $P^6 - x$. This bundle clearly has discrete structural group; it now follows that $P^6 - x$ has a 4-dimensional foliation.

The existence of such a foliation cannot be directly deduced from submersion theory, for the following argument shows there can be no submersion from $P^6 - x$ to a 2-dimensional manifold M. Such a submersion f would split $T(P^6 - x)$ as $\eta^2 \oplus \xi^4$, where $\eta = f^*TM$. Note first that for $i \leqslant 5$ the i^{th} Stiefel-Whitney class [4] of $P^6 - x$ is $w_i(P^6 - x) = a^i$, where a generates $H^1(P^6 - x; Z_2) = Z_2$. The equation $w_5(P^6 - x) = w_1\eta\, w_4\xi + w_2\eta\, w_3\xi$ shows that $w_1\eta$ and $w_2\eta$ cannot both be 0. Suppose $w_1\eta \neq 0$, that

is $w_1\eta = a$. This would imply $a^3 = w_1(f^*TM)^3 = f^*(w_1TM)^3 = 0$. Similarly $w_2\eta \neq 0$ is also impossible.

Finally, note that the 2-plane field spanned by v and w on $S^5 \times R$ is integrable, and thus projects to give an integrable 2-plane field on $P^6 - x$. This manifold therefore carries foliations of dimensions 1 (integrate a non-zero vectorfield), 2, 4 and 5 (see the Remarks in § 1). On the other hand, a straightforward argument with Stiefel-Whitney classes shows that there can exist no 3-plane field on $P^6 - x$.

REFERENCES

[1] C. EHRESMANN, *Les connexions infinitesimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie du CBRM, Liège (1950), pp. 29–55.
[2] A. HAEFLIGER, *Variétés feuilletées*, Annali della Scuola Normale Superiore, Pisa (3) *16* (1962), 367–397.
[3] J. MILNOR, *On the existence of a connection with curvature* 0, Commentarii Math. Helv. *32* (1957), 215–223.
[4] J. MILNOR, *Lectures on Characteristic Classes* (mimeo. notes) (Princeton 1958).
[5] A. PHILLIPS, *Submersions of open manifolds*, Topology *6* (1967), 171–206.
[6] A. PHILLIPS, *Foliations on open manifolds*, I, Commentarii Math. Helv. *43* (1968), 204–211.
[7] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Actualités Scientifiques et Industrielles (Hermann, Paris 1952).
[8] E. THOMAS, *Fields of tangent k-planes on manifolds*, Inventiones math. *3* (1967), 334–347.
[9] J. H. C. WHITEHEAD, *The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space*, Proc. Lond. Phil. Soc. (3) *11* (1961), 81–90.

University of California, Berkeley and
State University of New York, Stony Brook

Received November 1, 1968

Über die Künneth-Formel für ausserordentliche Cohomologie

GUIDO MISLIN

Einleitung

Die Künneth-Formel gibt eine Beziehung zwischen der Cohomologie eines Produktes von topologischen Räumen und der Cohomologie der Faktoren an. Sind X und Y (endliche) CW-Komplexe, so kann man die Künneth-Formel in Form einer kurzen exakten Sequenz von zellulären Cohomologiegruppen schreiben

$$0 \to (H^*X \otimes H^*Y)^q \xrightarrow{m} H^q(X \times Y) \to \operatorname{Tor}(H^*X, H^*Y)^{q+1} \to 0$$

Diese exakte Sequenz nimmt für punktierte CW-Komplexe X und Y, unter Verwendung von reduzierter Cohomologie, die folgende Form an

$$0 \to (\tilde{H}^*X \otimes \tilde{H}^*Y)^q \xrightarrow{m} \tilde{H}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}(\tilde{H}^*X, \tilde{H}^*Y)^{q+1} \to 0$$

(Es bezeichnet $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ das „smash"-Produkt, und m bzw. $\tilde{m}$ sind die äusseren Produkte der Cohomologietheorien H bzw. $\tilde{H}$).

Im folgenden wird gezeigt, dass für eine ausserordentliche Cohomologietheorie h eine stark konvergente „Künneth-Spektralsequenz" mit $E_2^{p,q} \cong \operatorname{Tor}_p^{\Lambda}(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{p+q}$ und $E_\infty^{p,q} \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$ existiert, falls man eine endliche flache Auflösung des Λ-Moduls $\tilde{h}^*X$ geeignet „geometrisch realisieren" kann; $\Lambda = \tilde{h}^*S^0$ bezeichnet den Koeffizientenring. Diese Spektralsequenz bricht zusammen, wenn $\operatorname{Tor}_p^{\Lambda}(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y) = 0$ ist für $p > 1$. Dann erhält man wie im Falle der gewöhnlichen Cohomologie, eine Künneth-Formel in Form einer exakten Sequenz

$$0 \to (\tilde{h}^*X \otimes_{\Lambda} \tilde{h}^*Y)^q \to \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}_1^{\Lambda}(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{q+1} \to 0$$

Dies trifft z.B. für die komplexe K-Theorie zu, wie Atiyah in [2] gezeigt hat, und modulo 2-Torsion auch für die reelle K-Theorie (vgl. Korollare 1 und 4). Für andere Cohomologietheorien erhält man analoge Resultate, wenn man geeignete Voraussetzungen über die homologische Dimension von $\tilde{h}^*X$ bzw. $\tilde{h}^*Y$ macht (vgl. Korollar 5).

Die Methode, welche zu der oben beschriebenen Spektralsequenz führt, ist eine Verallgemeinerung des Beweises von Atiyah (loc. cit.) der Künneth-Formel für die komplexe K-Theorie.

Die meisten Resultate der vorliegenden Arbeit sind in einer Comptes-Rendus-Note angekündigt worden (G. Mislin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 504–506, 1968).

I. Ungraduierte Cohomologiefunktoren mit Multiplikation

Es bezeichne $\mathscr{C}$ die Kategorie der punktierten Räume vom Homotopietypus eines endlichen CW-Komplexes. Alle im folgenden auftretenden Räume seien Objekte aus $\mathscr{C}$.

1. DEFINITION 1. Ein auf der Kategorie $\mathscr{C}$ definierter kontravarianter Funktor t mit Werten in der Kategorie der Abelschen Gruppen heisst ungraduierter Cohomologiefunktor mit Multiplikation, falls gilt:

1) Exaktheit. Ist $X \to Y \to Z$ eine Cofaserung in $\mathscr{C}$, so ist die Bildsequenz $tZ \to tY \to tX$ exakt.

2) Homotopie-Invarianz. Ist $f: X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $tf: tY \to tX$ ein Isomorphismus.

3) Suspensions-Isomorphismus. Es gibt eine homomorphe natürliche Transformation $\nu: t \xrightarrow{\cong} t \circ \sum = t(S^1 \Lambda)$.

4) Multiplikation. Es gibt eine natürliche Transformation $\mu: t \times t \to t \circ \wedge$ mit

α) μ ist homomorph in beiden Variablen, und definiert somit für alle X und Y einen Homomorphismus $tX \otimes tY \to t(X \wedge Y)$, den wir auch mit μ bezeichnen.

β) μ soll auf folgende Art mit ν kompatible sein: $\mu \circ (\nu \otimes 1) = \nu \circ \mu$

$$\begin{array}{ccc} tX \otimes tY & \xrightarrow{\mu} & t(X \wedge Y) \\ {\scriptstyle \nu \otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ t(S^1 \wedge X) \otimes tY & \xrightarrow{\mu} & t(S^1 \wedge X \wedge Y) \end{array}$$

γ) Die folgende abgeschwächte Form von Kommutativität und Assoziativität soll erfüllt sein:

S^0-Assoziativität.

$$\mu \circ (1 \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes 1): tX \otimes tS^0 \otimes tX \to t(X \wedge Y)$$

S^0-Kommutativität.

$$\begin{array}{ccccc} T_2 \circ \mu = \mu \circ T_1 : tS^0 \otimes tX & \xrightarrow{\mu} & t(S^0 \wedge X) & \cong & tX \\ {\scriptstyle T_1}\downarrow & & {\scriptstyle T_2}\downarrow & & {\scriptstyle =}\downarrow \\ tX \otimes tS^0 & \xrightarrow{\mu} & t(X \wedge S^0) & \cong & tX \end{array}$$

Hierbei bezeichnen T_1 und T_2 die evidenten Abbildungen, und X ist auf kanonische Weise mit $S^0 \wedge X$ und $X \wedge S^0$ identifiziert.

δ) Es gibt eine $1 \in tS^0$ mit $\mu(1 \otimes x) = \mu(x \otimes 1) = x$ für alle $x \in tX$ and alle X.

Aus γ und δ folgt, dass tS^0 ein assoziativer und kommutativer Ring Λ mit 1 ist, und dass tX ein unitärer Λ-Modul ist. Wegen γ sind die beiden Λ-Modul-Strukturen $tS^0 \otimes tX \to tX$ und $tX \otimes tS^0 \to tX$ natürlich isomorph. Aus der S^0-Assoziativität folgt,

dass μ wie folgt faktorisiert: $\mu=\tilde{\mu}\circ\kappa$ (κ die kanonische Abbildung)

$$\begin{array}{ccc} tX\otimes tY & \xrightarrow{\mu} & t(X\wedge Y) \\ & {\scriptstyle\kappa}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\tilde{\mu}} & \\ & tX\otimes_{\Lambda} tY & \end{array}$$

Ist $\{\tilde{h}^i, v^i\}$ eine ausserordentliche, multiplikative, reduzierte Cohomologietheorie, so ist $t=\tilde{h}^*$ ein Funktor von der oben beschriebenen Art, falls die Multiplikation dem Axiom 4 von Definition 1 genügt. (Man verlangt natürlich in diesem Fall, dass $\tilde{h}^*$ im graduierten Sinne S^0-kommutativ ist). Führt man in $\tilde{h}^*$ Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ ein, so kann man unter gewissen Umständen in $\tilde{h}^*(\ ;\mathbf{Z}_q)$ eine multiplikative Struktur definieren [vgl. 1]. Diese multiplikative Struktur ist im allgemeinen weder kommutativ noch assoziativ. Doch ist die oben geforderte abgeschwächte Form von Kommutativität und Assoziativität für $t=\tilde{h}^*(\ ;\mathbf{Z}_q)$ häufig erfüllt, so z.B. für die reelle K-Theorie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_p$, falls p eine ungerade Primzahl ist.

II. Der triviale Fall: $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(tY,\ )=0$

Ist der Funktor $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(tY,\ )=0$, so ist auch $\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(tY,\ )=0$ für alle $p>1$ und man nennt tY flach. Gleichbedeutend damit ist zu sagen, dass $\otimes_{\Lambda} tY$ ein exakter Funktor ist. Für diesen Fall nimmt die Künneth-Formel die folgende einfache Form an.

2. LEMMA 1. *Ist tY ein flacher Λ-Modul, so gilt für alle X*

$$\tilde{\mu}\colon tX\otimes_{\Lambda} tY\cong t(X\wedge Y)$$

Beweis. Für $X=S^0$ ist dies offensichtlich richtig. Nun kann man mittels Induktion das Lemma für $X=S^n$ beweisen, wie man aus dem folgenden (wegen Definition 1, β) kommutativen Diagramm abliest

$$\begin{array}{ccc} tS^{n-1}\otimes_{\Lambda} tY & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & t(S^{n-1}\wedge Y) \\ {\scriptstyle v\otimes 1}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle v} \\ tS^{n}\otimes_{\Lambda} tY & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & t(S^{n}\wedge Y) \end{array}$$

Da tY flach ist, ist $t(\ )\otimes_{\Lambda} tY$ ein halbexakter Homotopiefunktor. Also ist $\tilde{\mu}\colon t(\ )\otimes \otimes_{\Lambda} tY\to t(\ \wedge Y)$ eine natürliche Transformation zwischen halbexakten Homotopiefunktoren, die auf den Sphären ein Isomorphismus ist. Folglich ist $\tilde{\mu}$ für alle endlichen CW-Komplexe ein Isomorphismus [6, Satz 7.1].

3. KOROLLAR 1. *Für die $\mathbf{Z}_8$-graduierte reelle K-Theorie $\widetilde{KO}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)$ mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_p$, p eine ungerade Primzahl, gilt die Künneth-Formel*

$$\tilde{\mu}\colon \widetilde{KO}^{\#}(X;\mathbf{Z}_p)\otimes_{\Lambda}\widetilde{KO}^{\#}(Y;\mathbf{Z}_p)\cong\widetilde{KO}^{\#}(X\wedge Y;\mathbf{Z}_p)$$

Beweis. Der Funktor $t=\widetilde{KO}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)=\oplus_{i\in\mathbf{Z}_8}\widetilde{KO}^{i}(\ ;\mathbf{Z}_p)$ trägt eine kanonische multiplikative Struktur [vgl. 1], welche t zu einem Cohomologiefunktor mit Multiplikation (cf. Def. 1) macht. Nach Bott [3, p. 72] ist der Ring $\widetilde{KO}^{\#}S^0\cong\mathbf{Z}[x,y]/(x^2-4, 2y, xy, y^3)$ mit $\deg(x)=4$ und $\deg(y)=7$ (in $\mathbf{Z}_8$). Die Reduktion mod. p, $R:\widetilde{KO}^{\#}S^0\to\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)$, ist ein Ringhomomorphismus und, wegen $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\widetilde{KO}^{\#}S^0, \mathbf{Z}_p)=0$, ist R surjektiv. Weil das Bild $\mathrm{Im}(R)\cong\widetilde{KO}^{\#}S^0\otimes\mathbf{Z}_p$ ist als Ring, folgt: $\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)\cong\widetilde{KO}^{\#}S^0\otimes\mathbf{Z}_p\cong\mathbf{Z}_p[z]/(z^2-4)$. Aber $(z-2)$ und $(z+2)$ sind fremde Elemente im Hauptidealring $\mathbf{Z}_p[z]$ wegen $p\neq2$; demnach gilt $\mathbf{Z}_p[z]/(z^2-4)\cong$ $\cong(\mathbf{Z}_p[v]/(v+2))\times(\mathbf{Z}_p[w]/(w-2))\cong\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p$, [vgl. 4, §1 Prop. 4]. Der Koeffizientenring $\Lambda=tS^0=\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)$ ist also halbeinfach und mithin sind alle Λ-Moduln projektiv [5, Chap. I, Theorem 4.2]. Somit ist $\widetilde{KO}^{\#}(X;\mathbf{Z}_p)$ flach für alle X und das Korollar folgt aus dem Lemma 1.

(Ein analoges Korollar erhält man natürlich z.B. für die Cohomologietheorien $\tilde{H}^*(\ ;\mathbf{Z}_p)$ oder $\widetilde{KU}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)$ für beliebige Primzahlen p.)

Das folgende Lemma gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an, dass tX ein flacher Λ-Modul ist.

4. LEMMA 2. *Ist die Abelsche Gruppe $H^*X\otimes tS^0$ torsionsfrei, so ist tX ein freier tS^0-Modul.*

5. HILFSSATZ 1. *Es sei R ein Ring mit* 1. *Ist $H^*X\otimes R$ torsionsfrei, so ist die natürliche Ring-Abbildung $\varphi:H^*X\otimes R\to H^*(X;R)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Gemäss dem Koeffiziententheorem genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Tor}(H^*X, R)=0$ ist. Da H^*X eine endlicherzeugte Abelsche Gruppe ist ($X\in\mathscr{C}$) brauchen wir jedoch nur zu zeigen, dass für jeden endlichen direkten Summanden $\mathbf{Z}_m\subset H^*X$ gilt $\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)=0$. Hierzu betrachten wir die exakte Sequenz $0\to\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)\to R\xrightarrow{M}R\to$ $\to\mathbf{Z}_m\otimes R\to0$, wobei M die Multiplikation mit m bedeutet. Weil $\mathbf{Z}_m\otimes R$ ein direkter Summand der torsionsfreien Gruppe $H^*X\otimes R$ ist folgt $\mathbf{Z}_m\otimes R=0$, d.h. M ist surjektiv. Es sei nun $b\in\mathrm{Ker}(M)$ und a ein Element mit $M(a)=ma=1$. Wegen $M(ab)$ $=(ma)\,b=b=a(mb)=0$ folgt $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)=0$.

Beweis von Lemma 2. Wir betrachten die ausserordentliche Cohomologietheorie $\tilde{h}^*$ definiert durch $\tilde{h}^i=t$ und $(\nu^i:\tilde{h}^i\to\tilde{h}^{i+1}\circ\Sigma)=(\nu:t\to t\circ\Sigma)$ für alle i. Da diese Cohomologietheorie die Periode 1 hat, kann man die Atiyah–Hirzebruch Spektralsequenz wie folgt schreiben:

$$E_2^p(t)\cong H^p(X;tS^0)\Rightarrow E_\infty^p(t)\cong\mathrm{gr}_p\,tX$$

$\{E_r^*(t), d_r(t)\}$ ist eine Spektralsequenz von tS^0-Moduln. Aus der Voraussetzung folgt, unter Verwendung des Hilfssatzes, dass $E_2^p(t)\cong H^p(X;tS^0)\cong H^p(X)\otimes tS^0$ ist. Betrachtet man die evidente natürliche Transformation $\varrho:t\to t\otimes\mathbf{Q}=t'$, so erhält man

einen Morphismus zwischen Spektralsequenzen $\varrho^*: \{E_r^*(t), d_r(t)\} \to \{E_r^*(t'), d_r(t')\}$. Die Spektralsequenz $\{E_r^*(t'), d_r(t')\}$ bricht aber zusammen, denn $t'S^0$ ist ein $\mathbf{Q}$-Vektorraum. Daraus folgt, dass auch $\{E_r^*(t), d_r(t)\}$ zusammenbricht. Betrachtet man nämlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_2^p(t) & \xrightarrow{\varrho_2{}^p} & E_2^p(t') \\ {\scriptstyle d_2{}^p(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_2{}^p(t')} \\ E_2^{p+2}(t) & \xrightarrow{\varrho_2{}^{p+2}} & E_2^{p+2}(t') \end{array}$$

so ist $\varrho_2^{p+2} \circ d_2^p(t) = d_2^p(t') \circ \varrho_2^p = 0$, denn es ist $d_r(t') = 0$ für $r \geqslant 2$. Andrerseits ist $\varrho_2^*: E_2^*(t) \cong H^*X \otimes tS^0 \to E_2^*(t') \cong E_2^*(t) \otimes \mathbf{Q}$ injektiv, denn nach Voraussetzung ist $H^*X \otimes tS^0$ torsionsfrei. Also folgt aus $\varrho_2^{p+2} \circ d_2^p(t) = 0$, dass $d_2^p(t) = 0$ ist. Analog schliesst man: $d_r(t) = 0$ für $r > 2$. Schreibt man H^pX als direkte Summe einer freien Abelschen Gruppe F und einer Torsionsgruppe T, $H^pX \cong F \oplus T$, so induziert die Projektion auf den ersten Faktor einen tS^0-Isomorphismus $H^pX \otimes tS^0 \cong F \otimes tS^0 \cong \cong (tS^0)^m$, wobei m den Rang von F bezeichnet. Es folgt $E_2^p(t) \cong (tS^0)^m \cong E_\infty^p(t) \cong \cong \mathrm{gr}_p tX$. Der tS^0-Modul tX ist somit frei, denn er besitzt eine endliche Filtrierung mit freier assoziierter graduierter Gruppe $\oplus \mathrm{gr}_p tX$.

6. KOROLLAR 2. *Die Multiplikation* $\tilde{\mu}: tX \otimes_A tY \to t(X \wedge Y)$ *ist ein C-Isomorphismus zwischen Abelschen Gruppen.* (C = Klasse der Torsionsgruppen).

Beweis. Wir betrachten wieder die natürliche Transformation $\varrho: t \to t' = t(\ ) \otimes \mathbf{Q}$. Der Funktor t' trägt auf natürliche Weise die Struktur eines ungraduierten Cohomologiefunktors mit Multiplikation μ', induziert durch dieselbe Struktur von t, und ϱ ist kompatibel mit den Multiplikationen. Folglich gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} t'X \otimes_{A'} t'Y & \xrightarrow{\tilde{\mu}'} & t'(X \wedge Y) \\ {\scriptstyle \otimes \mathbf{Q}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \otimes \mathbf{Q}} \\ tX \otimes_A tY & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & t(X \wedge Y) \end{array}$$

Aus Lemma 2 folgt, dass $t'Y$ flach ist ($t'S^0 = tS^0 \otimes \mathbf{Q}$ ist torsionsfrei und divisibel). Somit ist $\tilde{\mu}'$ gemäss Lemma 1 ein Isomorphismus. Ferner sind die vertikalen Pfeile im Diagramm C-Isomorphismen, denn für eine Abelsche Gruppe A sind Kern und Cokern der natürlichen Abbildung $A \to A \otimes \mathbf{Q}$ die Torsionsgruppen $\mathrm{Tor}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ bzw. $A \otimes (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Folglich ist auch $\tilde{\mu}$ ein C-Isomorphismus.

III. N-Auflösungen und die Künneth-Spektralsequenz

Wir wollen uns hier im Hinblick auf die Anwendungen auf $\mathbf{Z}$- bzw. $\mathbf{Z}_q$-graduierte Cohomologiefunktoren $t = \tilde{h}^*$ beschränken, mit $\tilde{\mu}$ vom Grade 0 und ν vom Grade 1.

7. DEFINITION 2. Es sei N eine natürliche Zahl. Eine N-Auflösung von X besteht aus einer Familie von Cofaserungen

$$\{Y_k \xrightarrow{\sigma_k} F_k \xrightarrow{\tau_{k+1}} Y_{k+1}; 0 \leqslant k \leqslant N; Y_0 = X; Y_{N+1} = 0\},$$

wobei man verlangt, dass $\tilde{h}^* F_k$ flach ist und dass die Homomorphismen $\sigma_k^* : \tilde{h}^* F_k \to \tilde{h}^* Y_k$ surjektiv sind für alle k.

Zu einer N-Auflösung von X gehört eine flache Auflösung von $\tilde{h}^* X$ der Länge N

$$0 \to \tilde{h}^* F_N \xrightarrow{\partial_N^*} \cdots \xrightarrow{\partial_2^*} \tilde{h}^* F_1 \xrightarrow{\partial_1^*} \tilde{h}^* F_0 \xrightarrow{\sigma_0^*} \tilde{h}^* X$$
$$\sigma_1^* \searrow \quad \nearrow \tau_1^*$$
$$\tilde{h}^* Y_1$$

mit $\partial_k = \sigma_k \circ \tau_k$.

Ferner gehört zu einer N-Auflösung von X eine Faktorisierung von $f: 0 \to \Sigma^N X$, nämlich

$$0 \xrightarrow{j^N} Y_N \xrightarrow{j^{N-1}} \Sigma Y_{N-1} \to \cdots \to \Sigma^{N-1} Y_1 \xrightarrow{j^0} \Sigma^N Y_0 = \Sigma^N X$$

wobei $j^p = \Sigma^{N-p-1} \varphi_p$ ist, und φ_p die Abbildung in der Puppesequenz

$$Y_p \to F_p \to Y_{p+1} \xrightarrow{\varphi_p} \Sigma Y_p \to \Sigma F_p$$

bezeichnet.

Offensichtlich ist die Cofaser $\mathrm{Cof}(j^p) = \mathrm{Cof}(\Sigma^{N-p-1} \varphi_p) \cong \Sigma^{N-p} F_p$.

8. SATZ. *Besitzt X eine N-Auflösung, so gibt es eine Spektralsequenz*

$$\{E_r^{p,q}, d_r\} \quad \text{mit} \quad E_2^{p,q} \cong \mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(\tilde{h}^* X, \tilde{h}^* Y)^{p+q} \text{ und } E_{N+1}^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong \mathrm{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y).$$

Beweis. Es sei $f = \Pi j^p$ die zur N-Auflösung von X gehörige Faktorisierung von $0 \to \Sigma^N X$. Betrachtet man den Kompositionsfunktor $\{T^q, w^q\} = \{\tilde{h}^{N+q}(\ \wedge Y), v^{N+q}\}$, so erhält man [vgl. 7] aus der Faktorisierung $f = \Pi j^p$ ein Rees-System mit zugehöriger Spektralsequenz $\{E_r^{p,q}, d_r\}$. Es folgt in der Schreibweise von [7]

$$E_1^{p,q} = T^q(j^p) \cong \tilde{h}^{N+q}(\Sigma^{N-p} F_p \wedge Y) \cong \tilde{h}^{p+q}(F_p \wedge Y)$$

Dabei wurde verwendet, dass $\mathrm{Cof}(j^p) \cong \Sigma^{N-p} F_p$ ist. Das Differential $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p-1,q+1}$ wird induziert durch

$$(F_{p-1} \wedge Y \xrightarrow{\tau_p \wedge 1} Y_p \wedge Y \xrightarrow{\sigma_p \wedge 1} F_p \wedge Y) = (F_{p-1} \wedge Y \xrightarrow{\partial_p \wedge 1} F_p \wedge Y),$$

sodass man ein kommutatives Diagramm erhält

$$\begin{array}{ccc} E_1^{p,q} \cong \tilde{h}^{p+q}(F_p \wedge Y) & \xrightarrow{(\partial_p \wedge 1)^*} & \tilde{h}^{p+q}(F_{p-1} \wedge Y) \cong E_1^{p-1,q+1} \\ \cong \uparrow \tilde{\mu} & & \cong \uparrow \tilde{\mu} \\ (\tilde{h}^* F_p \otimes_{\Lambda} \tilde{h}^* Y)^{p+q} & \xrightarrow{\partial_p^* \otimes 1} & (\tilde{h}^* F_{p-1} \otimes_{\Lambda} \tilde{h}^* Y)^{p+q} \end{array}$$

Gemäss Lemma 1 sind die vertikalen Pfeile natürliche Isomorphismen, denn $\tilde{h}^*F_k$ ist flach für alle k. Also sind die Komplexe $\{E_1^{p,q}, d_1^{p,q}\}$ und $\{(\tilde{h}^*F_p \otimes \tilde{h}^*Y)^{p+q}, (\partial_p^* \otimes 1)^{p+q}\}$ isomorph. Weil $\{\tilde{h}^*F_p, \partial_p^*\}$ eine flache Auflösung von $\tilde{h}^*X$ ist, folgt

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ker} d_1^{p,q}/\operatorname{Im} d_1^{p+1,q-1} \cong \operatorname{Ker}(\partial_p^* \otimes 1)^{p+q}/\operatorname{Im}(\partial_{p+1}^* \otimes 1)^{p+q} \cong$$
$$\cong \operatorname{Tor}_p^{\Lambda}(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{p+q}$$

Für $p \notin [0, N]$ ist offensichtlich $E_2^{p,q}=0$, denn $\tilde{h}^*X$ besitzt eine flache Auflösung der Länge N (d.h. $\operatorname{w.dim}_{\Lambda} \tilde{h}^*X \leqslant N$). Hieraus folgt $E_{N+1} \cong E_\infty$, weil der Grad von d_r gleich $(-r, 1)$ ist. Schliesslich folgt aus der Endlichkeit der Faktorisierung von f, dass $E_\infty^{p,q} \cong \operatorname{gr}_p T^q(f) \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^{N+q}(\Sigma^N X \wedge Y) \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$.

9. KOROLLAR 3. *Besitzt X eine N-Auflösung für ein gewisses N und ist $\operatorname{Tor}_p^{\Lambda}(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)=0$ für $p>1$, so gilt die Künneth-Formel*

$$0 \to (\tilde{h}^*X \otimes_{\Lambda} \tilde{h}^*Y)^q \xrightarrow{\tilde{\mu}} \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}_1^{\Lambda}(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. In der Spektralsequenz des Satzes von § 8 ist $E_2^{p,q} = \operatorname{Tor}_p^{\Lambda}(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)=0$ für $p \notin [0, 1]$. Somit sind alle Differentiale d_r gleich 0 für $r \geqslant 2$ und mithin $E_2^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong$ $\cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$. Man erhält also eine exakte Sequenz $0 \to E_2^{0,q} \xrightarrow{i} \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to E_2^{1,q} \to 0$ und verifiziert leicht, dass der Homomorphismus i mit dem Produkt $\tilde{\mu}$ übereinstimmt.

IV. Einige Beispiele

Besitzt X eine 1-Auflösung, so ist $\operatorname{w.dim}_{\Lambda} \tilde{h}^*X \leqslant 1$, und die Voraussetzungen von Korollar 3 sind somit erfüllt. Umgekehrt folgt aus $\operatorname{w.dim}_{\Lambda} \tilde{h}^*X \leqslant 1$, falls es eine Abbildung $i: X \to F_0$ gibt mit $i^*: \tilde{h}^*F_0 \to \tilde{h}^*X$ surjektiv und $\tilde{h}^*F_0$ flach, dass X eine 1-Auflösung besitzt, nämlich: $0 \to \tilde{h}^*F_1 \to \tilde{h}^*F_0 \to \tilde{h}^*X \to 0$, wobei F_1 die Cofaser von i bezeichnet.

10. LEMMA 3. *Besitzt X eine 1-Auflösung bezüglich der gewöhnlichen Cohomologie: $0 \to \tilde{H}^*F_1 \to \tilde{H}^*F_0 \to \tilde{H}^*X \to 0$, so induziert die zugehörige Cofaserung $X \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} F_1$ eine 1-Auflösung bezüglich jeder ausserordentlichen Cohomologietheorie $\tilde{h}$ deren Koeffizientenring $\tilde{h}^*S^0$ torsionsfrei ist.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $0 \to \tilde{h}^*F_1 \xrightarrow{\beta^*} \tilde{h}^*F_0 \xrightarrow{\alpha^*} \tilde{h}^*X \to 0$ eine flache Auflösung des $\tilde{h}^*S^0$-Moduls $\tilde{h}^*X$ ist. Nach Lemma 2 sind $\tilde{h}^*F_0$ und $\tilde{h}^*F_1$ frei, denn die Gruppen H^*F_0 und H^*F_1 sind frei (endlicherzeugte flache $\mathbf{Z}$-Moduln), und $\tilde{h}^*S^0$ ist nach Voraussetzung torsionsfrei. Die Abbildung α^* ist genau dann surjektiv, wenn β^* injektiv ist, weil $X \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} F_1$ eine Cofaserung ist. Aber $\beta^* \otimes \mathbf{Q}: \tilde{h}^*F_1 \otimes \mathbf{Q} \to \tilde{h}^*F_0 \otimes \mathbf{Q}$ ist injektiv, denn $\tilde{h}^* \otimes \mathbf{Q}$ ist gewöhnliche Cohomologie [6, Satz 10.8]. Folglich ist auch β^* injektiv, denn $\tilde{h}^*F_1$ ist torsionsfrei.

Beispiel. Man verifiziert leicht, dass die Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt sind, wenn man für $\tilde{h}$ die komplexe Cobordismentheorie $\tilde{\Omega U}$ wählt und für X z.B. einen Moore-Raum oder einen Linsenraum (speziell: einen reellen projektiven Raum).

Nach Atiyah [2] gibt es zu jedem X eine Cofaserung $X \xrightarrow{i} F_0 \to F_1$ mit $i^*: \tilde{KU}^\# F_0 \to \tilde{KU}^\# X$ surjektiv und H^*F_0 frei. Daraus folgt, dass $0 \to \tilde{KU}^\# F_1 \to \tilde{KU}^\# F_0 \to \tilde{KU}^\# X \to 0$ eine 1-Auflösung ist, denn $\tilde{KU}^\# S^0 = \tilde{KU}^0 S^0 \oplus \tilde{KU}^1 S^0 \cong \mathbf{Z}$. Somit gilt für die KU-Theorie die Künneth-Formel. Hieraus kann man eine Künneth-Formel für die KO-Theorie erhalten, wenigstens modulo 2-Torsion.

Es bezeichne $\mathbf{Z}[x]/(2x-1) \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbf{Q}$ den Teilring der rationalen Zahlen, erzeugt durch $\frac{1}{2}$. Dann sind für eine Abelsche Gruppe A Kern und Cokern der natürlichen Abbildung $A \to A \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ offensichtlich 2-Gruppen.

11. KOROLLAR 4. *Für die $\mathbf{Z}_8$-graduierte Cohomologietheorie $\tilde{KO}^\#(\ ) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \tilde{KO}_2^\#$ gilt die Künneth-Formel*

$$0 \to (\tilde{KO}_2^\# X \otimes_\Lambda \tilde{KO}_2^\# Y)^q \to \tilde{KO}_2^q(X \wedge Y) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\tilde{KO}_2^\# X, \tilde{KO}_2^\# Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. Wir betrachten die oben beschriebene 1-Auflösung bez. der KU-Theorie, $0 \to \tilde{KU}^\# F_1 \to \tilde{KU}^\# F_0 \to \tilde{KU}^\# X \to 0$, mit H^*F_0 frei. Ferner sei $\tilde{KU}^\#(\ ) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \tilde{KU}_2^\#$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \tilde{KO}_2^0(F_1) & \to & \tilde{KO}_2^0(F_0) & \to & \tilde{KO}_2^0(X) & \to 0 \\ & c \uparrow\downarrow \varrho & & c \uparrow\downarrow \varrho & & c \uparrow\downarrow \varrho & \\ 0 \to & \tilde{KU}_2^0(F_1) & \to & \tilde{KU}_2^0(F_0) & \to & \tilde{KU}_2^0(X) & \to 0 \end{array} \qquad \text{(D)}$$

Die untere Zeile ist exakt, denn $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ ist ein flacher $\mathbf{Z}$-Modul. Bezeichnen c und ϱ die durch Komplexifizierung und Reellisierung induzierten Homomorphismen, so ist $\varrho c = 2\,\mathrm{Id}$ ein Isomorphismus, denn $\frac{1}{2} \in \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. Die obere Zeile im Diagramm (D) ist folglich auch exakt. Wegen $\tilde{KO}^0(\Sigma^i X) \cong \tilde{KO}^{-i}(X)$ folgt, dass $0 \to \tilde{KO}_2^\#(F_1) \to \tilde{KO}_2^\#(F_0) \to \tilde{KO}_2^\#(X) \to 0$ exakt ist. Es bleibt zu zeigen, dass dies eine flache Auflösung ist. Da man natürlich die multiplikative Struktur in $\tilde{KO}_2^\#$ definiert mittels jener von $\tilde{KO}^\#$, erhält man für den Koeffizientenring $\Lambda = \tilde{KO}_2^\#(S^0) \cong \tilde{KO}^\#(S^0) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \cong$ $\cong (\mathbf{Z}[x, y]/(x^2-4, 2y, xy, y^3)) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \cong (\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])\,[z]/(z^2-4) \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. Nun ist H^*F_0 frei und $\Lambda \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ torsionsfrei, sodass aus Lemma 2 folgt, dass $\tilde{KO}_2^\#(F_0)$ frei ist. Somit ist $\tilde{KO}_2^\#(F_1)$ projektiv, denn $\mathrm{gl.dim}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]) = \mathrm{gl.dim}\,\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = 1$.

Bemerkung. R. Wood hat gezeigt, dass der Homomorphismus $\tilde{\mu}: \tilde{KO}^\# X \otimes_\Lambda \tilde{KO}^\# Y \to \tilde{KO}^\#(X \wedge Y)$ nicht immer injektiv ist (man wähle $X = Y = \mathbf{CP}^2$). Aus Korollar 4 folgt, dass der Kern von $\tilde{\mu}$ eine 2-Gruppe ist.

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie man N-Auflösungen konstruieren kann.

12. KOROLLAR 5. *Ist der komplexe Cobordismenring $\tilde{\Omega U}^* X$ ein Λ-Modul von*

endlichem Typ und ist $\text{w.dim}_A \widetilde{\Omega U}^* X < 2$, *so gilt für alle* Y *die Künneth-Formel*

$$0 \to (\widetilde{\Omega U}^* X \otimes_A \widetilde{\Omega U}^* Y)^q \to \widetilde{\Omega U}^q (X \wedge Y) \to \text{Tor}_1^A (\widetilde{\Omega U}^* X, \widetilde{\Omega U}^* Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. Bezeichnet $MU = \{MU(1), \Sigma MU(1), MU(2), \ldots\} = \{A(2), A(3), \ldots\}$ das Thom-Spektrum (mit den evidenten Abbildungen $\Sigma A(n) \to A(n+1)$), so ist $\widetilde{\Omega U}^k X \cong \varinjlim [\Sigma^r X, A(k+r)]$. Da $A(k)$ $(k-1)$-zusammenhängend ist, gilt für genügend grosses r: $\widetilde{\Omega U}^k X \cong [\Sigma^r X, A(k+r)]$. Man kann also ein Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_m$ des Λ-Moduls $\widetilde{\Omega U}^* X$ finden, des repräsentiert wird durch Abbildungen $f_i : \Sigma^r X \to A(n_i + r)$. Diese Abbildungen definieren natürlich auch ein Erzeugendensystem von $\widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$. Es sei nun $V = \Pi A(n_i + r)$ und $v = (f_1, \ldots, f_m) : \Sigma^r X \to V$; dann ist $v^* : \widetilde{\Omega U}^* V \to \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$ surjektiv nach Konstruktion. Man überlegt sich leicht, dass V derart durch einen endlichen CW-Komplex $\bar{V}$ approximiert werden kann, dass $v = s \circ \bar{v}$: $\Sigma^r X \xrightarrow{\bar{v}} \bar{V} \xrightarrow{s} V$ ist, mit freiem $H^* \bar{V}$. (Man approximiere $MU(n)$ durch den Thom-Raum des $2N$-universellen $U(n)$-Bündels über der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $U(N)/U(n) \times U(N-n)$ etc.). Es folgt, dass $\bar{v}^* : \widetilde{\Omega U}^* \bar{V} \to \Omega U^* \Sigma^r X$ surjektiv ist. Wegen Lemma 2 ist $\widetilde{\Omega U}^* \bar{V}$ frei, denn $\Lambda = \widetilde{\Omega U}^* S^0$ ist torsionsfrei und $H^* \bar{V}$ ist frei. Bezeichnet W die Cofaser von $\bar{v}$, so ist $0 \to \widetilde{\Omega U}^* W \to \widetilde{\Omega U}^* \bar{V} \to \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X \to 0$ eine flache Auflösung von $\widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$, denn nach Voraussetzung ist $\text{w.dim}_A \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X = \text{w.dim}_A \widetilde{\Omega U}^* X < 2$. Gemäss Korollar 3 gilt somit die Künneth-Formel für $\Sigma^r X$ und mithin auch für X.

V. Anhang

L. Hodgkin hat mit ähnlichen Methoden eine Künneth-Formel für die äquivariante K-Theorie bewiesen [8] und hat eine interessante Verallgemeinerung der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz erhalten [9]. Diese gestattet es, in gewissen Fällen die ausserordentliche Cohomologie eines Faserproduktes mithilfe einer Spektralsequenz vom „Künneth-Typ" zu berechnen.*)

LITERATUR

[1] S. Araki and H. Toda, *Multiplicative Structures in mod. q Cohomology Theories I*, Osaka J. Math. *2* (1965), 71–115.

[2] M. F. Atiyah, *Vectorbundles and the Künneth-Formula*, Topology *1* (1962), 245–248.

[3] R. Bott, *Lectures on K(X)*, Dept. of Math., Harvard University.

[4] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, Algèbre, Chapitre VII (Hermann, Paris 1952).

[5] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra* (Princeton University Press, 1956).

[6] A. Dold, *Halbexakte Homotopiefunktoren*, Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag 1966).

[7] B. Eckmann and P. J. Hilton, *Composition Functors and Spectral Sequences*, Comment. Math. Helv. *41* (1966–67), 187–221.

*) An der Kategorien-Konferenz in Seattle kündigte J. F. Adams Resultate an, welche in Zusammenhang mit der Künneth-Formel stehen. Die Berichte jener Konferenz werden demnächst in den Lecture Notes (Springer Verlag) erscheinen.

[8] L. HODGKIN, *An equivalent Künneth formula for K-Theorie*, University of Warwick, Preprint.
[9] L. HODGKIN, *Notes towards a geometric Eilenberg-Moore Sequence*, Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich, Preprint.

Forschungsinstitut für Mathematik, ETH Zürich
und
Cornell University, Ithaca N.Y.

Eingegangen den 15. Oktober 1968

Hill Equations with Coexisting Periodic Solutions, II.

by H. GUGGENHEIMER[1])

There is a certain interest in finding all Hill equations with coexisting periodic solutions, i.e., Hill equations all whose solutions are periodic, cf. [4], Chap. VII. Recently, I gave a differential geometric method for the construction of second order linear differential equations with coexisting periodic solutions [2]. The same problem has been solved by F. Neuman with the tools of the theory of dispersions [5]. In the present paper, we construct directly all Sturm–Liouville equations $x''+Qx=0$ with continuous, periodic coefficients and coexisting periodic solutions. The formulae were found by an interpretation of the theory of dispersions [1] in differential geometry. However, in the present formulation we need only the most elementary tools of calculus and analytic geometry. On the way, we give a geometric derivation of some results of H. A. Schwarz that contain the solution of our problem.

1. Polar coordinates in an (x_1, x_2)-plane are defined by

$$x_1 = r\cos\alpha, \quad x_2 = r\sin\alpha.$$

For a continuous curve $x(t)=(x_1(t), x_2(t))$, we determine $\alpha(t)$ as a continuous function by an appropriate choice of the branch of arctan x_2/x_1. The determinant of two vectors a, b in the plane is denoted by $[a, b]$.

Let $Q(t)$ be a continuous function for $-\infty<t<+\infty$. We consider the differential equation

$$x'' + Q(t)\,x = 0 \tag{1}$$

on the real number line. We choose two linearly independent solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ of unit Wronskian. For the vector $x(t)$ this means that $[x, x']=1$. The parameter t is twice the area A covered by the vector x since

$$2A = \int_{t_0}^{t} [x, dx] = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0.$$

This means that t is connected with the polar coordinates of $x(t)$ by

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} r^2(t)\, d\alpha(t),$$

[1]) Research supported partially by NSF Grant GP-8176.

i.e.,
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{r^2}, \tag{2}$$
or
$$r = (\alpha')^{-1/2} \tag{2a}$$

and α is a strictly monotone function of t. In fact, $r(t)>0$ since the Wronskian never vanishes.

We introduce the two unit vectors

$$c(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad n(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Then $x(t)=r(t)\,c(\alpha)$, $x'(t)=r'c(\alpha)+r^{-1}n(\alpha)$ and

$$x''(t) = (r'' - r^{-3})\,c(\alpha) = -r^{-4}(1 - r''r^3)\,x(t).$$

A comparison with (1) shows that (see also [1], (5) p. 32)

$$Q(t) = \frac{1}{r^4}\left(1 - r^3\frac{d^2r}{dt^2}\right). \tag{3}$$

We see that for any continuous function $Q(t)$ there exist nonzero C^2-functions $r(t)$ such that (3) holds. Before we show that (3) solves our problem, we note that, by (2a), (3) is equivalent to ([1], p. 35)

$$Q(t) = \frac{1}{2}\frac{\alpha'''}{\alpha'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2 + \alpha'^2. \tag{4}$$

The Schwarzian derivative of a function $s(t)$ is

$$\{s, t\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2.$$

An easy verification shows that (4) is equivalent to Schwarz's formula [6]

$$Q(t) = \tfrac{1}{2}\{\tan\alpha, t\} = \tfrac{1}{2}\{x_2/x_1, t\}.$$

Schwarz also noted that the knowledge of a solution $s=\tan\alpha$ of $\{s, t\}=2Q(t)$ is sufficient for the determination of a pair of solutions of (1) with unit Wronskian since $s'=\alpha'\cos^{-2}\alpha=x_1^{-2}$. Hence,

$$x_1 = s'^{-1/2}, \quad x_2 = s'^{-1/2}s, \tag{5}$$

and

LEMMA 1: *The function $\alpha(t)$ uniquely determines $x(t)$.*

Similarly, $r(t)$ and $\alpha(0)$ determine $x(t)$ via

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \frac{dt}{r^2}. \tag{6}$$

2. We assume now that $Q(t)$ is a periodic function of period ω.

LEMMA 2: *All solutions of* (1) *are periodic* $(x(t+\omega)=x(t))$ *or semi-periodic* $(x(t+\omega)=-x(t))$ *if and only if*

$$\tan\alpha(t+\omega) = \tan\alpha(t),$$

i.e.

$$\alpha(t+\omega) = \alpha(t) + k\pi, \quad k \text{ integer}. \tag{7}$$

The necessity follows from the definition of α and the sufficiency from lemma 1. If (7) holds, $r(t)$ is periodic of period ω and

$$\int_0^\omega r^{-2}\, dt = k\pi.$$

The solution of our problem is immediate:

THEOREM: *All solutions of* (1) *are periodic or semi-periodic if and only if*

$$Q(t) = r^{-4}(1 - r''r^3)$$

where

$$r \in C^2,\ r(t) > 0,\ r(t+\omega) = r(t),$$

and

$$\int_0^\omega r^{-2}(t)\, dt = k\pi.$$

The solutions are periodic for k even, semi-periodic for k odd.

We note that the condition (7) implies that the problem

$$x'' + Qx = \lambda x, \quad x(\omega) = \pm x(0)$$

has a collapsing k-th interval of instability at $\lambda=0$ ([4], Chap. VII). In fact, every $x_i(t)$ (i=1, 2) vanishes k times in an interval of periodicity since the radius vector

covers k straight angles in monotone motion. But the number of zeros in the interval of definition is the index of the eigenvalue (see, e.g., [3], p. 148).

If we want to insure $Q(t)>0$, we have to ask in addition to the conditions of the theorem that $r''(t)<r^3(t)$. In that case, the curve $x(t)$ is without inflexion points.

Using (4) instead of (3), one may construct $Q(t)$ starting from $f(t)=\alpha'(t)$ with $\int_0^\omega f(t)dt=k\pi$. We obtain:

All solutions of (1) *are periodic* ($k=2i$) *or semi-periodic* ($k=2i+1$) *if and only if*

$$Q(t)=\frac{1}{2}\frac{f''(t)}{f(t)}-\frac{3}{4}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)^2+f^2(t),$$

where

$$f\in C^2, f(t)>0, f(t+\omega)=f(t)$$

and

$$\int_0^\omega f(t)\,dt=k\pi.$$

BIBLIOGRAPHY

[1] O. Borůvka, *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967).

[2] H. Guggenheimer, *Some Geometric Remarks about Dispersions*, to appear, Archivum Mathematicum, vol. 4.

[3] H. Hochstadt, *Differential Equations* (Holt, Rinehart and Winston, New York 1964).

[4] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation* (Interscience, New York 1966).

[5] F. Neuman, *Criterion of Periodicity of Solutions of a Certain Differential Equation with a Periodic Coefficient*, Ann. di Mat. pura appl. (4) *75* (1967), 385–396.

[6] H. A. Schwarz, *Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt*, J. reine angew. Math. *75* (1872), 292–335.

Polytechnic Institute of Brooklyn

Received January 27, 1969

The Changes of Sign of Certain Arithmetical Error-Terms

J. STEINIG

1. Introduction

If $\pi(x)$ denotes the number of primes not exceeding x, and $\operatorname{li} x = \int_2^x (\log t)^{-1}\, dt$ $(x \geqslant 2)$, then the prime number theorem states that $\pi(x) \sim \operatorname{li} x$, as $x \to \infty$. The error-term in this asymptotic relation is $\pi(x) - \operatorname{li} x$, and it was for long conjectured that $\pi(x) - \operatorname{li} x < 0$ for all large x. J. E. LITTLEWOOD proved this conjecture false by showing [8] that $\pi(x) - \operatorname{li} x = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log\log\log x / \log x)$. The prime number theorem is equivalent to the assertion that $\psi(x) \sim x$, where ψ is the well-known Chebyshev function. The error-term here is $\psi(x) - x$, and it changes sign an infinity of times, as shown by PHRAGMÉN [9]. PHRAGMÉN's result is a corollary of a general theorem of LANDAU's [7] on Dirichlet integrals. PÓLYA [11] refined LANDAU's theorem, and considered, as a particular case, the problem of estimating the number of changes of sign of $\psi(x) - x$ in the interval $1 < x \leqslant t$. If $N(t)$ denotes that number, then PÓLYA's result implies that

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{N(t)}{\log t} > 0. \tag{1.1}$$

The original proof of PÓLYA's theorem contains a gap, first recognized by PÓLYA himself, which is filled in § 2. PÓLYA's theorem can be applied, as we shall show in § 2.3, to the error-term associated with the arithmetical function $r_k(n)$, which is the number of representations of an integer n as a sum of k squares $(k \geqslant 2)$. This application is made possible by the fact that the Dirichlet series $\sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) \cdot n^{-s}$ represents the Epstein zeta-function $\zeta_k(s)$, which satisfies HECKE's functional equation, namely

$$\pi^{-s} \Gamma(s)\, \zeta_k(s) = \pi^{s-k/2}\, \Gamma\left(\frac{k}{2} - s\right) \zeta_k\left(\frac{k}{2} - s\right), \tag{1.2}$$

and this equation implies a fundamental identity given by K. CHANDRASEKHARAN and RAGHAVAN NARASIMHAN [2].

More generally, we consider in § 3 the functional equation of CHANDRASEKHARAN and NARASIMHAN, which includes (1.2), and study the problem of change of sign of the "error-term" associated with the coefficients of Dirichlet series which satisfy such an equation. Thus, given an equation such as

$$\Delta(s)\, \varphi(s) = \Delta(\delta - s)\, \varphi(\delta - s), \tag{1.3}$$

where δ is a real number, $\Delta(s)$ is a product of a finite number of gamma functions, say $\Delta(s)=\prod_{\nu=1}^{N}\Gamma(\alpha_\nu s+\beta_\nu)$, and $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n^{-s}$, we define for $\varrho\geqslant 0$,

$$A_\lambda^\varrho(x)=\frac{1}{\Gamma(\varrho+1)}\sum_{\lambda_n\leqslant x}{}'\,a_n(x-\lambda_n)^\varrho,$$

which is the fractional integral of order ϱ of the summatory function $A_\lambda^0(x)\equiv A(x)=\sum_{\lambda_n\leqslant x}{}'a_n$. CHANDRASEKHARAN and NARASIMHAN have shown [3] that corresponding to the equation (1.3), there exists a "residual function" $S_\varrho(x)$, such that

$$\operatorname{Re}\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}=\Omega_\pm(x^\Theta), \tag{1.4}$$

where $\Theta=\{A\delta+(2A-1)\varrho-\frac{1}{2}\}/2A$, with $A=\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu$. (A similar result holds for the imaginary part of $A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)$.) The proof of this general Ω-theorem rests on the fact that equation (1.3) implies, for sufficiently large ϱ, the formula

$$x^c\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot\cos(\gamma_n x^{1/2A}+D)+g(x), \tag{1.5}$$

where c is a real constant, $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|<\infty$, $0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_n\to\infty$, A is as in (1.4), D is a real constant, and $g(x)=o(1)$, as $x\to\infty$.

Clearly, (1.4) implies that the real part of the "error-term" $A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)$ has an infinity of changes of sign in the interval $0<x<\infty$. In this paper, we obtain a lower bound for the number of changes of sign of $\operatorname{Re}\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}$, and of $\operatorname{Im}\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}$, in a given interval (Theorem 4.1). This is achieved by combining asymptotic formula (1.5) with an argument introduced by LIOUVILLE, and later applied by PÓLYA [12] to the study of the changes of sign of certain trigonometrical series. In the case $\varrho=0$, Theorem 4.1 gives a lower bound for the number of changes of sign, in any interval, of the error-term associated with such arithmetical functions as $d(n)$, the number of positive divisors of the positive integer n, or $r_k(n)$, or RAMANUJAN'S function $\tau(n)$.

It may be remarked that the results obtained by appealing to PÓLYA's theorem are weaker than those obtained in § 4 from asymptotic formula (1.5), since PÓLYA's theorem gives only a "lim sup result", as in (1.1), for an interval $0<x\leqslant t$, whereas Theorem 4.1 gives a lower bound for the *number* of changes of sign of the error-term under consideration in *any* given interval.

The problems discussed in this paper were suggested to me by Professor K. CHANDRASEKHARAN; I take pleasure in recording here my gratitude for his advice and constant encouragement.

2. Pólya's Theorem

2.1. If ω is a function of the real variable u, bounded and integrable over every finite interval $1 \leqslant u \leqslant U$, and s is a complex number, written $s=\sigma+it$, where σ and t are real, and $i^2=-1$, then the integral $\int_1^\infty \omega(u)u^{-s}du$ is called a Dirichlet integral.

A theorem of LANDAU's ([7]; [6], p. 88) states that if $\omega(u)$ is real-valued, and is of constant sign for all sufficiently large u, and if the integral $f(s)=\int_1^\infty \omega(u)u^{-s}du$ has a finite abscissa of convergence $\sigma=\sigma_0$, then the real point $s=\sigma_0$ of its line of convergence is a singularity of the function $f(s)$ which it represents.

In order to state this theorem in a more convenient form, we introduce a function $W(x)$ associated with the sign of $\omega(u)$. We assume that $\omega(u)$ is either of constant sign for $u>1$, or that there exists a sequence (u_n), $1=u_0<u_1<u_2<\cdots$, with no finite point of accumulation, such that

$$(-1)^n \omega(u) \geqslant 0 \quad \text{for} \quad u_{n-1} < u < u_n, \tag{2.1}$$

and such that $\omega(u)$ is not identically zero in any of the intervals $u_{n-1}<u<u_n$. If $\omega(u)$ is of constant sign for $u>1$, then $W(x)=0$; otherwise we define $W(x)=n$ for $u_{n-1} \leqslant x < u_n$. Thus $W(x)$ is simply the number of changes of sign of $\omega(u)$ in the interval $1<u \leqslant x$. LANDAU's theorem then takes the following form.

THEOREM A (LANDAU). *Let $\int_1^\infty \omega(u)u^{-s}du$ have a finite abscissa of convergence σ_0. Let $\Phi(s)=\int_1^\infty \omega(u)u^{-s}du$ be regular in the half-plane $\sigma>\theta$, but in no larger half-plane $\sigma>\theta-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. If $\Phi(s)$ is regular at $s=\theta$, then $\lim_{x\to\infty} W(x)=+\infty$.*

PÓLYA's extension [11] of LANDAU's theorem is as follows.

THEOREM B (PÓLYA). *Let the integral $\int_1^\infty \omega(u)u^{-s}du$ have a finite abscissa of convergence σ_0. Let*

$$\Phi(s) = \int_1^\infty \omega(u)\,u^{-s}\,du \tag{2.2}$$

be regular in the half-plane $\sigma>\theta$, but in no larger half-plane $\sigma>\theta-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Further, let $\Phi(s)$ be meromorphic in $\sigma \geqslant \theta-b$, for some $b>0$. Then,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{W(x)}{\log x} \geqslant \frac{\gamma}{\pi}, \tag{2.3}$$

where γ is defined as follows: If $\Phi(s)$ has poles on the line $\sigma=\theta$, then $s=\theta+i\gamma$ is the pole with the smallest non-negative imaginary part; otherwise, $\gamma=+\infty$.

2.2. We shall now indicate how the gap in PÓLYA's original proof of Theorem B can be filled. PÓLYA's proof applies previous results of his on entire functions of exponential type [10]. Use is also made of certain properties of plane convex sets. The argument runs as follows.

If $\omega(u)$ is of constant sign for $u>u_0$, Theorem A implies that $\gamma=0$, and then (2.3) is trivial. We therefore suppose that $\omega(u)$ has an infinity of changes of sign. Let (u_n) be the points of change of sign of $\omega(u)$, and let $W(x)$ be the number of its changes of sign in the interval $1<u\leqslant x$, as defined earlier. Set

$$d=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{W(x)}{\log x},$$

and suppose at first that $d<\infty$; then PÓLYA shows that the infinite product

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z^2}{(\log u_n)^2}\right\}=F(z)$$

is absolutely convergent, and that F is an entire function of exponential type ([11], p. 22). He sets

$$F(z)=a_0+\frac{a_2 z^2}{2!}+\frac{a_4 z^4}{4!}+\cdots,$$

defines

$$f(z)=\frac{a_0}{z}+\frac{a_2}{z^3}+\frac{a_4}{z^5}+\cdots, \tag{2.4}$$

and shows that series (2.4) converges (at least) for $|z|>\pi d$ ([10], p. 578). Let J be the convex hull of the singularities of f. Since f is an odd function, and the coefficients (a_n) are real, J is symmetric with respect to both real and imaginary axes. Let $s=\kappa$ be the point at which the positive real axis intersects the boundary of J.

Theorem B is established by applying LANDAU's Theorem A to the function

$$\Phi^*(s)=\int_1^{\infty}\omega(u)\,F(\log u)\,u^{-s}\,du. \tag{2.5}$$

Because of the definition of F, combined with inequality (2.1), the integrand in (2.5) satisfies the inequality

$$\omega(u)\,F(\log u)\leqslant 0\quad(u>1). \tag{2.6}$$

A theorem proved by PÓLYA in [10] (*Satz* V, p. 598) implies that $\Phi^*(s)$ is regular in the half-plane $\sigma>\theta+\kappa$ ([11], p. 25). The behaviour of $\Phi^*(s)$ for $\sigma\leqslant\theta+\kappa$ depends on the behaviour of $\Phi(s)$, defined by (2.2), on the line $\sigma=\theta$. Accordingly, PÓLYA distinguishes two cases:

(a) Φ has poles on $\sigma=\theta$;

(b) Φ is regular on $\sigma=\theta$.

In Case (a), he shows that if $\pi d<\gamma$, then Φ^* is regular at $s=\theta+\kappa$, but has a singularity at another point of the line $\sigma=\theta+\kappa$. But this is impossible, because of (2.6) and Theorem A. Therefore $\pi d\geqslant\gamma$.

The gap in PÓLYA's proof occurs in Case (b). The argument here is that if $d<\infty$, then Φ^* is regular at $s=\theta+\kappa$, but has singularities arbitrarily near the line $\sigma=\theta+\kappa$, in the half-plane $\sigma<\theta+\kappa$. Again, this is impossible because of (2.6) and Theorem A. Hence $d=+\infty$.

In order to establish this part of Theorem B, we require the following result on plane convex sets:

LEMMA 2.1. *Let $\mathfrak{A}$ be a closed, bounded, plane convex set, whose boundary consists only of extreme points*[1]*. Let l be a supporting line*[2] *of $\mathfrak{A}$ through $\xi\in\mathfrak{A}$. If $\mathfrak{B}$ is a translate of $\mathfrak{A}$, such that $\xi\in\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}$ lies on the same side of l as $\mathfrak{A}$, then $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ coincide.*

Proof. Let τ be the translation $\tau:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$. Since $\xi\in\mathfrak{B}$, $\xi\in l$, and $\mathfrak{B}$ is entirely on one side of l, l is a supporting line of $\mathfrak{B}$ through ξ. Since the boundary of $\mathfrak{A}$ consists only of extreme points, there are exactly two points on the boundary such that the supporting lines through these points are parallel to a given direction[3]. Now $\xi'=\tau(\xi)$ is a point on the boundary of $\mathfrak{B}$ such that there is a supporting line l' of $\mathfrak{B}$ through ξ' which is parallel to l. Since $\mathfrak{B}$ is on the same side of l as $\mathfrak{A}$, l' must be that one of the two supporting lines of $\mathfrak{B}$ parallel to l which is closest to l. Therefore $l=l'$ and $\xi=\xi'$, so that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ coincide.

The problem which must be solved in order to establish Case (b) of Theorem B may be stated geometrically as follows[4]).

Let (c_ν) be a sequence of points in the complex s-plane, with the following properties:

$$\left.\begin{array}{l}\textit{The points } c_\nu \textit{ lie pairwise symmetric to the real axis. They have no}\\ \textit{point of accumulation in the finite part of the plane.}\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

$$\mathrm{Re}(c_\nu)<\theta \quad \textit{for all } \nu, \textit{ and} \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,\mathrm{Re}(c_\nu)=\theta\,. \tag{2.8}$$

---

[1]) An extreme point of a closed plane convex set K is a boundary point which is not an interior point of any line segment belonging to K (for example, $\mathfrak{A}$ can be a circle, or an ellipse, but not a rectangle).

[2]) A supporting line of a closed plane convex set K is a line which contains at least one point of K, and such that K lies entirely on one side of this line. A supporting line contains at most two extreme points. There are exactly two supporting lines parallel to a given direction.

[3]) This follows from the remarks in Footnote (2): there are two supporting lines of $\mathfrak{A}$ in each direction, and since all boundary points of $\mathfrak{A}$ are extreme points, each supporting line contains exactly one boundary point.

[4]) The (c_ν) are the poles of $\Phi(s)$ in the strip $\theta-b\leqslant\sigma\leqslant\theta$; J is the convex hull of the singularities of f [c.f. (2.4)]. With the notation introduced in [11], and according to the *Hilfssatz* on p. 24 of [11], ζ is a singularity of $X^*(s)$. Because of *Satz* V of [10], ζ is a regular point of $\Psi^*(s)$. Hence, ζ is a singularity of $\Phi^*=\Psi^*+X^*$ ([11], pp. 24–25).

Further, let J be a bounded, closed, plane convex set, which is symmetric with respect to both the real and the imaginary axis, and is contained in the disc $|s| \leqslant \pi d$. Let $\sigma = \kappa$ be the supporting line of J which is perpendicular to the positive real axis. Consider the sets $c_\nu + J$[5] ($\nu = 1, 2, \ldots$). We have to prove that for each $\varepsilon > 0$, there exists a point $\zeta = \zeta(\varepsilon)$, which satisfies the following conditions:

$$\theta + \kappa - \varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(\zeta) < \theta + \kappa, \tag{2.9}$$

$$\zeta \text{ is an extreme point of some set } c_n + J, \tag{2.10}$$

and

$$\zeta \notin c_\nu + J \quad \text{for} \quad \nu \neq n. \tag{2.11}$$

For that purpose, we consider the convex hull $\mathfrak{H}$ of all the sets $c_\nu + J$ with $\mathrm{Im}(c_\nu) > 0$. Let h be (one of) the extreme point(s) of $\mathfrak{H}$ on its supporting line parallel to the real axis; and let H be that part of the boundary of $\mathfrak{H}$ which is in the half-plane $\sigma > \mathrm{Re}(h)$. Then, $\mathfrak{H}$ and H have the following properties:

Each extreme point of $\mathfrak{H}$ belongs to the boundary of one of the sets $c_\nu + J$. (2.13)

Indeed, suppose, if possible, that p is an extreme point of $\mathfrak{H}$ such that $p \notin c_\nu + J$, for all ν. Then, since the sets $c_\nu + J$ are closed, we can find a circle $\mathfrak{C}$ with p as centre, such that $\mathfrak{C} \cap (c_\nu + J) = \emptyset$, for all ν. If $\mathfrak{C}$ is small enough, the set obtained by removing $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{H}$ from $\mathfrak{H}$ is contained in a proper convex subset $\mathfrak{H}^*$ of $\mathfrak{H}$, since p is an extreme point of $\mathfrak{H}$[6]. But since $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{H}) \cap (c_\nu + J)$ is empty for all ν, we would have $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}^*$, which is absurd.

H contains no half-line. (2.13)

Indeed, because of (2.8), H could contain a half-line only if this line were on the vertical $\sigma = \theta + \kappa$. Now there cannot be a point $q = (\theta + \kappa) + i\tau$ on the line $\sigma = \theta + \kappa$ such that all points of H with imaginary part greater than τ lie on this line, while those with imaginary part smaller than τ lie to the left of it (Fig. 1). For if this were the case, q would be an extreme point of $\mathfrak{H}$ and would therefore, by (2.12), belong to one of the $c_\nu + J$. But this is impossible, since $\mathrm{Re}(c_\nu) < \theta$.

There are extreme points of $\mathfrak{H}$ with arbitrarily large imaginary part. (2.14)

Indeed, let $t_0 > 0$ be given. Because of (2.7) and (2.8), we can find a point $p_1 \in H$ such that $\mathrm{Im}(p_1) \geqslant t_0$. Because of (2.13), p_1 does not lie on any half-line belonging to H. Therefore, if p_1 is not itself an extreme point of $\mathfrak{H}$, the supporting line of $\mathfrak{H}$ through p_1 contains two extreme points of $\mathfrak{H}$. One of these, say p_2, is such that $\mathrm{Im}(p_2) > \mathrm{Im}(p_1) \geqslant t_0$.

---

[5]) By $c_\nu + J$, we understand the translate of J through the vector c_ν.

[6]) For a proof of this property of extreme points, see for instance [10], pp. 577–578.

Now it follows from the conditions on the (c_ν) and from the convexity of $\mathfrak{H}$ that if $h_1 \in H$ and $\theta+\kappa-\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(h_1) < \theta+\kappa$, all points $h_2 \in H$ for which $\mathrm{Im}(h_2) > \mathrm{Im}(h_1)$ also lie in the strip $\theta+\kappa-\varepsilon \leqslant \sigma < \theta+\kappa$. From this remark, and from (2.8) and (2.14), it easily follows that there is a point ζ^*, such that

$$\zeta^* \in H, \tag{2.15}$$

$$\theta + \kappa - \varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(\zeta^*) < \theta + \kappa, \tag{2.16}$$

$$\zeta^* \textit{ lies on the boundary of a set } c_n + J \textit{ with } \mathrm{Im}(c_n) > 2\pi d. \tag{2.17}$$

In order to locate a point ζ with properties (2.9), (2.10) and (2.11), we shall consider two cases, according as the boundary of J consists only of extreme points, or not.

A. If the boundary of J consists only of extreme points, we may choose $\zeta = \zeta^*$. Indeed, ζ^* is an extreme point of $c_n + J$. Since J is contained in the disc $|s| \leqslant \pi d$, it follows from (2.17) that $\zeta^* \notin c_\nu + J$ if $\mathrm{Im}(c_\nu) \leqslant 0$. By applying Lemma 2.1 with $\mathfrak{A} = c_n + J$ and $\xi = \zeta^*$, we see that $\zeta^* \notin c_\nu + J$ if $\mathrm{Im}(c_\nu) > 0$ and $\nu \neq n$.

B. If the boundary of J does not consist entirely of extreme points, ζ^* need not be an extreme point of $c_n + J$. Also, ζ^* may belong to the boundary of some other translate of J, say of $c_{n_1} + J$ (Fig. 2). But if ζ^* is not an extreme point of $c_n + J$, the

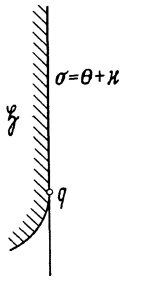


Fig. 1.

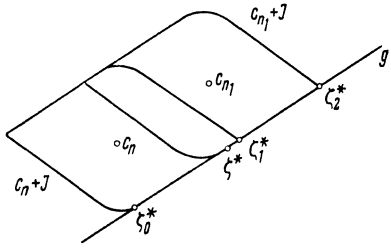


Fig. 2.

supporting line g of $c_n + J$ through ζ^* contains two extreme points of $c_n + J$, say ζ_0^* and ζ_1^*. One of these has a real part greater than that of ζ^*; suppose that $\mathrm{Re}(\zeta_1^*) > \mathrm{Re}(\zeta^*)$. Then, $\theta+\kappa-\varepsilon < \mathrm{Re}(\zeta_1^*) \leqslant \mathrm{Re}(c_n)+\kappa < \theta+\kappa$, so that ζ_1^* lies in the strip $\theta+\kappa-\varepsilon \leqslant \sigma < \theta+\kappa$. If ζ_1^* lies on the boundary of $c_{n_1} + J$ (as in Fig. 2), consider its translate ζ_2^*; ζ_2^* lies on g, is an extreme point of $c_{n_1} + J$, and is in the strip $\theta+\kappa-\varepsilon \leqslant \sigma < \theta+\kappa$.

Should ζ_2^* lie on the boundary of some other translate $c_{n_2} + J$ of J, we can find in the same manner an extreme point ζ_3^* of $c_{n_2} + J$ on g and in the strip $\theta+\kappa-\varepsilon \leqslant \sigma <$

$\theta+\kappa$. Proceeding in this manner, we must finally obtain a set $c_{n_r}+J$ and an extreme point ζ_{r+1}^* of this set which is exterior to all the other sets $c_\nu+J$, for otherwise the points c_n, c_{n_1}, c_{n_2}, ..., which lie on a parallel to g, would have a point of accumulation in the finite part of the plane, in contradiction with condition (2.7). Then, we may take $\zeta=\zeta_{r+1}^*$.

This concludes the proof of Case (b), and hence of PÓLYA's theorem.

2.3. *A new application of Pólya's theorem*

Let $r_k(n)$ denote the number of representations of the positive integer n as a sum of k integral squares ($k\geqslant 2$), representations which differ only in sign, or order, being counted as distinct.

The generating function of $r_k(n)$ is $\zeta_k(s)$, EPSTEIN's zeta-function of order k [5], which has the representation

$$\zeta_k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_k(n)}{n^s}$$

in the half-plane $\mathrm{Re}(s)>k/2$, and satisfies the functional equation

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_k(s)=\pi^{s-k/2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}-s\right)\zeta_k\left(\frac{k}{2}-s\right). \tag{2.18}$$

Let

$$P_k^{\varrho}(x)=\frac{1}{\Gamma(\varrho+1)}\sum_{n\leqslant x}{}'\,r_k(n)\,(x-n)^{\varrho}-\frac{\pi^{k/2}\,x^{\varrho+k/2}}{\Gamma(\varrho+k/2+1)}+\frac{x^{\varrho}}{\Gamma(\varrho+1)}\quad(\varrho\geqslant 0),$$

the dash meaning that if $\varrho=0$ and x is an integer, the last term in the sum must be multiplied by $\frac{1}{2}$. If $\varrho=0$, $P_k^0(x)$ is the error-term in the lattice-point problem for the sphere in k-dimensional space. Indeed, if we define $r_k(0)=1$, we have

$$P_k^0(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant x}{}'\,r_k(n)-\frac{(\pi x)^{k/2}}{\Gamma(k/2+1)}; \tag{2.19}$$

if x is not an integer, $\sum_{0\leqslant n\leqslant x}{}' r_k(n)$ is equal to the number of lattice-points in a sphere of radius $\sqrt{x}$, whose centre is a lattice-point, and $(\pi x)^{k/2}/\Gamma(k/2+1)$ is the volume of this sphere.

K. CHANDRASEKHARAN and RAGHAVAN NARASIMHAN have shown [2] that functional equation (2.18) implies the identity

$$\sqrt{\pi}\,2^{2r+1}\int_0^{\infty}F_k^{\varrho}(x^2)\,x^{2r}e^{-sx}\,dx=(2\pi)^{k/2}\sum_{n=1}^{\infty}r_k(n)\,g_n(s), \tag{2.20}$$

where $F_k^{\varrho}(x)=P_k^{\varrho}(2x)$, $\mathrm{Re}(s)>0$, r is a sufficiently large integer, and

$$g_n(s)=\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu+r}e_\nu\frac{s^{2\nu}\Gamma(\gamma+\nu+r)}{2^{2\nu}(s^2+8\pi^2n^2)^{\gamma+\nu+r}},$$

where $\gamma=\varrho+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}$, and the e_ν are constants.

If k is *odd*, this identity allows the application of PÓLYA's theorem to $P_k^0(x)$.

Indeed, if we make the change of variable $x\to\log x$ in the integral on the left-hand side of (2.20), we obtain an identity which shows that the function of s defined by the integral

$$\int_1^{\infty}\log^{2r}x\cdot F_k^{\varrho}(\log^2 x)\,x^{-1-s}\,dx$$

is regular in the half-plane $\sigma>0$, and has singularities on the imaginary axis, at the points $s=\pm\pi n\sqrt{-8}$ $(n=1, 2,\ldots)$.

If k is odd, these singularities are poles. PÓLYA's theorem can then be applied to obtain the following result, announced in [13]:

If k is odd, and if $W_k(t)$ denotes the number of changes of sign of $P_k^0(x)$ in the interval $0<x\leqslant t$, then

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{W_k(t)}{\sqrt{t}}\geqslant 2. \tag{2.21}$$

If k is even, identity (2.20) cannot be used to estimate the number of changes of sign of $P_k^0(x)$; in this case, PÓLYA's theorem gives information only on the changes of sign of those $P_k^{\varrho}(x)$ for which $\varrho\equiv\frac{1}{2}$ (mod 1). This is curious, since results on representations of an integer as a sum of an odd number of squares are usually more difficult to obtain than results on representations as a sum of an even number of squares.

Identities analogous to (2.20), which involve the error-terms arising from other solutions of the functional equation $\Gamma(s)\,\varphi(s)=\Gamma(\delta-s)\,\psi(\delta-s)$, can be deduced from a general identity given in [2] (Lemma 3, p. 491), of which (2.20) is a particular case. However, these identities permit the application of PÓLYA's theorem only when $\delta+\varrho+\frac{1}{2}$ is an integer, and this condition often precludes the possibility of obtaining a result in the case $\varrho=0$.

Identities of this type in the case of functional equations with more than one gamma factor are not known. In the following sections, we shall apply a different method, and obtain a lower bound for the number of changes of sign, in a given interval, of the error-terms arising from any given instance of functional equation (1.3).

3. The Functional Equation

3.1. We begin by defining, after CHANDRASEKHARAN and NARASIMHAN [3], the general functional equation with which we shall be concerned.

DEFINITION 3.1. Let (λ_n) and (μ_n) be two sequences of real numbers such that

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty,$$
$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n \to \infty,$$

and let (a_n), (b_n) be two sequences of complex numbers, not all zero. Let δ be a real number, and s a complex variable with real part σ and imaginary part t. Let

$$\Delta(s) = \prod_{\nu=1}^{N} \Gamma(\alpha_\nu s + \beta_\nu), \tag{3.1}$$

where $N \geqslant 1$, $\alpha_\nu > 0$ and β_ν is complex, and let $A = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu$. We say that the functional equation

$$\Delta(s)\,\varphi(s) = \Delta(\delta - s)\,\psi(\delta - s) \tag{3.2}$$

holds, if the functions φ and ψ are representable by the Dirichlet series

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^s}, \tag{3.3}$$

each of which is absolutely convergent in some half-plane, and if there is a domain D in the s-plane, which is the exterior of a bounded, closed set S, and in which there exists a holomorphic function χ with the properties

$$\lim_{|t| \to \infty} \chi(\sigma + it) = 0,$$

uniformly in every interval $-\infty < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 < +\infty$, and

$$\chi(s) = \Delta(s)\,\varphi(s), \quad \text{for} \quad \sigma > c_1,$$
$$\chi(s) = \Delta(\delta - s)\,\psi(\delta - s), \quad \text{for} \quad \sigma < c_2,$$

where c_1 and c_2 are some constants.

3.2. For $\varrho \geqslant 0$, we define

$$A_\lambda^\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{\lambda_n \leqslant x}{}' a_n (x - \lambda_n)^\varrho, \tag{3.4}$$

the accent indicating that the last term of the sum is to be multiplied by $\frac{1}{2}$ if $\varrho = 0$ and $x = \lambda_n$. We shall restrict our considerations to the case where ϱ is an integer.

Let

$$S_\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{\Gamma(s)\,\varphi(s)}{\Gamma(s+\varrho+1)}\, x^{s+\varrho}\, ds, \quad \varrho \geqslant 0, \tag{3.5}$$

where $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$, as in (3.3), and where $\mathscr{C}$ is a curve enclosing all the singularities of the integrand.

Further, let

$$c_\varrho = \frac{A\delta+\varrho}{2A} - \varepsilon, \quad 0<\varepsilon<\frac{1}{4A},$$

and let

$$I_\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}'} \frac{\Gamma(\delta-s)\,\Delta(s)}{\Gamma(\delta+\varrho+1-s)\,\Delta(\delta-s)}\, x^{\delta+\varrho-s}\, ds, \tag{3.6}$$

where $\mathscr{C}'$ is a curve formed by the lines $\sigma=c_\varrho+it$, with $|t|>R$, together with three sides of the rectangle whose vertices are $c_\varrho-iR$, $c_\varrho+r-iR$, $c_\varrho+r+iR$ and $c_\varrho+iR$. We assume that

$$c_\varrho > \max\left(-\operatorname{Re}\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

and choose r and R in such a manner that all the poles of the integrand in (3.6) are to the left of $\mathscr{C}'$.

It is shown in [3, §4] that the identity

$$A_\lambda^\varrho(x) - S_\varrho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^{\delta+\varrho}}\, I_\varrho(\mu_n x) \tag{3.7}$$

holds for $\varrho \geqslant 2A\beta - A\delta - \frac{1}{2}$, where β is such that $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,\mu_n^{-\beta} < \infty$.

For $I_\varrho(x)$ we have, as in [3, §4], the asymptotic formula

$$I_\varrho(x) = c\cdot x^{(\omega-1/2)/2A}\cos(h\,x^{1/2A}+D) + o(x^{(\omega-1/2)/2A}), \tag{3.8}$$

as $x\to\infty$, where c and D are real constants, $\omega = A\delta+(2A-1)\varrho$ and $h=2e^{-\theta/2A}$ with $\theta=2\{\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu\log\alpha_\nu - A\log A\}$, and δ, α_ν and A are as in Definition 3.1. A more precise asymptotic formula for $I_\varrho(x)$ is given in [4, Lemma 1], but (3.8) is sufficient for our purposes.

By combining (3.7) and (3.8) we obtain, for integral $\varrho \geqslant 2A\beta - A\delta - \frac{1}{2}$, the asymptotic formula

$$A_\lambda^\varrho(x) - S_\varrho(x) = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^{\delta+\varrho}}\,(\mu_n x)^{(\omega-1/2)/2A}\cos\left(h(\mu_n x)^{1/2A}+D\right) + o(x^{(\omega-1/2)/2A}), \tag{3.9}$$

as $x\to\infty$.

In order to obtain a lower bound for the number of changes of sign of the real and imaginary parts of $A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)$ in a given interval, for a given non-negative integer ϱ, we shall require, beside (3.9), the following trivial extension of ROLLE's theorem, which we state without proof.

LEMMA 3.1. *Let f be continuous in the closed interval $[a, b]$ and differentiable in the open interval (a, b), except perhaps at $c\in(a, b)$ at which, however, the left and right hand derivatives $f'^-(c)$ and $f'^+(c)$ exist. Let $f(a)=f(b)$. Then, f'^-, f'^+ and $\frac{1}{2}(f'^-+f'^+)$ all change sign at least once in (a, b).*

We also state as a lemma some properties of $A_\lambda^\varrho(x)$ and $S_\varrho(x)$ which are easily verified with the definitions (3.4) and (3.5) of these functions.

LEMMA 3.2. *For $\varrho\geqslant 0$,*

$$S_\varrho(x)=\frac{d}{dx}S_{\varrho+1}(x).$$

For $\varrho>0$,

$$A_\lambda^\varrho(x)=\frac{d}{dx}A_\lambda^{\varrho+1}(x).$$

For $\varrho=0$ and $x\neq\lambda_n$,

$$A_\lambda^0(x)=\frac{d}{dx}A_\lambda^1(x),$$

whereas if $x=\lambda_n$,

$$A_\lambda^0(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{d^+}{dx}+\frac{d^-}{dx}\right)A_\lambda^1(x),$$

since

$$\frac{d^+}{dx}A_\lambda^1(x)=\sum_{\lambda_n\leqslant x}a_n \quad \text{and} \quad \frac{d^-}{dx}A_\lambda^1(x)=\sum_{\lambda_n<x}a_n.$$

4. A Lower Bound for the Change of Sign Function

4.1. We are now in a position to prove the following result on the changes of sign of the real and imaginary parts of $A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)$.

THEOREM 4.1. *Suppose that the functional equation*

$$\Delta(s)\varphi(s)=\Delta(\delta-s)\psi(\delta-s)$$

is satisfied as in Definition 3.1. Let ϱ be a non-negative integer. Let $W_\lambda^\varrho(t)$ denote the number of changes of sign of the function $\mathrm{Re}\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}$ in the interval $0<x\leqslant t$. If $\mathrm{Re}(b_n)\neq 0$ for at least one value of n, then[7]

$$W_\lambda^\varrho(t)\geqslant\left[\frac{h(\mu_1 t)^{1/2A}}{\pi}\right]-C, \tag{4.1}$$

[7]) Here, $[\xi]$ denotes the largest integer $\leqslant\xi$.

where C is a number independent of t, and $h=2e^{-\theta/2A}$, with

$$\theta = 2\left\{\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \log \alpha_\nu - A \log A\right\}.$$

Let $V_\lambda^\varrho(t)$ denote the number of changes of sign of $\operatorname{Im}\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}$ in the interval $0<x\leqslant t$. If $\operatorname{Im}(b_n)\neq 0$ for at least one value of n, then

$$V_\lambda^\varrho(t) \geqslant \left[\frac{h(\mu_1 t)^{1/2A}}{\pi}\right] - C',$$

where C' is independent of t.

Proof. We shall assume that $\operatorname{Re}(b_1)\neq 0$, as we may. The idea of the proof is to obtain first a lower bound for the number of changes of sign of $\operatorname{Re}\{A_\lambda^{\varrho+m}(x)-S_{\varrho+m}(x)\}$ in $0<x\leqslant t$, where m is a sufficiently large non-negative integer. This is achieved by applying relation (3.9). Then, by differentiating m times, and applying Lemmas 3.1 and 3.2, we get (4.1).

Given $\varrho\geqslant 0$, we choose an integer $m\geqslant 0$ which is so large, that

$$\varrho + m \geqslant 2A\beta - A\delta - \tfrac{1}{2}, \tag{4.2}$$

and that also

$$\frac{|\operatorname{Re}(b_1)|}{\mu_1^\vartheta} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\operatorname{Re}(b_n)|}{\mu_n^\vartheta}, \tag{4.3}$$

where

$$\vartheta = (A\delta + \varrho + m + \tfrac{1}{2})/2A. \tag{4.4}$$

Then, because of (4.2), (3.9) holds, with $\varrho+m$ in place of ϱ, and we have the relation

$$c'\cdot x^{\vartheta-\delta-\varrho-m} \operatorname{Re}\{A_\lambda^{\varrho+m}(x) - S_{\varrho+m}(x)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(b_n)}{\mu_n^\vartheta} \cos\left(h(\mu_n x)^{1/2A} + D\right) + g(x), \tag{4.5}$$

where c' is a real constant, ϑ is defined by (4.4), and

$$g(x) = o(1), \tag{4.6}$$

as $x\to\infty$.

Because of (4.3) and (4.6), we can find an X such that

$$|g(x)| < \frac{|\operatorname{Re}(b_1)|}{\mu_1^\vartheta} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\operatorname{Re}(b_n)|}{\mu_n^\vartheta}, \quad \text{for} \quad x \geqslant X. \tag{4.7}$$

Now let the sequence $x_0<x_1<x_2<\cdots$ be such that $x_0\geqslant X$, and

$$\cos\left(h(\mu_1 x_\nu)^{1/2A} + D\right) = (-1)^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.8}$$

Then, we have

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Re}\{A_\lambda^{\varrho+m}(x_\nu) - S_{\varrho+m}(x_\nu)\} = (-1)^\nu \operatorname{sgn} \operatorname{Re}(b_1) \tag{4.9}$$

for $\nu=0, 1, 2,\ldots$.

Indeed, on setting $x=x_\nu$, the right-hand side of (4.5) becomes

$$(-1)^\nu \frac{\operatorname{Re}(b_1)}{\mu_1^\vartheta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(b_n)}{\mu_n^\vartheta} c_n(x_\nu) + g(x_\nu) = G(x_\nu),$$

say, where $c_n(x)=\cos(h(\mu_n x)^{1/2A}+D)$. We have

$$-|\operatorname{Re}(b_n)| \leqslant \operatorname{Re}(b_n)\cdot c_n(x_\nu) \leqslant |\operatorname{Re}(b_n)|, \tag{4.10}$$

and it is easily seen that inequalities (4.7) and (4.10) imply that

$$(-1)^\nu \frac{\operatorname{Re}(b_1)}{\mu_1^\vartheta} - \frac{|\operatorname{Re}(b_1)|}{\mu_1^\vartheta} < G(x_\nu) < (-1)^\nu \frac{\operatorname{Re}(b_1)}{\mu_1^\vartheta} + \frac{|\operatorname{Re}(b_1)|}{\mu_1^\vartheta}, \tag{4.11}$$

whence (4.9) follows immediately.

Therefore, $\operatorname{Re}\{A_\lambda^{\varrho+m}(x)-S_{\varrho+m}(x)\}$ changes sign at least once in each of the open intervals $(x_\nu, x_{\nu+1})$, $\nu=0, 1, 2,\ldots$. Consequently, its number of changes of sign in the interval $0<x\leqslant t$ is not less than

$$\left[\frac{h(\mu_1 t)^{1/2A}}{\pi}\right] - k,$$

where k is a number independent of t. By applying Lemma 3.2 and Rolle's theorem (or Lemma 3.1, if $\varrho=0$), we conclude that $\operatorname{Re}\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}$ has at least

$$\left[\frac{h(\mu_1 t)^{1/2A}}{\pi}\right] - k - m$$

changes of sign, as x varies from 0 to t; this proves our theorem.

4.2. We have actually proved slightly more in the case $\varrho=0$. Because of Lemma 3.1, it follows from our proof that besides $\operatorname{Re}\{A_\lambda^0(x)-S_0(x)\}$, the functions

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{\lambda_n<x} a_n - S_0(x)\right\} \quad \text{and} \quad \operatorname{Re}\left\{\sum_{\lambda_n\leqslant x} a_n - S_0(x)\right\}$$

also change sign at least $[h(\mu_1 t)^{1/2A}/\pi]-C$ times in $(0, t]$.

4.3. It is clear that the method used to prove Theorem 4.1 can be applied to prove

THEOREM 4.1′. *Under the same assumptions as in Theorem* 4.1, *there exists a positive constant* X *such that if* $a\geqslant X$, *then* $\operatorname{Re}\{A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)\}$ *changes sign at least*

$[h\mu_1^{1/2A}(b^{1/2A}-a^{1/2A})/\pi]-C''$ *times in the interval* $a\leqslant x\leqslant b$, *where* C'' *depends neither on* a *nor on* b.

[In fact, X is the real number which appears in inequality (4.7), and $C''=m$, the integer which satisfies inequalities (4.2) and (4.3).]

It may be of interest to remark that a result of this sort, for an arbitrary interval $[a, b]$, does not follow from PÓLYA's theorem.

4.4. In the same manner as above, results analogous to Theorems 4.1 and 4.1′ can be proved for the changes of sign of the real and imaginary parts of $B_\mu^\varrho(x)-S_\varrho(x)$.

4.5. We shall now apply Theorem 4.1 to the error-terms connected with the arithmetical functions $r_k(n)$ and $d(n)$.

The lattice-point function $r_k(n)$. As we have already seen in § 2, the generating function of $r_k(n)$ is the Epstein zeta-function $\zeta_k(s)$. It is regular in the finite part of the plane, except for a simple pole with residue $\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)$ at $s=k/2$. It vanishes at $s=-1, -2, \ldots$, and has the value -1 at $s=0$. Functional equation (3.2) is satisfied by $\varphi(s)=\psi(s)=\pi^{-s}\zeta_k(s)$, with $a_n=b_n=r_k(n)$, $\lambda_n=\mu_n=\pi n$ and $\delta=k/2$. We have $A=1$ and $h=1$. It follows that

$$A_\lambda^\varrho(x)-S_\varrho(x)=\sum_{\pi n\leqslant x}{}' r_k(n)\,(x-\pi n)^\varrho-\frac{x^{k/2+\varrho}}{\Gamma(\varrho+k/2+1)}+\frac{x^\varrho}{\Gamma(\varrho+1)}.$$

In the case $\varrho=0$, if we make the substitution $x\to\pi x$, and set $r_k(0)=1$, Theorem 4.1 implies that as x varies from 0 to t, the error-term

$$P_k^0(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant x}{}' r_k(n)-\frac{(\pi x)^{k/2}}{\Gamma(k/2+1)}$$

changes sign at least $2\sqrt{t}-A_1$ times, where A_1 is independent of t. This result is obviously stronger than inequality (2.21), which we deduced from PÓLYA's theorem, and which holds only for *odd* k.

The divisor function $d(n)$. Let $d(n)$ denote the number of positive divisors of n. Its generating function is $\zeta^2(s)$, the square of RIEMANN's zeta-function, and functional equation (3.2) is satisfied by $\varphi(s)=\psi(s)=\pi^{-s}\zeta^2(s)$, $a_n=b_n=d(n)$, $\lambda_n=\mu_n=\pi n$, and $\delta=1$. We have $N=2$, $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$, whence $A=1$ and $h=2$. Further,

$$S_\varrho(x)=\frac{\pi^\varrho\zeta^2(0)}{\Gamma(\varrho+1)}\left(\frac{x}{\pi}\right)^\varrho-\pi^\varrho\sum_{1\leqslant 2\nu+1\leqslant\varrho}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{\varrho-2\nu-1}\frac{\zeta^2(-2\nu-1)}{\Gamma(2\nu-1)\,\Gamma(2\nu+2)}$$
$$+\frac{\pi^\varrho}{\Gamma(\varrho+2)}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{\varrho+1}\left(\gamma-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+\varrho)+\log\frac{x}{\pi}\right),$$

where γ is Euler's constant (see [3], p. 130). If we consider the case $\varrho = 0$, and make the substitution $x \to \pi x$, it follows from Theorem 4.1 that the error-term

$$\sum_{n \leqslant x}' d(n) - \{x \log x + (2\gamma - 1)x + \tfrac{1}{4}\}$$

has at least $4\sqrt{t} - A_2$ changes of sign in the interval $0 < x \leqslant t$, where A_2 is independent of t.

REFERENCES

[1] K. CHANDRASEKHARAN and RAGHAVAN NARASIMHAN, *Hecke's functional equation and arithmetical identities*, Ann. of Math. *74* (1961), 1–23.

[2] ——, *Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions*, Acta Arith. *6* (1961), 487–503.

[3] ——, *Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions*, Ann. of Math. *76* (1962), 93–136.

[4] ——, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions*, Math. Ann. *152* (1963), 30–64.

[5] P. EPSTEIN, *Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen*, I, II, Math. Ann. *56* (1903), 615–644; *63* (1907), 205–216.

[6] A. E. INGHAM, *The distribution of prime numbers*, Cambridge Tract No. 30 (1932).

[7] E. LANDAU, *Über einen Satz von Tschebyschef*, Math. Ann. *61* (1905), 527–550.

[8] J. E. LITTLEWOOD, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris *158* (1914), 1869–1872.

[9] E. PHRAGMÉN, *Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann*, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandligar *48* (1891), 599–616.

[10] G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, Math. Z. *29* (1929), 549–640.

[11] ——, *Über das Vorzeichen des Restgliedes im Primzahlsatz*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (math.-phys. Kl.) 1930, 19–27.

[12] ——, *On polar singularities of power series and of Dirichlet series*, Proc. London Math. Soc. (2), *33* (1932), 85–101.

[13] J. STEINIG, *Sur les changements de signe du reste dans l'évaluation asymptotique de certaines fonctions arithmétiques*, C. R. Acad. Sci. Paris (série A) *263* (1966), 905–906.

Received September 4, 1968

On Meromorphic Solutions of Algebraic Differential Equations[1])

by STEVEN BANK

1. Introduction

In this paper, we treat arbitrary first order algebraic differential equations (i.e. equations of the form $\Omega(z, y, dy/dz)=0$ where Ω is a polynomial in z, y and dy/dz). Such equations were treated by Valiron in [4], and it was shown that any entire function which satisfies a first order algebraic differential equation must be of finite order. (In fact, Valiron showed that for an entire transcendental solution with maximum modulus $M(r)$, there are positive constants k and λ, with λ rational, such that $\lim_{r\to+\infty}(\log M(r)/kr^{\lambda})=1$.) In this paper, we consider solutions of $\Omega(z, y, dy/dz)=0$, which are defined and meromorphic on the whole finite plane (i.e. meromorphic functions $h(z)$ such that $\Omega(z, h(z), h'(z))=0$ at each point z where h is analytic).

Our main result (§ 2 below) states that a meromorphic solution, which is not identically zero, cannot be written as the quotient of two entire functions where one is of finite order and the other is of infinite order. As a corollary (see §§ 4, 5), we show that if a meromorphic solution $h(z)$ has the property that for some rational function $R(z)$, the sequence of moduli of the zeros of $h(z)-R(z)$ has a finite exponent of convergence [1; p. 188], then h is a meromorphic function of finite order (where order is defined as in [2; p. 30] using the Nevanlinna characteristic). We also show that the same conclusion holds if the sequence of moduli of the poles of the solution $h(z)$ has a finite exponent of convergence. To the author's knowledge, no examples are known of meromorphic functions of infinite order which satisfy a first order algebraic differential equation, and the problem of proving or disproving the existence of such solutions for arbitrary first order algebraic differential equations is a very interesting one. Certain special cases have been treated as, for example, in the special case of the Riccati equation, it was shown by Wittich [6; p. 226] that all meromorphic solutions of the Riccati equation with polynomial coefficients are of finite order. However, the problem for arbitrary first order equations remains open, and we hope that our results here concerning this problem will aid in its eventual solution.

2.

We now state our main result:

[1]) This research was supported in part by the National Science Foundation (GP 7374).

THEOREM: *A meromorphic function on the whole finite plane, which is not identically zero, and which is a solution of a first order algebraic differential equation, cannot be written as the quotient of two entire functions where one is of finite order and the other is of infinite order.*

3. Proof of the Theorem

Let $h(z)$ be meromorphic, and not identically zero on the plane, and satisfy the first order algebraic differential equation $\Omega(z, y, y')=0$ at each point of analyticity. We may write Ω in the form,

$$\Omega(z, y, y') = \sum Q_{kj}(z)\, y^k (y')^j \tag{1}$$

where the Q_{kj} are polynomials.

Let $h=f/g$ where f and g are entire functions. We will show that if either f or g is of finite order then both of them are of finite order. Thus suppose either f or g is of finite order. Without loss of generality, we may assume that

$$g \text{ is of finite order,} \tag{2}$$

since the function $1/h=g/f$ is a meromorphic function which satisfies the first order equation $\sum Q_{kj}(z)\,(-1)^j\, y^{N-(k+j)}(y')^j=0$ where $N=\max\{k+2j: Q_{kj}\not\equiv 0\}$. Now if $f(z)$ is a polynomial, the result holds. Hence we may also assume that,

$$f \text{ is an entire transcendental function.} \tag{3}$$

Let $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ and let $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ be the power series expansion of $f(z)$. For each $r>0$, let $\nu(r)$ be the central index [1; p. 183] of f (i.e. $\nu(r)$ is the maximum j such that $|c_j|\, r^j=\max_{m\geq 0}|c_m|\, r^m$). Then in view of (3),

$$\nu(r) \quad \text{is an unbounded increasing function of} \quad r, \tag{4}$$

and it is proved in [3; pp. 198, 210] (and also in [5; pp. 95, 103]) that there exists $\alpha\in(0, 1)$ such that if we exclude from the interval $(1, +\infty)$ an infinite sequence of exceptional finite open intervals (W_s, W_s') for which

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\log W_s' - \log W_s) \quad \text{converges,} \tag{5}$$

and for which we may assume,

$$W_s' < W_{s+1} \quad \text{for all } s \quad \text{and} \quad \lim_{s\to\infty} W_s' = +\infty, \tag{6}$$

then in the remaining set $(1, +\infty)-E$, where $E=\bigcup_{s=1}^{\infty}(W_s, W_s')$, the following are

true: There exists a number $R_1 \geqslant 1$ such that for $r > R_1$ and $r \notin E$, we have

$$\log M(r) > c(v(r))^{\alpha}, \quad \text{where} \quad c \text{ is a positive constant} \tag{7}$$

independent of r, and if z is any point on $|z| = r$ at which $|f(z)| = M(r)$, then

$$f'(z) = (v(r)/z)(1 + \varepsilon(z)) f(z), \quad \text{where} \quad |\varepsilon(z)| < (v(r))^{-\delta} \tag{8}$$

for some fixed $\delta > 0$. (The elements of $(1, +\infty) - E$ are called *ordinary* values of index α in [3, 4, 5].)

Since g is of finite order (by (2)), let λ be any number greater than the order of g. Let $a_1, a_2, \ldots$ be the zeros (if any) of g lying outside the closed unit disk and let D be the domain outside the closed unit disk exterior to all the disks $|\zeta - a_n| < |a_n|^{-\lambda}$. Then it is proved in [5; p. 74], by using the representation for g given by the Hadamard Factorization Theorem, that there exist $R_2 > 1$ and $\sigma > 0$ such that $|g'(z)/g(z)| < r^{\sigma}$ for $z \in D$ and $|z| = r > R_2$. Thus if we let F be the union of all the open intervals, $(|a_n| - |a_n|^{-\lambda}, |a_n| + |a_n|^{-\lambda})$ for $n = 1, 2, \ldots$, then clearly,

$$|g'(z)/g(z)| < r^{\sigma} \quad \text{on} \quad |z| = r \quad \text{if} \quad r > R_2 \quad \text{and} \quad r \notin F. \tag{9}$$

Now the series $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\lambda}$ converges since λ is greater than the order of g (see [5; pp. 51, 52]), and so it is clear that the set F can be written as the union of a sequence of finite open intervals (T_s, T_s') such that

$$T_s' < T_{s+1} \quad \text{for all } s, \quad \text{and} \quad \sum_{s \geqslant 1} (T_s' - T_s) \quad \text{converges.} \tag{10}$$

In view of (5), (6) and (10), clearly we may write $E \cup F$ as the union of a sequence of finite open intervals,

$$E \cup F = \bigcup_{s=1}^{\infty} (V_s, V_s'), \quad \text{where} \tag{11}$$

$$V_s' < V_{s+1} \quad \text{for all } s \quad \text{and} \quad \lim_{s \to \infty} V_s' = +\infty \tag{12}$$

and

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\log V_s' - \log V_s) \text{ converges.} \tag{13}$$

Now since g is of finite order, there exist $d > 0$ and $R_3 > 1$ such that when $r > R_3$,

$$|g(z)| \leqslant \exp(r^d) \quad \text{on} \quad |z| = r. \tag{14}$$

Also, since the coefficients $Q_{kj}(z)$ are polynomials, there exist $b > 0$ and $R_4 > 1$ such that when $r > R_4$,

$$|Q_{kj}(z)| \leqslant r^b \quad \text{on} \quad |z| = r \quad \text{for all} \quad k, j. \tag{15}$$

Now define,

$$a = 1 + \max\{\sigma + 1, b + 1, d/\alpha\} \quad \text{(where } \alpha \text{ is as in (7))}, \tag{16}$$

and define

$$A = \{r \mid r > 1 \quad \text{and} \quad v(r) > r^a\}. \tag{17}$$

We now prove,

LEMMA A: *There exists a number* $r^* > 1$ *such that* $A \cap (r^*, +\infty) \subset E \cup F$.

Proof: Assume the contrary. Then there exists a sequence of distinct values of r in $(1, +\infty)$ tending to $+\infty$ such that

$$r \in A \quad \text{but} \quad r \notin E \cup F. \tag{18}$$

Let B be the set of values of r comprising this sequence. Now $h = f/g$ satisfies the relation,

$$\sum Q_{kj}(z)\,(h(z))^k\,(h'(z))^j = 0, \tag{19}$$

at all points z where h is analytic. Let

$$p = \max\{k + j : Q_{kj} \not\equiv 0\} \quad \text{and} \quad m = \max\{j : Q_{p-j,\,j} \not\equiv 0\}. \tag{20}$$

Let $r \in B$ and let z be a point on $|z| = r$ at which $|f(z)| = M(r)$. Clearly $f(z) \neq 0$ and since $r \notin F$, $g(z) \neq 0$. Thus $h(z) \neq 0$ and $h(z) \neq \infty$ and so by dividing equation (19) by $(h(z))^p$ (where p is as in (20)), and noting that $h'/h = (f'/f) - (g'/g)$, we can write equation (20) in the form,

$$\Lambda(z) = \Phi(z), \quad \text{where} \tag{21}$$

$$\Lambda(z) = \sum_{j=0}^{m} Q_{p-j,\,j}(z)\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right)^j, \tag{22}$$

and

$$\Phi(z) = -\sum_{k+j<p} Q_{kj}(z)\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right)^j \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{k+j-p}. \tag{23}$$

We now assert that there exist real numbers $r' > 1$ and $K > 0$ such that if $r \in B$ and $r > r'$, then,

$$|\Phi(z)| \leqslant K(M(r))^{-1/2} \exp(\mathrm{pr}^d), \tag{24}$$

at each point of $|z| = r$ at which $|f(z)| = M(r)$.

To prove (24), we recall first from (18) that if $r \in B$ then $r \notin E$ and $r \notin F$. Since $v(r) \to +\infty$ as $r \to +\infty$ (by (4)), we see that $\epsilon(z)$ (in (8)) tends to zero as $r \to +\infty$ in B.

Since $M(r)$ also tends to $+\infty$, there exists $R_5>1$ such that for $r\in B$ and $r>R_5$, we have

$$M(r)>1, \quad v(r)>1 \quad \text{and} \quad |\varepsilon(z)|<\tfrac{1}{2}, \tag{25}$$

at every point of $|z|=r$ at which $|f(z)|=M(r)$. Let $R_6=\max_{1\leqslant j\leqslant 5} R_j$ and let r be any element of B such that $r>R_6$. Let z be any point on $|z|=r$ at which $|f(z)|=M(r)$. We refer to the right side of (23). If $k+j<p$ then $p-(k+j)\geqslant 1$, so $|f(z)|^{k+j-p}=(M(r))^{k+j-p}\leqslant(M(r))^{-1}$ since $M(r)>1$ by (25). Also $|g(z)|\leqslant\exp(r^d)$ by (14) so clearly $|g(z)|^{p-(k+j)}\leqslant\exp(\mathrm{pr}^d)$. Thus $|f(z)/g(z)|^{k+j-p}\leqslant(M(r))^{-1}\exp(\mathrm{pr}^d)$. Also, by (9) and (15), we have $|g'(z)/g(z)|\leqslant r^\sigma$ and $|Q_{kj}(z)|\leqslant r^b$. Since $|\varepsilon(z)|<\frac{1}{2}$ by (25), we have by (8) that $|f'(z)/f(z)|<2(v(r)/r)<2v(r)$ since $r>1$. Thus noting that $j<p<p+1$ if $k+j<p$, we have from (23) and the above estimates that

$$|\Phi(z)|\leqslant Kr^b(2v(r)+r^\sigma)^{p+1}\,(M(r))^{-1}\exp(\mathrm{pr}^d), \tag{26}$$

for some constant $K>0$. Now let $u(r)=r^b(2v(r)+r^\sigma)^{p+1}\,(M(r))^{-1/2}$. We show that $u(r)\to 0$ as $r\to+\infty$ through elements of B. Now we may write,

$$u(r)=\left[\frac{r^{4b}}{M(r)}\right]^{1/4}\left\{\frac{2v(r)}{(M(r))^{1/(4p+4)}}+\left[\frac{r^{4(p+1)\sigma}}{M(r)}\right]^{1/(4p+4)}\right\}^{p+1}. \tag{27}$$

Since f is an entire transcendental function (by (3)), we have by Cauchy's estimate ([5; p. 6]) that as $r\to+\infty$,

$$r^{4b}/M(r) \quad \text{and} \quad r^{4(p+1)\sigma}/M(r) \quad \text{both tend to zero.} \tag{28}$$

Now if $r\in B$ and $r>R_6$, then by (7), $v(r)<(c^{-1}\log M(r))^{1/\alpha}$. Hence,

$$0<\frac{2v(r)}{(M(r))^{1/(4p+4)}}<\frac{2(c^{-1}\log M(r))^{1/\alpha}}{(M(r))^{1/(4p+4)}}. \tag{29}$$

Since $M(r)\to+\infty$ as $r\to+\infty$, clearly the term on the right in (29) tends to zero as $r\to+\infty$. Thus as $r\to+\infty$ through elements of B, we have by (29) that $2v(r)/(M(r))^{1/(4p+4)}\to 0$. Hence in view of (27) and (28), we have $u(r)\to 0$ as $r\to+\infty$ through elements of B. Thus there exists $r'>R_6$ such that for $r\in B$ and $r>r'$, we have $u(r)<1$. In view of (26) and the definition of $u(r)$, we obtain (24).

We now consider $\Lambda(z)$ given by (22). Since $Q_{p-m,m}$ is a polynomial which is not identically zero (by (20)), clearly there exist constants $R_7>r'$ and $L>0$ such that for $r>R_7$,

$$|Q_{p-m,m}(z)|\geqslant L \quad \text{on} \quad |z|=r. \tag{30}$$

Case I: $m=0$. Then $\Lambda(z)=Q_{p-m,m}(z)$. Since $\Lambda(z)=\Phi(z)$ by (21), we have by (24)

and (30) that $L \leqslant K(M(r))^{-1/2} \exp(\mathrm{pr}^d)$ if $r \in B$ and $r > R_7$. Thus

$$M(r) \exp(-2\mathrm{pr}^d) \leqslant (K/L)^2 \quad \text{if} \quad r \in B \quad \text{and} \quad r > R_7. \tag{31}$$

But if $r \in B$ then $r \in A$ and so $v(r) > r^a$ by (17). Hence by (7), $\log M(r) > \mathrm{cr}^{a\alpha}$, and so by (31), we have

$$\exp(\mathrm{cr}^{a\alpha} - 2\mathrm{pr}^d) \leqslant (K/L)^2 \quad \text{if} \quad r \in B \quad \text{and} \quad r > R_7. \tag{32}$$

But by (16), $a > d/\alpha$, and since $d > 0$, $\alpha > 0$ and $c > 0$, clearly the left side of (32) tends to $+\infty$ as $r \to +\infty$. Thus (32) is impossible (since by our assumption (18), there exist r-values in B tending to $+\infty$). This contradiction proves Lemma A in the case $m = 0$.

Case II: $m > 0$. By (25), if $r \in B$ and $r > R_7$ then $|\varepsilon(z)| < \frac{1}{2}$ at each point of $|z| = r$ at which $|f(z)| = M(r)$, and so by (8), $|zf'(z)/(f(z)\, v(r))| \geqslant 1 - |\varepsilon(z)| > \frac{1}{2}$. Thus, $|f'(z)/f(z)| > \frac{1}{2}(v(r)/r)$. Now if $r \in B$ then $r \in A$ and so $v(r) > r^a$ by (17). Hence if $r \in B$ and $r > R_7$ then

$$|f'(z)/f(z)| > \tfrac{1}{2} r^{a-1} \tag{33}$$

at every point of $|z| = r$ at which $|f(z)| = M(r)$. Since $r \in B$ implies $r \notin F$ (by (18)), we also have by (9) that $|g'(z)/g(z)| \leqslant r^\sigma$. Thus with (33), we obtain

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \geqslant \tfrac{1}{2} r^{a-1} - r^\sigma = r^{a-1}\left(\tfrac{1}{2} - r^{\sigma-(a-1)}\right). \tag{34}$$

By definition of a, $\sigma - (a-1) < 0$, and so by (34), there exists $R_8 > R_7$ such that if $r \in B$ and $r > R_8$ then

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right| > \tfrac{1}{4} r^{a-1}, \tag{35}$$

at every point of $|z| = r$ at which $|f(z)| = M(r)$.

We now assert that there exist constants $r^\# > R_8$ and $K^\# > 0$ such that if $r \in B$ and $r > r^\#$, then

$$|\Lambda(z)| \geqslant K^\# \quad \text{at all points of} \quad |z| = r \quad \text{at which} \quad |f(z)| = M(r). \tag{36}$$

To prove (36), we consider the quotients,

$$\Psi_j(z) = (Q_{p-j,j}(z)/Q_{p-m,m}(z)) \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right)^{j-m} \tag{37}$$

for $j = 0, 1, \ldots, m-1$, at points on $|z| = r$ at which $|f(z)| = M(r)$, where $r \in B$ and $r > R_8$. By (15), (30) and (35), we have

$$|\Psi_j(z)| \leqslant (4^{m-j}/L)\, r^{b+(j-m)(a-1)}. \tag{38}$$

Now $b>0$, and by (16), $a-1>b$ and so if $j<m$, we have $(m-j)(a-1)\geqslant(a-1)>b$. Thus $b+(j-m)(a-1)<0$ and so the right side of (38) tends to zero as $r\to+\infty$. Hence there exists a real number $r^{\#}>R_8$ such that for $r>r^{\#}$ and $r\in B$ we have

$$|\Psi_j(z)|\leqslant(1/(m+1)) \quad \text{for} \quad j=0,1,\ldots,m-1. \tag{39}$$

Now in view of (22) and (37) we have,

$$\Lambda(z)=Q_{p-m,m}(z)\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)}\right)^m\left(1+\sum_{j=0}^{m-1}\Psi_j(z)\right)$$

and so

$$|\Lambda(z)|\geqslant|Q_{p-m,m}(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^m\left(1-\sum_{j=0}^{m-1}|\Psi_j(z)|\right).$$

Thus in view of (30), (35) and (39), we have that if $r>r^{\#}$ and $r\in B$ then

$$|\Lambda(z)|\geqslant L4^{-m}(1/(m+1))\,r^{m(a-1)} \tag{40}$$

at every point of $|z|=r$ at which $|f(z)|=M(r)$. Since $a-1>b>0$ and $m>0$ we have that $m(a-1)>0$. Thus since $r^{\#}>1$ we see that if $r>r^{\#}$ then $r^{m(a-1)}>1$. Hence (36) follows from (40) by setting $K^{\#}=L4^{-m}(1/(m+1))$.

Since $\Lambda(z)=\Phi(z)$ by (21), we have by (24) and (36) that $K^{\#}\leqslant K(M(r))^{-1/2}\exp(\mathrm{pr}^d)$ if $r>r^{\#}$ and $r\in B$. Thus

$$M(r)\exp(-2\mathrm{pr}^d)\leqslant(K/K^{\#})^2 \quad \text{if} \quad r>r^{\#} \quad \text{and} \quad r\in B. \tag{41}$$

But if $r\in B$ then $r\in A$ and so $v(r)>r^a$ by (17). Hence by (7), $\log M(r)>\mathrm{cr}^{a\alpha}$ and so by (41),

$$\exp(\mathrm{cr}^{a\alpha}-2\mathrm{pr}^d)\leqslant(K/K^{\#})^2 \quad \text{if} \quad r>r^{\#} \quad \text{and} \quad r\in B. \tag{42}$$

But by (16), $a>d/\alpha$ and since $d>0$, $\alpha>0$ and $c>0$, clearly the left side of (42) tends to $+\infty$ as $r\to+\infty$. Thus (42) is impossible (since by our assumption (18), there exist r-values in B tending to $+\infty$). This contradiction proves the lemma in Case II, and thus the proof of Lemma A is complete.

We now prove,

LEMMA B: *There exists a real number $r_0>1$ such that $v(r)<2r^a$ for all $r>r_0$.*

Proof: By Lemma A, there exists $r^*>1$ such that

$$A\cap(r^*,+\infty)\subset E\cup F. \tag{43}$$

Now by (11), (12) and (13), $E\cup F$ is the union of a sequence of open intervals (V_s, V_s') where $V_s'<V_{s+1}$, $\lim_{s\to\infty}V_s'=+\infty$, and $\sum_{s=1}^{\infty}\log(V_s'/V_s)$ converges. Since the series

converges, $\lim_{s\to\infty}(V_s'/V_s)=1$ and hence $\lim_{s\to\infty}(V_s'/V_s)^a=1$. Since also $\lim_{s\to\infty}V_s'=+\infty$, clearly there exists s_0 such that

$$V_s'>r^* \quad \text{and} \quad (V_s'/V_s)^a<2 \quad \text{for} \quad s\geqslant s_0. \tag{44}$$

We now show that if r_0 is taken to be V_{s_0}', then the conclusion of Lemma B holds. Let $r>r_0$.

If $r\notin A$, then by (17), $v(r)\leqslant r^a$ and so $v(r)<2r^a$.

Suppose now $r\in A$. Then by (43), $r\in E\cup F$. Hence for some s_1, $r\in(V_{s_1}, V_{s_1}')$. Since $r<V_{s_1}'$ while $r>V_{s_0}'$ clearly (by (12)), $s_1>s_0$ so (44) holds for s_1. Thus

$$V_{s_1}'>r^* \quad \text{and} \quad (V_{s_1}'/V_{s_1})^a<2. \tag{45}$$

Now the endpoint V_{s_1}' is clearly not in $E\cup F$ and so by (43), $V_{s_1}'\notin A$. Thus $v(V_{s_1}')\leqslant$ $\leqslant(V_{s_1}')^a$, and so by (45), $v(V_{s_1}')<2(V_{s_1})^a$. Since v is increasing, we thus have $v(r)\leqslant$ $\leqslant v(V_{s_1}')<2(V_{s_1})^a$. But $V_{s_1}<r$ and so we obtain $v(r)<2r^a$ which proves Lemma B completely.

In view of Lemma B, we have $\limsup_{r\to+\infty}(\log v(r)/\log r)\leqslant a$. But in [5; pp. 33–34], it is shown that $\log v(r)/\log r$ and $\log\log M(r)/\log r$ have the same limit superior as $r\to+\infty$. Hence $\limsup_{r\to+\infty}(\log\log M(r)/\log r)\leqslant a$, thus proving that the entire function f is of finite order at most a. This concludes the proof of the theorem stated in § 2.

4. Corollary

Let $h(z)$ be a meromorphic function on the whole finite plane which is a solution of a first order algebraic differential equation. Then $h(z)$ can be written as the quotient of two entire functions where both are of finite order, if either of the following two conditions is satisfied:

(A) *For some rational function $R(z)$, the sequence of moduli of the zeros of the function $h(z)-R(z)$ has a finite exponent of convergence* [1; p. 188].

(B) *The sequence of moduli of the poles of $h(z)$ has a finite exponent of convergence.*

Proof: Suppose (A) holds for a rational function $R(z)$. Letting $\varphi(z)$ be the canonical product [1; p. 195] corresponding to the sequence of zeros of $h(z)-R(z)$, we have that $\varphi(z)$ is an entire function of finite order by [1; p. 195], and that the function $\psi(z)=$ $=\varphi(z)/(h(z)-R(z))$ is entire. Now if $h(z)$ satisfies the equation $\sum Q_{kj}(z)\,y^k(y')^j=0$ (where the Q_{kj} are polynomials) then clearly $h(z)-R(z)$ satisfies the equation

$$\sum Q_{kj}(z)\,(y+R(z))^k\,(y'+R'(z))^j=0. \tag{46}$$

Since $R(z)$ is a rational function and the Q_{kj} are polynomials, it is clear that by multiplying equation (46) through by a suitable polynomial, this equation becomes a first order algebraic differential equation. Since $h(z)-R(z)$ is a solution, and since $h(z)-$

$-R(z)=\varphi(z)/\psi(z)$ where $\varphi(z)$ is of finite order, we have by the theorem in § 2 that $\psi(z)$ is also of finite order. Writing $R(z)=T_1(z)/T_2(z)$ where T_1 and T_2 are polynomials, we have $h(z)=(T_1\psi+T_2\varphi)/(T_2\psi)$ which is a representation of h as the quotient of two entire functions of finite order.

If (B) holds, we form the canonical product $\varphi(z)$ corresponding to the poles of $h(z)$. Then $\varphi(z)$ is of finite order and $\psi(z)=\varphi(z)h(z)$ is entire. By the theorem in § 2, $\psi(z)$ is of finite order also and so $h(z)=\psi(z)/\varphi(z)$ is the desired representation.

5. Remark

By the corollary, if either (A) or (B) is satisfied, then h is the quotient of two entire functions of finite order. It easily follows (using [2; p. 15]) that h is a meromorphic function of finite order (where order is defined as in [2; p. 30] using the Nevanlinna characteristic). In this case, (B) must hold by [2; p. 31], and since $h(z)-R(z)$ will also be a meromorphic function of finite order (for any rational function $R(z)$ by [2; pp. 15–16]), we see that (A) must hold for *all* rational functions $R(z)$ by [2; p. 31].

BIBLIOGRAPHY

[1] E. Hille, *Analytic Function Theory*, Volume II (Ginn and Company, Boston 1962).
[2] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, Paris 1929).
[3] G. Valiron, *Fonctions Analytiques* (Presses Universitaires de France, Paris 1954).
[4] G. Valiron, *Sur les fonctions entières vérifiant une classe d'équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France, *51* (1923), 33–45.
[5] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions* (Edouard Privat, Toulouse 1923).
[6] H. Wittich, *Einige Eigenschaften der Lösungen von* $w'=a(z)+b(z)\,w+c(z)\,w^2$, Arch. Math. *5* (1954), 226–232.

University of Illinois
Urbana, Illinois

Received October 14, 1968

Contributions à la théorie du type simple d'homotopie

par SERGE MAUMARY[1])

Ce travail comporte une partie algébrique, et une partie géométrique. La première a été suggérée par certaines applications de la «torsion de Whitehead», conduisant à considérer des complexes de modules basiques munis d'une filtration. Le problème se pose alors de calculer, lorsqu'elle est définie, la torsion de tels complexes à l'aide de la filtration. Un cas particulier de ce problème est d'ailleurs traité dans [1]. Nous en avons fait ici une théorie très générale, à l'aide de suites spectrales de couples exacts. La seconde partie donne une description précise des équivalences homotopiques simples (cf [3]). Bien que, d'une façon indépendante, on retrouve le résultat de Wall (cf [7]), on précise ici non seulement la dimension mais aussi l'ordre des opérations formelles qui décomposent une équivalence homotopique simple. Pour cela, il a fallu considérer des CW-complexes relatifs (X, A), A et X étant 1-connexes, munis d'une action cellulaire d'un groupe Γ, admettant un système fondamental fini de cellules. Cela généralise aussi la situation classique où X est le revêtement universel d'un CW-complexe fini.

Qu'il me soit permis d'exprimer à M. le Prof. G. de Rham ma profonde reconnaissance pour ses encouragements constants. Je remercie aussi vivement M. le Prof. V. Poenaru qui s'est intéressé à mon travail et m'a conseillé dans la présentation de celui-ci.

I. Torsion de Whitehead et suites spectrales

1. *Introduction*

Nous commencerons par élargir considérablement la notion de modules quasi-basiques introduite dans [1]. Ensuite, pour tout complexe fini C, dont les modules C_k et les modules d'homologie $H_k(C)$ sont quasi-basiques, la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(C)$ sera définie dans le groupe abélien multiplicatif $\tilde{K}^1(A)$ (cf [1]). Par ailleurs, pour tout complexe fini filtré C, les termes E^r de la suite spectrale associée peuvent être considérés canoniquement comme des complexes (monogradués). S'ils sont formés de modules quasi-basiques, indépendants de r pour r assez grand, alors $\tau(E^r) \in \tilde{K}^1(A)$ est déterminée pour tout r, et devient égale à 1 pour r assez grand. Dans ce cas, les modules C_k et $H_k(C)$ sont canoniquement quasi-basiques, et on aura le

THÉORÈME (4.4): *Si la suite spectrale (E^r) d'un A-complexe fini filtré C est*

[1]) Ce travail a été soutenu en partie par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique (crédit n° 4241).

formée de modules quasi-basiques, indépendants de r pour r assez grand, alors $\tau(C)=\prod_r \tau(E^r)$ *dans* $\tilde{K}^1(A)$.

Nous nous bornerons à examiner deux cas particuliers de ce théorème (3.8).

a) Si la suite spectrale est dégénérée, c'est-à-dire si $E^2_{pq}=0$ pour $q>0$, alors $\tau(C)=\tau(E^1)$. On retrouve ainsi une version un peu plus générale du résultat obtenu dans [1].

b) Si la suite spectrale est de type sphérique, c'est-à-dire s'il existe un entier $s\geqslant 1$ tel que $E^1_{p,q}=0$ pour $q\neq 0$ ou s, alors $\tau(C)=\tau(E^1)\tau(\mathfrak{G})$, où $\mathfrak{G}$ est la suite exacte graduée canonique

$$\to H_k(C)\to E^2_{k,0}\to E^2_{k-s-1,s}\to H_{k-1}(C)\to$$

dite «de Gysin».

Applications

PROPOSITION (4.1): *Soit X un* CW*-complexe fini, Y un sous-complexe rétract par déformation de X, et* $Y\subset X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n=X$ *une suite croissante de sous-complexes, tels que* $H_{p+q}(X_{p+1}, X_p)=0$ *pour* $q\neq 0$. *Alors la torsion de Whitehead* $\tau(X, Y)$ *est égale à celle du complexe quasi-basique (acyclique) canonique*

$$\to H_k(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{X}^k)\to H_{k-1}(\tilde{X}_k, \tilde{X}_{k-1})\to\cdots,$$

où $\tilde{X}_k$ *est le revêtement de* X_k *induit par le revêtement universel de X.*

Soit X un CW-complexe fini muni d'une action cellulaire libre d'un groupe Γ, et θ un homomorphisme de Γ dans un anneau A, tel que les A-modules $H_k(X)_\theta$ déduits de $H_k(X)$ par extension des scalaires soient quasi-basiques. Soit encore S^n la sphère standard de dimension $n\geqslant 1$.

PROPOSITION (4.2): *Pour toute action cellulaire de* Γ *sur* $X\times S^n$, *de la forme* $\gamma(x, y)=(\gamma x, y')$, *avec* $\gamma\in\Gamma$, $x\in X$, $y\in S^n$, *on a* $\tau_\theta(X\times S^n)=\tau_\theta(X)^{\chi(S^n)}$.

Par exemple, si Γ est un groupe cyclique fini agissant librement sur S^{2n+1}, alors le Γ-complexe $S^{2n+1}\times S^{2n+1}$ muni de l'action $\gamma(x, y)=(\gamma x, \gamma y)$, $\gamma\in\Gamma$, a une θ-torsion égale à 1.

Nous utiliserons [1] et [2] comme références de base pour ce texte. On y trouve en particulier les définitions et propriétés du foncteur $\tilde{K}^1$, de la $\tilde{K}^1$-torsion d'une matrice régulière et d'une suite exacte graduée de modules basiques, et enfin de la $\tilde{K}^1$-torsion d'une équivalence homotopique de complexes basiques.

2. *Modules quasi-basiques*

2.1. DÉFINITION: *On dira qu'un A-module M est quasi-libre (abrégé q-l) s'il*

admet une résolution finie libre (L, ε), *c'est-à-dire une suite exacte*

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

où les modules L_k *sont libres, de type fini.*

Notons que, si A est un anneau principal ou local régulier, tout A-module de type fini est q-l. Par ailleurs, un A-module projectif P est q-l, si et seulement si il existe un isomorphisme de la forme $P \oplus A^r \approx A^s$. En effet, une résolution libre finie (L, ε) de P est scindée, donc il existe un isomorphisme $P \oplus_k L_{2k+1} \approx \oplus_k L_{2k}$. On retrouve ainsi les modules q-l au sens de [1].

2.2. THÉORÈME: *Si, dans une suite exacte de A-modules* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, *deux d'entre eux sont q-l, alors le troisième l'est aussi.*

La démonstration sera éclaircie par le lemme suivant et ses corollaires.

2.3. LEMME: *Soient C et C' deux complexes, formés de modules libres de type fini en degré k pour* $0 \leqslant k < n$, *et nuls pour* $k < 0$ *ou* $k > n$.

Soit encore $f: C \to C'$ *une équivalence homotopique. Alors il existe des complexes acycliques T et T', formés de modules libres de type fini, ainsi qu'un isomorphisme* $g: C \oplus T \approx C' \oplus T'$ *homotope à* $p' \circ f \circ i$, *où* $i: C \to C \oplus T$ *et* $p': C' \oplus T' \to C'$ *sont les équivalences homotopiques canoniques.*

Preuve: Supposons, par induction sur $k < n$, qu'il existe des complexes T et T', libres de type fini et nuls en degrés $> n$, ainsi qu'une équivalence homotopique $g: C \oplus T \to C' \oplus T'$, formée d'isomorphismes en degrés $< k$, et homotope à $p' \circ f \circ i$. Pour $k = 0$, il suffit de prendre $T = T' = 0$ et $g = f$. Notons $D = (D_j, d_j)$ le complexe $C \oplus T$ et posons $B_j = \operatorname{Im} d_j$, $Z_j^* = \operatorname{Coker} d_{j+1}$, $H_j = H_j(D)$. Avec des notations analogues pour $C' \oplus T'$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H_k & \to & Z_j^* & \xrightarrow{d_k} & B_{k-1} \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g_{k*}} & & \downarrow{\scriptstyle g_k^*} & & \downarrow{\scriptstyle g_{k-1}} \\ 0 & \to & H'_k & \to & Z'^*_k & \xrightarrow{d'_k} & B'_{k-1} \to 0 \end{array}$$

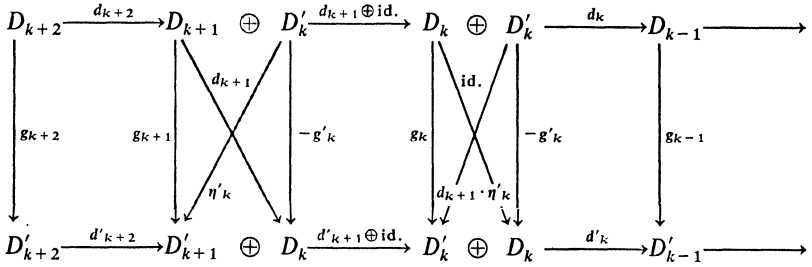
où g_{k*} et g_{k-1} sont des isomorphismes par hypothèse d'induction. Donc g_k^* est un isomorphisme. Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & D_{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & D_k & \xrightarrow{\pi} & Z_k^* \longrightarrow 0 \\ & & {\scriptstyle g_{k+1}}\downarrow & & {\scriptstyle g_k}\downarrow & & {\scriptstyle g_k^*}\uparrow \\ & & D'_{k+1} & \xrightarrow{d'_{k+1}} & D'_k & \xrightarrow{\pi'} & Z'^*_k \longrightarrow 0 \end{array}$$

où π et π' sont les projections canoniques. Comme D'_k est libre pour $k < n$, il existe

un homomorphisme $g'_k: D'_k \to D_k$, tel que $\pi \circ g'_k = (g_k^*)^{-1} \circ \pi'$. Alors $\pi' \circ (1 - g_k \circ g_k) = 0$, donc de nouveau parce que D'_k est libre, il existe un homomorphisme $\eta'_k: D'_k \to D'_{k+1}$, tel que $1 - g_k \circ g'_k = d'_{k+1} \circ \eta'_k$.

Soient E et E' les complexes $0 \to D_k \xrightarrow{\mathrm{id}.k+1} D_k \to 0$ et $0 \to D'_k \xrightarrow{\mathrm{id}.k+1} D'_k \to 0$ respectivement, où l'indice $k+1$ à l'identité signifie qu'elle est la différentielle en degré $k+1$. Le diagramme commutatif



définit un morphisme de complexes $h: D \oplus E' \to D \oplus E$, tel que $h_j = g_j$ pour $j < k$, et

$$h_k = (g_k + d'_{k+1} \circ \eta'_k) \oplus (\mathrm{id.} - g'_k) = ((\mathrm{id.} + g_k) \oplus \mathrm{id.}) \circ (\mathrm{id.} \oplus (\mathrm{id.} - g'_k)).$$

Ces deux derniers facteurs étant des isomorphismes, h_k en est aussi un. De plus, si $i: D \to D \oplus E'$ et $p': D' \oplus E \to D'$ sont les équivalences homotopiques canoniques, on a $p' \circ h \circ i = g$, donc h est une équivalence homotopique. En remplaçant T par $T \oplus E'$ et T' par $T' \oplus E$, on achève le pas d'induction. Dès lors, on peut supposer que g est un isomorphisme en degrés $\leqslant n-1$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H_n & \to & D_n & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g_{n*}} & & \downarrow{\scriptstyle g_n} & & \downarrow{\scriptstyle g_{n-1}} & & \\ 0 & \to & H'_n & \to & D'_n & \xrightarrow{d'_n} & B'_{n-1} & \to & 0 \end{array}$$

g_{n*} et g_{n-1} sont des isomorphismes, donc g_n en est aussi un. cqfd.

2.4. COROLLAIRE: *Soit M un A-module q-l, et (K, η) une résolution de M, de longueur n, libre de type fini en degré $<n$. Alors il existe un entier s tel que $K_n \oplus A^s$ soit q-l.*

Preuve: Soit (L, ε) une résolution finie libre de M et $(L^{(n)}, \varepsilon)$ la résolution tronquée, de longueur n, obtenue en remplaçant L_n par $Z_{n-1} = \mathrm{Ker}(L_{n-1} \to L_{n-2})$. Il existe une équivalence homotopique $f: K \to L^{(n)}$ relevant l'identité de M (cf [4]). Donc, d'après le lemme, il existe un isomorphisme de la forme $Z_{n-1} \oplus A^r \approx K_n \oplus A^s$. Comme Z_{n-1} est q-l, $Z_{n-1} \oplus A^r$ l'est évidemment aussi. cqfd.

2.5. COROLLAIRE: *Soit* $0\to M'\to M\to M''\to 0$ *une suite exacte de modules, M étant de type fini et M" q-l. Alors M' est de type fini.*

Preuve: Etant donné un homomorphisme surjectif $\varepsilon: A^m\to M$ on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & A^m & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \text{id.}} & & \\ 0 & \to & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \to & 0 \end{array}$$

où $K=\mathrm{Ker}(v\circ\varepsilon)$. On voit que ε' est surjectif, et il résulte du corollaire 2.4 que K est de type fini. cqfd.

2.6. *Preuve du théorème* 2.2. Dans un premier cas, supposons que M' et M'' sont q-l, et prenons-en des résolutions finies libres (L', ε') et (L'', ε''), respectivement. D'après [4], il existe une résolution (K, η) de M et une suite exacte de complexes $0\to L'\to K\to L''\to 0$ relevant la suite exacte donnée. Comme L''_k est libre, on a $K_k\approx L'_k\oplus L''_k$, donc K_k est libre de type fini, pour tout k.

Dans un deuxième cas, supposons que M et M'' sont q-l. Voyons d'abord que, pour tout entier $n>0$, il existe une résolution (K', η') de M', de longueur n, libre de type fini en degrés $<n$. Pour $n=1$, cela signifie que M' est de type fini, ce qui résulte du corollaire 2.5. Supposons par induction que (K', η') existe pour un entier n. Il suffit alors de montrer que K'_n est de type fini. Soit (L'', ε'') une résolution finie libre de M'', et $(L''^{(n)}, \varepsilon'')$ la résolution tronquée, de longueur n. D'après [4], il existe une résolution (K, η) de M et une suite exacte de complexes $0\to K'\to K\to L''^{(n)}\to 0$, relevant la suite exacte donnée. Dans $0\to K'_n\to K_n\to Z''_{n-1}\to 0$, Z''_{n-1} est q-l, et K_n est de type fini en vertu du corollaire 2.4. Donc K'_n est de type fini, d'après le corollaire 2.5, ce qui achève le pas d'induction. Choisissons alors n égal à la longueur de L''. Il vient $Z''_{n-1}=0$, donc $K'_n\approx K_n$. D'après le corollaire 2.4, il existe un entier s, tel que $K_n\oplus A^s$ soit q-l. En ajoutant à K' le complexe $0\to A^s\xrightarrow{\mathrm{id}.n} A^s\to 0$, on obtient une résolution de M', de longueur $n+1$, libre de type fini en degrés $<n$, et égale à $K'_n\oplus A^s$ en degré n. En la composant avec une résolution finie libre de $K'_n\oplus A^s$, on obtient une résolution finie libre de M'.

Dans le dernier cas, on suppose que M' et M sont q-l. Voyons d'abord que, pour tout entier $n>0$, il existe une résolution (K'', η'') de M'', de longueur n, et libre de type fini en degrés $<n$. Pour $n=1$, cela signifie que M'' est de type fini, ce qui est évidemment vrai. Supposons, par induction, que (K'', η'') existe pour un entier n. Il suffit alors de montrer que K''_n est de type fini. Soit (L', ε') une résolution finie libre de M', et $(L'^{(n)}, \varepsilon')$ la résolution tronquée, de longueur n. Comme précédemment, il existe une résolution (K, η) de M et une suite exacte de complexes $0\to L'^{(n)}\to K\to K''\to 0$.

Dans $0\to Z'_{n-1}\to K_n\to K''_n\to 0$, K_n est de type fini en vertu du corollaire 2.4, donc K''_n est aussi de type fini, ce qui achève le pas d'induction. Choisissons alors n égal à la longueur de L'. Il vient $Z'_{n-1}=0$, donc $K_n\approx K''_n$. D'après le corollaire 2.4, il existe s tel que $K''_n\oplus A^s$ soit q-l, ce qui entraîne comme ci-dessus que M'' est q-l. cqfd.

2.7. COROLLAIRE: *Soit C un complexe fini de modules q-l, qui est acyclique excepté en un degré λ. Alors $H_\lambda(C)$ est un module q-l.*

Preuve: En appliquant le théorème aux suites exactes $0\to Z_k\to C_k\to B_{k-1}\to 0$, pour des valeurs décroissantes de k, jusqu'à $k=\lambda+1$, on voit que B_λ est q-l. De même, avec des valeurs croissantes de k jusqu'à $k=\lambda$, on voit que Z_λ est q-l. Une nouvelle application du théorème à la suite exacte $0\to B_\lambda\to Z_\lambda\to H_\lambda\to 0$ montre que H_λ est q-l. cqfd.

2.8. Rappelons (cf [1] ou [2]) qu'étant donné un anneau A ayant la propriété: $A^r\approx A^s\Rightarrow r=s$, on dit qu'un A-module M est *basique*, s'il est muni d'une famille de bases finies se déduisant les unes des autres par des matrices de $\tilde{K}^1$-torsion 1.

2.9. DÉFINITION: *Une résolution finie libre (L,ε) d'un A-module M sera dite* basique, *si les modules L_k sont basiques, pour tout k. De plus, deux telles résolutions (L,ε) et (L',ε') du même module M seront dites* équivalentes, *si les équivalences homotopiques $f:L\to L'$ relevant l'identité de M sont simples (on sait que ces f sont toutes homotopes entre elles, donc ont toutes la même torsion).*

2.10. Pour tout A-module q-l M, désignons par $\tilde{K}^1(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence de résolutions basiques de M. Le groupe $\tilde{K}^1(A)$ agit sur $\tilde{K}^1(M)$ comme suit: étant donné une matrice régulière P et une résolution basique (L,ε) de M dont on peut supposer que le rang de L_0 est égal à celui de P, quitte à ajouter à L un complexe de la forme $0\to A^r\xrightarrow{\mathrm{id}.1} A^r\to 0$ et remplacer P par $\begin{pmatrix} P & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on effectue le changement de base de matrice P dans L_0. La classe d'équivalence de cette dernière résolution basique ne dépend que de celle de (L,ε), et de la $\tilde{K}^1$-torsion de P.

2.11. PROPOSITION: *L'action canonique de $\tilde{K}^1(A)$ sur $\tilde{K}^1(M)$ est simplement transitive.*

Preuve: Soient (L,ε) et (L',ε') deux résolutions basiques de M, et $f:L\to L'$ une équivalence homotopique, relevant l'identité de M. On peut supposer que la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(f)$ est égale à celle d'une matrice régulière P, de rang celui de L_0. En effectuant le changement de base de matrice P dans L_0, f devient simple. Autrement dit, P transforme la classe d'équivalence de (L,ε) dans celle de (L',ε'). cqfd.

2.12. DÉFINITION: *Un A-module q-l M sera dit* quasi-basique *(abrégé q-b) s'il est muni d'une classe d'équivalence de résolutions basiques. Les résolutions de cette classe seront dites* distinguées.

Par convention, le module nul sera considéré comme q-b, la résolution nulle étant distinguée.

2.13. Etant donné un isomorphisme de A-modules q-b $u: M \approx M'$, on peut relever u en une équivalence homotopique $f: L \to L'$ de résolutions distinguées de M et M' respectivement. Ce relèvement f est unique à homotopie près, donc la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(f) \in \tilde{K}^1(A)$ ne dépend que de u. Aussi, on posera $\tau(u) = \tau(f)$, et on appellera $\tau(u)$ la $\tilde{K}^1$-*torsion de u.*

2.14. Pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de A-modules q-b, il existe des résolutions distinguées (L', ε'), (L, ε), (L'', ε'') de M', M'' respectivement, ainsi qu'une suite exacte de complexes $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ relevant la suite exacte donnée. On le voit en prenant (L', ε') et (L'', ε'') arbitrairement, et en posant $L = L' \oplus L''$, $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, quitte à ajouter à L' un complexe de la forme $0 \to A^r \xrightarrow{\mathrm{id}_r} A^r \to 0$ pour que L devienne distinguée (prop. 2.11). En désignant par λ_k la $\tilde{K}^1$-torsion de la suite exacte de modules basiques $0 \to L'_k \to L_k \to L''_k \to 0$, le produit $\prod_k \lambda_k^{\varepsilon(k)}$, où $\varepsilon(k) = (-1)^k$, ne dépend pas des choix précédents. En effet, si $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$ est une autre suite exacte de résolutions distinguées relevant la suite exacte donnée, il existe des équivalences homotopiques $f': L' \to K'$, $f: L \to K$, $f'': L'' \to K''$ relevant l'identité de M', M, M'' respectivement, et formant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L' & \to & L & \to & L'' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \to & K' & \to & K & \to & K'' & \to & 0 \end{array}$$

(cf [4]). En passant aux complexes «cônes» de ces équivalences homotopiques, on a un isomorphisme canonique $C(f) \approx C(f') \oplus C(f'')$ dont la $\tilde{K}^1$-torsion en degré k est $\lambda_k \mu_{k-1}$, où μ_k désigne le $\tilde{K}^1$-torsion de la suite exacte $0 \to K'_k \to K_k \to K''_k \to 0$. Comme f', f et f'' sont simples, on a $\prod_k (\lambda_k \mu_{k-1})^{\varepsilon(k)} = 1$, c'est-à-dire $\prod_k \lambda_k^{\varepsilon(k)} = \prod_k \mu_k^{\varepsilon(k)}$. Cet élément sera appelé la $\tilde{K}^1$-*torsion de la suite exacte* donnée. Lorsqu'elle vaut 1, on dira que la suite est *simple*. Si l'on fait agir un élément $\sigma \in K^1(A)$ sur (L', ε') ou (L'', ε''), alors λ_0 devient $\sigma\lambda_0$, et λ_k reste inchangé pour $k > 0$. Donc le produit $\prod_k \lambda_k^{\varepsilon(k)}$ est une fonction homogène de degré 1 sur $\tilde{K}^1(M')$ et $\tilde{K}^1(M'')$. On voit de même que c'est une fonction homogène de degré -1 sur $\tilde{K}^1(M)$. Par conséquent, si dans une suite exacte de modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ deux d'entre eux sont q-b, la condition

que cette suite soit simple détermine le troisième module comme q-b, de manière unique.

2.15. DÉFINITION: *On appellera* complexe quasi-basique *un complexe dont les modules non nuls sont en nombre fini et sont q-b.*

2.16. Etant donné un complexe q-b $C=(C_k, d_k)$ dont les modules d'homologie H_k sont tous q-b, on voit en appliquant le théorème 2.2 alternativement aux suites exactes canoniques $0\to B_k\to Z_k\to H_k\to 0$, $0\to Z_k\to C_k\to B_{k-1}\to 0$, où $B_k=\operatorname{Im} d_{k+1}$, $Z_k=\operatorname{Ker} d_k$, que B_k et Z_k sont q-l, pour tout k. En les considérant arbitrairement comme q-b, on obtient des $\tilde{K}^1$-torsions α_k et β_k respectivement pour les suites exactes ci-dessus. Le produit $\prod_k(\alpha_k\beta_k)^{\varepsilon(k+1)}$ ne dépend pas des choix faits, car α_k est une fonction homogène de degré 1 sur $\tilde{K}^1(B_k)$, de degré -1 sur $\tilde{K}^1(Z_k)$, et β_k une fonction homogène de degré 1 sur $\tilde{K}^1(B_{k-1})$ et $\tilde{K}^1(Z_k)$. Aussi on posera $\tau(C)=\prod_k(\alpha_k\beta_k)^{\varepsilon(k+1)}$ et on appellera $\tau(C)$ la $\tilde{K}^1$-*torsion de* C. C'est une fonction homogène de degré $(-1)^{k+1}$ sur $\tilde{K}^1(H_k)$, de degré $(-1)^k$ sur $\tilde{K}^1(C_k)$.

2.17. LEMME: *Soit*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
0 & \to & M_{2,2} & \to M_{2,1} & \to M_{2,0} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
0 & \to & M_{1,2} & \to M_{1,1} & \to M_{1,0} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
0 & \to & M_{0,2} & \to M_{0,1} & \to M_{0,0} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

un diagramme commutatif de suites exactes de modules q-b. Désignons par τ'_i *et* τ''_i *les* $\tilde{K}^1$-*torsions des suites exactes*

$$0\to M_{2,i}\to M_{1,i}\to M_{0,i}\to 0$$

et

$$0\to M_{i,2}\to M_{i,1}\to M_{i,0}\to 0$$

respectivement. Alors

$$\tau'_0\tau'^{-1}_1\tau'_2=\tau''_0\tau''^{-1}_1\tau''_2.$$

Preuve: Si les modules sont tous basiques, le diagramme se scinde et la formule est évidente. Sinon, on peut trouver une résolution distinguée $(L_{i,j}, \varepsilon_{i,j})$ de $M_{i,j}$, ainsi qu'un diagramme commutatif entre les $L_{i,j}$ qui relève le diagramme ci-dessus (cf [4]). Il suffit alors d'appliquer la formule en chaque degré de ce diagramme. cqfd.

2.18. Comme application de ce lemme, on voit que la définition de la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(C)$ d'un complexe q-b C, d'homologie également q-b, est autoduale: si α_k^* et β_k^* désignent les $\tilde{K}^1$-torsions des suites exactes canoniques $0 \to H_k \to Z_k^* \to B_{k-1} \to 0$ et $0 \to B_k \to C_k \to Z_k^* \to 0$ respectivement, alors $\tau(C) = \prod_k (\alpha_k^* \beta_k^*)^{\varepsilon(k+1)}$. Il résulte en effet du lemme 2.17, appliqué au diagramme

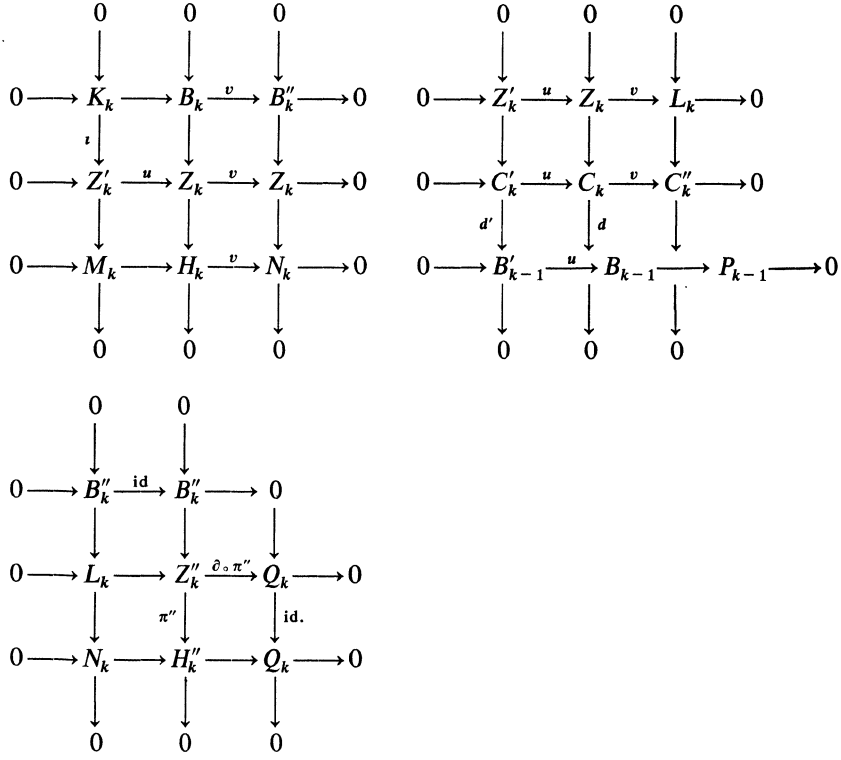
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & B_k & \xrightarrow{\mathrm{id}} & B_k & \xrightarrow{\mathrm{id}} & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & B_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id.} & & \\
0 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & Z_k^* & \longrightarrow & B_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

que $\alpha_k^{-1} \beta_k^* = (\alpha_k^*)^{-1} \beta_k$.

2.19. Considérons une suite exacte $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ de complexes q-b, dont les modules d'homologie respectifs H_k', H_k et H_k'' sont aussi tous q-b. Graduons la suite exacte d'homologie associée $\mathfrak{H}$, en posant $\mathfrak{H}_{3k} = H_k''$, $\mathfrak{H}_{3k+1} = H_k$, $\mathfrak{H}_{3k+2} = H_k'$. Alors $\tau(\mathfrak{H})$ est déterminée. C'est une fonction homogène de degré $(-1)^k$ sur $\tilde{K}^1(H_k')$ et $\tilde{K}^1(H_k'')$, et de degré $(-1)^{k+1}$ sur $\tilde{K}^1(H_k)$.

2.20. THÉORÈME: *Si* $0 \to C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C'' \to 0$ *est une suite exacte comme ci-dessus, de* $\tilde{K}^1$*-torsion* σ_k *en degré* k, *alors* $\tau(C) = \tau(C')\,\tau(C'')\,\tau(\mathfrak{H}) \prod_k \sigma_k^{\varepsilon(k)}$.

Preuve: En utilisant l'homogénéité des $\tilde{K}^1$-torsions précédentes, on se ramène au cas où $\tau(C) = \tau(C') = \tau(C'') = \sigma_k = 1$. Considérons d'abord les diagrammes commutatifs de suites exactes canoniques suivantes:



où

$$K_k = \mathrm{Ker}\,(B_k \xrightarrow{v} B''_k), \qquad L_k = \mathrm{Im}\,(Z_k \xrightarrow{v} Z''_k),$$
$$M_k = \mathrm{Im}\,(H'_k \xrightarrow{u_*} H_k), \qquad N_k = \mathrm{Im}\,(H_k \xrightarrow{v_*} H''_k),$$
$$P_k = \mathrm{Coker}\,(B'_k \xrightarrow{u} B_k), \qquad Q_k = \mathrm{Im}\,(H''_k \xrightarrow{\partial} H'_{k-1}),$$

∂ étant l'homomorphisme de connexion dans $\mathfrak{H}$. En vertu du théorème 2.2, tous les modules ci-dessus sont q-l. Les modules C'_k, C_k, C''_k, H'_k, H_k, H''_k étant déjà q-b, considérons les autres modules arbitrairement comme q-b et posons:

$$\gamma_k = \tilde{K}^1\text{-torsion de } 0 \to K_k \to Z'_k \to M_k \to 0$$
$$\mu_k = \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0 \to B''_k \to L_k \to N_k \to 0$$
$$\nu_k = \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0 \to Z'_k \to Z_k \to L_k \to 0$$
$$\chi_k = \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0 \to M_k \to H_k \to N_k \to 0$$
$$\chi''_k = \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0 \to N_k \to H''_k \to Q_k \to 0$$

Les autres suites exactes peuvent d'emblée être supposées simples. En appliquant

alors le lemme 2.17 aux diagrammes ci-dessus, on trouve $\gamma_k\mu_k=\chi_k\nu_k^{-1}$, $\nu_k=1$, $\chi_k''=\mu_k$.

Envisageons un moment le cas particulier où C est acyclique, et où C'' n'a qu'un module non nul C_λ''. On a alors le diagramme commutatif

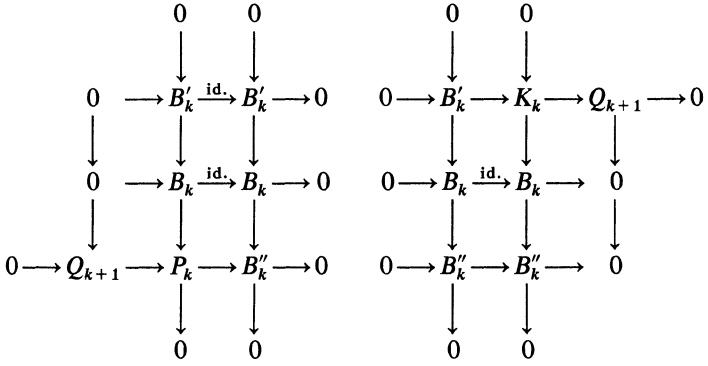
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B'_{\lambda-1} & \longrightarrow & Z'_{\lambda-1} & \longrightarrow & H'_{\lambda-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id.}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u}\,{\scriptstyle \approx} & & \searrow{\scriptstyle \partial} & & \\
 & & & & Z_{\lambda-1} & & & & \\
 & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id.}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & B'_{\lambda-1} & \xrightarrow{u} & B_{\lambda-1} & \longrightarrow & P_{\lambda-1} & \xrightarrow{\approx} & C''_\lambda = H''_\lambda \longrightarrow 0
\end{array}$$

Les deux suites exactes horizontales sont simples, et l'isomorphisme $u: Z'_{\lambda-1}\to Z_{\lambda-1}$ est aussi simple. Donc $\tau(\partial)=1$ d'après le lemme 2.17. Comme $\mathfrak{H}$ se réduit à l'isomorphisme ∂, on a $\tau(\mathfrak{H})=1$. La formule est ainsi vérifiée dans ce cas. Elle l'est aussi dans le cas dual, où C est acyclique et C' n'a qu'un module non nul, en utilisant les suites exactes duales des précédentes, ainsi que la définition duale de la $\tilde{K}^1$-torsion d'un complexe q-b.

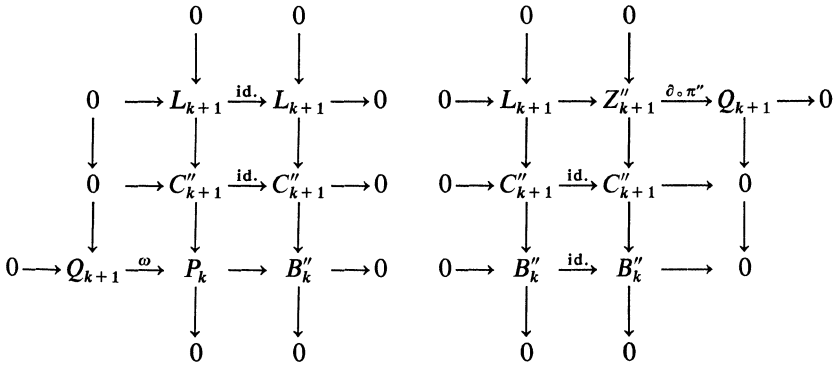
Revenons au cas général et interprétons les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & B'_k & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & B'_k & \longrightarrow & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & Z'_k & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & Z'_k & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & Q_{k+1} & \longrightarrow & H'_k & \xrightarrow{u_*} & M_k & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & B'_k & \longrightarrow & K_k & \xrightarrow{\pi o \iota} & Q_{k+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z'_k & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & Z'_k & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & M_k & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & M_k & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

comme des suites exactes de complexes (colonnes), entrant dans les cas particuliers envisagés ci-dessus. Si R_k désigne l'homologie de degré 1 de $0\to B'_k\to Z'_k\to M_k\to 0$, les isomorphismes de connexion $\partial: R_k\to Q_{k+1}$ et $\partial: Q_{k+1}\to R_k$, respectifs à ces diagrammes, sont inverses l'un de l'autre. En appliquant la formule à chaque diagramme, on trouve alors $\lambda_k\chi'_k=\gamma_k$, où $\lambda_k=\tilde{K}^1$-torsion de $0\to B'_k\to K_k\to Q_{k+1}\to 0$, $\chi'_k=\tilde{K}^1$-torsion de $0\to Q_{k+1}\to H'_k\to M'_k\to 0$. Un raisonnement analogue avec les diagrammes



où ω est tel que l'homomorphisme composé $Z''_{k+1} \xrightarrow{\partial \circ \pi''} Q_{k+1} \xrightarrow{\omega} P_k$ est induit par ∂, montre que la $\tilde{K}^1$-torsion de $0 \to Q_{k+1} \to P_k \to B''_k \to 0$ est λ_k^{-1}. Encore un raisonnement analogue avec les diagrammes commutatifs



montre que $\lambda_k^{-1} = 1$. En rassemblant les relations trouvées, on obtient $\chi'_k \chi''_k = \chi_k$. Mais par définition,

$$\tau(\mathfrak{H}) = \prod_k \chi_k'^{\varepsilon(3k+3)} \chi_k^{\varepsilon(3k+2)} \chi_k''^{\varepsilon(3k+1)} = \prod_k (\chi'_k \chi_k^{-1} \chi''_k)^{\varepsilon(k+1)},$$

et comme chaque facteur de ce produit vaut 1, on trouve $\tau(\mathfrak{H}) = 1$. cqfd.

2.21. COROLLAIRE: *Soit $f: C \to C'$ une équivalence homotopique de complexes q-b, à homologie aussi q-b. Alors*

$$\tau(f) = \tau(C')\,\tau(C)^{-1} \prod_k \tau(f_{k*})^{\varepsilon(k+1)}, \quad \text{où} \quad f_{k*}: H_k \xrightarrow{\approx} H'_k$$

est l'isomorphisme induit par f en homologie.

Preuve: Considérons la suite exacte canonique de complexes q-b $0\to C'\to C(f)\to \to C^{-1}\to 0$, où $C(f)$ est le cône de f, et C^{-1} est le complexe C avec la graduation $C_k^{-1}=C_{k-1}$. En chaque degré, cette suite exacte est simple, c'est-à-dire $\sigma_k=1$ pour tout k. La suite exacte d'homologie associée $\mathfrak{H}$ se réduit aux isomorphismes

$$f_{k*}:\mathfrak{H}_{3k+3}\xrightarrow{\approx}\mathfrak{H}_{3k+2},\quad \text{donc}\quad \tau(\mathfrak{H})=\prod_k \tau(f_{k*})^{\varepsilon(k+1)}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.20, en tenant compte que $\tau(C^{-1})=\tau(C)^{-1}$. cqfd.

3. *Suites spectrales quasi-basiques*

3.1. Etant donné un entier r, un A-r-complexe bigradué E est une famille de A-modules $E_{p,q}$ pour $p, q\in\mathbf{Z}$, et d'homomorphismes $d_{p,q}:E_{p,q}\to E_{p-r,q+r-1}$ tels que $d_{p-r,q+r-1}\circ d_{p,q}=0$ pour tout p, q. Les modules d'homologie de E sont définis par $H_{p,q}(E)=Z_{p,q}(E)/B_{p,q}(E)$, où $Z_{p,q}(E)=\operatorname{Ker} d_{p,q}$ et $B_{p,q}(E)=\operatorname{Im} d_{p+r,q-r+1}$. On considérera E comme un complexe ordinaire (E_k, d_k) en posant $E_k=\oplus_{p+q=k} E_{p,q}$ et $d_k=\oplus_{p+q=k} d_{p,q}$. Si les modules $E_{p,q}$ et $H_{p,q}(E)$ sont tous q-b, alors les modules E_k et $H_k(E)=\oplus_{p+q=k} H_{p,q}(E)$ le sont aussi canoniquement, de sorte que $\tau(E)$ est déterminée.

3.2. Un A-r-couple exact fini $\mathfrak{C}:\overset{D\xrightarrow{i}D}{{}_k\nwarrow\ \swarrow_j}{}_E$ est formé par deux A-modules bigradués $D=(D_{p,q})$ et $E=(E_{p,q})$, pour $p, q\in\mathbf{Z}$, et par trois homomorphismes bigradués

$$i=(i_{p,q}:D_{p,q}\to D_{p+1,q-1}),\quad j=(j_{p,q}:D_{p,q}\to E_{p-r+1,q+r-1}).$$
$$k=(k_{p,q}:E_{p,q}\to D_{p-1,q}),$$

tels que la suite bigraduée

$$D\xrightarrow{i}D\xrightarrow{j}E\xrightarrow{k}D\xrightarrow{i}D$$

soit exacte.

L'hypothèse de finitude est que $E_{p,q}=D_{p,q}=0$ dans chacun des cas $\begin{cases} p+q<0 \\ p<0 \\ q \text{ assez grand, et encore } E_{p,q}=0 \text{ pour } p \text{ assez grand.}\end{cases}$ Il en résulte que $i_{p,q}$ est un isomorphisme pour p assez grand, puisqu'alors

$$E_{p+1,q}=E_{p-r+2,q+r-2}=0.$$

Ainsi, en posant

$$D_k=\varinjlim_p (D_{p,k-p}, i_{p,k-p}),$$

D_k est canoniquement isomorphe à $D_{p,k-p}$ pour p assez grand. On considérera $\mathfrak{C}$ comme un complexe acyclique, défini par les modules

$$\mathfrak{C}_{3k} = \bigoplus_{p+q=k} E_{p,q}, \quad \mathfrak{C}_{3k+1} = \mathfrak{C}_{3k+2} = \bigoplus_{p+q=k} D_{p,q},$$

et par les homomorphismes

$$\mathfrak{C}_{3k+2} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=k} i_{p,q}} \mathfrak{C}_{3k+1} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=k} j_{p,q}} \mathfrak{C}_{3k} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=k} k_{p,q}} \mathfrak{C}_{3k-1}.$$

Il se décompose en somme directe d'un nombre fini de complexes acycliques finis $\mathfrak{H}^\lambda$, et d'une infinité de complexes de la forme

$$0 \longrightarrow D_{p,q} \xrightarrow[\approx]{i_{p,q}} D_{p+1,q-1} \longrightarrow 0,$$

p étant assez grand. Nous dirons que le *couple exact* $\mathfrak{C}$ *est quasi-basique* si tous les $E_{p,q}$ sont q-b, les $D_{p,q}$ étant tous q-l. On considérera alors ces derniers arbitrairement comme q-b, mais de manière que les isomorphismes précédents $i_{p,q}$ soient simples. En particulier, cela détermine D_k comme q-b. Le produit $\prod_\lambda \tau(\mathfrak{H}^\lambda)$ ne dépend que de ce dernier choix, car $D_{p,q}$ figure toujours en deux degrés consécutifs dans le complexe $\mathfrak{C}$. On posera alors $\tau(\mathfrak{C}) = \prod_\lambda \tau(\mathfrak{H}^\lambda)$ et on appellera $\tau(\mathfrak{C})$ la $\tilde{K}^1$-*torsion du couple exact q-b* $\mathfrak{C}$, relative aux modules q-b D_k.

3.3. Etant donné un r-couple exact $\mathfrak{C}: \overset{D \xrightarrow{i} D}{\nwarrow_k \swarrow_j}{}_E$, on sait lui associer un $r+1$-couple exact $\mathfrak{C}': \overset{D' \xrightarrow{i'} D'}{\nwarrow_{k'} \swarrow_{j'}}{}_{E'}$ appelé couple dérivé de $\mathfrak{C}$. Pour le construire, on fait d'abord de E un r-complexe bigradué, en introduisant les homomorphismes $d_{p,q} = j_{p-1,q} \circ k_{p,q} : E_{p,q} \to \to E_{p-r,q+r-1}$. On pose ensuite $D'_{p,q} = \operatorname{Im} i_{p-1,q+1}$, $E'_{p,q} = H_{p,q}(E)$, et on définit i', j', k' par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} D'_{p,q} & \longrightarrow & D_{p,q} \\ {\scriptstyle i'_{p,q}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle i_{p,q}} \\ & D_{p+1,q-1} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D_{p-1,q+1} & \xrightarrow{i_{p-1,q+1}} & D'_{p,q} \\ \downarrow{\scriptstyle j_{p-1,q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle j'_{p,q}} \\ Z_{p-r,q+r}(E) & \xrightarrow{\pi} & E'_{p-r,q+r} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Z_{p,q}(E) & \xrightarrow{\pi} & E'_{p,q} \\ {\scriptstyle k_{p,q}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle k'_{p,q}} \\ & D'_{p-1,q} & \end{array}$$

où π est la projection canonique. Notons que D'_k, défini par $\varinjlim_p D'_{p,k-p}$, est égal à D_k, puisque $i_{p,q}$ est un isomorphisme pour p assez grand.

3.4. LEMME: *Soit* $\mathfrak{C}: \overset{D \xrightarrow{i} D}{\nwarrow_k \swarrow_j}{}_E$ *un couple exact fini dont les modules* $E_{p,q}$ *sont tous*

q-b. Supposons que les deux couples dérivés successifs $\mathfrak{C}'$ *et* $\mathfrak{C}''$ *soient q-b. Alors* $\mathfrak{C}$ *est q-b, et* $\tau(E)=\tau(\mathfrak{C})\,\tau(\mathfrak{C}')^{-1}$ *relativement aux modules q-b* D_k.

Preuve: Considérons les diagrammes commutatifs de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & B_{p,q}(E) & \xrightarrow{\text{id.}} & B_{p,q}(E) & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Ker} k_{p,q} & \to & Z_{p,q}(E) & \to & \operatorname{Im} k'_{p,q} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id.} & & \\
0 & \to & \operatorname{Ker} k'_{p,q} & \to & E'_{p,q} & \to & \operatorname{Im} k'_{p,q} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Ker} k_{p,q} & \to & Z_{p,q}(E) & \to & \operatorname{Im} k'_{p,q} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \text{id.} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Ker} k_{p,q} & \to & E_{p,q} & \to & \operatorname{Im} k_{p,q} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 \to B_{p-r,q+r-1}(E) & \xrightarrow{\text{id.}} & B_{p-r,q+r-1}(E) & \to & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Im} k'_{p,q} & \to & D'_{p-1,q} & \xrightarrow{i'} & D''_{p,q-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Im} k_{p,q} & \to & D_{p-1,q} & \xrightarrow{i} & D'_{p,q-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B_{p-r,q+r-1}(E) & \to & \operatorname{Ker} k_{p-r,q+r-1} & \to & \operatorname{Ker} k'_{p-r,q+r-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Il résulte de l'hypothèse et du théorème 2.2, que tous les modules ci-dessus sont q-l. En particulier, $\mathfrak{C}$ est q-b. Les modules $D_{p,q}$, $D'_{p,q}$, $D''_{p,q}$ sont à considérer comme

q-b, de la manière indiquée plus haut. En considérant les modules restant arbitrairement comme q-b, posons:

$$\sigma_{p,q} = \tilde{K}^1\text{-torsion de } 0 \to \operatorname{Ker} k_{p,q} \to Z_{p,q}(E) \to \operatorname{Im} k'_{p,q} \longrightarrow 0$$
$$\nu_{p,q} = \quad\text{»}\quad\text{»}\quad 0 \to \operatorname{Ker} k'_{p,q} \to E'_{p,q} \to \operatorname{Im} k'_{p,q} \longrightarrow 0$$
$$\mu_{p,q} = \quad\text{»}\quad\text{»}\quad 0 \to \operatorname{Ker} k_{p,q} \to E_{p,q} \to \operatorname{Im} k_{p,q} \longrightarrow 0$$
$$\alpha_{p,q} = \quad\text{»}\quad\text{»}\quad 0 \to B_{p,q}(E) \to Z_{p,q}(E) \to E'_{p,q} \longrightarrow 0$$
$$\beta_{p,q} = \quad\text{»}\quad\text{»}\quad 0 \to Z_{p,q}(E) \to E_{p,q} \to B_{p-r,q+r-1}(E) \to 0$$

Les autres suites exactes peuvent être supposées simples. Le lemme 2.17 appliqué aux deux premiers diagrammes, donne $\alpha_{p,q} = \sigma_{p,q}\nu_{p,q}^{-1}$ et $\beta_{p,q} = \mu_{p,q}\sigma_{p,q}^{-1}$. En utilisant la définition, on a

$$\tau(E) = \prod_{p,q} (\alpha_{p,q}\beta_{p,q})^{\varepsilon(p+q+1)}.$$
$$\tau(\mathfrak{C}) = \prod_{p,q} \mu_{p,q}^{\varepsilon(p+q+1)}, \qquad \tau(\mathfrak{C}') = \prod_{p,q} \nu_{p,q}^{\varepsilon(p+q+1)},$$

et la formule annoncée résulte des relations précédentes. cqfd.

3.5. Etant donné un 1-couple exact fini $\mathfrak{C}: \overset{D}{\underset{k}{\nwarrow}} \overset{D}{\underset{j}{\swarrow}}{}^{E}$, on lui associe, pour tout entier $r \geqslant 1$, le r-couple exact $\mathfrak{C}^r: \overset{D^r}{\underset{k^r}{\nwarrow}} \overset{D^r}{\underset{j^r}{\swarrow}}{}^{E^r}$, obtenu par $r-1$ dérivations successives. Les r-complexes bigradués $(E^r, d^r = j^r \circ k^r)$ forment ce qu'on appelle la *suite spectrale* de $\mathfrak{C}$. Pour r assez grand, $d^r = 0$ puisque d^r applique $E^r_{p,q}$ dans $E^r_{p-r,q+r-1}$, et que $E_{p-r,q+r-1} = 0$ implique $E^r_{p-r,q+r-1} = 0$. Alors E^r ne dépend plus de r, et on l'écrit E^∞. Quant au complexe $\mathfrak{C}^r$, il devient lorsque r est assez grand somme directe de suites exactes courtes

$$0 \to D^r_{p+r-2,q-r+2} \xrightarrow{i^r} D^r_{p+r-1,q-r+1} \xrightarrow{j^r} E^r_{p,q} \to 0.$$

En effet, on a

$$\operatorname{Ker} i^r = \operatorname{Im}(E^r_{p+r-1,q-r+2} \xrightarrow{k^r} D^r_{p+r-2,q-r+2}),$$
$$\operatorname{Im} j^r = \operatorname{Ker}(E^r_{p,q} \xrightarrow{k^r} D^r_{p-1,q})$$

et

$$D^r_{p-1,q} = \operatorname{Im}(D_{p-r,q+r-1} \xrightarrow{i \circ i \ldots i} D_{p-1,q}),$$

mais $E^r_{p+r-1,q-r+2}$ devient nul, comme précédemment, ainsi que $D_{p-r,q+r-1}$. Par définition, $D^r_{p+r-1,q-r+1}$ est un sousmodule de $D_{p+r-1,q-r+1}$, qui n'est autre que D_k pour r assez grand et $k = p+q$. Donc $D^r_{p+r-1,q-r+1}$ devient canoniquement un sousmodule D^p_k de D_k, tel que $D^p_k \subset D^{p+1}_k$, ce qui détermine une filtration de D_k. Les suites exactes $0 \to D^{p-1}_k \to D^p_k \to E^\infty_{p,k-p} \to 0$ déduites de $\mathfrak{C}^r$ donnent des isomorphismes ca-

noniques $\phi_{p,k-p}: D_k^p/D_k^{p-1} \approx E^\infty_{p,k-p}$, c'est-à-dire un isomorphisme ϕ du module gradué $\mathrm{Gr}\, D_k$, associé à la filtration de D_k, avec E^∞.

3.6. DÉFINITION: *La suite spectrale (E^r) d'un 1-couple exact fini $\mathfrak{C}$ sera dite* quasi-basique, *si les modules $E^r_{p,q}$ sont tous q-b, et de manière indépendante de r, pour r assez grand.*

3.7. Cette définition a les conséquences suivantes:

1°) $\tau(E^r)$ est déterminé pour tout r, puisque les modules d'homologie E^{r+1} de E^r sont q-b. De plus $\tau(E^r)=1$ pour r assez grand.

2°) les modules $E^\infty_{p,q}$ sont canoniquement q-b.

3°) les couples dérivés $\mathfrak{C}^r$ de $\mathfrak{C}$ sont tous q-b. Il suffit de le voir pour r assez grand, d'après le lemme 3.4, autrement dit que les modules D_k^p sont q-l, D_k étant q-b. Or via l'isomorphisme ϕ, $\mathrm{Gr}\, D_k$ est q-b. D'après le théorème 2.2, si le module gradué d'un module filtré est q-l, alors les termes de la filtration le sont aussi. En exigeant que les suites exactes $0 \to D_k^{p-1} \to D_k^p \to D_k^p/D_k^{p-1} \to 0$ soient simples, chaque module D_k^p devient canoniquement q-b. Ainsi, $\tau(\mathfrak{C}^r)$ est déterminée pour tout r, et $\tau(\mathfrak{C}^r)=1$ pour r assez grand.

3.7. LEMME: *Si un 1-couple exact fini $\mathfrak{C}$ a une suite spectrale q-b, alors* $\tau(C)= \prod_{r=1}^\infty \tau(E^r)$.

Preuve: D'après le lemme 3.4, on a $\tau(E^r)=\tau(\mathfrak{C}^r)\,\tau(\mathfrak{C}^{r+1})^{-1}$ pour tout r, donc $\tau(\mathfrak{C}^1)=\prod_{r=1}^\infty \tau(E^r)$. Mais $\mathfrak{C}^1=\mathfrak{C}$. cqfd.

3.8. *Cas particuliers*

a) Supposons que $E_2^{p,q}=0$ pour $q>0$. Alors $E^r_{p,q}=0$ pour tout $r\geqslant 2$ et $q>0$. Comme d^r applique $E^r_{p,q}$ dans $E^r_{p-r,r-1}$, $d^r=0$ pour $r\geqslant 2$ et alors $E^{r+1}=E^r$. Donc $E^2_{p,q}=E^\infty_{p,q}$. Par ailleurs, $E^\infty_{p,q}$ est isomorphe à D_k^p/D_k^{p-1}, où $k=p+q$, ce qui montre que $D_k^p/D_k^{p-1}=0$ pour $p<k$, c'est-à-dire $D_k^p=0$ pour $p<k$. On obtient ainsi $E^2_{k,0}\approx D_k$. En supposant que les modules q-b $E^r_{k,0}$ sont indépendants de r pour $r\geqslant 2$, on aura $\tau(E^r)=1$ pour $r\geqslant 2$, donc $\tau(\mathfrak{C})=\tau(E^1)$.

b) Supposons qu'il existe des entiers s et t, tels que $1\leqslant s\leqslant t$, et $E^s_{p,q}=0$ pour $q\neq 0$ ou t. Alors $E^r_{p,q}=0$ pour tout $r\geqslant s$, et $q\neq 0$ ou t. Comme d^r applique $E^r_{p,q}$ dans $E^r_{p-r,q+r-1}$, $d^r=0$ pour $r\geqslant s$, sauf pour $r=1$ et $r=t+1$. Donc $E^{t+1}=E^{s+1}$ et $E^{t+2}=E^\infty$. Le complexe E^{t+1} est somme directe des suites

$$0 \longrightarrow E^{t+1}_{p,0} \xrightarrow{d^{t+1}} E^{t+1}_{p-t-1,t} \longrightarrow 0,$$

donc $\mathrm{Ker}\, d^{t+1}=E^{t+2}_{p,0}$, $\mathrm{Coker}\, d^{t+1}=E^{t+2}_{p-t-1,t}$ et on obtient ainsi une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^\infty_{p,0} \longrightarrow E^{s+1}_{p,0} \xrightarrow{d^{t+1}} E^{s+1}_{p-t-1,t} \longrightarrow E^\infty_{p-t-1,t} \longrightarrow 0.$$

Si γ_p désigne sa $\tilde{K}^1$-torsion, on a $\tau(E^{t+1})=\prod_p \gamma_p^{\varepsilon(p)}$ par définition de $\tau(E^{t+1})$. Par ailleurs, l'isomorphisme $\phi:\mathrm{Gr}D\approx E^\infty$ montre que $D_k^p=D_k^{p-1}$ pour $p\neq k$ ou $k-t$, c'est-à-dire $D_k^p=0$ pour $p<k-t$, $D_k^p=D_k^{k-t}$ pour $k-t\leqslant p<k$. On en déduit $E^\infty_{k,0}\approx D_k/D_k^{k-t}$, $E^\infty_{k-t,t}\approx D_k^{k-t}$, et une suite exacte canonique

$$\mathfrak{G}:\longrightarrow D_k\longrightarrow E^{s+1}_{k,0}\xrightarrow{d^{t+1}}E^{s+1}_{k-t-1,t}\longrightarrow D_{k-1}\longrightarrow E^{s+1}_{k-1,0}\longrightarrow\cdots,$$

composée des suites exactes écrites plus haut et des suites exactes simples $0\to E^\infty_{k-t,t}\to$ $\to D_k\to E^\infty_{k,0}\to 0$. En graduant $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G}_{3k}=E^{s+1}_{k,0}$, $\mathfrak{G}_{3k+1}=D_k$, $\mathfrak{G}_{3k+2}=E^{s+1}_{k-t,t}$, on a $\tau(\mathfrak{G})=\prod_p\gamma_p^{\varepsilon(p)}$ par définition de $\tau(\mathfrak{G})$, donc $\tau(E^{t+1})=\tau(\mathfrak{G})$. En supposant que les modules q-b $E^r_{p,q}$ sont indépendants de r pour $r\geqslant s$, excepté pour $r=1$ et $r=t+1$, on aura $\tau(E^r)=1$ pour $r\neq 1$, $t+1$, donc $\tau(\mathfrak{C})=\tau(\mathfrak{G})\,\tau(E^1)\prod_{r=2}^{s-1}\tau(E^r)$. Si $s\leqslant 2$, le dernier produit tombe, ce qui donne $\tau(\mathfrak{C})=\tau(\mathfrak{G})\,\tau(E^1)$.

4. *Filtrations quasi-basiques*

4.1. Etant donné une filtration finie d'un complexe fini C, c'est-à-dire une suite croissante de sous-complexes $0\subset C^0\subset C^1\subset\cdots\subset C^n=C$, on lui associe le 1-couple exact fini

$\mathfrak{C}:\begin{array}{ccc} & D & \\ {\scriptstyle k}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle j} \\ E & & \end{array}$, formé par les modules

$D_{p,q}=H_{p+q}(C^p)$, $E_{p,q}=H_{p+q}(C^p/C^{p-1})$ et par les homomorphismes

$$H_{p+q}(C^{p-1})\xrightarrow{i_{p-1,q}}H_{p+q}(C^p)\xrightarrow{j_{p,q}}H_{p+q}(C^p/C^{p-1})\xrightarrow{k_{p,q}=\partial}H_{p+q-1}(C^{p-1})$$

tirés de la suite exacte d'homologie $\mathfrak{H}^p$ de C^p mod. C^{p-1}. On a alors $D_k=H_k(C)$ et $D_k^p=\mathrm{Im}(H_k(C^p)\to H_k(C))$. La suite spectrale de $\mathfrak{C}$, complétée par le module bigradué $E^0_{p,q}=C^p_{p+q}/C^{p-1}_{p+q}$, s'appelle la suite spectrale de la filtration. Lorsque les modules $E^0_{p,q}$ et $E^1_{p,q}$ sont tous q-b, la $\tilde{K}^1$-torsion des complexes C^p/C^{p-1} est déterminée.

4.2. DÉFINITION: *On dira qu'une filtration d'un complexe C est* quasi-basique, *si les modules E^r_{p+q} de la suite spectrale associée sont tous q-b, de manière indépendante de r pour r assez grand, et que $\tau(C^p/C^{p-1})=1$.*

4.3. Les modules q-b $E^0_{p,k-p}$ déterminent, d'une manière déjà vue, les modules C_k^p comme q-b. Quant aux modules $D_{p,k-p}=H_k(C^p)$, ils sont à considérer comme q-b, de manière indépendante de p pour p assez grand. Dans ces conditions, les $\tilde{K}^1$-torsions $\tau(C)$ et $\tau(C^p)$ sont déterminées.

4.4. THÉORÈME: *Soit C un complexe fini, muni d'une filtration q-b, et (E^r) la suite spectrale associée. Alors $\tau(C)=\prod_{r=1}\tau(E^r)$.*

Preuve: En vertu du théorème 2.20, on a $\tau(C^p)=\tau(C^{p-1})\tau(\mathfrak{H}^p)$, donc $\tau(C)=$ $=\prod_p \tau(\mathfrak{H}^p)$. Mais le second membre est $\tau(\mathfrak{C})$ par définition, où $\mathfrak{C}$ est le couple exact associé à la filtration. La formule annoncée résulte alors du lemme 3.7. cqfd.

5. *Applications géométriques*

5.1. Rappelons d'abord que pour toute paire (X, Y) de CW-complexes, $Y\subset X$, et toute action cellulaire d'un groupe Γ sur (X, Y) qui est libre à système fondamental fini sur $X-Y$, on définit le $\mathbf{Z}\Gamma$-complexe basique $C(X, Y)$ des chaînes cellulaires de $X-Y$, dont l'homologie n'est autre que l'homologie singulière $H_*(X, Y)$ (cf [1] ou [2]). Si celle-ci est q-b, éventuellement après une extension des scalaires $\theta:\mathbf{Z}\Gamma\to A$, alors la θ-torsion $\tau_\theta(X, Y)$ est déterminée, dans le groupe quotient de $\tilde{K}^1(A)$ par le sous-groupe engendré par les unités $\theta(\Gamma)\subset A$.

5.2. PROPOSITION: *Soit $Y\subset X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n=X$ une suite croissante de sous-complexes invariants, telle que $H_{p+q}(X_p, X_{p-1})=0$ pour $q>0$. Alors la filtration induite sur $C(X, Y)_\theta$ est canoniquement q-b, et $\tau_\theta(X, Y)$ est égale à la θ-torsion du complexe q-b E^1:*

$$\to H_k(X_k, X_{k-1})_\theta \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2})_\theta \to \cdots$$

Preuve: D'abord, les modules $E^0_{p,q}=C_{p+q}(X_p, X_{p-1})_\theta$ sont basiques. Ensuite les modules $E^1_{p,0}=H_p(X_p, X_{p-1})_\theta$ sont q-l d'après le corollaire 2.7, appliqué au complexe $C(X_p, X_{p-1})_\theta$. La condition $\tau_\theta(X_p, X_{p-1})=1$ les détermine canoniquement comme q-b. Enfin $E^2_{p,q}$ étant nul pour $q>0$, on a $E^2_{p,0}=H_p(X, Y)_\theta$, supposé q-b. La proposition résulte alors du théorème 4.4. cqfd.

5.3. Considérons maintenant une paire polyédrale (K, L) munie d'une action de Γ, libre avec système fondamental fini sur $K-L$, et un fibré X sur K, de fibre S^n, $n\geqslant 1$. Pour toute décomposition polyédrale de S^n, X est un polyèdre dont les cellules sont les produits des cellules de K par celles de S^n. Le sous-fibré Y induit sur L est un sous-complexe. Supposons que Γ agisse cellulairement sur X, en induisant l'action donnée sur K via la projection $X\to L$. Alors cette action est libre, à système fondamental fini, sur $X-Y$. Soit X_p le sous-complexe invariant de X induit sur $K\cup L^p$, K^p étant le p-squelette de K, et E^r la suite spectrale associée à la filtration $\ldots C(X_{p-1}, Y)$ $\subset C(X_p, Y)\ldots$. Les modules $E^0_{p,q}=C_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ sont basiques. Les modules $E^1_{p,q}=H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ sont canoniquement isomorphes, par homotopie, excision et la formule de Künneth, à $H_p(K^p, K^{p-1})\otimes H_q(S^n)$ (voir aussi chap. 9.2 de [5]). En particulier, $E^1_{p,q}=0$ pour $q\neq 0$ ou n, et $E^1_{k,0}\approx H_k(K^k, K^{k-1})=C_k(K, L)$, $E^1_{k,n}\approx H_k(K^k, K^{k-1})=C_k(K, L)$. En tenant compte des différentielles et des degrés, on a un isomor-

phisme de complexes $E^1 \approx C(K, L) \oplus C(K, L)^{-n}$. Comme $E^2 = H(E^1)$, on a $E^2_{k,0} \approx$ $\approx H_k(K, L)$, $E^2_{k,n} \approx H_k(K, L)$. D'après 3.8 b), la suite exacte $\mathfrak{G}$ s'écrit pour $s=1$ et $t=$n,

$$\to H_k(X, Y) \to H_k(K, L) \to H_{k-n-1}(K, L) \to H_{k-1}(X, Y) \to$$

5.4. Faisons maintenant une extension des scalaires $\theta: \mathbf{Z}\Gamma \to A$ qui respecte les suites exactes et qui rende les modules $H_k(X, Y)$ et $H_k(K, L)$ q-b. Alors les θ-torsions $\tau_\theta(X, Y)$ et $\tau_\theta(K, L)$ sont déterminées, ainsi que celle de la suite exacte $\mathfrak{G}_\theta$. On posera $\tau_\theta(\mathfrak{G}) = \tau(\mathfrak{G}_\theta)$.

5.5. PROPOSITION: *Soit (X, Y) une paire polyédrale et $\theta: \mathbf{Z}\Gamma \to A$ un homomorphisme vérifiant respectivement les hypothèses 5.3 et 5.4. Alors*

$$\tau_\theta(X, Y) = \tau_\theta(K, L)^{\chi(S^n)}\ \tau_\theta(\mathfrak{G}).$$

Preuve: D'après ce qui précède, la suite spectrale (E^r_θ) est q-b. On l'a vu en effet pour $r=0$, 1 et 2. Pour $r=\infty$, cela résulte de la suite exacte q-b $\mathfrak{G}_\theta$, dans laquelle E^∞_θ figure comme cycle. Maintenant $\tau_\theta(E^1) = \tau_\theta(K, L)^2$ si n est pair, et $\tau_\theta(E^1) = 1$ si n est impair, autrement dit $\tau_\theta(E^1) = \tau_\theta(K, L)^{\chi(S^n)}$. D'après 3.8 b), on a $\tau_\theta(X, Y) = \tau_\theta(E^1) \times \tau_\theta(\mathfrak{G})$. cqfd.

5.6. Notons que, si le fibré est trivial, on a $H_k(X, Y) \approx H_k(K, L) \oplus H_{k-n}(K, L)$ par la formule de Künneth, et $\mathfrak{G}$ se décompose dans les suites exactes triviales $0 \to H_{k-n}(K, L) \to H_k(X, Y) \to H_k(K, L) \to 0$. Si les modules $H_k(K, L)_\theta$ sont q-b, les modules $H_k(X, Y)$ le sont aussi canoniquement, et $\tau_\theta(\mathfrak{G}) = 1$. Alors $\tau_\theta(X, Y)$ et $\tau_\theta(K, L)$ sont déterminée simultanément et $\tau_\theta(X, Y) = \tau_\theta(K, L)^{\chi(S^n)}$.

II. Deformations Formelles

Notre but ici est de donner une description très précise des équivalences homotopiques simples, améliorant par une voie indépendante le résultat de Wall obtenu dans [7]. Pour cela, nous aurons besoin de relativiser la théorie classique du type simple d'homotopie, ce qui conduit par la même occasion à une généralisation de celle-ci. Nous choisirons [7] comme référence de base pour ce texte.

1. *Opérations fondamentales*

1.1. Etant donné un CW-complexe relatif (X, A) et un groupe Γ, on notera $(X, A; \Gamma)$ ce CW-complexe muni d'une action cellulaire de Γ admettant un système fondamental fini de cellules dans X-A. Lorsqu'on attachera une λ-cellule e^λ à $(X, A; \Gamma)$ par

une application ϕ, on attachera simultanément toutes les λ-cellules $\gamma \times e$, $\gamma \in \Gamma$, par $\gamma \circ \phi$, ce qui donnera de nouveau un CW-complexe relatif $(X \cup \Gamma \times e, A; \Gamma)$. Avec cette catégorie de complexes, il nous faut reprendre la définition classique des déformations formelles élémentaires. Ainsi, considérons le disque standard D^λ comme formé de l'hémisphère sud $D^{\lambda-1}_-$ et des deux cellules $e^{\lambda-1} = \mathring{D}^{\lambda-1}_+$ et $e^\lambda = \mathring{D}^\lambda$. Pour toute application continue

$$\phi : (D^{\lambda-1}, S^{\lambda-2}) \to (X^{\lambda-1}, X^{\lambda-2}),$$

où X^k est le k-squelette réunion de A et des cellules de dimension $\leqslant k$, on peut former le CW-complexe relatif $(X \cup_\phi D^\lambda, A)$.

1.2. DÉFINITION: *On appelle* expansion *élémentaire de dimension λ de $(X, A; \Gamma)$ l'opération attachant à $(X, A; \Gamma)$ un disque D^λ par $\phi \mid D^{\lambda-1}$, ainsi que tous les disques $\gamma \times D^\lambda$ par $\gamma \circ \phi$, $\gamma \in \Gamma$. L'opération inverse est appelée* contraction *élémentaire de dimension λ.*

1.3. La projection orthogonale de D^λ sur $D^{\lambda-1}$ détermine une rétraction par déformation équivariante de $(X \cup \Gamma \times D^\lambda, A; \Gamma)$ sur $(X, A; \Gamma)$. Ainsi, à chacune des deux opérations précédentes, on peut associer une équivalence homotopique équivariante: l'inclusion canonique $X \to X \cup \Gamma \times D^\lambda$ pour la première, et la rétraction précédente pour la seconde. Toute suite finie d'expansions ou contractions formelles élémentaires est appelée une *déformation formelle*; il lui est associé de manière naturelle une équivalence homotopique équivariante.

1.4. DÉFINITION: *On dira qu'une équivalence homotopique équivariante est* représentable par une déformation formelle, *si elle lui est associée, à homotopie près.*

1.5. A toute équivalence homotopique équivariante $f : (X, A; \Gamma) \to (X', A'; \Gamma)$, on sait associer une W-torsion $\tau(f)$, dans le groupe de Whitehead $\mathrm{Wh}(\Gamma)$ (cf [2] ou [3]), et on dit que f est *simple* si $\tau(f) = 1$ (nous notons multiplicativement le groupe abélien $\mathrm{Wh}(\Gamma)$). On vérifie aisément que l'équivalence homotopique associée à une déformation formelle est simple. Comme $\tau(f)$ est invariante par homotopie, il en est de même pour toute équivalence homotopique représentable par une déformation formelle.

1.6. Reprenons la définition suivante due à Wall (voir [7]): soient ϕ_0 et ϕ_1 deux applications continues de $S^{\lambda-1}$ dans $X^{\lambda-1}$, qui sont homotopes dans X^λ. L'opération qui transforme $(X \cup_{\phi_0} \Gamma \times D^\lambda, A; \Gamma)$ en $(X \cup_{\phi_1} \Gamma \times D^\lambda, A; \Gamma)$ s'appelle un *glissement* formel élémentaire, de dimension λ. En fait, cette dernière opération est composée d'une expansion suivie d'une contraction élémentaire, de dimension $\lambda + 1$ (voir [7]). L'équivalence homotopique associée f induit un isomorphisme des $\mathbf{Z}\Gamma$-complexes basiques $f_* : C(X_0, A) \xrightarrow{\simeq} C(X_1, A)$, représenté en chaque degré par une matrice

élémentaire, relativement à des *bases cellulaires*. Ces dernières bases sont définies comme celles qui correspondent canoniquement à un système fondamental de cellules orientées de $X_i - A$. L'assertion résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & C_k(X, A) & \to & C_k(X_0, A) & \to & C_k(X_0, X) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle \text{id.}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & \\ 0 \to & C_k(X, A) & \to & C_k(X_1, A) & \to & C_k(X_1, X) & \to 0 \end{array}$$

où $C_k(X_i, X)=0$ pour $k \neq \lambda$, $C_\lambda(X_i, X)$ admettant un élément de base unique $[e_i^\lambda]$, tel que $f_*[e_0^\lambda]=[e_1^\lambda]$.

1.7. Si l'homotopie, qui définit un glissement formel élémentaire de dimension λ, a lieu dans le $(\lambda-1)$-squelette $X^{\lambda-1}$, le glissement sera plus précisément appelé une *isotopie* formelle élémentaire. Plus généralement, soit $(X, A \times I; \Gamma)$ un CW-complexe relatif, obtenu en attachant successivement des cylindres $D^\lambda \times I$ par des applications

$$S^{\lambda-1} \times I \to A \times I \underset{\mu<\lambda}{\cup} D^\mu \times I = X^{(\lambda-1)}.$$

Chaque cylindre introduit les trois cellules $e_0^\lambda = \mathring{D}^\lambda \times 0$, $e_1^\lambda = \mathring{D}^\lambda \times 1$, $e^{\lambda+1} = \mathring{D}^\lambda \times \mathring{I}$. En outre, on suppose que l'application invariante $\theta: X \to I$, égale à la projection canonique sur $A \times I$ et sur les cellules précédentes, est continue. Autrement dit, si X' et θ' sont obtenus en attachant les k premiers cylindres, l'application d'attachement $\phi: S^{\lambda-1} \times I \to X'$ du $k+1^{\text{ème}}$ cylindre doit être compatible avec θ' et la projection sur I. Alors, pour tout $t \in I$, $(\theta^{-1}(t), A; \Gamma)$ est un CW-complexe relatif.

1.8. DÉFINITION: *En posant* $X_0=\theta^{-1}(0)$, $X_1=\theta^{-1}(1)$, *l'opération qui transforme* $(X_0, A; \Gamma)$ *en* $(X_1, A; \Gamma)$ *sera appelée une* isotopie formelle. *Deux cellules* e_0^λ *et* e_1^λ *de* (X_0, A) *et* (X_1, A) *respectivement seront dites* adjacentes *si elles proviennent d'un même cylindre.*

1.9. Il est clair qu'une telle opération se compose d'expansions formelles de $(X_0 \cup A \times I, A \times I; \Gamma)$ à $(X, A \times I; \Gamma)$ et de contractions formelles de $(X, A \times I; \Gamma)$ à $(X_1 \cup A \times I, A \times I; \Gamma)$. L'équivalence homotopique associée induit un isomorphisme des $\mathbf{Z}\Gamma$-complexes basiques $C(X_0, A) \xrightarrow{\approx} C(X_1, A)$, qui est cette fois représenté en chaque degré par la matrice unité, relativement à des bases cellulaires.

1.10. LEMME: *Soit* $(Y, A; \Gamma)$ *un sous-complexe de* $(X, A; \Gamma)$. *Alors toute isotopie formelle de* $(Y, A; \Gamma)$ *se prolonge à* $(X, A; \Gamma)$.

Preuve: Posons $Y=Z_0$, et soit $(Z, A \times I; \Gamma)$ un CW-complexe relatif, muni d'une application $\theta: Z \to I$, déterminant une isotopie de $(Y, A; \Gamma)$. On peut supposer que

$X = Y \cup_\phi e^\lambda$. Il existe une rétraction par déformation équivariante $r_t : Z \to Z$, $t \in I$, telle que $\theta \circ r_t(Y) = t$, $r_0 =$ identité $r_t(Z^{(k)}) \subset Z^{(k)}$. On attache alors à Z un cylindre $D^\lambda \times I$ par l'application $\Psi : S^{\lambda-1} \times I \to Z$, $\Psi(x, t) = r_t \circ \phi(x)$. cqfd.

1.11. COROLLAIRE: *Pour toute déformation formelle D de $(Y, A; \Gamma)$ à $(X, A; \Gamma)$ et toute isotopie formelle de $(Y, A; \Gamma)$ à $(Y', A; \Gamma)$, il existe une isotopie formelle de $(X, A; \Gamma)$ à $(X', A; \Gamma)$, où $(X', A; \Gamma)$ résulte de $(Y', A; \Gamma)$ par la même suite d'opérations élémentaires que celle qui compose D.*

Preuve: Dans la démonstration précédente, il suffit de remplacer $S^{\lambda-1}$ par $D_-^{\lambda-1}$. cqfd.

1.12. Rappelons maintenant le lemme classique suivant, dit *lemme des bases* (voir [7]): soit $(X, A; \Gamma)$ un CW-complexe relatif, et $(e_i'^\lambda)$ une base du $\mathbf{Z}\Gamma$-module basique $C_\lambda(X, A)$, $\lambda \geqslant 2$, qui se déduit d'une base cellulaire par une matrice élémentaire. Alors il existe un glissement formel de $(X, A; \Gamma)$ à un CW-complexe relatif $(X', A; \Gamma)$ tel que:

1°) $X^{\lambda-1}$ reste inchangé

2°) l'isomorphisme induit $C(X, A) \to C(X', A)$ est représenté en degré λ par la matrice unité, relativement à $(e_i'^\lambda)$ d'une part, et une base cellulaire de $C_\lambda(X', A)$ d'autre part, et en degrés $> \lambda$ par un produit de matrices élémentaires relativement à des bases cellulaires. Autrement dit, $(e_i'^\lambda)$ est une base cellulaire pour $C_\lambda(X', A)$.

3°) la dimension du glissement est $\leqslant \dim X$.

Il faut noter qu'on entend par glissement toute suite finie de glissements formels élémentaires définis sur un sous-complexe et prolongés au complexe entier.

2. *Décompositions des équivalences homotopiques simples*

2.1. Nous avons vu qu'un glissement formel, resp. une isotopie formelle, est représenté par un produit de matrices élémentaires, resp. par la matrice unité. Nous allons voir que cette propriété est caractéristique, lorsque les CW-complexes relatifs considérés $(X, A; \Gamma)$ vérifient les hypothèses suivantes:

(i) A et X sont 1-connexes

(ii) (X, A) ne contient pas de cellules de dimension 0 et 1. Cette restriction exclut évidemment le cas $A = \phi$.

2.2. PROPOSITION: *Soient $(X, A; \Gamma)$ et $(X', A; \Gamma)$ des CW-complexes relatifs, vérifiant* (i) *et* (ii), *et $f : (X, A; \Gamma) \to (X', A; \Gamma)$ une équivalence homotopique équivariante relative à A. Si celle-ci induit des isomorphismes $C_k(X, A) \xrightarrow{\approx} C_k(X', A)$, représentés par la matrice unité relativement à des bases cellulaires, alors f est représentable par une isotopie formelle.*

Preuve: Ordonnons les cellules d'un système fondamental fini de $(X, A; \Gamma)$, resp. de $(X', A; \Gamma)$, par dimension croissante et de sorte que $f_*[e_i] = [e'_i]$. En posant $X_p = A \cup_{i \leqslant p} \Gamma \times e_i$, $X'_p = A \cup_{i \leqslant p} \Gamma \times e'_i$, supposons par induction que $f \mid X_{p-1}$ détermine une équivalence homotopique $f: X_{p-1} \to X'_{p-1}$, représentable par une isotopie formelle $(Z_{p-1}, A \times I)$, de paramètre $\theta: Z_{p-1} \to I$. Cela signifie que $f \mid X_{p-1}$ est homotope à $r \mid X'_{p-1}$, où r est l'aboutissement d'une rétraction par déformation r_t de Z_{p-1} sur X'_{p-1} telle que $\theta \circ r_t = t$, $r \circ r_t = r$. On peut supposer que $f \mid X_{p-1} = r \mid X_{p-1}$. Soit $\lambda \geqslant 2$ la dimension des cellules e_p et e'_p. Par approximation cellulaire, on peut supposer $f(X_p) \subset X'^{\lambda}$. Comme X'_{p-1} est simplement connexe (pour $\lambda = 2$ il a le type d'homotopie de $A \vee S^2 \vee \ldots \vee S^2$) l'isomorphisme de Hurewicz appliqué à la paire (X'^{λ}, X'_{p-1}) montre qu'il existe une homotopie h entre les applications $f \circ \Phi$ et Φ' de la paire $(D^{\lambda}, S^{\lambda-1})$ dans la paire (X'^{λ}, X_{p-1}), où Φ et Φ' sont des applications caractéristiques pour e_p et e'_p respectivement. Il y a donc une isotopie $(Z', X'_{p-1} \times I; \Gamma)$ transformant $X'_{p-1} \cup_{r \circ \phi} \Gamma \times e^{\lambda}$ en X'_p. L'équivalence homotopique associée f' est l'identité sur X'_{p-1}, égale à Φ' sur un disque D^{λ} concentrique à e^{λ}, et égale à $h / S^{\lambda-1} \times I$ sur la couronne restante. Comme dans le lemme 1.10, l'isotopie Z_{p-1} se prolonge en une isotopie Z'', transformant X_p en $X'_{p-1} \cup_{r \circ \phi} \Gamma \times e^{\lambda}$. L'équivalence homotopique associée f'' est donnée par r (ou f) sur X_{p-1}, par l'identité sur un disque D^{λ} concentrique à e_p, et par $f''(x, t) = r \circ \Phi(x)$ sur la couronne $S^{\lambda-1} \times I$ restante. Ainsi, $f' \circ f'' \mid \bar{e}_p$ est donnée par Φ' sur D^{λ}, par $h \mid S^{\lambda-1} \times I$ sur une couronne entourant D^{λ} dans e_p et par $f' \circ f''(x, t) = r \circ \Phi(x)$ sur la couronne restante. En utilisant l'homotopie h de Φ' à $f \circ \Phi$, on voit qu'il existe une homotopie de $f \circ \Phi$ à $f' \circ f'' \mid \bar{e}_p$, constante égale à $r \circ \Phi$ sur $S^{\lambda-1}$. D'où une homotopie de $f' \circ f''$ à $f \mid X_p$, ce qui achève le pas d'induction. cqfd.

2.3. COROLLAIRE: *Si dans l'énoncé de la proposition précédente on remplace la matrice unité par un produit de matrices élémentaires, alors f est représentable par un glissement suivi d'une isotopie formels, ou vice-versa. De plus, la dimension du glissement est* $\leqslant sup\{\dim(X, A), \dim(X', A)\}$.

Preuve: Par induction, supposons qu'il existe un glissement formel de $(X, A; \Gamma)$, à un CW-complexe $(X_{\lambda-1}, A; \Gamma)$, tel que l'équivalence homotopique associée induise un isomorphisme $C(X, A) \xrightarrow{\approx} C(X_{\lambda-1}, A)$, représenté par la matrice unité en degrés $< \lambda$, relativement à des bases cellulaires. D'après le lemme des bases (1.12) il existe un glissement formel de $(X_{\lambda-1}, A; \Gamma)$ à un CW-complexe $(X_{\lambda}, A; \Gamma)$, tel que la dernière hypothèse soit vérifiée jusqu'en dimension λ. Ce procédé nous ramène au cas envisagé dans la proposition précédente. cqfd.

Le résultat essentiel est le suivant:

2.4. PROPOSITION: *Soient* $(Y, A; \Gamma)$ *et* $(Y', A; \Gamma)$ *des* CW*-complexes relatifs vérifiant* (i) *et* (ii) *(cf 2.1) et* $f: (Y, A; \Gamma) \to (Y', A; \Gamma)$ *une équivalence homotopique*

simple, relative à A. Alors il existe des expansions formelles transformant Y en X, Y' en X', ainsi qu'une équivalence homotopique simple $g:(X, A; \Gamma)\to(X', A; \Gamma)$ *telles que:*

1°) *g induit un isomorphisme* $C(X, A)\to C(X', A)$, *simple en chaque dimension*

2°) $g \mid Y$ *est homotope à f dans* (X', A)

3°) $\dim(X, A)=\dim(X', A)\leqslant N=\sup\{\dim(Y, A), \dim(Y', A)\}$.

Preuve: Par induction, supposons que f induise des isomorphismes simples $C_k(Y, A)\xrightarrow{\approx} C_k(Y', A)$ pour $k\leqslant\lambda<N$. Cela est évidemment vrai pour $\lambda=1$. Pour $\lambda\geqslant 2$, la restriction $(Y^{\lambda-1}, A)\to(Y'^{\lambda-1}, A)$ de f induit des isomorphismes en homologie, puisque celle-ci est égale à l'homologie des complexes $C(Y, A)$ et $C(Y', A)$ tronqués en dimension $\geqslant\lambda$, entre lesquels f induit un isomorphisme. Comme les espaces A, $Y^{\lambda-1}$, $Y'^{\lambda-1}$ et les paires $(Y^{\lambda-1}, A)$, $(Y'^{\lambda-1}, A)$ sont 1-connexes, il en résulte que $f \mid Y^{\lambda-1}$ est une équivalence homotopique équivariante $(Y^{\lambda-1}, A)\to(Y'^{\lambda-1}, A)$. Il existe donc un inverse homotopique équivariant $f': Y'\to Y$ de f, tel que $f\circ f' \mid Y'^{\lambda-1}$ est homotope à l'identité dans $Y'^{\lambda-1}$. Soient $e_1\cup\cdots\cup e_n$ et $e'_1\cup\cdots\cup e'_n$, des systèmes fondamentaux de λ-cellules de $(Y, A; \Gamma)$ et $(Y', A; \Gamma)$ respectivement. En considérant le disque standard $D^{\lambda+1}$ comme un CW-complexe, formé des trois cellules $\varepsilon^0\in S^\lambda=\partial D^{\lambda+1}$, $\varepsilon^\lambda=S^\lambda-\varepsilon^0$ et $\varepsilon^{\lambda+1}=\mathring{D}^{\lambda+1}$, attachons n' disques $D_j^{\lambda+1}$ à Y par identification des points ε_j^0 avec un point $a\in A$. Pour tout $\gamma\in\Gamma$, attachons $\gamma\times D_j^{\lambda+1}$ au point γa, et soit $(X, Y; \Gamma)$ le CW-complexe relatif ainsi obtenu. Cette opération est évidemment une expansion formelle. De même formons $(X', Y'; \Gamma)$ en attachant à Y' n disques $D_i^{\lambda+1}=\varepsilon_i^0\cup\varepsilon_i^\lambda\cup\cup\varepsilon_i^{\lambda+1}$, de manière équivariante. Tout d'abord, on va prolonger l'application $Y^{\lambda-1}\xrightarrow{f}\to Y'\hookrightarrow X'$ en une application équivariante $Y^\lambda\xrightarrow{g}X'$ telle que $g_*[e_i]=f_*[e_i]+[\varepsilon_i^\lambda]$ pour toute cellule e_i. Choisissons une application caractéristique $\Phi: D^\lambda\to Y$ pour une λ-cellule e_i de Y, et soit $\Psi: D^\lambda\to X'$ une application déterminée par

1°) $f\circ\Phi\circ h$ sur un petit disque concentrique $D_0^\lambda\subset\mathring{D}^\lambda$, où h est une homothétie de D_0^λ sur D^λ.

2°) une application caractéristique pour ε_i^λ sur un petit disque $D_i^\lambda\subset\mathring{D}^\lambda$ disjoint du précédent.

3°) un chemin joignant $f(\dot{e}_i)$ au point a dans $Y'^{\lambda-1}$, sur un segment rectiligne joignant $\mathring{D}_0^\lambda$ à $\mathring{D}_i$ dans $D^\lambda-\mathring{D}_0^\lambda-\mathring{D}_i^\lambda$.

4°) $f\circ\Phi \mid S^{\lambda-1}$ sur $S^{\lambda-1}=\partial D^\lambda$.

5°) $\Psi(D^\lambda-\mathring{D}_0^\lambda-\mathring{D}_\lambda^i)\subset Y'^{\lambda-1}$.

Il suffit alors de poser $g=\Psi$ sur e_i. En procédant de même pour toutes les cellules e_i, on obtient le prolongement désiré. Maintenant, on va prolonger g en une application équivariante $h: X^\lambda\to X'$, telle que $h_*[\varepsilon_j^\lambda]=(1-f_*\circ f'_*)[e'_j]-\sum a_i[\varepsilon_i]$ où les $a_i\in\mathbf{Z}\Gamma$ sont déterminés par $f'_*[e'_j]=\sum a_i[e_i^\lambda]$, et $a_i\neq 0$. Posons $a_i=\sum_\gamma\mu_{ji}^\gamma\gamma$, les entiers μ_{ji}^γ étant non nuls, et choisissons une application caractéristique Φ' pour la cellule orientée fixée e'_j, et une application ϕ_i pour la cellule orientée variable ε_i^λ. Soit $\Psi: D^\lambda\to X'$ une application déterminée par

1°) sur un petit disque, homothétique par h, $D_0^\lambda \subset D^\lambda$, Ψ représente $(\Phi' - f \circ f' \circ \Phi') \circ h$ dans le groupe $\pi_\lambda(Y'^\lambda, Y'^{\lambda-1})$, qui s'identifie canoniquement avec l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(D^\lambda, S^{\lambda-1}) \to (Y'^\lambda, Y'^{\lambda-1})$ en vertu de la 1-connexité de $Y'^{\lambda-1}$.

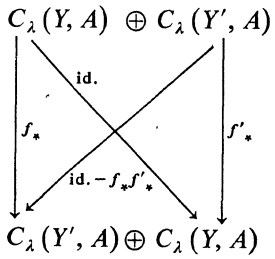
2°) sur un petit disque $D^\lambda_{(i,\gamma)} \subset D^\lambda - D_0^\lambda$, associé à un entier μ^γ_{ji}, Ψ est égale à $\mu^\gamma_{ji}\gamma \circ \Phi_i$, les disques $D^\lambda_{(i\gamma)}$ étant mutuellement disjoints.

3°) sur un segment rectiligne $I_{(i,\lambda)}$ joignant $\mathring{D}_0^\lambda$ à $\mathring{D}^\lambda_{(i,\gamma)}$, Ψ est un chemin dans $Y'^{\lambda-1}$, reliant $\Psi(\mathring{D}_0^\lambda)$ au point γa. Les segments $I_{(i,\lambda)}$ sont pris mutuellement disjoints.

4°) sur $S^{\lambda-1} = \partial D^\lambda$, Ψ est constante sur le point a.

5°) $\Psi(D^\lambda - D_0 - \cup D_{(i,\lambda)}) \subset Y'^{\lambda-1}$.

L'existence d'une telle application Ψ résulte du fait que $f \circ f' \mid Y'^{\lambda-1}$ est homotope à l'identité dans $Y'^{\lambda-1}$. En posant $h = \Psi$ sur ε_j^λ, et en procédant de même avec les autres cellules ε_j^λ, on obtient le prolongement désiré. Comme $h \mid \varepsilon_j^\lambda$ est homotope à 0 dans X', on peut prolonger h à $Y^\lambda \cup \Gamma \times \varepsilon_j^{\lambda+1}$. Enfin, $h \mid Y^\lambda$ étant évidemment homotope à $f \mid Y^\lambda$ dans X', on peut prolonger h à tout X. L'homomorphisme induit $h_* : C_\lambda(X, A) \to C_\lambda(X', A)$ a la forme



en identifiant $[\varepsilon_j]$ avec $[e_j]$ et $[\varepsilon_i]$ avec $[e_i]$. Il se décompose en deux isomorphismes $((\mathrm{id.} + f_*) \oplus \mathrm{id.}) \circ (\mathrm{id.} \oplus (\mathrm{id.} - f'_*))$, représenté chacun par des matrices strictement triangulaires. Ceci achève le pas d'induction. Pour $\lambda = N$, il résulte du fait que f induit des isomorphismes $C_k(Y, A) \approx C_k(Y', A)$ pour $k < N$ et des isomorphismes entre l'homologie des complexes $C(Y, A)$ et $C(Y', A)$ que f induit un isomorphisme $f_{*N} : C_N(Y, A) \approx C_N(Y', A)$. En vertu de la formule $\tau(f) = \prod_k \tau(f_{*k})^{\varepsilon(k)}$, $\varepsilon(k) = (-1)^k$, (cf [2]) et de l'hypothèse $\tau(f) = \tau(f_{*k}) = 1$ pour $k < N$, on a $\tau(f_{*N}) = 1$. cqfd.

2.5. COROLLAIRE: *Soient* $(Y, A; \Gamma)$ *et* $(Y', A; \Gamma)$ *des* CW*-complexes relatifs vérifiant* (i) *et* (ii) *et* $f : (Y, A; \Gamma) \to (Y', A; \Gamma)$ *une équivalence homotopique simple. Alors* f *est représentable, à une isotopie formelle près, par la composition d'une expansion, d'un glissement et d'une contraction formelles. De plus la dimension de ces opérations ne dépasse pas* $\sup\{N, 3\}$ avec $N = \sup\{\dim(Y, A), \dim(Y', A)\}$.

Preuve: D'après la proposition précédente, il existe des expansions, de dimension

$\leqslant N$, transformant $(Y, A; \Gamma)$ et $(Y', A; \Gamma)$ en $(X, A; \Gamma)$ et $(X', A; \Gamma)$ respectivement, ainsi qu'une équivalence homotopique $g:(X, A; \Gamma)\to(X', A; \Gamma)$ induisant un isomorphisme $g_*: C(X, A)\xrightarrow{\approx} C(X', A)$, représenté en chaque dimension $<N$ par un produit de matrices élémentaires relativement à des bases cellulaires. En dimension N, l'isomorphisme $g_*: C_N(X, A)\approx C_N(X', A)$ est seulement simple, mais il suffit de faire une expansion formelle de dimension $\sup\{N, 3\}$ sur $(X, A; \Gamma)$ et $(X', A; \Gamma)$, et de prolonger trivialement g, pour que la matrice de g_* satisfasse la condition précédente. Alors, d'après le corollaire 2.3, g est représentable par un glissement formel, à isotopie près. Comme de plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (Y, A; \Gamma) & \xrightarrow{f} & (Y', A; \Gamma) \\ \cap & & \cap \\ (X, A; \Gamma) & \xrightarrow{g} & (X', A; \Gamma) \end{array}$$

est homotopiquement commutatif, f est bien représentable de la manière annoncée. cqfd.

2.6. En ce qui concerne les cellules de dimension 0 et 1, nous utiliserons le *procédé d'élimination* suivant, dû à J. H. C. Whitehead:

Soit $(X, A; \Gamma)$ un CW-complexe relatif λ-connexe, avec $\lambda\geqslant 1$. Alors il existe une déformation formelle de $(X, A; \Gamma)$ à un CW-complexe relatif $(X', A; \Gamma)$ ne contenant pas de cellules de dimension $\leqslant\lambda$. De plus, la dimension des opérations élémentaires qui la composent ne dépasse pas $\lambda+2$.

2.7. Par ce procédé, on élimine de tout CW-complexe relatif $(X, A; \Gamma)$ 1-connexe les cellules de dimension 0 et 1, à l'aide de déformations formelles de dimension $\leqslant 3$. On peut alors reprendre le corollaire 2.5, en y supprimant l'hypothèse (ii), ce qui donne:

2.8. THÉORÈME: *Soient $(Y, A; \Gamma)$ et $(Y', A; \Gamma)$ des* CW*-complexes relatifs, A, Y et Y' étant simplement connexes, et $f:(Y, A; \Gamma)\to(Y', A; \Gamma)$ une équivalence homotopique simple relative à A. Alors f est représentable à isotopie près par une déformation formelle $D\circ C\circ G\circ E'\circ D'$, où D et D' sont de dimension $\leqslant 3$, C est une contraction et E' une expansion, toutes deux de dimension $\leqslant N=\sup\{\dim(Y, A), \dim(Y', A)\}$, et G un glissement.*

REFERENCES

[1] J. MILNOR, *Whitehead torsion*, Am. Math. Soc. (1966).
[2] G. DE RHAM, S. MAUMARY et M. A. KERVAIRE, *Torsion et type simple d'homotopie*, Lecture Notes in Math., vol. 48 (1967).
[3] J. H. C. WHITEHEAD, *Simple homotopy type*, Bull. A.M.S., vol. 55 (1949).
[4] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton Univ. Press, 1956).

[5] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology* (McGraw-Hill, 1966).
[6] B. MAZUR, *Differential topology from the point of view of simple homotopy theory*, IHES, n° 15.
[7] C. T. C. WALL, *Formal deformation*, Proc. London Math. Soc. *XVI*, part 2 (1966).

Reçu le 26. octobre 1968

Multiplizitätenvergleich unter Verwendung von Testkurven[1])

Von GÜNTER SCHEJA

Einleitung

D. Mumford hat mittels Modifikationen gezeigt: Von Parametersystemen erzeugte Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im Potenzreihenring $P=k[\![x, y]\!]$ in den Unbestimmten x, y über dem Körper k der Charakteristik 0 haben gleiche Multiplizität, wenn sie auf allen singularitätenfreien Kurven „gleich" sind, nämlich wenn für jeden Homomorphismus φ von P in den Potenzreihenring $T=k[\![t]\!]$ in einer Unbestimmten t gilt: $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$. Dieses Kriterium wurde verwendet, um Multiplizitäten von Idealen zu vergleichen, die von partiellen Ableitungen gewisser Funktionen erzeugt werden und bei der Untersuchung lokaler Kählerscher Differentialmoduln von Kurven im k^2 anfallen (Unveröffentlichtes Manuskript).

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß mit Mitteln der lokalen Algebra ein Kriterium der angegebenen Art für offene Ideale in lokalen Macaulayringen erhalten werden kann, wenn auf die Singularitätenfreiheit der Testkurven verzichtet wird. Bei analytischen Algebren mit algebraisch-abgeschlossenem Grundkörper ist dies freilich keine Einschränkung.

Als Anwendung ergibt sich eine einfache Aussage über algebraische Abhängigkeiten zwischen analytischen Funktionen und ihren partiellen Ableitungen, mit der eine Frage von E. Brieskorn beantwortet werden kann – auf die hin die vorliegende Arbeit entstanden ist; die Kenntnis des Manuskriptes von Mumford verdanke ich ebenfalls Herrn Brieskorn. In einem Anhang wird ein andersartiger, direkter Beweis der gerade erwähnten Anwendung beschrieben, der von E. Böger gegeben wurde.

Herrn Brieskorn, Herrn Mumford und Herrn Böger danke ich herzlich für ihre Anregungen und ihre Hilfe.

1. Vorbereitungen

Im folgenden sei mit R stets ein lokaler Ring bezeichnet und mit $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. *Wir setzen generell voraus, daß der Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ unendlich ist.*

Ist $\mathfrak{q}$ irgendein Ideal in R, dann sei mit $\lambda(\mathfrak{q})$ die Länge des R-Moduls $R/\mathfrak{q}$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{q}$ ein offenes Ideal in R – worunter wir ein in $\mathfrak{m}$ enthaltenes, $\mathfrak{m}$-primäres Ideal

[1]) Die Anfertigung dieser Arbeit wurde gefördert durch den Schweizerischen Nationalfonds, Vertrag Nr. 5123.2.

verstehen wollen –, dann ist die Multiplizität $e(\mathfrak{q})$ eine wohldefinierte natürliche Zahl ([9; VIII], [5; III]).

Wir benötigen den Begriff der *Ganz-Abhängigkeit* von Idealen, der von H. Prüfer, O. Zariski, P. Samuel, D. G. Northcott, D. Rees, M. Nagata u.a. entwickelt worden ist: Siehe [9; App. 4], [6] und [4], sowie die dort angegebenen Quellen.

Ein Element $x \in R$ heißt *ganz über dem Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ (auch: *ganz-abhängig von* $\mathfrak{a}$), wenn es eine Ganzheitsgleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_j \in \mathfrak{a}^j \quad \text{für} \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

gibt; eine Teilmenge von R heißt ganz über $\mathfrak{a}$, wenn jedes Element der Menge ganz über $\mathfrak{a}$ ist. Die Menge aller über $\mathfrak{a}$ ganzen Elemente von R macht ein $\mathfrak{a}$ umfassendes Ideal $\mathfrak{a}'$ aus, genannt die *(ganz-abgeschlossene) Hülle* von $\mathfrak{a}$ in R; es ist $(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}'$. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in R heißen *äquivalent*, wenn sie gleiche Hüllen haben. Offenbar gilt:

(1.1) *Zwei Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *in* R *sind genau dann äquivalent, wenn* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *ganz über* $\mathfrak{a}$ *und über* $\mathfrak{b}$ *ist.*

Ein Ideal $\mathfrak{b}$ heißt *Reduktion* des Ideals $\mathfrak{a}$ in R, wenn $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ ist und es eine natürliche Zahl r gibt, so daß $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^r = \mathfrak{a}^{r+1}$ ist. Es gilt ([5; S. 34]):

(1.2) *Ideale* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *in* R *sind genau dann äquivalent, wenn* $\mathfrak{b}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Ist $\mathfrak{b}$ Reduktion von $\mathfrak{a}$, dann ist natürlich auch jedes zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ liegende Ideal Reduktion von $\mathfrak{a}$. Umgekehrt gilt:

(1.3) *Sind* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *Ideale in* R *und ist* $\mathfrak{b}+\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$, *dann ist auch* $\mathfrak{b}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$.

Beweis. Aus $\mathfrak{a}^{r+1} = (\mathfrak{b}+\mathfrak{m}\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}^r = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^{r+1}$ folgt $\mathfrak{a}^{r+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r$ nach Krulls Lemma.

Eine Reduktion $\mathfrak{b}$ des Ideals $\mathfrak{a}$ in R heißt *minimal*, wenn $\mathfrak{b}$ keine weiteren Reduktionen von $\mathfrak{a}$ echt umfaßt. Man kann zeigen, daß jede Reduktion von $\mathfrak{a}$ eine minimale Reduktion enthält ([6]).

Sei $s := \dim R$. Elemente $\{f_1, \ldots, f_s\}$ aus $\mathfrak{m}$ bilden ein *Parametersystem* in R, wenn sie ein offenes Ideal in R erzeugen. Von Parametersystemen erzeugte Ideale sollen hier *Parameterideale* genannt werden. Mit Hilfe der in [9; VIII] angegebenen Mittel beweist man sehr leicht:

(1.4) *Ist* $\mathfrak{a}$ *offenes Ideal in* R *und ist* R *ein Macaulayring, dann ist* $e(\mathfrak{a}) = \min\{\lambda(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q}$ *Parameterideal in* R, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a}\}$.

Aus einer einfachen Abschätzung der Werte der betreffenden Hilbert-Samuel-Polynome ergibt sich ([6]):

(1.5) *Ist* $\mathfrak{b}$ *Reduktion des offenen Ideals* $\mathfrak{a}$, *dann ist* $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$.

Tiefliegend ist hingegend die folgende Umkehrung:

(1.6) *Satz von Rees: Sind* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *offene Ideale in* R *mit* $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$ *und ist* R *quasi-ungemischt, dann ist* $\mathfrak{b}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$.

Dabei heißt R quasi-ungemischt, wenn alle minimalen Primideale der Komplettierung von R dieselbe Dimension haben. Jeder lokale Macaulayring ist quasi-ungemischt.

Beweis von (1.6): Siehe Rees [7]. Ein neuer, einfacher Beweis wurde von E. Böger gegeben (Dissertation Münster 1967; veröffentlicht in [2] und [3]).

2. Multiplizitätenvergleich mittels Kurven

Es sei wieder R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und *unendlichem* Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$.

DEFINITION. Offene Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in R heißen *kurvenäquivalent*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der Dimension 1 in R gilt: $e(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$.

SATZ 1. *Äquivalente offene Ideale sind kurvenäquivalent.*

Beweis direkt mit (1.1), (1.2) und (1.5), da Reduktionen unter Homomorphismen erhalten bleiben. –

Man kann Satz 1 vor allem verwenden, um auszuschließen, daß konkret gegebene Ideale äquivalent sind. Beispiel: Seien $R := k[\![x, y]\!]$, x, y Unbestimmte über dem Körper k. Die Ideale (x, y^2) und (x^2, y) sind offenbar nicht kurvenäquivalent, also auch nicht äquivalent. – Diese Ideale haben gleiche Multiplizität; sie gehen sogar durch einen Automorphismus von R ineinander über. Offene Ideale derselben Multiplizität brauchen also nicht äquivalent zu sein. –

Die nachfolgenden Sätze 2 und 3 geben Umkehrungen von Satz 1 unter gewissen Voraussetzungen an.

SATZ 2. *Ist* R *Macaulayring, dann sind kurvenäquivalente offene Ideale* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *in* R *äquivalent.*

Beweis. Die offenen Ideale $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ seien kurvenäquivalent. Da alle (endlich vielen) Ideale zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ ebenfalls kurvenäquivalent sind, können wir annehmen, daß $\lambda(\mathfrak{b}) - \lambda(\mathfrak{a}) \leqslant 1$ ist. Wegen (1.6) ist zu zeigen: $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$. Sei $s := \dim R$. Der Fall $s = 0$ ist trivial.

Wir führen nun zuerst den Fall $s \geqslant 2$ auf den eindimensionalen Fall zurück. Nach (1.4) gibt es ein Parameterideal $\mathfrak{q}$ in R mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a}$ und $\lambda(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{a})$. Wegen $\lambda(\mathfrak{b}) - \lambda(\mathfrak{a}) \leqslant 1$ gibt es ein Erzeugendensystem $\{f_1, \ldots, f_s\}$ von $\mathfrak{q}$, so daß $\mathfrak{c} := Rf_1 + \cdots + Rf_{s-1} \subseteq \mathfrak{b}$ ist. Unter Benutzung von (1.4) ergibt sich $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$, da $R/\mathfrak{c}$ ein Macaulayring ist.

Ferner ist $e(\mathfrak{b}) \leqslant e(\mathfrak{b}/\mathfrak{c})$; siehe [5; S. 78]. $\mathfrak{b}/\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ sind erst recht kurvenäquivalent. Hat man $e(\mathfrak{b}/\mathfrak{c}) = e(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$ zur Verfügung, dann ergibt sich sofort $e(\mathfrak{b}) \leqslant e(\mathfrak{a})$ und hieraus $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$, da wegen $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ trivialerweise $e(\mathfrak{b}) \geqslant e(\mathfrak{a})$ ist.

Es genügt also zu zeigen: Kurvenäquivalente offene Ideale in einem eindimensionalen lokalen Ring R haben dieselbe Multiplizität. Das folgt aber unmittelbar aus dem bekannten Satz [5; (23.5)] von Serre–Nagata: Ist M die Menge der minimalen – also hier: eindimensionalen–Primideale von R, dann gilt für jedes offene Ideal $\mathfrak{q}$ in R

$$e(\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{p} \in M} e(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}/\mathfrak{p})\, LR_{\mathfrak{p}},$$

wobei $LR_{\mathfrak{p}}$ die Länge der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Satz 2 ist bewiesen. –

Die Voraussetzung $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ in Satz 2 ist bei „wirklich lokalen" Ringen überflüssig:

SATZ 3. *Ist R ein henselscher Macaulayring, dann sind kurvenäquivalente offene Ideale in R schlechtweg äquivalent.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ offene kurvenäquivalente Ideale in R. Nach (1.1) und Satz 2 bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ kurvenäquivalent zu $\mathfrak{a}$ und zu $\mathfrak{b}$ ist. Es genügt also, die eindimensionalen Restklassenringe von R nach Primidealen zu betrachten. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, daß R ein eindimensionaler Integritätsring ist. Man hat $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{b})$. Zu zeigen ist: $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{b})$.

Sei K der Körper der Brüche von R. Die gewöhnliche ganz-abgeschlossene Hülle von R in K sei mit R' bezeichnet. Nach dem bekannten Krullschen Satz ist R' noethersch und $\dim R' \leqslant 1$. Daher ist R' ein normaler noetherscher Ring der Dimension 1. Da R' ganz über dem henselschen lokalen Ring R ist, ist R' lokal ([5; (30.5)]). Daher ist R' sogar ein diskreter Bewertungsring. Die Erweiterungsideale $\mathfrak{a}R'$ und $\mathfrak{b}R'$ stehen also in einer Enthaltenseins-Relation; sei etwa $\mathfrak{b}R' \subseteq \mathfrak{a}R'$.

Es gibt endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_r$ von R', so daß bereits im Ring $R'' := R[a_1, \ldots, a_r]$ gilt: $\mathfrak{b}R'' \subseteq \mathfrak{a}R''$. Dabei ist R'' ein endlicher R-Modul. Jeder Ring zwischen R und R' hat nur ein einziges maximales Ideal. Daher ist der Ring R'' lokal; sein maximales Ideal sei mit $\mathfrak{m}''$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{q}$ irgendein offenes Ideal in R, dann gilt nach der Erweiterungsformel [9; VIII, § 10] – die sich anwenden läßt, da R'' endlich über R ist: $e(\mathfrak{q}) = [(R''/\mathfrak{m}'') : (R/\mathfrak{m})] \cdot e(\mathfrak{q}R'')$. Offene Ideale in R sind also genau dann multiplizitätengleich, wenn ihre Erweiterungsideale in R'' multiplizitätengleich sind. Nun ist aber $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})R'' = \mathfrak{a}R'' + \mathfrak{b}R'' = \mathfrak{a}R''$, so daß $e(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$ folgt, was zu zeigen war. –

Alle kompletten lokalen Ringe sind henselsch [5; (30.3)].

DEFINITION. Als *analytische k-Algebra* wird jeder nichttriviale Restklassenring eines formalen oder konvergenten Potenzreihenringes in endlich vielen Unbestimmten

über einem Körper k, bzw. über einem nichtdiskret bewerteten Körper k bezeichnet.

Auch die analytischen Algebren sind henselsch; siehe [1; (20.6)] oder [5; (45.5)]. Für analytische Algebren über algebraisch-abgeschlossenem Grundkörper läßt sich das Kriterium der vorstehenden Sätze in eine geschlossene Form bringen:

SATZ 4. *Es seien R eine analytische k-Algebra und $T:=k\langle\langle t\rangle\rangle$ der Potenzreihenring in einer Unbestimmten über k (derselben Kategorie wie R); R sei ein Macaulayring, k sei algebraisch-abgeschlossen. Dann hat man:*

Offene Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in R sind genau dann äquivalent, wenn für jeden k-Algebrahomomorphismus $\varphi: R\to T$ gilt: $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$.

Beweis. Es genügt wegen der vorhergehenden Sätze zu zeigen, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ genau dann kurvenäquivalent sind, wenn die Bedingung von Satz 4 erfüllt ist.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Dimension 1 in R und $\bar{R}:=R/\mathfrak{p}$. Mit $\bar{R}'$ sei der ganze Abschluß von $\bar{R}$ in seinem Körper der Brüche bezeichnet. Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von k ist $\bar{R}'$ eine analytische k-Algebra (derselben Kategorie wie R) und endlicher $\bar{R}$-Modul (bei konvergenten analytischen Algebren entnimmt man dies [1; (46.27)]. Im Falle kompletter k-Algebren verwendet man zum Beweis [5; (32.1)] (Endlichkeit über $\bar{R}$) und die einfache Aussage, daß $\bar{R}'$ ein Potenzreihenring ist: [9; VIII, § 12, S. 307]; der Cohensche Satz wird nicht dazu herangezogen). $\bar{R}'$ ist regulär und damit isomorph zu T. Die Komposition $R\to\bar{R}\to T$ kanonischer Abbildungen sei mit φ bezeichnet. φ ist ein analytischer Homomorphismus. Gilt $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$, dann stimmen die Erweiterungsideale $(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})\,\bar{R}'$ und $(\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})\,\bar{R}'$ überein. Da $\bar{R}'$ endlich über $\bar{R}$ ist, kann man die Erweiterungsformel (siehe Beweis von Satz 3) anwenden und erhält: $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ haben gleiche Multiplizität. Ist die Bedingung des Satzes 4 erfüllt, dann sind also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kurvenäquivalent.

Seien umgekehrt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kurvenäquivalent und sei $\varphi: R\to T$ ein analytischer Homomorphismus. Es interessiert nur der Fall, daß φ nichttrivial ist, also das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R nicht trivial abbildet. Dann ist $\mathfrak{p}:=\operatorname{Kern}\varphi$ ein eindimensionales Primideal in R; ferner ist $T/\varphi(\mathfrak{m})\,T$ endlichdimensional, so daß T nach dem Serreschen Endlichkeitssatz ein endlicher Modul über der analytischen Algebra Bild $\varphi=R/\mathfrak{p}$ ist. Wieder läßt sich die Erweiterungsformel anwenden (in einer allgemeineren Situation; denn Bild φ und T brauchen ja nicht denselben Körper der Brüche zu haben): $\varphi(\mathfrak{a})\,T$ und $\varphi(\mathfrak{b})\,T$ haben, da nach Voraussetzung $e(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})=e(\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ ist, dieselbe Multiplizität. In T bedeutet das natürlich $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$.

3. Analytisch-abhängige Ideale in Potenzreihenringen

Es sei P ein Potenzreihenring in den Unbestimmten $x_1,\ldots,x_n$ über dem Körper k. Mit ∂_j sei die partielle Differentiation in P nach x_j bezeichnet, $1\leqslant j\leqslant n$. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ echte Ideale in P.

DEFINITION. $\mathfrak{a}$ heißt *analytisch-abhängig von* $\mathfrak{b}$, wenn es Elemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{a}$ gibt, so daß gilt:

1. $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}=\mathfrak{b}+Pf_1+\cdots+Pf_r$.
2. $\partial_j f_i \in \mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ für alle $i=1,\ldots,r, j=1,\ldots,n$.

Der Beweis des folgenden Satzes beruht auf einem Kunstgriff, den D. Mumford in einer ähnlichen Situation benutzt hat (Vgl. die Einleitung).

SATZ 5. *Es sei P ein Potenzreihenring in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über einem Körper k der Charakteristik 0. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale in P; $\mathfrak{a}$ sei analytisch-abhängig von $\mathfrak{b}$ und offen. Dann ist $\mathfrak{a}$ ganz-abhängig von $\mathfrak{b}$.*

Beweis. Wir können annehmen: $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Wegen (1.3) können wir außerdem $\mathfrak{b}$ als offen voraussetzen.

Übergang zur Komplettierung von P und dann Übergang zum formalen Potenzreihenring über einem Erweiterungskörper von k ist ein exakter, längentreuer Funktor. $\mathfrak{b}$ ist also genau dann Reduktion von $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$, wenn diese Beziehung für die Erweiterungsideale bei den Übergängen gilt. Ferner bleibt die analytische Abhängigkeit bei den Übergängen erhalten. Wir dürfen deshalb annehmen: $P=k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ mit Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über k, $\operatorname{char} k=0$, k algebraisch-abgeschlossen. Sei $T:=k[\![t]\!]$ mit der Unbestimmten t über k; das maximale Ideal von T sei mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet.

Wir verwenden Satz 4. Sei $\varphi: P \to T$ ein analytischer Homomorphismus. Wir haben zu zeigen: $\varphi(\mathfrak{a})\, T=\varphi(\mathfrak{b})\, T$.

Betrachten wir irgendein $f \in \mathfrak{a}$ mit $\partial_j f \in \mathfrak{a}$ für alle $j=1,\ldots,n$. Die Ableitung eines $g \in T$ nach t werde mit g' bezeichnet. Die Kettenregel besagt nun:

$$\varphi(f)' = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\partial_j f)\, \varphi(x_j)' .$$

φ ist lokal, so daß $\varphi(f) \in \mathfrak{n}$. Wegen $\operatorname{char} k=0$ gibt es eine Einheit ε in T, so daß $\varepsilon t \varphi(f)'=\varphi(f)$ ist. Somit ist

$$\varphi(f) = \varepsilon t \sum_{j=1}^{n} \varphi(\partial_j f)\, \varphi(x_j)' \in \mathfrak{n} \cdot \varphi(\mathfrak{a})\, T .$$

Daraus folgt nach der Voraussetzung über $\mathfrak{a}$ sofort: $\varphi(\mathfrak{b})\, T=\varphi(\mathfrak{a})\, T$. –

Die Umkehrung von Satz 5 gilt nicht. Beispiel: $P=k[\![x, y]\!]$, $\mathfrak{b}:=Px^2+Py^2$, $\mathfrak{a}:=\mathfrak{b}+Pxy$. $\mathfrak{b}$ ist Reduktion von $\mathfrak{a}$; denn es ist $(xy)^2-x^2y^2=0$. $\mathfrak{a}$ ist nicht analytisch-abhängig von $\mathfrak{b}$, wie man leicht verifiziert.

Aus Satz 5 folgt insbesondere: Ist das offene Ideal $\mathfrak{a}$ analytisch-abhängig vom Ideal $\mathfrak{b}$, dann ist auch $\mathfrak{b}$ offen. Allgemeiner läßt sich (ganz elementar) zeigen, daß beliebige voneinander analytisch-abhängige Ideale dasselbe Radikal besitzen (Siehe [8]). Ob Satz 5 auch für Ideale beliebiger Dimension gilt, bleibt offen.[2])

[2]) Zusatz bei der Korrektur: Satz 5 gilt allgemein; siehe [8].

Anwendung

Es sei P der Ring der konvergenten Potenzreihen in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über den komplexen Zahlen C. Es sei f ein Element von P, so daß die Hyperfläche $f(x_1, \ldots, x_n)=0$ im Nullpunkt des C^n eine isolierte Singularität besitzt. Dann ist $\mathfrak{b}:=P\,\partial_1 f+\cdots+P\,\partial_n f$ ein Parameterideal in P. Das Ideal $\mathfrak{a}:=\mathfrak{b}+Pf$ ist im Gegensatz zu $\mathfrak{b}$ unabhängig von der Wahl des erzeugenden Elementes f von Pf und unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Bei ihren differential-topologischen Untersuchungen isolierter Hyperflächensingularitäten benutzen E. Brieskorn und J. Milnor die durch die Funktionen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ bestimmte holomorphe Abbildung $F: C^n \to C^n$, die eine analytisch-verzweigte Überlagerung in der Umgebung des Nullpunktes definiert; die Blätterzahl b dieser Überlagerung ist bekanntlich $\lambda(\mathfrak{b})$ (Erweiterungsformel). Aus Überlegungen von Milnor folgt, daß b von der Wahl des erzeugenden Elementes f von Pf und von der Wahl der Koordinaten nicht abhängt. E. Brieskorn hat vorgeschlagen, diese Invarianz von b mit einfachen Mitteln der lokalen Algebra nachzuweisen.

Ein solcher Beweis ergibt sich nun wie folgt: Nach (1.4) ist $b=\lambda(\mathfrak{b})=e(\mathfrak{b})$. $\mathfrak{a}$ ist analytisch-abhängig von $\mathfrak{b}$, so daß $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ nach Satz 5 dieselbe Multiplizität haben. Also ist $b=e(\mathfrak{a})$ invariant. – Dieser Beweis benutzt nicht wirklich den Satz von Rees, wie nach den Formulierungen von Satz 4 und Satz 5 zu erwarten wäre.

Anhang (von E. Böger)

Ein direkter Beweis von Satz 5 wird gegeben, der die Heranziehung des nichttrivialen Satzes (1.6) vermeidet. Bezeichnungen wie in Satz 5 werden verwendet. Es kann angenommen werden, daß $\mathfrak{b}$ offen und in $\mathfrak{a}$ enthalten ist.

Die ganz-abgeschlossene Hülle $\mathfrak{b}'$ von $\mathfrak{b}$ ist Durchschnitt mit P von Idealen $\mathfrak{b}V_i$, wobei V_i eine gewisse (sogar endliche) Menge von P umfassenden diskreten Bewertungsringen im Körper der Brüche von P durchläuft (Siehe [4; thm. 6] und [9; App. 4, thm. 3]). Es sei V ein beliebiger dieser Bewertungsringe V_i. Es genügt zu zeigen: $\mathfrak{a}V=\mathfrak{b}V$. Es genügt, dies in der Komplettierung T von V nachzuweisen. Es gibt einen (k umfassenden) Körper K in T, so daß T nichts anderes als ein Potenzreihenring $K[\![t]\!]$ ist. Man darf annehmen, daß $\mathfrak{b}T\neq T$ ist. Dann gilt auch $\mathfrak{m}T\neq T$ für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von P, da $\mathfrak{m}$ das Radikal von $\mathfrak{b}$ ist. Nun ergibt sich $\mathfrak{a}T=\mathfrak{b}T$ in genau derselben Weise wie im Beweis zu Satz 5 mit Hilfe der Kettenregel.

Man hat sich nur zu überzeugen, daß die Kettenregel wirklich gilt. Die Differentiation bezüglich t auf P ergibt durch Beschränkung eine k-Derivation $\delta: P \to T$. Zu zeigen ist, daß δ mit der k-Derivation $\delta^*:=\sum_{j=1}^{n} \delta(x_j)\cdot\partial_j$, $\delta^*: P \to T$, übereinstimmt. Mit Hilfe der Produktregel sieht man leicht, daß δ und δ^* auf dem Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ übereinstimmen. Diese Identität setzt sich auf P fort, da $\mathfrak{m}^{r+1}$ von δ und δ^* in $\mathfrak{m}^r T$, also wegen $\mathfrak{m}T\neq T$ in $t^r T$ abgebildet wird, $r\geqslant 1$ beliebig.

LITERATUR

[1] ABHYANKAR, S. S., *Local Analytic Geometry* (Academic Press, New York 1964).
[2] BÖGER, E., *Minimalitätsbedingungen in der Theorie der Reduktionen von Idealen*, Schriftenreihe Math. Inst. Münster, Heft 40 (1968).
[3] ——, *Eine Verallgemeinerung eines Multiplizitätensatzes von* D. REES (erscheint demnächst).
[4] NAGATA, M., *Note on a Paper of Samuel Concerning Asymptotic Properties of Ideals*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto [Ser. A] *30* (1957), 165–175.
[5] ——, *Local rings* (Intersci. Publ., New York 1962).
[6] NORTHCOTT, D. G. and REES, D., *Reductions of Ideals in Local Rings*, Proc. Cambr. Phil. Soc. *50* (1954), 145–158.
[7] REES, D., *a-transforms of Local Rings and a Theorem on Multiplicities of Ideals*, Proc. Cambr. Phil. Soc. *57* (1961), 8–17.
[8] SCHEJA, G. und STORCH, U., *Über analytische Abhängigkeit von Idealen in Potenzreihenringen* (in Vorbereitung).
[9] ZARISKI, O. and SAMUEL, P., *Commutative algebra*, Vol. 2 (Van Nostrand, Princeton, N.J. 1960).

Institut de Mathématique
Bd. Pérolles
CH-1700 Fribourg

Eingegangen den 13. Nov. 1968

On Parametric Representation for Quasisymmetric Functions

by STEPHEN AGARD and JOHN KELINGOS[1])

In 1956, A. Beurling and L. Ahlfors [4] gave a necessary and sufficient condition for a homeomorphism of the real line onto itself to be the boundary correspondence of a quasiconformal mapping of the upper half plane. If the boundary function is denoted by $u=f(x)$, the condition is simply that for some $k \geqq 1$,

$$1/k \leqq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)} \leqq k, \tag{1}$$

for all $x_1<x_2<x_3$, with $(x_3-x_2)/(x_2-x_1)=1$. A function satisfying property (1) is called k-quasisymmetric. The infimum of the numbers k for which (1) is satisfied is denoted by $k[f]$. The importance of quasisymmetric functions to the theory of quasiconformal mappings cannot be overstated.

Qualitatively, the properties of quasisymmetric functions parallel rather closely those of quasiconformal mappings [8]. Quantitatively, however, they have some shortcomings not shared by quasiconformal mappings. For example, the inverse of a k-quasisymmetric function, although quasisymmetric, need not be k-quasisymmetric; the composition of a k_1-quasisymmetric function with a k_2-quasisymmetric function need not be k_1k_2-quasisymmetric.

It is our intention to introduce a new dilatation $K[f]$ for quasisymmetric functions. Superficial advantages will include the relations $K[f]=K[f^{-1}]$ and $K[f_1 \circ f_2] \leqq \leqq K[f_1]\,K[f_2]$. Further, if f is the boundary correspondence of a K-quasiconformal mapping, then $K[f] \leqq K$. However, our primary purpose is to build sufficient quantitative precision into the definition to enable us to characterize the infinitesimal generators for the class of quasisymmetric functions.

1. A Sufficient Condition for the Generation of Quasisymmetric Functions

It is instructive at this time to state and prove a simple theorem on parametric representation for quasisymmetric functions. The theorem will simultaneously serve to illustrate the type of problem we are interested in, to expose the difficulties connected with the definition of $k[f]$, and to indicate the direction one might take in redefining the maximal dilatation.

Suppose $\zeta(u, t)$ is continuously differentiable for all real u and $0 \leqq t \leqq T$. For each

[1]) Work done with partial support of National Science Foundation Grant GP 7041 X.

fixed x, $-\infty<x<+\infty$, let $u=f_t(x)$ denote the solution to the initial value problem

$$du/dt=\zeta(u,t);u(0)=x. \tag{2}$$

THEOREM. *Let $\zeta(u,t)$ satisfy the global condition*

$$-M\leqq\frac{\zeta(u_3,t)-\zeta(u_2,t)}{u_3-u_2}-\frac{\zeta(u_2,t)-\zeta(u_1,t)}{u_2-u_1}\leqq M \tag{3}$$

for some $M>0$, all $u_1<u_2<u_3$, and all t. Then for each t, $u=f_t(x)$ is e^{Mt}-quasisymmetric.

Proof. Fix $x_1<x_2<x_3$, and let $u_i(t)=f_t(x_i)$, $i=1, 2, 3$, be the solution to (2) with $x=x_i$. The existence of the solutions for all t is proved in the more general setting of Theorem 1 in Section 2. From (3),

$$-M\leqq\frac{u_3'(t)-u_2'(t)}{u_3(t)-u_2(t)}-\frac{u_2'(t)-u_1'(t)}{u_2(t)-u_1(t)}\leqq M.$$

Integrating from 0 to t and then exponentiating, we find

$$e^{-Mt}\left(\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}\right)\leqq\frac{u_3(t)-u_2(t)}{u_2(t)-u_1(t)}\leqq e^{Mt}\left(\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}\right). \tag{4}$$

The result follows if we take $x_3-x_2=x_2-x_1$.

From the symmetry of (4) we observe that for fixed t, the inverse of the function $f_t(x)$ is also e^{Mt}-quasisymmetric. Hence it is impossible to prove a converse to the above theorem. Specifically, there exists an e^{Mt}-quasisymmetric function $\phi(x)$ for which it is impossible to find a family $f_t(x)$ as above, such that $\phi(x)=f_T(x)$.

Furthermore our hypothesis that (3) hold for all real u is too liberal in that we only use those values of u along the solution curves $u_i(t)$. Nevertheless it seems very difficult to prove the theorem under weaker conditions on ζ.

Finally, the form of (4) indicates that the difficulty with definition (1) is the requirement that $(x_3-x_2)/(x_2-x_1)=1$. The observation that ratios of this type are certain cross ratios leads us to a new definition of quasisymmetry, motivated by results of Teichmüller [11].

2. A New Definition of Quasisymmetry

Denote by $C(0, 1, \infty)$ the extended z-plane minus the three points $0, 1, \infty$. Let $z=z(w)$ denote the familiar elliptic modular function [9], which maps the upper half plane $\mathrm{Im}(w)>0$ onto $C(0, 1, \infty)$. The hyperbolic density $\varrho(z)$ in $C(0, 1, \infty)$ is invariantly defined by the relation

$$\varrho(z)\,|dz|=|dw|/\mathrm{Im}(w). \tag{5}$$

The hyperbolic distance in $C(0, 1, \infty)$ is then defined as

$$\sigma(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \varrho(z)\,|dz| \tag{6}$$

where the infimum is taken over all arcs γ joining z_1 and z_2 in $C(0, 1, \infty)$ for which the integral has meaning.

Suppose now that $u=f(x)$ is a sense preserving self homeomorphism of the real line. Let $x_1<x_2<x_3$ and let $u_i=f(x_i)$, $i=1, 2, 3$. Set

$$\left.\begin{aligned} a &= (\infty, x_1, x_2, x_3) = -(x_3 - x_2)/(x_2 - x_1) \\ a' &= (\infty, u_1, u_2, u_3) = -(u_3 - u_2)/(u_2 - u_1). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Given $K \geqq 1$, we say that K is admissible for f if

$$-\log K \leqq \int_{a}^{a'} \varrho(x)\,dx \leqq \log K, \tag{9}$$

for all $x_1<x_2<x_3$. The maximal dilatation of $f(x)$, denoted now by $K[f]$, is the infimum of all K which are admissible for f.

Since a and a' are negative, and since the negative real axis is a geodesic for the hyperbolic density in $C(0, 1, \infty)$, condition (9) is equivalent to

$$\sigma(a, a') \leqq 1 \log K. \tag{10}$$

It is easy to show [2] that

$$\sigma(a, a') = \left| \log \frac{\mu\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a'}}\right)}{\mu\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\right)} \right|, \tag{11}$$

where $\mu(r)$, $0<r<1$, denotes as usual the conformal modulus of the unit disk slit along the real axis from 0 to r. μ is a continuous, strictly decreasing function with limits ∞ and 0 at 0 and 1 respectively. Consequently, condition (9) is simply the familiar quadrilateral condition $1/K \leqq (\mathrm{mod}\, Q')/(\mathrm{mod}\, Q) \leqq K$, where Q is the quadrilateral whose interior is the upper half plane, and whose vertices are x_1, x_2, x_3, and ∞. An immediate result of this form of the definition is that for the boundary correspondence of a K-quasiconformal self mapping of the upper half plane, K is admissible. Hence $K[f] \leqq K$, and the bound is best possible in the class of K-quasiconformal mappings.

It is a trivial consequence of the definition that $K[f]=K[f^{-1}]$ and that $K[f_1\circ f_2] \leqq K[f_1]\,K[f_2]$. Furthermore, the crucial fact that the total collection of quasisymmetric functions remains the same under either definition (1) or (9) follows from the observation that $K[f]<\infty$ if and only if $k[f]<\infty$.

Indeed, suppose first that $K[f]=K<\infty$. Let $x_1<x_2<x_3$, and using (10) and (11) to solve for $-a'$, we get

$$\frac{1}{\mu^{-1}\left(\frac{1}{K}\,\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)\right)^2}-1 \leqq \frac{u_3-u_2}{u_2-u_1} \leqq \frac{1}{\mu^{-1}\left(K\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)\right)^2}-1.$$

From the functional relation [7], $\mu(r)\,\mu(\sqrt{1-r^2})=\pi^2/4$, it follows that the upper and lower bounds are reciprocals when $a=-1$, and consequently,

$$k[f] \leqq (\mu^{-1}(K\mu(1/\sqrt{2})))^{-2}-1=\lambda(K). \tag{12}$$

Using a well known result of Teichmüller [11], it can be shown that this bound is best possible.

Conversely, suppose $k[f]=k<\infty$. Then the Beurling-Ahlfors extension [4] of f is a k^2-quasiconformal mapping, and it follows that $K[f]\leqq k^2$.

We make two additional observations concerning this new definition. The first concerns the role played by ∞ in (8) and therefore (9). If instead of using only cross ratios of the form $a=(\infty, x_1, x_2, x_3)$, we use cross ratios $a=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ for all quadruples $x_1<x_2<x_3<x_4$, then a and the corresponding image cross ratios are negative and hence condition (9) still makes sense. For a given $K\geqq 1$, there are of course fewer functions satisfying the more stringent requirement, although as above the total collection of such functions as K ranges over all values is the same as the collection of all functions which satisfy (1) for some $k\geqq 1$. The advantage of generalizing in this way is that now condition (9) remains invariant with respect to linear fractional transformations of the extended real line. Thus, for example, the function $f(x)=1/x$ would have $K[f]=1$. But because of the simpler form our main result takes in section 3 when the point at ∞ is singled out, we prefer not to generalize (9) to the fullest extent, although a corresponding theorem can be proved in this more general setting.

Finally, although the definition is admittedly an adaptation of properties inherited from quasiconformal mappings, it is reasonable to consider its formal application to self homeomorphisms of the finite plane. This leads to a coefficient of quasiconformality $\hat{K}$, the infimum of numbers $K\geqq 1$ for which (10) holds. Again, $\hat{K}[\phi]<\infty$ if and only if the mapping ϕ is quasiconformal. It is an open question how large the ordinary dilatation D of a mapping ϕ subject to the inequality $\hat{K}[\phi]\leqq K$ can be. In [1] the bound $D\leqq\lambda(\sqrt{K})$ (cf. equation (12)) is established.

3. Parametric Representation

We consider families $f_t(x)$ with the property that for each t, f_t is a sense-preserving homeomorphism of the real line onto itself. Denoting the inverse function by $x=f_t^{-1}(u)$, we require further that $f_t(x)$, $f_t^{-1}(u)$, and $\partial f_t(x)/\partial t$ be continuous in both variables. Finally, if $M(t)$ is a non-negative integrable function, we will say that f_t is of *exponential type-$M(t)$* if for $t_0<t_1$,

$$K[f_{t_1}\circ f_{t_0}^{-1}] \leqq \exp\left\{\int_{t_0}^{t_1} M(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{14}$$

Suppose next that $\zeta(u, t)$ is a continuous function defined for all real u and $0\leqq t\leqq T$. Suppose in addition there exists a non-negative continuous function $M(t)$ such that for all $0\leqq t\leqq T$, and every triple $u_1<u_2<u_3$,

$$\frac{-M(t)}{|a|\,\varrho(a)} \leqq \frac{\zeta(u_3, t)-\zeta(u_2, t)}{u_3-u_2} - \frac{\zeta(u_2, t)-\zeta(u_1, t)}{u_2-u_1} \leqq \frac{M(t)}{|a|\,\varrho(a)}, \tag{\{*\}}$$

where as usual $a=(\infty, u_1, u_2, u_3)$ and $\varrho(a)$ is the hyperbolic density in $C(0, 1, \infty)$ defined by (5).

THEOREM 1. *The solution $u=f_t(x)$ to the initial value problem*

$$du/dt=\zeta(u, t); \quad u(0)=x \tag{2}$$

is of exponential type-$M(t)$ if and only if $\zeta(u, t)$ satisfies $\{*\}$.

Proof. We remark first that the continuity of $\zeta(u, t)$ together with condition $\{*\}$ imply that the solutions $f_t(x)$ are unique and exist for all $0\leqq t\leqq T$. To see this, we need the asymptotic behavior of $\varrho(a)$ [10, page 246].

$$\log\varrho(a)=\begin{cases}\log 1/|a| - \log\log 1/|a| + \psi_0(a)\\ -\log|a| - \log\log|a| + \psi_\infty(a)\end{cases} \tag{15}$$

where ψ_0 and ψ_∞ are continuous at $a=0$ and ∞ respectively. Now condition $\{*\}$ implies

$$\frac{|\zeta(u_3, t)-\zeta(u_2, t)|}{u_3-u_2} \leqq \frac{M(t)}{|a|\,\varrho(a)} + \frac{|\zeta(u_2, t)-\zeta(u_1, t)|}{u_2-u_1}.$$

Consequently, if we fix a point (t_0, u_0) in the right half (t, u)-plane, and a value $u_1<u_0$, then in a sufficiently small rectangle about (t_0, u_0) it follows from (15) and the continuity of $\zeta(u, t)$ and $M(t)$ that $|\zeta(u_3, t)-\zeta(u_2, t)|\leqq A|u_3-u_2|\log 1/|u_3-u_2|$ for some

constant A. Hence the solution through the point (t_0, u_0) is unique by Theorem 2.1, page 48 of [5].

Similarly, if values for u_1 and u_2 are fixed and t varies in a finite interval $0 \leqq t \leqq T$, then for sufficiently large values of u, $|\zeta(u, t)| \leqq B|u| \log|u|$. Hence the solutions are of order $\exp\{e^{Bt}\}$, and therefore must exist for all $0 \leqq t \leqq T$.

Now suppose $\zeta(u, t)$ satisfies $\{*\}$. We first show that the solutions $f_t(x)$ are quasisymmetric. For this purpose fix $x_1 < x_2 < x_3$ and let the corresponding solutions to (2) be denoted by $u_i(t) = f_t(x_i)$, $i = 1, 2, 3$. Denote by a_t' the cross ratio $a_t' = (\infty, u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. Note that $a_0' = (\infty, x_1, x_2, x_3) = a$. From $\{*\}$ we have

$$\frac{-M(t)}{|a_t'|\,\varrho(a_t')} \leqq \frac{\dfrac{du_3(t)}{dt} - \dfrac{du_2(t)}{dt}}{u_3(t) - u_2(t)} - \frac{\dfrac{du_2(t)}{dt} - \dfrac{du_1(t)}{dt}}{u_2(t) - u_1(t)} \leqq \frac{M(t)}{|a_t'|\,\varrho(a_t')}.$$

Equivalently

$$\frac{-M(t)}{|a_t'|\,\varrho(a_t')} \leqq \frac{d \log|a_t'|}{dt} \leqq \frac{M(t)}{|a_t'|\,\varrho(a_t')},$$

or

$$-M(t) \leqq \varrho(a_t')\, d|a_t'|/dt \leqq M(t).$$

Integrating from 0 to t, making the substitution $s = a_t'$, and noting that $|a_t'| = -a_t'$, we arrive at

$$\left| \int_a^{a_t'} \varrho(s)\, ds \right| \leqq \int_0^t M(\tau)\, d\tau.$$

It follows from (9) that $K[f_t] \leqq \exp \int_0^t M(\tau)\, d\tau$.

To show that the family f_t is of exponential type-$M(t)$, fix $t_0 \geqq 0$ and set $g_t = f_{t_0+t} \circ f_{t_0}^{-1}$. Then

$$dg_t/dt = \zeta(g_t, t_0 + t) = \xi(g_t, t),$$

and $g_0(x) = f_{t_0} \circ f_{t_0}^{-1}(x) \equiv x$, so g_t is the solution to the initial value problem $du/dt = \xi(u, t)$; $u(0) = x$, and $\xi(u, t)$ has property $\{*\}$ with $M(t)$ replaced by $M(t_0 + t)$. Therefore

$$K[f_{t_1} \circ f_{t_0}^{-1}] = K[g_{t_1 - t_0}] \leqq \exp \int_0^{t_1 - t_0} M(t_0 + \tau)\, d\tau = \exp \int_{t_0}^{t_1} M(t)\, dt,$$

which completes the proof of the first half of the theorem.

For the converse we assume $f_t(x)$ is a family of exponential type-$M(t)$. If we

define the velocity profile

$$\zeta(u, t) = \left.\frac{\partial f_t(x)}{\partial t}\right|_{x=f^{-1}{}_t(u)}$$

then certainly $f_t(x)$ is the solution to the initial value problem (2). That $\zeta(u, t)$ satisfies $\{*\}$ is shown simply by reversing the steps above. The details are omitted.

4. A Class of Functions with Property $\{*\}$

The following question quite naturally arises as a consequence of Theorem 1. For a given quasisymmetric function $f(x)$ how does one find a family $f_t(x)$ of exponential type which includes $f(x)$? (See [6], where this question is considered and solved for quasiconformal mappings of the disk.) In this section we solve this problem for quasisymmetric functions which are already the boundary correspondences of a certain class of quasiconformal mappings of the upper half plane.

We begin by finding an explicit class of functions $\zeta(u, t)$ with property $\{*\}$.

THEOREM 2. *Let $b_t(\xi)$, $t \geqq 0$, be bounded and measurable in the complex ξ-plane. If b_t is symmetric $(b_t(\bar{\xi}) = \overline{b_t(\xi)})$, then*

$$\zeta(u, t) = \frac{-u(u-1)}{\pi} \iint\limits_{\xi\text{-plane}} \frac{b_t(\xi)\, d\sigma_\xi}{\xi(\xi-1)(\xi-u)} \tag{16}$$

is real if u is real, and satisfies $\{*\}$ with

$$M(t) = 2 \sup_{\xi} |b_t(\xi)| . \tag{17}$$

Proof. Fix $u_1 < u_2 < u_3$ and $t \geqq 0$. Set

$$Q = \frac{\zeta(u_3, t) - \zeta(u_2, t)}{u_3 - u_2} - \frac{\zeta(u_2, t) - \zeta(u_1, t)}{u_2 - u_1} . \tag{18}$$

One shows routinely from (16) that

$$Q = \frac{-1}{\pi} \iint\limits_{\xi\text{-plane}} \frac{b_t(\xi)(u_3 - u_1)\, d\sigma_\xi}{(\xi - u_1)(\xi - u_2)(\xi - u_3)} . \tag{19}$$

Let us make the change in variable $\eta = (\xi - u_1)(u_2 - u_3)/(\xi - u_3)(u_2 - u_1)$, and compute the expressions $a = (u_2 - u_3)/(u_2 - u_1)$, $a - 1 = (u_1 - u_3)/(u_2 - u_1)$, $\eta - 1 = (\xi - u_2)(u_1 - u_3)/(\xi - u_3)(u_2 - u_1)$, $\eta - a = (u_3 - u_2)(u_1 - u_3)/(\xi - u_3)(u_2 - u_1)$,

$$d\sigma_\eta = \left|\frac{d\eta}{d\xi}\right|^2 d\sigma_\xi = \frac{|u_2 - u_3|^2\, |u_1 - u_3|^2}{|\xi - u_3|^4\, |u_2 - u_1|^2}\, d\sigma_\xi ,$$

so that

$$\frac{|a-1|\,d\sigma_\eta}{|\eta|\,|\eta-1|\,|\eta-a|} = \frac{|u_1-u_3|\,d\sigma_\xi}{|\xi-u_1|\,|\xi-u_2|\,|\xi-u_3|}.$$

Consequently, from (19),

$$|Q| \leqq \frac{1}{\pi}\sup_\xi |b_t(\xi)| \iint\limits_{\xi\text{-plane}} \frac{|u_3-u_1|\,d\sigma_\xi}{|\xi-u_1|\,|\xi-u_2|\,|\xi-u_3|}$$
$$= M(t)\frac{1}{|a|}\left\{\frac{|a|\,|a-1|}{2\pi}\iint\limits_{\eta\text{-plane}} \frac{d\sigma_\eta}{|\eta|\,|\eta-1|\,|\eta-a|}\right\}.$$

But in [1], page 7, it is shown that the quantity in braces is exactly $1/\varrho(a)$, which completes the proof of the theorem.

For the moment let us relax the requirements of regularity on the family $f_t(x)$ which we imposed in Section 3. Suppose $w=g(z)$ is a normalized ($g(0)=0$, $g(1)=1$) K-quasiconformal mapping from $\mathrm{Im}(z)\geqq 0$ onto $\mathrm{Im}(w)\geqq 0$ with boundary correspondence $u=f(x)$, and complex dilatation $\mu(z)$, ess sup $|\mu(z)|=\hat{k}<1$, $K=(1+\hat{k})/(1-\hat{k})$. By reflection in the real axes we can assume g is quasiconformal in the entire plane and that $g(\bar{z})=\overline{g(z)}$, $\mu(\bar{z})=\overline{\mu(z)}$. Define $\mu_t(z)=t\mu(z)$, $0\leqq t\leqq 1$, and let $g_t(z)$ be the normalized quasiconformal mapping of the plane with dilatation $\mu_t(z)$ [3]. By the symmetry of μ_t, g_t maps the real axis onto itself and induces a boundary correspondence $u=f_t(x)$ with $K[f_t]\leqq(1+t\hat{k})/(1-t\hat{k})$, $f_0(x)\equiv x$, and $f_1(x)\equiv f(x)$.

It is well known that $g_{t_1}\circ g_{t_0}^{-1}$ is a $K(t_1, t_0)$-quasiconformal mapping, where

$$K(t_1,t_0)=\frac{(1+t_1\hat{k})(1-t_0\hat{k})}{(1-t_1\hat{k})(1+t_0\hat{k})}=\exp\left\{\log\frac{1+t_1\hat{k}}{1-t_1\hat{k}}-\log\frac{1+t_0\hat{k}}{1-t_0\hat{k}}\right\}$$
$$=\exp\left\{\int_{t_0}^{t_1}\frac{2\hat{k}\,dt}{1-t^2\hat{k}^2}\right\}$$

and therefore the family $f_t(x)$ is of exponential type-$2\hat{k}/(1-t^2\hat{k}^2)$, $0\leqq t\leqq 1$. Because a quasisymmetric function with $k[f]=k$ admits a k^2-quasiconformal extension, we have thus proved that *a k-quasisymmetric function according to definition* (1) *is reached at time* $t=1$ *in a family of exponential type* $-M(t)$, *with*

$$M(t)=\frac{2(k^4-1)}{(1-t^2)(k^4+1)+4t^2k^2}.$$

Returning to the family g_t, it is of interest to note that the associated function $\zeta(u,t)$ is of the type constructed in Theorem 2 provided μ is sufficiently smooth.

Indeed, Lemmas 19 and 21 of [3] would then ensure that $g_t(z)$ is differentiable in t and in fact

$$\partial g_t(z)/\partial t = (Pb_t)(w) - w(Pb_t)(1); \quad w = g_t(z), \tag{20}$$

where

$$b_t(w) = \frac{\mu(z)}{1 - t^2|\mu(z)|^2} \frac{\dfrac{\partial g_t(z)}{\partial z}}{\overline{\dfrac{\partial g_t(z)}{\partial z}}}; \quad w = g_t(z) \tag{21}$$

and where P is the transform

$$(Pb)(w) = \frac{-w}{\pi} \iint_{\xi\text{-plane}} \frac{b(\xi)\, d\sigma_\xi}{\xi(\xi - w)}. \tag{22}$$

We remark that (20) is true in general, but the derivative must be taken as a limit in $L^p(z\text{-plane})$ for some $p>2$. Our added hypotheses on μ are merely included to ensure that the derivative is also a pointwise limit on the x-axis. Since g and μ are symmetric, so is b_t, and hence if $z=x$ is real, we get from (20) and (22),

$$\zeta(u, t) = \left.\frac{\partial f_t(x)}{\partial t}\right|_{u=f_t(x)} = \frac{-u(u-1)}{\pi} \iint_{\xi\text{-plane}} \frac{b_t(\xi)\, d\sigma_\xi}{\xi(\xi - 1)(\xi - u)}. \tag{23}$$

The class of quasiconformal mappings with, say, μ of class C^2 with compact support, is dense with respect to uniform convergence on compact sets in the class of all quasiconformal mappings. This smoothness of μ imposes sufficient regularity on g_t and hence on b_t (cf. equation (21)) to guarantee that $\zeta(u, t)$ (cf. equation (16)) is continuous. Summarizing, we have proved

THEOREM 3. *The class of functions generated by continuous functions $\zeta(u, t)$ constructed according to Theorem 2 from functions $b_t(\xi)$ having continuous derivatives and compact support is dense with respect to uniform convergence on compact sets in the class of normalized quasisymmetric functions.*

5. Quasiconformal Extensions and Examples

There remains a dearth of quasiconformal extensions for a given boundary correspondence. The Beurling-Ahlfors extension has found numerous applications because of its explicit form. In this section, we point out a way of obtaining quasiconformal extensions for the quasisymmetric functions generated by the functions $\zeta(u, t)$ of Theorem 2.

We suppose that $F(w, t)$, $0 \leqq t \leqq T$, is a complex valued function of the complex variable w, with $F_{\bar{w}}$ bounded, and sufficient regularity to justify the following computations.

Let $w = f_t(z)$ be the solution to the initial value problem

$$dw/dt = F(w, t); \quad w(0) = z. \tag{23}$$

By the uniqueness, for each fixed $t, f_t(z)$ is a homeomorphism. We determine its complex dilatation $\mu_t(z)$ defined by

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial \bar{z}} = \mu_t(z) \frac{\partial f_t(z)}{\partial z}. \tag{24}$$

Differentiating with respect to z, $\bar{z}$ in (23) and with respect to t in (24), we find

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial t} = F_w \frac{\partial f}{\partial z} + F_{\bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\, \partial t} = F_w \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + F_{\bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial \bar{z}} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial z},$$

from which it follows upon equating the mixed partials that

$$\frac{\left|\dfrac{\partial \mu_t(z)}{\partial t}\right|}{1 - |\mu_t(z)|^2} = |F_{\bar{w}}(f_t(z), t)|. \tag{25}$$

Then setting $M(t) = 2 \sup_w |F_{\bar{w}}(w, t)|$, and noting $\mu_0(z) = 0$, we find from (25)

$$\log\left(\frac{1 + |\mu_t|}{1 - |\mu_t|}\right) = \int_0^t \frac{2\, d\,|\mu_\tau|}{1 - |\mu_\tau|^2} \leqq \int_0^t \frac{2 \left|\dfrac{\partial \mu_\tau}{\partial \tau}\right| d\tau}{1 - |\mu_\tau|^2} \leqq \int_0^t M(\tau)\, d\tau. \tag{26}$$

As an application, for sufficiently regular symmetric b_t, define $F(w, t)$ by the right side of (16) where u is replaced by the complex variable w. Since the expression coincides with $(Pb_t)(w) - w(Pb_t)(1)$, it follows that $F_{\bar{w}} = b_t$. The complex solution of (23) is an extension of the real solution $f_t(x)$ generated by $\zeta(u, t)$ as defined in (16), and from (26) we see that the dilatation does not exceed $\exp\{\int_0^t M(\tau)\, d\tau\}$, the same bound noted for $K[f_t]$.

In order to take advantage of these observations, it becomes essential to determine all functions $b_t(w)$ with the property that $(Pb_t)(u) - u(Pb_t)(1)$ coincides with a prescribed function $\zeta(u, t)$ satisfying $\{*\}$. The existence of at least one follows from the Beurling-Ahlfors extension. For variational purposes it becomes desirable to describe all symmetric functions $b_t(w)$ such that $(Pb_t)(u) - u(Pb_t)(1)$ vanishes for real u.

We conclude with two simple examples to illustrate these ideas, the second having the variational property mentioned above.

EXAMPLE 1: $F(w, t)=w\log|w|$. This leads to $f_t(z)=z|z|^{e^t-1}$ and results from a choice of $b_t(w)=w/2\bar{w}$.

EXAMPLE 2: $F(w,t)=(\bar{w}-w)/(1-t^2), 0\leqq t<1$. This leads to $f_t(z)=(z+t\bar{z})/(1+t)$, and results from a choice of $b_t(w)\equiv 1/(1-t^2)$.

REFERENCES

[1] AGARD, STEPHEN, *Distortion theorems for quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A.I.] *388* (1966), 1–15.
[2] AGARD, STEPHEN, *Topics in the Theory of Quasiconformal Mappings*, Dissertation, University of Michigan (1965).
[3] AHLFORS, L. V. and BERS, L., *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. Math. *72* (1960), 385–404.
[4] BEURLING, A. and AHLFORS, L. V., *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math. *96* (1956), 125–142.
[5] CODDINGTON, EARL A. and LEVINSON, NORMAN, *Theory of Ordinary Differential Equations* (McGraw-Hill, 1955).
[6] GEHRING, F. W. and REICH, E., *Area distortion under quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A. I.] *413* (1966), 1–15.
[7] HERSCH, J., *Longueurs extrémales et théorie des fonctions*, Comment. Math. Helv. *29* (1955), 301–337.
[8] KELINGOS, J. A., *Boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Michigan Math. J. *13* (1966), 235–249.
[9] NEHARI, Z., *Conformal Mapping* (McGraw-Hill, 1952).
[10] NEVANLINNA, R. H., *Eindeutige Analytische Funktionen* (Springer, Berlin 1953).
[11] TEICHMÜLLER, O., *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. *22* (1940), 1–197.

University of Minnesota
Minneapolis, Minn., U.S.A.

Received November 22, 1968

A Note on Purely Inseparable Extensions

M. OJANGUREN and R. SRIDHARAN

Introduction

Let K be a field of characteristic $p>0$ and let L be a subfield of K such that K/L is a finite, purely inseparable extension of exponent 1. A Galois theory for such extensions using the concept of restricted Lie ring was initiated by Jacobson [4]. This theory gives a bijective correspondence between restricted Lie subrings of $\mathrm{Der}_L K$ (the Lie ring of all derivations of K vanishing on L) and subextensions of K/L. M. Gerstenhaber [1] showed that there is a bijection already between restricted subspaces of $\mathrm{Der}_L K$ and subextensions of K/L and as a consequence deduced that every restricted subspace of $\mathrm{Der}_L K$ is actually a Lie subring. In a subsequent paper [2], he generalized this Galois theory to the infinite case and showed that with the natural Krull-topology on $\mathrm{Der} K$, there is a bijective correspondence between closed restricted subspaces of $\mathrm{Der} K$ and subfields of K containing K^p. His proof, however, seems to be incomplete since Lemma 4 of [2] which is used to prove the theorem is incorrect.[1]) It is probable that this trouble may be circumvented and a suitably modified proof still holds. However, the aim of this note is to give another proof (Theorem 2) of the Galois correspondence, which, even in the finite dimensional case is different from the existing proofs in the literature (for example [3]). We also show (Theorem 1) that any restricted subspace of $\mathrm{Der} K$ (whether closed or not) is a Lie subring, by giving more or less an explicit formula for the commutator of two derivations.

In this paper, we use the notation and terminology of [2]. The authors have pleasure in thanking Prof. B. Eckmann for his keen interest in this work.

§ 1 Restricted Subspaces of $\mathrm{Der} K$

THEOREM 1. *Let K be a field of characteristic $p>0$ and V a restricted subspace of* $\mathrm{Der} K$. *Then V is a Lie subring.*

Proof: Let $\varphi, \psi \in V$. We wish to show that $[\varphi, \psi] \in V$. For this, we may clearly assume that $\varphi \neq 0$. Let $x \in K$ be such that $\varphi(x) \neq 0$. Since for any $k \in K$, $[k\varphi, \psi] = k[\varphi, \psi] - \psi(k)\varphi$, by taking $k = \varphi(x)^{-1}$, it is clear that we can assume $\varphi(x) = 1$.

For any $a \in \mathbf{Z}_p$ and any non negative integer m, we consider the element

[1]) That there is trouble with this Lemma was first noticed by H. Kubli. He now has another proof of the Galois correspondence which uses Theorem 1 of this note and the Galois theory for the finite case.

$\theta=(\varphi+ax^m\psi)^p$ in V. Expanding θ formally as a polynominal in a, we may write $\theta=\varphi^p+a\theta_1+\cdots+a^{p-1}\theta_{p-1}+a^p(x\psi)^p\in V$. Since φ^p and ψ^p are elements of V, we have the relation

$$\theta_1 + a\theta_2 +\cdots+ a^{p-2}\theta_{p-1}\in V$$

for any non zero element a of $\mathbf{Z}_p$. Since the $(p-1)\times(p-1)$ Vandermonde matrix whose rows are $(1,a,\ldots a^{p-2}), a\in\mathbf{Z}_p-(0)$, is non-singular, it follows from the above relations that $\theta_i\in V$ for $1\leqslant i\leqslant p-1$. In particular,

$$\theta_1=\theta_1(m,\psi)=\sum_{0\leqslant i\leqslant p-1}\varphi^i x^m\psi\varphi^{p-1-i}\in V$$

Using the fact that $\theta_1(m+1,\psi)=\theta_1(m, x\psi)$ and using induction on m, we get

$$\theta_1(m,\psi)=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\binom{m}{k}x^{m-k}\delta_k, \qquad (*)$$

where

$$\delta_k=\sum_{0\leqslant h\leqslant p-1}k!\binom{p-h-1}{k}\varphi^{p-h-k-1}\psi\varphi^h.$$

Since $\delta_0=\theta_1(0,\psi)\in V$, it follows using (*) for $m=1,2,\ldots$ that $\delta_k\in V$ for every k. In particular, $(p-1)!\,\varphi\psi+(p-2)!\,\psi\varphi=\delta_{p-2}\in V$ i.e. $\psi\varphi-\varphi\psi\in V$. This proves the theorem.[2])

§ 2 The Galois correspondence

Before proving the theorem on the Galois correspondence, we prove the following two lemmas.

LEMMA 1. *Let $\theta_1,\ldots\theta_r\in\mathrm{Der}\,K$ and $x\in K$ such that all possible Lie brackets of all orders of $\theta_1,\ldots\theta_r$ vanish on x. Then, for any permutation σ of $(1,2,\ldots r)$, we have*

$$\theta_{\sigma(1)}\ldots\theta_{\sigma(r)}(x)=\theta_1\ldots\theta_r(x).$$

Proof: The lemma is clear for $r=2$. Let us assume that the lemma has been proved for $r-1$. We prove it for r, by showing that the result is true for all transpositions $(i,i+1)$, $1\leqslant i\leqslant r-1$. In fact we have

$$-\theta_1\ldots\theta_{i+1}\theta_i\ldots\theta_r(x)+\theta_1\ldots\theta_i\theta_{i+1}\ldots\theta_r(x)=\theta_1\ldots[\theta_i,\theta_{i+1}]\ldots\theta_r(x)$$

---

[2]) Added in proof: Prof. P. J. Higgins, who looked at this proof, has suggested another very elegant one.

Since the $r-1$ elements $\theta_1, \ldots [\theta_i, \theta_{i+1}], \ldots \theta_r$ clearly satisfy the condition of the lemma, the R.H.S. of the above equation is equal to $\theta_1 \ldots \theta_r [\theta_i, \theta_{i+1}](x)=0$. This proves the lemma.

LEMMA 2. *Let V be a restricted subspace (hence, by Theorem 1, a Lie subring) of* Der K *and let L be the field of constants of V. If $x_1, \ldots x_n \in K$ are p-independent over L, then there exist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V$ such that $\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Proof: For $n=1$, the lemma is obvious. We assume that the lemma has been proved for n and prove it for $n+1$. Let then $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$ be p-independent over L and let $\varphi_1 \in V$ be such that $\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. If there exists a $\psi \in V$ such that $\psi(x_i)=0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$ and $\psi(x_{n+1}) \neq 0$, then the $n+1$ elements of V defined by

$$\varphi_i' = \varphi_i - \varphi_i(x_{n+1})\, \psi(x_{n+1})^{-1} \psi, \; 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{and} \quad \varphi_{n+1}' = \psi(x_{n+1})^{-1} \psi$$

satisfy the required properties and the lemma would be proved. Suppose then that for any $\psi \in V$ with $\psi(x_i)=0$ $1 \leqslant i \leqslant n$, we also have $\psi(x_{n+1})=0$. We now wish to contradict the p-independence of $x_1, \ldots, x_{n+1}$ over L. Consider the element

$$c = \varphi_1^{p-1} \ldots \varphi_n^{p-1}(x_{n+1}).$$

Since $\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, it follows that all the Lie brackets of all orders (which are in V since V is a Lie subring) vanish on x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ and therefore by our supposition on x_{n+1}. We may therefore apply Lemma 1 to $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V$ and $x_{n+1} \in K$ to get

$$\varphi_i(c) = \varphi_i \varphi_1^{p-1} \ldots \varphi_n^{p-1}(x_{n+1}) = \varphi_1^{p-1} \ldots \varphi_i^p(x_{n+1}) = 0,$$

since $\varphi_i^p \in V$ and $\varphi_i^p(x_j)=0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$ and hence $\varphi_i^p(x_{n+1})=0$. If now $\psi \in V$ is such that $\psi(x_i)=0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$, we clearly have $[\psi, \varphi_i](x_j)=0$ for $1 \leqslant i, j \leqslant n$ and since $[\psi, \varphi_i] \in V$, we have $[\psi, \varphi_i](x_{n+1})=0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. We may again apply Lemma 1 to ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ to conclude that

$$\psi(c) = \varphi_1^{p-1} \ldots \varphi_n^{p-1} \psi(x_{n+1}) = 0,$$

since $\psi(x_i)=0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$ and hence $\psi(x_{n+1})=0$. We now make a general remark which will also be needed later on in the proof: If $a \in K$ is such that $\varphi_i(a)=0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$ and $\psi(a)=0$ for any $\psi \in V$ with $\psi(x_i)=0$ $1 \leqslant i \leqslant n$, then $\chi(a)=0$ for any $\chi \in V$. In fact we can write

$$\chi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \chi(x_i) \varphi_i + \psi,$$

$\psi \in V$ with the property $\psi(x_i)=0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$. Hence

$$\chi(a) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \chi(x_i)\, \varphi_i(a) + \psi(a) = 0.$$

Applying this remark to c, we get that $c=\varphi_1^{p-1} \ldots \varphi_n^{p-1}(x_{n+1}) \in L$.

We now show by descending induction that for any integer m with $0 \leqslant m \leqslant p-1$, there exists $Y_m \in L(x_1, \dots x_n)$ with

$$\varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_n^{\lambda_n}(x_{n+1} - Y_m) = 0$$

for every n-tuple $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ with $\sum \lambda_{i1} \geqslant m$ and $0 \leqslant \lambda_i \leqslant p-1$. To start the induction, we take $m = n(p-1)$ and

$$Y_{n(p-1)} = c \frac{x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}}{((p-1)!)^n}.$$

Assume that Y_m has already been constructed. We proceed to construct Y_{m-1}.

For any n-tuple $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ with $\sum \lambda_i = m-1$ and $0 \leqslant \lambda_i \leqslant p-1$, we define

$$\varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_n^{\lambda_n}(x_{n+1} - Y_m) = a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}.$$

We claim that $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \in L$. In fact,

$$\begin{aligned} \varphi_i(a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}) &= \varphi_i \varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_n^{\lambda_n}(x_{n+1} - Y_m) \\ &= \varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_i^{\lambda_i + 1} \dots \varphi_n^{\lambda_n} x_{n+1} - \varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_i^{\lambda_i + 1} \dots \varphi_n^{\lambda_n} Y_m \end{aligned}$$

by Lemma 1;

$$\begin{aligned} &= \varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_i^{\lambda_i + 1} \dots \varphi_n^{\lambda_n}(x_{n+1} - Y_m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

by induction. Similarly, for any $\theta \in V$ with $\theta(x_i) = 0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$, we have $\theta(a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}) = 0$. Hence, by our earlier remark, it follows that $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \in L$. Define

$$Y_{m-1} = Y_m + \sum_{\substack{\mu_1 + \dots + \mu_n = m-1 \\ 0 \leqslant \mu_i \leqslant p-1}} \frac{a_{\mu_1 \dots \mu_n}}{\mu_1! \dots \mu_n!} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}.$$

We then have $\varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_n^{\lambda_n}(x_{n+1} - Y_{m-1}) = 0$ and this completes the induction. In particular, we have

$$x_{n+1} = \varphi_1^0 \dots \varphi_n^0(x_{n+1}) = Y_0 \in L(x_1, \dots x_n).$$

This shows that $(x_1, \dots x_{n+1})$ are p-dependent over L, a contradiction. This finishes the proof of Lemma 2.

We now prove the main

THEOREM 2. *Let K be a field of characteristic $p > 0$ and L a subfield of K containing K^p. The assignment $L \mapsto \mathrm{Der}_L K$ induces a bijection between the set of subfields of K containing K^p and the set of closed restricted subspaces of* $\mathrm{Der}\, K$ *($\mathrm{Der}\, K$ being topologized by the usual Krull topology). The inverse correspondence is got by assigning to each closed restricted subspace of* $\mathrm{Der}\, K$ *its field of constants.*

Proof: For any subfield L of K containing K^p, clearly $\mathrm{Der}_L K$ is a closed subspace of $\mathrm{Der} K$ and it is well known that the field of constants of $\mathrm{Der}_L K$ is L. Let now V be a closed restricted subspace of $\mathrm{Der} K$ and let L be the field of constants of V. Clearly $V \subset \mathrm{Der}_L K$. We wish to show that $V = \mathrm{Der}_L K$. Since V is closed, it is enough to show that for any $x_1, \ldots, x_n \in K$ and $\varphi \in \mathrm{Der}_L K$, there exists a $\psi \in V$ such that $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$ for $1 \leqslant i \leqslant n$. We may also assume without loss of generality that $x_1, \ldots, x_n$ are p-independent over L. By Lemma 2, there exist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V$ such that $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Then $\psi = \sum \varphi(x_i)\varphi_i \in V$ has the required property. This proves the theorem.

BIBLIOGRAPHY

[1] M. GERSTENHABER, *On the Galois theory of inseparable extensions*, Bull. Amer. Math. Soc. *70* (1964), 561–566.

[2] M. GERSTENHABER, *On infinite inseparable extensions of exponent one*, Bull. Amer. Math. Soc. *71* (1965), 878–881.

[3] G. HOCHSCHILD, *Simple algebras with purely inseparable splitting fields of exponent one*, Trans. Amer. Math. *79* (1955), 477–489.

[4] N. JACOBSON, *Galois theory of purely inseparable fields of exponent one*, Amer. J. Math. *46* (1944), 645–648.

Forschungsinstitut für Mathematik, E.T.H. Zürich
Tata Institute of Fundamental Research, Bombay

Received October 20, 1968

Pin Cobordism and Related Topics

D. W. ANDERSON, E. H. BROWN, JR., and F. P. PETERSON

1. Introduction

In [1], we largely determined the structure of Ω_*^{Spin}, the Spin cobordism ring. In this paper we show how these results may be applied to study $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(K)$, the Spin bordism groups, in certain cases. One case of particular importance is $K=RP^\infty$ because of well-known isomorphism $\bar{\Omega}_{n+1}^{\mathrm{Spin}}(RP^\infty)\approx\Omega_n^{\mathrm{Pin}}$, where Pin is a group with two components whose component of the identity is Spin (see [2]). Our results include a determination of Ω_*^{Pin} in terms of our results on Ω_*^{Spin}. We also study the problem of determining the image of one bordism group in another, e.g. $\mathrm{Im}(\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(K)\to\mathscr{N}_*(K))$.

Our method is to study the Adams spectral sequence for $\pi_*(K\wedge\mathbf{M}\mathrm{Spin})$. In order to do this, we must determine the $\mathscr{A}$-module structure of $H^*(K)\otimes H^*(\mathbf{M}\mathrm{Spin})$. The following is our main algebraic result which together with the results of [1], enables us to determine this structure. The $\mathscr{A}$-module structure of $H^*(K)\otimes(\mathscr{A}\otimes N)$ depends only on the $\mathscr{B}$-module structure of $H^*(K)$, where $\mathscr{B}$ is a Hopf subalgebra of $\mathscr{A}$ and N is a fixed $\mathscr{B}$-module.

2. Statements of Main Geometrical Theorems

Let K be a CW-complex. The G-bordism groups of K, $\Omega_*^G(K)$, are the homology groups of K with coefficients in the Thom spectrum $\mathbf{M}G$, that is, $\Omega_*^G(K)=H_*(K;\mathbf{M}G)=\pi_*(K^+\wedge\mathbf{M}G)$ (see [7]). In [1], we proved that $\mathbf{M}\mathrm{Spin}$ was of the same mod two homotopy type as a wedge of three types of spectra: $\mathbf{K}(Z_2,n)$, $\mathbf{BO}\langle 8n\rangle$, and $\mathbf{BO}\langle 8n+2\rangle$. Thus, to determine Ω_*^{Pin}, we need to compute $\pi_*(RP^\infty\,\mathbf{K}(Z_2,n))$, $\pi_*(RP^\infty\wedge\mathbf{BO}\langle 8n\rangle)$, and $\pi_*(RP^\infty\,\mathbf{BO}\langle 8n+2\rangle)$. This is done explicitly in theorem 5.1; we only state the following corollary here. This corollary contradicts a proposition of C. T. C. Wall [6].

COROLLARY 2.1. The exponent of Ω_i^{Pin} is 2 if $i\equiv 0, 1, 3, 4, 5, 7, (8)$ (except in some low dimensions where it is 1), 2^{4k+3} if $i=8k+2$, $k\geqslant 0$, and 2^{4k+4} if $i=8k+6$, $k\geqslant 0$.

The methods we use to compute $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(K)$ when $K=RP^\infty$ work equally well when $K=BSO$ (see § 6).

Our other geometrical results concern the image of one bordism group in another. In § 6, we give some general considerations which have the following corollaries.

COROLLARY 2.2. $\mathrm{Im}(\Omega^{\mathrm{Pin}} \to \mathcal{N}_*) =$ all cobordism classes all of whose Stiefel-Whitney numbers involving $W_2(\nu)$ vanish.

COROLLARY 2.3. $(\mathrm{Im}(\Omega_*(K) \to \mathcal{N}_*(K))) =$ all bordism classes (M, f) all of whose Stiefel-Whitney numbers of the map involving W_1 vanish, if and only if $H_*(K; Z)$ has no 4-torsion.

COROLLARY 2.4. There is a PL-manifold M such that $[M] \notin \mathrm{Im}(\Omega_*^{PL} \to \mathcal{N}_*^{PL})$ and all mod 2 characteristic numbers of M involving W_1 vanish.

COROLLARY 2.5. $\mathrm{Im}(\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(BSO) \to \mathcal{N}_*(BSO)) =$ all bordism classes (M, f) all of whose Stiefel-Whitney numbers of the map involving W_1 and W_2 vanish.

3. Modules over a Hopf Algebra

In this section we state and prove some results about the structures of tensor products of modules over a Hopf algebra which may be of independent interest. In the following sections we use these results to prove our geometric theorems.

In the following, all the objects are graded vector spaces over Z_2 of finite type and zero in negative dimensions. Let A be a connected, coassociative, cocommutative associative, locally finite Hopf algebra. We will consider the category of left modules over A tensor product over Z_2 in this category is defined using the Hopf algebra structure of A. If M is a left A-module, set $\hat{M} = M$ as a graded vector space, but with the trivial A-structure, that is $1(m) = m$, $a(m) = 0$ if $a \in \bar{A}$. The following theorem is well-known, but we include it for completeness.

THEOREM 3.1. *Define* $l: \hat{M} \otimes A \to M \otimes A$ *by* $l(m \otimes 1) = m \otimes 1$ *and extend to an* A*-map. Then* l *is an isomorphism.*

Proof. We first show l is an expimorphism. Assume $m \otimes a \notin \mathrm{Im}\, l$, with dim a minimal with this property. Then, in $M \otimes A$,

$$a(m \otimes 1) = m \otimes a + \sum_{\dim a'' < \dim a} a'(m) \otimes a'';$$

all terms but $m \otimes a \notin \mathrm{Im}\, l$, hence $m \otimes a \in \mathrm{Im}\, l$. Since $M \otimes A$ and $M \otimes A$ have the same rank as graded vector spaces, l is an isomorphism.

A acts on $M \otimes A$ on the right by $(m \otimes a)\bar{a} = m \otimes a\bar{a}$. A acts on the right of $\hat{M}$ by $\widehat{ma} = \widehat{x(a)m}$ where $m \in M$ and χ is the antiautomorphism of A. Define a right action of A on $M \otimes A$ via l, that is, $(m \otimes a)\bar{a} = l^{-1}(l(m \otimes a)\bar{a})$ in $M \otimes A$. By standard Hopf algebra identities one verifies.

LEMMA 3.2. This right action of A on $\hat{M}\otimes A$ is given by $(m\otimes a)\bar{a}=\sum(m)\bar{a}'\otimes a\bar{a}''$.

As a corollary of Lemma 3.2, we have the fact that the A-structure of the tensor product of two A-modules depends only on the B-structure of one of them in certain cases.

THEOREM 3.3. *Let $B\subset A$ be a Hopf subalgebra. Let M be an A-module and let N be a fixed B-module. Let $A\otimes_B N$ be a left A-module by $\bar{a}(a\otimes n)=\bar{a}a\otimes n$. Then $M\otimes(A\otimes_B N)$ depends, as an A-module, only on the B-structure of M. In particular, if $f: M_1\to M_2$ is an isomorphism of B-modules, the following composition is an isomorphism of A-modules:*

$$M_1\otimes(A\otimes_B N)\to(M_1\otimes A)\otimes_B N\xrightarrow{l_1^{-1}\otimes 1}(\hat{M}_1\otimes A)\otimes_B N\xrightarrow{f\otimes 1\otimes 1}$$
$$(\hat{M}_2\otimes A)\otimes_B N\xrightarrow{l_2\otimes 1}(M_2\otimes A)\otimes_B N\to M_2\otimes(A\otimes_B N).$$

Proof. If f is a B-map, then $f\otimes 1\otimes 1$ is an A-map by lemma 3.2. The unnamed maps are associativity isomorphisms.

In the next theorem we analize $(\hat{M}\otimes A)\otimes_B N$.

THEOREM 3.4. *If M is an A-module and N is a B-module, then $(M\otimes A)\otimes_B N\approx$ $\approx A\otimes_B(M\otimes N)$ as left A-modules, where the A action is on the first factors.*

Proof. Define the map $(\hat{M}\otimes A)\otimes_B N\to A\otimes_B(M\otimes N)$ by $m\otimes a\otimes n\to a\otimes m\otimes n$. We first show it is well defined.

$$\begin{aligned}(m\otimes a)b\otimes n&=\sum(m)b'\otimes ab''\otimes n\to ab''\otimes\chi(b')(m)\otimes n\\&=\sum a\otimes(b'')'\chi(b')(m)\otimes(b'')''(n)=\sum a\otimes(b')'\chi((b')'')(m)\otimes b''(n)\\&=a\otimes m\otimes b(n),\end{aligned}$$

while $m\otimes a\otimes b(n)\to a\otimes m\otimes b(n)$. Next we show it is an A-map $\bar{a}(m\otimes a\otimes n)=$ $=m\otimes aa\otimes n\to\bar{a}a\otimes m\otimes n=\bar{a}(a\otimes m\otimes n)$. The map is clearly a vector space isomorphism.

Hence, Theorem 3.3 can be restated.

COROLLARY 3.5. $M\otimes(A\otimes_B N)\approx A\otimes_B(M\otimes N)$ as A-modules, the right hand side depending only on the B-structure of M.

Finally, we have the following corollary, which is what we need for the applications.

COROLLARY 3.6. If M is an A-module and $M\supset\cdots\supset M^{[i]}\supset M^{[i-1]}\supset\cdots$ is a filtration by B-module, where $B\subset A$, then $A\otimes_B(M\otimes N)\supset\cdots A\otimes_B(M^{[i]}\otimes N)\supset\cdots$ pro-

vides on A-module filtration of $M\otimes(A\otimes_B N)$ with quotients $A\otimes_B(M^{[i]}/M^{[i-1]}\otimes N)$.

4. Tensor Products of $\mathscr{A}$-modules

We apply the results of the preceding section to some particular cases. Let $A=\mathscr{A}$, $B=\mathscr{A}_1$, where $\mathscr{A}_1$ is the subalgebra generated by Sq^1 and Sq^2.

THEOREM 4.1. *Let M be an $\mathscr{A}$-module. Assume $M\to\sum_j \mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(J_j)$ as an $\mathscr{A}_1$-module, where $J_j\subset\bar{\mathscr{A}}_1$. Then $M\otimes\mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1=\sum_j \mathscr{A}/\mathscr{A}(J_j)$ as an $\mathscr{A}$-module.*

Proof. This follows immediately from corollary 3.5, by taking $N=Z_2$, the trivial $\mathscr{A}_1$-module.

THEOREM 4.2. *Let M be an $\mathscr{A}$-module. Assume $M\approx\sum_j \mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(J_j)$ as an $\mathscr{A}_1$-module, where $J_j\subset\bar{\mathscr{A}}_1$. Assume now $\mathscr{A}_1(J_j)$, in lowest terms, is $\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^2, \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1)$, $\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3, \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1)$, $\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1)$, $\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^5+\mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^1)$, $\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^5+\mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^1)$, or $\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^5+\mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^1)$. Then $M\otimes\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^3)\approx$ sum of cyclic $\mathscr{A}$-modules, as an $\mathscr{A}$-module.*

Proof. Apply corollary 3.5 with $N=\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3)$. For each type of J_j one must show that $\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(J_j)\otimes\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3)$ is a cyclic $\mathscr{A}_1$-module. We forego giving a table of answers as we need only a few of them in the application.

A more interesting example for M is $H^*(RP^\infty)$. Let $R=\sum R^i$ be the $\mathscr{A}$-module defined by $R^i=H^{i+1}(RP^\infty)$. Let $R^{[i]}$ be the $\mathscr{A}_1$-submodule of R generated by R^j, $j\leqslant i$. The structure of R as an $\mathscr{A}_1$-module is given by the following proposition, whose proof is straightforward and left to the reader.

PROPOSITION 4.3. *As an $\mathscr{A}_1$-modules, $R^{[4i+2]}/R^{[4i-2]}\approx\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^1)$, $R^{[2]}/R^{[0]}\approx\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^1)$, and $R^{[0]}\approx\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^2)$. Furthermore, the extension is determined by $\mathrm{Sq}^1(r_{4i+2})=(\mathrm{Sq}^5+\mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^1)(r_{4i-2})$ and $\mathrm{Sq}^1(r_2)=\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1(r_0)$.*

THEOREM 4.4. 1) *There is an $\mathscr{A}$-module filtration, $R\otimes\mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1\supset\cdots\supset F^{(4i-2)}\supset F^{(4i-2)}\supset\cdots\supset F^{(2)}\supset F^{(0)}$, with $F^{(4i+2)}/F^{(4i-2)}\approx\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^1)$, $F^{(2)}/F^{(0)}\approx\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^1)$, and $F^{(0)}\approx\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^2)$.* 2) *There is an $\mathscr{A}$-module filtration, $R\otimes\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^3)\supset\cdots\supset G^{(i)}\supset\cdots$ with $G^{(4i+1)}/G^{(4i)}\approx\mathscr{A}$, $G^{(4i+2)}/G^{(4i+1)}\approx\mathscr{A}$, $G^{(4i+3)}/G^{(4i+2)}=0$, $G^{(4i+4)}/G^{(4i+3)}\approx\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^1)$ and $G^{(0)}\approx\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^1)$.*

Proof. Apply corollary 3.6 with $N=Z_2$ or $\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3)$. In the latter case, one must note that

$$\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^1)\otimes\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3)\approx\mathscr{A}_1\oplus\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^1)\oplus\mathscr{A}_1$$

with generators of dimension 0, 2, and 3 respectively, while $\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^2)\otimes\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3)\approx\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^1)\oplus\mathscr{A}_1$ with generators of dimension 0 and 1 respectively.

5. Pin Cobordism

By our remarks at the start of section 2, in order to compute Ω_*^{Pin}, we compute $\pi_*(RP^\infty \wedge \mathbf{K}(Z_2, n))$,

$$\pi_*(RP^\infty \wedge \mathbf{BO}\langle 8n\rangle),$$

and

$$\pi_*(RP^\infty \wedge \mathbf{BO}\langle 8n+2\rangle).$$

We note that

$$H^*(RP^\infty \wedge \mathbf{BO}\langle 8n\rangle) \approx \bar{H}^*(RP^\infty) \otimes \mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1,$$
$$H^*(RP^\infty \wedge \mathbf{BO}\langle 8n+2\rangle) \approx \bar{H}^*(RP^\infty) \otimes \mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^3),$$

and

$$H^*(RP^\infty \wedge \mathbf{K}(Z_2, n)) \approx H^*(RP^\infty) \otimes \mathscr{A}.$$

In the previous section, we have computed the $\mathscr{A}$-module structure of these tensor products. We now compute $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}$ and apply the Adams spectral sequence.

THEOREM 5.1. 1) *The contribution to* Ω_*^{Pin} *of terms* $\pi_*(RP^\infty \wedge \mathbf{K}(Z_2, n))$ *is a direct summand of* Z_2 *in each dimension* $\geqslant n$. 2) *The contribution to* Ω_*^{Pin} *of terms* $\pi_*(RP^\infty \wedge \mathbf{BO}\langle 8n\rangle)$ *is as follows:* Z_2 *in dim* $8n+i$, $i \equiv 0, 1(8)$; 0 *in dim* $8n+i$, $i=3, 4, 5, 7(8)$; Z_2^{4k+3} *in dim* $8n+8k+2$, $k \geqslant 0$; *and* Z_2^{4k+4} *in dim* $8n+8k+6$, $k \geqslant 0$. 3) *The contribution to* Ω_*^{Pin} *of terms* $\pi_*(RP^\infty \wedge \mathbf{BO}\langle 8n+2\rangle)$ *is as follows* Z_2 *in dim* $8n+2+i$, $i \equiv 1, 2, 5, 7(8)$; $Z_2 \oplus Z_2$ *in dim* $8n+2+i$, $i \equiv 6(8)$; 0 *in dim* $8n+2+i \equiv 3(8)$; Z_2^{4k+1} *in dim* $8n+2+8k$, $k \geqslant 0$; *and* Z_2^{4k+2} *in dim* $8n+2+8k+4$, $k \geqslant 0$.

Proof. Since $\hat{R} \otimes \mathscr{A} \approx R \otimes \mathscr{A}$ is a free $\mathscr{A}$-module, it contributes a Z_2 in $E_2^{0,t}$, $t \geqslant n = \dim$ of the generator of $\mathscr{A}$. This proves part 1). By a theorem of Liulevicius [4], $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(F^{(0)}, Z_2) \approx \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}_1}(\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^2), Z_2)$ and the latter can be computed directly. $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(F^{(0)}, Z_2) \approx \mathrm{Ext}^{s+1, t+2}(\mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1, Z_2)$, $s, t \geqslant 0$: and $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{*,*}(\mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1, Z_2) = Z_2[h_0, h_1, t, w]/\{h_0h_1, h_1^3, t^2+h_0^2w, h_1t\}$, where $h_0 \in \mathrm{Ext}^{1,1}$, $h_1 \in \mathrm{Ext}^{1,2}$, $t \in \mathrm{Ext}^{3,7}$, and $w \in \mathrm{Ext}^{4,12}$. Note $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\mathscr{A}/\mathscr{A}(\mathrm{Sq}^1), Z_2) = \{h_0^s\}$, $s \geqslant 0$, $t = s$. We now calculate $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(R \otimes \mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1, Z_2)$ by induction on the filtration. This is the same as taking $\sum \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(F^{(4i+2)}/F^{(4i-2)}, Z_2) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(F^{(0)} Z_2)$ and introducing a $d_1 : \mathrm{Ext}^{s,t} \to \mathrm{Ext}^{s+1,t}$ in this direct sum. Note $H(R \otimes \mathscr{A}/\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_1, Q_0) = H(R, Q_0) \otimes H\mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1 = 0$ as $H(R, Q_0) = 0$. Hence, be a theorem of Adams $\sum \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(R \otimes \mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1, Z_2)$ has no elements of infinite height. This determines our d_1. Let x_i "generate" $F^{(4i+2)}/F^{(4i-2)}$. Then $d_1(h_0^k w^i t) = h_0^{k+4i+3} x_{2i+1}$, $i \geqslant 0$ and $d_1(h_0^k w^{i+1}) = h_0^{k+4i+4} x_{2i+2}$, $i \geqslant 0$ is the only possibility. (The elements $h_0^k w^{i+1}$ etc. denote elements in $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(F^{(0)}, Z_2)$ corresponding to the named element under the isomorphism $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(F^{(0)}, Z_2) \approx \mathrm{Ext}^{s+1,t+2}(\mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1 \cdot Z_2)$.) By direct computation, we note also that $h_1(w^{i+1}h_1^2) \neq 0$ in $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(R \otimes \mathscr{A}/\mathscr{A}\bar{\mathscr{A}}_1$,

Z_2). Thus, for algebraic reasons, it is trivial to check that $E_2 = E_\infty$. Reading off the homotopy gives part 2) of theorem 5.1. The calculation needed to prove part 3) is similar to that for part 2). Here we need that $\mathrm{Ext}^{s,t}(G^{(0)}, Z_2)\ \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s-1,t-6}(\mathscr{A}/\mathscr{A}\mathscr{A}_1, Z_2)$ $s \geqslant 1$, $t \geqslant 6$, and $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{0,0}(G^{(0)}, Z_2) = Z_2$. The calculation then proceeds as above and will be omitted.

Using the results of [1] on Ω_*^{Spin}, one can now determine Ω_*^{Pin} in any given dimension. For example

$$\Omega_{22}^{\mathrm{Pin}} = Z_{2^{12}} + Z_{2^8} + Z_{2^6} + Z_{2^4} + Z_{2^4} + Z_{2^2} + Z_{2^2} + Z_2 + Z_2 .$$

Corollary 2.1 follows immediately from theorem 5.1 as $Z^{2^{4k+3}} \subset \Omega_{8k+2}^{\mathrm{Pin}}$. We also note the following corollary of our computations.

COROLLARY 5.2. $\mathrm{Im}(\Omega_i^r \to \Omega_i^{\mathrm{Pin}}) = Z_2$ if $i \equiv 1, 2(8)$ and 0 otherwise. Furthermore, the element in $\dim 8k+2$ is divisible by 2^{4k+2}.

6. Bordism Groups

Let $\mathbf{f}: X \to \mathbf{Y}$ be a map of spectra. Assume $\mathbf{Y}$ is a wedge of $\mathbf{K}(Z_2, n)$'s. Define $G_* \subset \pi_*(\mathbf{Y})$ by $G_* = \{g \mid g \in \pi^n(\mathbf{Y})$ and $g^*(\mathrm{Ker}\mathbf{f}^*) = 0 \in H^*(S^n)$, where $\mathbf{f}^*: H^*(\mathbf{Y}) \to \to H^*(X)\}$. It is clear that

$$\mathrm{Im}(\pi_*(\mathbf{X}) \to \pi_*(\mathbf{Y}) \subset G_*(\pi_*(\mathbf{X}) \to \pi_*(\mathbf{Y})) \subset G_* .$$

DEFINITION 6.1. *A spectrum X has property P if given $u \in H^n(\mathbf{X})$, $u \neq O \in H^*(\mathbf{X})/\bar{\mathscr{A}} H^*(\mathbf{X})$, then there exists $g \in \pi_n(\mathbf{X})$ such that $g^*(u) \neq O \in H^n(S^n)$.*

The following easy theorem is the basis for our results on bordism groups.

THEOREM 6.2. *Assume $f^*: H^*(\mathbf{Y}) \to H^*(\mathbf{X})$ is an epimorphism. Then* $\mathrm{Im}(\pi_*(\mathbf{X}) \to \to \pi_*(\mathbf{Y})) = G_*$ *if and only if X has property P.*

Proof. Let $g \in G_* \to \mathrm{Im}\mathbf{f}^*$. Then there exists $u \in H^*(\mathbf{Y})$ such that $g^*(u) \neq 0$ and $(\mathbf{f}\mathbf{g}')^*(u) = 0$ for all $\mathbf{g}' \in \pi_*(\mathbf{X})$ because $\mathbf{Y}$ is a wedge of Eilenberg-MacLane spectra. Since X has property P, we see that $\mathbf{f}^*(u) \in \bar{\mathscr{A}} H^*(\mathbf{X})$, hence $\mathbf{f}^*(u) = \bar{a}\mathbf{f}^*v)$ because $\mathbf{f}^*$ is an epimorphism. Thus $u + \bar{a}v \in \mathrm{Ker}\mathbf{f}_0^*$ and $\mathbf{g}^*(u + \bar{a}v) = \mathbf{g}^*(u) = 0$, a contradiction. Conversely, let $u \in H^n(\mathbf{X})$ be such that $u \notin \bar{\mathscr{A}} H^*(\mathbf{X})$. If $\mathbf{g}'^*(u) = 0$ for all $\mathbf{g} \in \pi_*(\mathbf{X})$, let $u = \mathbf{f}^*(v)$, $v \in H^*(\mathbf{Y})$, then there exists $\mathbf{g} \in \pi_*(\mathbf{Y})$ such that $\mathbf{g}^*(v) \neq 0$ and $\mathbf{g}^*(\mathrm{Ker}\mathbf{f}^*) = 0$. Hence $\mathbf{g} \in G_* - \mathrm{Im}\mathbf{f}_*$; a contradiction.

The following proposition follows easily from the structure of the Adams spectral sequence.

PROPOSITION 6.2. $\mathbf{X}$ *has property P if and only if $d_r = 0$ on $E_r^{0,t}$ in the Adams spectral sequence for $\pi_*(\mathbf{X})$ for all r and all t.*

We now prove corollary 2.2. In order to apply theorem 6.1 we must note the following fact. Let $\mathbf{f}:\mathbf{MPin}\to\mathbf{M}O$. $\mathrm{Ker}\mathbf{f}^*=U\cdot$ (ideal over $\mathscr{A}$ generated by w_2). Let $g\in\pi_*(\mathbf{M}O)$. If $\mathbf{g}^*(U\cdot$ ideal generated by $w_2)=0$, then $\mathbf{g}^*(\mathrm{Ker}\mathbf{f}^*)=0$. The proof is by induction on

$$\dim a\cdot\mathbf{g}^*\big(U\cdot a(w_2)\cdot w\big)=g^*\big(a(U\cdot w_2\cdot w)\big)+\sum_{\dim a'<\dim a} g^*\big(U\cdot a'(w_2)\cdot w^1\big)=0$$

if $\dim a\geqslant 0$. Hence $G_*=$all cobordism classes all of whose Stiefel Whitney numbers involving $w_2(v)$ vanish. To apply theorem 6.1, we need that $\mathbf{MPin}$ has property P. This follows immediately from proposition 6.2 and the proof of theorem 5.1 where it is noted that $E_2=E_\infty$.

Corollary 2.3 is proved in a similar way. In order to apply theorem 6.1, one must show that $K\wedge\mathbf{M}SO$ has property P. It is easy to check that this is true if and only if $H_*(K;Z)$ has no 4-torsion.

Corollary 2.4 is also proved in a similar way using the results of [3] and the fact that $H_*(\mathbf{M}\,\mathrm{SPL}:Z)$ has 4-torsion.

A more general form of corollary 2.5 is the following result, which follows immediately from theorem 6.1.

COROLLARY 6.3. ($\mathrm{Im}(\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(K)\to\mathscr{N}_*(K))=$all bordism classes (M,f) all of whose Stiefel-Whitney numbers of the map involving w_1 and w_2 vanish) if and only if $K\wedge\mathbf{M}\mathrm{Spin}$ has property P.

Thus, in order to prove corollary 2.5, we must show that $E_2=E_\infty$ in the Adams spectral sequence for $\pi_*(BSO\wedge\mathbf{M}\mathrm{Spin})$. Since $H^*(BSO)\approx$sum of cyclic $\mathscr{A}_1$-modules of type $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_1(\mathrm{Sq}^3)$, and Z_2, as an $\mathscr{A}_1$-module [1], we can compute E_2 using theorem 4.1 and 4.2. We then note that $E_2=E_\infty$ for algebraic reasons.

BIBLIOGRAPHY

[1] D. W. ANDERSON, E. H. BROWN, Jr., and F. P. PETERSON, *The Structure of the Spin Cobordism Ring*, Ann. of Math. *86* (1967), 271–298.
[2] M. F. ATIYAH, R. BOTT, and A. SHAPIRO, *Clifford Modules*, Topology *3* suppl. 1 (1964), 3–38.
[3] W. BROWDER, A. LIULEVICIUS, and F. P. PETERSON, *Cobordism Theories*, Ann. of Math. *84* (1966), 91–101.
[4] A. LIULEVICIUS, *The Cohomology of Massey–Peterson Algebras*, to appear.
[5] A. LIULEVICIUS, *Notes on Homotopy of Thom Spectra*, Amer. J. Math. *86* (1964), 1–16.
[6] C. T. C. WALL, mimeographed notes.
[7] G. W. WHITEHEAD, *Generalized Homology Theories*, Trans. Amer. Math. Soc. *102* (1962), 227–283.

M.I.T.
Brandeis University

Received November 21, 1968

Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen

KURT STREBEL (Zürich)

Der Limes f einer Folge (f_n) von K-quasikonformen Abbildungen eines Gebietes G der z-Ebene, welche lokal gleichmässig konvergiert, ist entweder eine Konstante oder selber eine K-quasikonforme Abbildung. Wir betrachten den letzteren Fall. Man kann nun bekanntlich nicht schliessen, dass die komplexen Dilatationen κ_n der Abbildungen f_n gegen die komplexe Dilatation κ des Limes f konvergieren. Selbst unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Folge der Beträge $|\kappa_n|$ fast überall konvergiert, geht dieser Schluss nicht: Es kann $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n| > |\kappa|$ sein (für ein Beispiel, in dem das f.ü. der Fall ist, siehe [1] pg. 195).

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass es andererseits keine Menge E von positivem Mass geben kann, auf der die Ungleichung $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| < |\kappa(z)|$ erfüllt ist, und dass die Gleichheit $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| = |\kappa(z)|$ die Existenz einer Teilfolge (n_ν) nach sich zieht, für die $\lim_{\nu\to\infty}\kappa_{n_\nu}(z) = \kappa(z)$ f.ü. auf E gilt. Wir wollen aber die Existenz des $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|$ nicht voraussetzen. Die Aussage gilt dann für den $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|$. Dass nämlich andererseits $\underline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| < |\kappa(z)|$ f. ü. sein kann, zeigt das folgende Beispiel:

Wir unterteilen das Quadrat R: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ durch die vertikalen Strecken $x_{mn} = m/2^n$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $m = 1, \ldots, 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Die Abbildung $w = f_{mn}(z)$ ist ein K-quasikonformer und eckpunkttreuer Homöomorphismus von R auf das Rechteck R_n': $0\leqslant u\leqslant K(1-2^{-n})+2^{-n}$, $0\leqslant v\leqslant 1$, $K>1$, der folgendermassen festgelegt wird: Das Rechteck R_{mn}: $(m-1)\,2^{-n}\leqslant x\leqslant m2^{-n}$, $0\leqslant y\leqslant 1$ wird horizontal auf ein kongruentes Teilrechteck R_{mn}' von R_n' verschoben. Die übrigen Teilrechtecke von R werden horizontal mit dem Faktor K gestreckt und natürlich entsprechend verschoben, sodass f_{mn} auf den Geraden $x_{mn} = m2^{-n}$ stetig wird. Offenbar konvergiert die Folge (f_{mn}), $m = 1, \ldots, 2^n, n = 1, 2, \ldots$ gleichmässig gegen die Horizontalstreckung $w = f(z) = Kx + iy$, wohingegen der Limes inferior der Folge der Beträge der komplexen Dilatationen f. ü. gleich null ist.

SATZ: *Sei f ein K-quasikonformer Homöomorphismus eines Gebietes G der z-Ebene in die Ebene und lokal gleichmässiger Limes einer Folge (f_n) ebensolcher Abbildungen. Dann ist $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| \geqslant |\kappa(z)|$ f. ü. Gilt auf einer Menge E von positivem Mass Gleichheit, so gibt es eine Teilfolge (n_ν), sodass $\lim_{\nu\to\infty}\kappa_{n_\nu}(z) = \kappa(z)$ f. ü. auf E.*

Beweis: 1) Wir betrachten zunächst einen regulären Punkt z_0 von f, in dem also f ein totales Differential $dw = p(z_0)\,dz + q(z_0)\,d\bar{z}$ besitzt und ausserdem die Funktionaldeterminante $J(z_0) = |p(z_0)|^2 - |q(z_0)|^2 > 0$ ist. Wir nehmen ferner an, dass $\kappa(z_0) =$

$q(z_0)/p(z_0) \neq 0$ sei. Es gibt dann im Punkte z_0 für die differentielle Abbildung $dw = p(z_0)\,dz + q(z_0)\,d\bar{z}$ eine bis auf π eindeutig bestimmte Richtung grösster Streckung: Es ist die Richtung $\vartheta = (\beta - \alpha)/2 = \gamma/2$, mit den Bezeichnungen $p(z_0) = |p(z_0)|\,e^{i\alpha}$, $q(z_0) = |q(z_0)|\,e^{i\beta}$, $\kappa(z_0) = |\kappa(z_0)|\,e^{i\gamma}$. Sie wird übergeführt in die Richtung $\vartheta^* = (\alpha + \beta)/2$.

Sei $Q_a(z_0)$ das Quadrat mit dem Mittelpunkt z_0 und der Seitenlänge a, dessen eine Seite die Richtung ϑ hat. Es wird durch die lineare Approximation von f abgebildet auf das Rechteck R mit dem Mittelpunkt $w_0 = f(z_0)$ und den Seitenlängen $a(|p(z_0)| + |q(z_0)|)$ in der Richtung ϑ^*, $a(|p(z_0)| - |q(z_0)|)$ in der Richtung $\vartheta^* + \pi/2$. Zu einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sodass für alle $a < \delta$ und $z = z_0 + dz \in Q_a(z_0)$ gilt: $|f(z) - f(z_0) - dw| < a\varepsilon$.

Für jedes feste $a < \delta$ gibt es dann ausserdem ein n_a, sodass für alle $n > n_a$, $z \in Q_a(z_0)$ auch $|f_n(z) - f(z_0) - dw| < a\varepsilon$ ist.

Wir führen in $Q_a(z_0)$ $\zeta = \xi + i\eta = e^{-i\vartheta}(z - z_0)$ als seitenparallele Koordinaten ein, wobei also die ξ-Achse aus der x-Achse durch Drehung um den Winkel ϑ hervorgeht. Die Richtung $\eta = \text{konst.}$ ist somit die Richtung grösster Streckung der linearen Approximation. Wir betrachten die f_n-Bilder der Strecken $\eta = \text{konst.}$ in $Q_a(z_0)$ für $n > n_a$. Bezeichnen wir das totale Differential von f_n in einem beliebigen Punkte z mit $dw_n = p_n(z)\,dz + q_n(z)\,d\bar{z}$, so gilt für $dz = e^{i\vartheta}\,d\xi$

$$dw_n = p_n(z)\,e^{i\vartheta}\,d\xi + q_n(z)\,e^{-i\vartheta}\,d\xi\,.$$

Für die Längen dieser f_n-Bilder erhalten wir somit

$$a(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon) \leqslant \int_{-a/2}^{a/2} |p_n(z(\zeta)) + q_n(z(\zeta))\,e^{-i\gamma(z_0)}|\,d\xi$$

und durch Integration über η

$$a^2(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon) \leqslant \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} |p_n(z(\zeta)) + q_n(z(\zeta))\,e^{-i\gamma(z_0)}|\,d\xi\,d\eta$$

$$= \iint_{Q_a(z_0)} |p_n(z) + q_n(z)\,e^{-i\gamma(z_0)}|\,dx\,dy\,.$$

Eine Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$a^4(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon)^2$$

$$\leqslant \iint_{Q_a(z_0)} (|p_n(z)|^2 - |q_n(z)|^2)\,dx\,dy \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|p_n(z) + q_n(z)\cdot e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{|p_n(z)|^2 - |q_n(z)|^2}\,dx\,dy$$

$$\leqslant a^2(|p(z_0)| + |q(z_0)| + 2\varepsilon)(|p(z_0)| - |q(z_0)| + 2\varepsilon)$$
$$\times \iint\limits_{Q_a(z_0)} \frac{|1 + \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy.$$

Mit Hilfe der Identität

$$\frac{|1 + \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{1 - |\kappa_n(z)|^2} = \frac{1 + |\kappa_n(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\kappa_n(z)\cdot e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}$$
$$= D_n(z) - 2\,\frac{|\kappa_n(z)| - \mathrm{Re}\,\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}$$

wo $D_n(z) = (1 + |\kappa_n(z)|)/(1 - |\kappa_n(z)|) \geqslant 1$ die Dilatation von f_n im Punkte z ist, erhalten wir schliesslich für jedes $a < \delta$ und $n > n_a$ die Ungleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon)^2}{(|p(z_0)| + |q(z_0)| + 2\varepsilon)(|p(z_0)| - |q(z_0)| + 2\varepsilon)} \equiv D(z_0) + (\varepsilon) \\ &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy - 2a^{-2} \\ &\times \iint\limits_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \mathrm{Re}\,\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy \leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei (ε) eine mit ε gegen null gehende Grösse bezeichnet.

2) Das Lemma von Fatou ([3], pg. 29), angewendet auf die Folge der Funktionen $K - D_n \geqslant 0$ in $Q_a(z_0)$, ergibt

$$\varlimsup_{n\to\infty} \iint\limits_{Q_a(z_0)} (K - D_n(z))\, dx\, dy \geqslant \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varlimsup_{n\to\infty} (K - D_n(z))\, dx\, dy$$

und daher

$$\varlimsup_{n\to\infty} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varlimsup_{n\to\infty} D_n(z)\, dx\, dy.$$

Wir erhalten somit aus (1) die Ungleichung

$$D(z_0) + (\varepsilon) \leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varlimsup_{n\to\infty} D_n(z)\, dx\, dy \quad (2)$$

in jedem regulären Punkt z_0 von f, in dem $\kappa(z_0) \neq 0$ ist, für alle $a < \delta(\varepsilon, z_0)$.

Nehmen wir nun an, es gelte auf einer Menge von positivem Mass $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) < D(z)$. Dann gibt es eine Menge E, $|E| > 0$ und eine positive Zahl d, sodass auf E $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) \leqslant D(z) - d$ ist. In E ist $D(z) \geqslant 1 + d$, und es gibt einen regulären Punkt

z_0 von f in E, der Dichtepunkt der Menge E ist, und in dem $\lim_{a\to 0} a^{-2}\iint_{Q_a(z_0)} D(z)\times$ $\times dx\,dy = D(z_0)$ gilt; die letzte Beziehung gilt nämlich für beliebige Quadrate $Q_a(z_0)$ f. ü. in G. Wir haben somit für alle $a<\delta$

$$\left.\begin{aligned} D(z_0)+(\varepsilon) &\leqslant a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E}(D(z)-d)\,dx\,dy + a^{-2}K\iint\limits_{Q_a(z_0)-E} dx\,dy \\ &\leqslant a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)}(D(z)-d)\,dx\,dy + a^{-2}K\iint\limits_{Q_a(z_0)-E} dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für $a\to 0$ erhalten wir zunächst $D(z_0)+(\varepsilon)\leqslant D(z_0)-d$ und daraus für $\varepsilon\to 0$ $D(z_0)\leqslant$ $\leqslant D(z_0)-d$, was einen Widerspruch bedeutet. Das beweist den ersten Teil des Satzes.

3) Es gelte nun auf einer Menge E von positivem Mass Gleichheit: $\overline{\lim}_{n\to\infty} D_n(z)=$ $D(z)$, $z\in E$. Wir zeigen zunächst, dass es dann eine Teilfolge (n_ν) gibt, für welche $\lim_{\nu\to\infty} D_{n_\nu}(z)=D(z)$ f. ü. auf E ist.

In denjenigen Punkten von E, in denen $D(z)=1$ (d.h. $\kappa(z)=0$) ist, gilt $D_n(z)\to D(z)$ und damit auch $\kappa_n(z)\to\kappa(z)$ schon für die ursprüngliche Folge und umsomehr für jede Teilfolge. Wir dürfen daher annehmen, dass auf E $D(z)>1$ sei. Wir betrachten $E_r=E\cap\{z\mid |z|<r\}$. In fast allen Punkten $z_0\in E_r$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \lim_{a\to 0} a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)}\overline{\lim_{n\to\infty}} D_n(z)\,dx\,dy &= \lim_{a\to 0} a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E}\overline{\lim_{n\to\infty}} D_n(z)\,dx\,dy \\ = \lim_{a\to 0} a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} D(z)\,dx\,dy &= \lim_{a\to 0} a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)} D(z)\,dx\,dy = D(z_0) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Es gibt nun wegen (1) und (4) zu gegebenem $\varepsilon>0$ für jedes $z_0\in E_r$ mit Ausnahme einer Nullmenge ein $\delta=\delta(\varepsilon, z_0)>0$ sodass für $a<\delta$

$$\left.\begin{aligned} D(z_0)-\varepsilon &\leqslant a^{-2}\varliminf_{n\to\infty}\iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\,dx\,dy \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\,dx\,dy \\ &\leqslant a^{-2}\iint\limits_{Q_a(z_0)}\overline{\lim_{n\to\infty}} D_n(z)\,dx\,dy \leqslant D(z_0)+\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist. Die abgeschlossenen Quadrate $Q_a(z)$, $z\in E_r$, $a<\delta(\varepsilon, z)$, überdecken die Menge E_r im Sinne von Vitali ([3], pg 109), und es gibt daher eine höchstens abzählbare Menge von nicht-überlappenden Quadraten $Q_{a_\nu}(z_\nu)$, $\nu=1, 2,\ldots$ sodass $|E_r-A|=0$ ist, wo $A=\sum_\nu Q_{a_\nu}(z_\nu)$ bedeutet. Die Quadrate $Q_{a_\nu}(z_\nu)$ sind nicht-überlappend, und sie können zudem von Anfang an so gewählt werden, dass sie in einer gegebenen offenen Menge 0 liegen, die E_r enthält. Man kann daher annehmen, dass $|A-E_r|\leqslant|0-E_r|<\varepsilon$ ist. Schreiben wir nun die Ungleichungen (5) für jedes z_ν an, multiplizieren sie mit a_ν^2 und

summieren über alle ν, so erhalten wir (mit $Q_\nu \equiv Q_{a_\nu}(z_\nu)$)

$$\left.\begin{aligned} \sum_\nu D(z_\nu)\, a_\nu^2 - \varepsilon |A| &\leqslant \sum_\nu \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n(z)\, dx\, dy \leqslant \sum_\nu \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n(z)\, dx\, dy \\ &\leqslant \sum_\nu \iint_{Q_\nu} \varlimsup_{n\to\infty} D_n(z)\, dx\, dy \leqslant \sum_\nu D(z_\nu)\, a_\nu^2 + \varepsilon |A| . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Für eine beliebige natürliche Zahl N ist

$$\sum_{\nu=1}^{N} \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n$$

und

$$\begin{aligned} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_A D_n &= \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \iint_{Q_\nu} D_n + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \right) \\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{N} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n + \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n + \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n . \end{aligned}$$

Da der letzte Summand wegen der gleichgradigen Konvergenz (bezüglich n) der Summe $\sum_\nu \iint_{Q_\nu} D_n$ für $N\to\infty$ beliebig klein wird, haben wir schliesslich

$$\left.\begin{aligned} \sum_\nu \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \\ \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} \varlimsup_{n\to\infty} D_n = \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aus (7) folgt mit Hilfe von (6)

$$0 \leqslant \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n - \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant 2|A|\,\varepsilon < 2(|E_r| + \varepsilon)\,\varepsilon . \tag{8}$$

Wegen $A \supset E_r$ (bis auf eine Nullmenge) und $|A - E_r| < \varepsilon$ gilt weiter

$$0 \leqslant \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n - \iint_{E_r} \varlimsup_{n\to\infty} D_n = \iint_{A-E_r} \varlimsup_{n\to\infty} D_n \leqslant K\cdot\varepsilon \tag{9}$$

und

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n - \varliminf_{n\to\infty} \iint_{E_r} D_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{A-E_r} D_n \leqslant K\varepsilon . \tag{10}$$

Berücksichtigen wir noch die Voraussetzung $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) = D(z)$ auf E_r, so erhalten

wir aus (8), (9) und (10) die Gleichung

$$\iint_{E_r} D - \varliminf_{n\to\infty} \iint_{E_r} D_n = \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} (D - D_n) = 0 \tag{11}$$

und daraus $$\varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D - D_n| = 0. \tag{12}$$

Die letzte Beziehung folgt so: Es gilt $|D-D_n|=(D-D_n)-2(D-D_n)^- = D-D_n+ +2|(D-D_n)^-|$ und daher

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D - D_n| &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} (D - D_n) + 2 \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |(D - D_n)^-| \\ &= 2 \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |(D - D_n)^-| \leqslant 2 \iint_{E_r} \varlimsup_{n\to\infty} |(D - D_n)^-| = 0,\end{aligned}$$

da der Integrand f. ü. verschwindet. Die Beziehung $\lim_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D-D_n| = 0$ bedeutet nun, dass die L^1-Norm $\|D-D_n\|_{E_r} \to 0$ geht für $n\to\infty$, und daraus ergibt sich bekanntlich die Existenz einer Teilfolge (n_ν), sodass $D(z)-D_{n_\nu}(z)\to 0$ für f. a. z aus E_r. Lassen wir r die natürlichen Zahlen durchlaufen und wählen wir die Teilfolge für E_{r+1} aus derjenigen für E_r, so erhalten wir in der Diagonalfolge die gesuchte Teilfolge, die f. ü. auf E gegen D konvergiert.

4) Für das Folgende dürfen wir zum vorneherein annehmen, dass auf der Menge E von positivem Mass $\lim_{n\to\infty} D_n(z) = D(z)$ f. ü. gelte, und dass ausserdem $D(z) > 1$ sei. Damit äquivalent ist: $\lim_{n\to\infty} |\kappa_n(z)| = |\kappa(z)| > 0$ f. ü. auf E. Aus der Ungleichung (1) folgt für fast jedes $z_0 \in E$

$$\left.\begin{aligned} &2a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re} \kappa_n(z) \cdot e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy \\ &\leqslant a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy - D(z_0) + (\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Lässt man nun zunächst $n\to\infty$ und dann $a\to 0$ gehen, so folgt

$$\lim_{a\to 0} a^{-2} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re} \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy = 0 \tag{14}$$

und daher umsomehr

$$\lim_{a\to 0} a^{-2} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_a(z_0)} \left(|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re} \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}\right) dx\, dy = 0. \tag{15}$$

Nun gilt bekanntlich (für den Beweis des eindimensionalen Analogons siehe z.B. [2] pg 228) für f. a. $z_0 \in E$

$$\overline{\lim_{a\to 0}} \frac{1}{a^2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} |e^{-i\gamma(z)} - e^{-i\gamma(z_0)}|\, dx\, dy = 0. \tag{16}$$

Aus

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} \left(|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)}\right) dx\, dy \\ &\quad \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \left(|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}\right) dx\, dy \\ &\quad + \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} |e^{-i\gamma(z)} - e^{-i\gamma(z_0)}|\, dx\, dy \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

folgt daher: Für f. a. $z_0 \in E$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ sodass für $a < \delta$ gilt

$$a^{-2}\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} \left(|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)}\right) dx\, dy < \varepsilon. \tag{18}$$

Nun betrachten wir wieder zunächst E_r und erhalten mittels einer Überdeckung von E_r im Sinne von Vitali wie oben

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_r} \left(|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)}\right) dx\, dy = 0. \tag{19}$$

Daraus ergibt sich zuerst die Existenz einer Teilfolge (n_ν) für die $|\kappa_{n_\nu}(z)| - \operatorname{Re}\kappa_{n_\nu}(z) \times$ $\times e^{-i\gamma(z)} \to 0$ geht f. ü. auf E_r. Durch das Cantorsche Diagonalverfahren erhalten wir schliesslich eine Teilfolge, für die die obige Beziehung f. ü. auf E gilt.

Sei nun $z \in E$ ein solcher Punkt. Dann gilt also $|\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)}| \to |\kappa(z)|$ und $\operatorname{Re}\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)} \to |\kappa(z)|$. Daraus folgt offenbar $\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)} \to |\kappa(z)|$ und somit

$$\kappa_{n_\nu}(z) \to |\kappa(z)|\, e^{i\gamma(z)} = \kappa(z), \qquad \text{q.e.d.}$$

LITERATUR

[1] O. Lehto und K. I. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen* (Berlin 1965).
[2] E. J. McShane: *Integration* (Princeton 1947).
[3] S. Saks: *Theory of the Integral* (New York 1937).

Eingegangen den 7. Januar 1969

Representative Functions on Topological Groups

ANTOINE DERIGHETTI

1. Introduction

In this paper we shall study the relations existing between the topological properties of a completely regular topological group G and the algebraic properties of the space of all representative functions $R(G)$ over G.

In the first part we give some results which generalize those of S. Kakutani ([4] pp. 430–431) concerning compactifications of locally compact abelian groups.

For a compact group G the Tannaka duality theorem shows that the algebraic properties of $R(G)$ characterize completely those of G. Using [2], we find algebraic characterizations of the connectedness, local connectedness and arcwise connectedness of G. Similarly, we attempt to generalize, in a certain sense, the well-known result of Pontrjagin ([10] p. 32) about the covering dimension of a compact abelian group. Using these results we obtain some applications to more general topological groups.

I want to express my warmest thanks to Professor K. Chandrasekharan for his guidance in the preparation of this paper, to Professor R. Sridharan for many informative conversations and to Professor G. Hochschild for suggestions and corrections. Finally I want to acknowledge the generous support of the Forschungsinstitut für Mathematik without which it would have been impossible to carry out this work.

2. Compactifications and related questions

Let γ be the map of $R(G)$ into $R(G)\otimes_{\mathbf{C}}R(G)$ induced by the product in G. Following ([6]), one can say that, with the coproduct γ and the pointwise product, $R(G)$ is a Hopf algebra. We consider, as in [2], only Hopf subalgebras of $R(G)$ which are stable under complex conjugation.

Let $\mathscr{H}$ be a Hopf subalgebra of $R(G)$. We denote by $S(\mathscr{H})$ the set of all $\mathbf{C}$-algebra homomorphisms of $\mathscr{H}$ onto $\mathbf{C}$ which commute with complex conjugation. With the finite open topology $S(\mathscr{H})$ is a compact space ([6] p. 28). Let Γ be a non empty subset of $R(G)$; we denote by $\mathscr{H}(\Gamma)$ the least Hopf subalgebra containing Γ. It follows from ([6] p. 29–30) that $S(\mathscr{H}(\Gamma))$ is a compact group and the evaluation map φ_Γ of G into $S(\mathscr{H}(\Gamma))$ is a continuous homomorphism.

PROPOSITION 1. *The group $\varphi_\Gamma(G)$ is dense in $S(\mathscr{H}(\Gamma))$ for every $\Gamma\subset R(G)$.*

Proof. Consider $f\in R(S(\mathscr{H}(\Gamma)))$ with $f=0$ on $\varphi_\Gamma(G)$. By the Tannaka duality

theorem ([6] p. 30) there exists $h \in \mathscr{H}(\Gamma)$ such that $s(h)=f(s)$ for every $s \in S(\mathscr{H}(\Gamma))$. In particular $\varphi_\Gamma(x)(h)=h(x)=0$ for every $x \in G$. This implies that $h=0$ and therefore $f=0$. Using ([7] Lemma 5.2.) we obtain $\overline{\varphi_\Gamma(G)}=S(\mathscr{H}(\Gamma))$.

COROLLARY 1. Let $\mathscr{H}$ be any Hopf subalgebra of $R(G)$. Let τ be any element of $S(\mathscr{H})$, let $f_1, \ldots, f_n$ be a finite subset of $\mathscr{H}$ and let ε be any positive number. Then there is a point $x \in G$ such that $|\tau(f_j)-f_j(x)|<\varepsilon$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Proof. By definition of the topology of $S(\mathscr{H})$ the set $\{\tau' \in S(\mathscr{H}) \mid |\tau'(f_j)-\tau(f_j)|<\varepsilon \; 1 \leqslant j \leqslant n\}$ is an open neighborhood U of τ. From prop. 1 the existence of $x \in G$ then follows with the required properties.

Remark. This result is proved for characters over a topological group in ([5]). At the end of the same paper, the authors indicate the possibility of generalization.

COROLLARY 2. Let G be an infinite maximally almost periodic group and let $f_1, \ldots, f_n \in R(G)$ and $\varepsilon>0$. Then there is an element $x \in G$ such that $x \neq e$ and $|f_j(x)-f_j(e)| < \varepsilon$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

The proof is analogous (using prop. 1) to that in the locally compact abelian case ([4] p. 431).

PROPOSITION 2. *Let G be a topological group. Let H be a compact group. Then the following assertions are equivalent:*

(i) *There is a continuous homomorphism φ of G into H such that $\overline{\varphi(G)}=H$.*

(ii) *H is isomorphic to the compact group $S(\Gamma)$ for some Hopf subalgebra Γ of $R(G)$.*

(iii) *There is a Hopf algebra monomorphism ψ of $R(H)$ into $R(G)$.*

Proof. It is clear that (i) implies (iii) and that (ii) implies (i). Suppose that (iii) holds. The map ψ^* of $S(R(G))$ into $S(R(H))$ defined by $\psi^*(s)=s \circ \psi$ is a continuous group homomorphism. There exists a continuous group homomorphism ψ' of G into H defined by the commutativity of

$$\begin{array}{ccc} S(R(G)) & \xrightarrow{\psi^*} & S(R(H)) \\ {\scriptstyle \varphi_{R(G)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_{R(H)}} . \\ G & \xrightarrow{\psi'} & H \end{array}$$

The relation $\overline{\psi'(G)} \neq H$ implies the existence of $f \in R(H)$ with $f \neq 0$ and $f(\psi'(x))=0$ for any $x \in G$. This contradicts the equality $f \circ \psi' = \psi(f)$. Therefore (iii) implies (i). It remains to prove that (i) implies (ii). Consider the Hopf algebra monomorphism φ^* of $R(H)$ into $R(G)$ defined by $\varphi^*(f)=f \circ \varphi$ and set $\Gamma=\varphi^*(R(H))$. To every $f \in R(H)$ there corresponds a function on $S(\Gamma)$ defined by $s(\varphi^*(f))$ for every

$s \in S(\Gamma)$. This map is a Hopf algebra isomorphism of $R(H)$ onto $R(S(\Gamma))$ and therefore H and $S(\Gamma)$ are isomorphic.

Remark. From the approximation theorem it follows that $S(R(G))$ is isomorphic to the almost periodic compactification of G ([8] p. 168).

3. Some results concerning compact groups

For a compact group G we have $\varphi(G)=S(R(G))$ (we set $\varphi_{R(G)}=\varphi$). This equality permits us to characterize the topological properties of G (as in the abelian case) using the "algebraic" properties of $R(G)$.

First we introduce some notations. If $\mathscr{H}$ is a Hopf subalgebra of $R(G)$, let $\mathscr{H}^{\perp}$ denote the closed normal subgroup of G defined by $\{h \in G \mid {}_h f = f \text{ for every } f \in \mathscr{H}\}$. Conversely, if H is a closed normal subgroup of G, let $H^{\perp}$ be the Hopf subalgebra of $R(G)$ defined by $\{f \in R(G) \mid {}_h f = f \text{ for every } h \in H\}$. In [2] the following result was proved:

THEOREM 1. *For every compact group G, $G_0^{\perp}=\{f \in R(G) \mid f$ is an algebraic element of the $\mathbf{C}$-algebra $R(G)\}$, where G_0 denotes the connected component of the identity in G.*

Proof. We prove at first that the above conditions are sufficient to insure the local connectedness of a compact group G.

THEOREM 2. *A compact group G is locally connected if and only if every finite set of representative functions on G is contained in a finitely generated Hopf subalgebra $\mathscr{H}$ of $R(G)$ such that every non constant element of $R(\mathscr{H}^{\perp})$ is not algebraic.*

Proof. We prove at first that the above conditions are sufficient to insure the local connectedness of G. For every open neighborhood U of e in G there exists an $\varepsilon>0$ and there exists a sequence $\{f_j\}_{j=1}^n \subset R(G)$ such that the set $\{x \in G \mid |f_j(x)-f_j(e)| < \varepsilon \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ is contained in U. This implies that $\mathscr{H}(f_1,\ldots,f_n)^{\perp} \subset U$. By hypothesis there exists a finitely generated Hopf subalgebra $\mathscr{E}$ of $R(G)$ with $\mathscr{E} \supset \mathscr{H}(f_1,\ldots,f_n)$ and $\mathscr{E}^{\perp}$ connected. Let π be the canonical map of G onto $G/\mathscr{E}^{\perp}$. The factor group $G/\mathscr{E}^{\perp}$ is a Lie group, since $R(G/\mathscr{E}^{\perp})$ and $\mathscr{E}$ are isomorphic. Let Σ be a fundamental system of open connected neighborhoods of $\pi(e)$ in $G/\mathscr{E}^{\perp}$. It is easy to demonstrate the existence of a subset $O \in \Sigma$ with $\pi^{-1}(O) \subset U$. It suffices to prove that $\pi^{-1}(O)$ is connected. Suppose the contrary. There exist open subsets of G V_1, V_2 such that $V_1, V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ and $V_1 \cup V_2 = \pi^{-1}(O)$. The existence of $x \in G$ with $\pi(x) \in \pi(V_1) \cap \pi(V_2)$ contradicts the connectedness of $x\mathscr{E}^{\perp}$. We therefore have $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$ and this implies that O is not connected.

For the second part of the proof, we suppose that $R(G)$ does not satisfy the above

conditions, and show that G is not locally connected. In this case there exists an $M \subset R(G)$ with $|M| < \infty$, such that every Hopf subalgebra $\mathscr{E}$ of $R(G)$ with $\mathscr{E} \supset M$ and $\mathscr{E}^\perp$ connected is not finitely generated. Let $\mathscr{H}$ be the Hopf subalgebra of $R(G)$ with the property that $\mathscr{H}^\perp$ is the connected component of the unit element in the subgroup $\mathscr{H}(M)^\perp$ (the connected component of a normal closed subgroup is itself a normal subgroup). Denoting by α the canonical map of $G/\mathscr{H}^\perp$ onto $G/\mathscr{H}(M)^\perp$, we have $\operatorname{Ker}\alpha = \mathscr{H}(M)^\perp/\mathscr{H}^\perp$. By a generalization of a wellknown theorem of Hurewicz ([9] theorem 4), $\dim \operatorname{Ker}\alpha = 0$ implies $\dim G/\mathscr{H}^\perp \leqslant \dim G/\mathscr{H}(M)^\perp$, and then $\dim S(\mathscr{H}) \leqslant \dim S(\mathscr{H}(M))$. It follows that $\dim S(\mathscr{H})$ is finite, because $S(\mathscr{H}(M))$ is a compact Lie group. By hypothesis $\mathscr{H}$ is not finitely generated. This fact implies that $S(\mathscr{H})$ is not locally connected, and therefore (since the natural map of G onto $G/\mathscr{H}^\perp$ is open) that G itself is not locally connected.

Remarks.

1) In this proof we have used the two following results: α) A compact group G is a Lie group if and only if the **C**-algebra $R(G)$ is finitely generated; β) Every compact (or locally compact) locally connected group with a finite dimension is a Lie group.

2) The corresponding classical result ([10] p. 33) for compact abelian groups is: G is locally connected if and only if every finite number of continuous characters over G is contained in a finitely generated subgroup H of $\hat{G}$ (group of all continuous characters over G) such that $\hat{G}/H$ is torsion-free.

We denote by $\mathscr{D}(G)$ the set of all **C**-derivations of the **C**-algebra $R(G)$ which commute with complex conjugation and every left translation. Let $D \in \mathscr{D}(G)$. For every $f \in R(G)$ consider the finite dimensional G-module $R(f) = [\{f_x \mid x \in G\}]$. By ([7] prop. 2.5) $R(f)$ is stable under D. This implies that $\sum_{n=1}^{\infty} D^n f/n!$ defines an element $\exp Df$ of $R(f)$ and therefore of $R(G)$.

PROPOSITION 3. *For every $D \in \mathscr{D}(G)$ the map $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(e)\exp tD)$ is a one-parameter subgroup of G. Conversely every one-parameter subgroup admits such a unique representation.*

Proof. Let $D \in \mathscr{D}(G)$ and $t \in \mathbf{R}$. It is easy to prove that $\exp tD(fg) = \exp tD(f)\exp tD(g)$ for every $f, g \in R(G)$. It follows that $\exp tD$ is a **C**-algebra endomorphism of $R(G)$. From the fact that $\exp tD$ commutes with complex conjugation it follows that $\varphi(e)\exp tD \in S(R(G))$. We have therefore that $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(e)\exp tD)$ is a one-parameter subgroup of G.

Let $\lambda \in \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(\mathbf{R}, G)$. For every $f \in R(G)$ and $t \in \mathbf{R}$ set $U_t f = f_{\lambda(t)}$. The operator U_t is unitary under the scalar-product of $R(G)$ defined by the normalized Haar measure of G. We denote by U_t' the extension of U_t to $L^2(G)$. There exists an operator D of $L^2(G)$ with iD selfadjoint and such that $\lim_{t \to 0} \|(U_t' f - f)t^{-1} - Df\|_2 = 0$ for

every $f \in R(G)$. The operator $-iD$ has the spectral representation $\int_{-\infty}^{+\infty} \mu \, dE_\mu$ and U_t' is equal to $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu t} \, dE_\mu$. For every f in $R(G)$ and $t \neq 0$ we have $(U_t f - f) t^{-1} \in R(f)$ and therefore $Df \in R(f)$, i.e. $D(R(G)) \subset R(G)$. It is easy to verify that the restriction of D to $R(G)$ is contained in $\mathscr{D}(G)$. As above we can define $\exp tD$. It is clear that the **C**-algebra endomorphism $\exp tD$ commutes with complex conjugation and left translations and invoking ([7] Lemma 5.4) we obtain that $\exp tD$ is a unitary operator of $R(G)$. For every f of $R(G)$ we have $\lim_{t \to 0} \|(\exp tDf - f) t^{-1} - Df\|_2 = 0$. Let U_t'' be the extension of $\exp tD$ to $L^2(G)$. As above there exists an operator D' of $L^2(G)$ with iD' self-adjoint and $\lim_{t \to 0} \|(U_t'' h - h) t^{-1} - D'h\|_2 = 0$ for every $h \in R(G)$. We have therefore $D = D'$ and $U_t'' = U_t'$ i.e. $\exp tDf = f_{\lambda(t)}$ for every $f \in R(G)$.

COROLLARY. For a compact Lie group G, the Lie algebra g of G is isomorphic to $\mathscr{D}(G)$.

Remarks.

1) Proposition 3 gives a characterisation of the Lie algebra of a compact group. The corollary has been already proved for more general Lie groups than compact Lie groups ([7] Theorem 11.1).

2) For the second part of the proof of proposition 3 Professor G. Hochschild has suggested a method which avoids the use of operator theory in $L^2(G)$. If V is any finite dimensional right-submodule of $R(G)$ the map $t \mapsto U_t$ (where $U_t f = f_{\lambda(t)}$) defines a continuous homomorphism of **R** into the full linear group of V. This homomorphism is therefore of the form $t \mapsto \exp tD_V$, where D_V is some linear endomorphism of V. Since $R(G)$ is the union of such V's, the D_V's match up to give a linear endomorphism D of $R(G)$ with the required properties.

We set for $\Gamma \subset R(G)$ and $M \subset \mathscr{D}(G)$:

(i) $\mathrm{Ann}(\Gamma) = \{D \in \mathscr{D}(G) \mid Df = 0 \text{ for every } f \in \Gamma\}$,

(ii) $\mathscr{H}_l(\Gamma)$ = the least subalgebra of $R(G)$ invariant under the left-translations and the complex conjugation containing Γ.

(iii) $\mathrm{Ann}(M) = \{f \in R(G) \mid Df = 0 \text{ for every } D \in M\}$.

It is easy to see that $\mathrm{Ann}(\Gamma)$ is a Lie subalgebra of $\mathscr{D}(G)$, and that $\mathrm{Ann}(M) = \mathscr{H}_l(\mathrm{Ann}(M))$.

PROPOSITION 4. *For every subset Γ of $R(G)$, we have $\mathscr{H}_l(\Gamma \cup \mathscr{A}) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\Gamma))$, where $\mathscr{A}$ is the subset of all algebraic elements of $R(G)$.*

Proof. Denote by $\lambda(D)$ the element of $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{R}, G)$ corresponding to $D \in \mathscr{D}(G)$. From $f \in \lambda(D)(\mathbf{R})_r^{\perp}$ [1]) it follows that $\exp tDf = f$ for every $t \in \mathbf{R}$ i.e. $f \in \mathrm{Ker}\, D$ and

[1]) For every subset H of G, $H_r^{\perp}$ denotes the set $\{f \in R(G) \mid f_x = f \text{ for every } x \in H\}$ and for any subalgebra Γ of $R(G)$ with $\mathscr{H}_l(\Gamma) = \Gamma\Gamma_r^{\perp}$ is the closed subgroup $\{x \in G \mid f_x = f \text{ for every } f \in \Gamma\}$.

conversely, we have therefore $\lambda(D)(\mathbf{R})_r^{\perp} = \operatorname{Ker} D$. Using the fact that every one-parameter subgroup is contained in G_0 we obtain $\operatorname{Ker} D \supset \mathscr{A}$ and in particular $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(\Gamma)) \supset \mathscr{H}_l(\Gamma \cup \mathscr{A})$. It is easy to verify that $\operatorname{Ann}(\Gamma) = \{D \in \mathscr{D}(G) \mid \lambda(D)(\mathbf{R}) \subset \mathscr{H}_l(\Gamma \cup \mathscr{A})_r^{\perp}\}$. Since the closed subgroup $\mathscr{H}_l(\Gamma \cup \mathscr{A})_r^{\perp}$ is connected, we have $\mathscr{H}_l(\Gamma \cup \mathscr{A}) = \{\lambda(D)(\mathbf{R}) \mid D \in \mathscr{D}(G), \lambda(D)(\mathbf{R}) \subset \mathscr{H}_l(\Gamma \cup \mathscr{A})_r^{\perp}\}_r^{\perp}$ and therefore $\mathscr{H}_l(\Gamma \cup \mathscr{A}) = \{\lambda(D)(\mathbf{R}) \mid D \in \operatorname{Ann}(\Gamma)\}_r^{\perp} = \bigcap \{\operatorname{Ker} D \mid D \in \operatorname{Ann}(\Gamma)\} = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(\Gamma))$.

Remarks.

1) For $\Gamma = \emptyset$ we obtain $\mathscr{A} = \operatorname{Ann}(\mathscr{D}(G))$ which gives another characterisation of the set of all algebraic elements of $R(G)$.

2) The group G is solenoïdal if and only if there is $D \in \mathscr{D}(G)$ with $\operatorname{Ker} D = \mathbf{C} \cdot 1_G$.

3) There is a bijective map between the closed subgroups of G_0 and the Lie subalgebras M of $\mathscr{D}(G)$ such that $M = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(M))$. That is, to every closed subgroup H of G_0 we associate $M = \operatorname{Ann}(H_r^{\perp})$. The subgroup H is normal in G if and only if M is an ideal of $\mathscr{D}(G)$.

THEOREM 3. *A compact group G is arcwise connected if and only if for every $x \in G$ there is an element D of $\mathscr{D}(G)$ such that the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{\varphi(x)} & \mathbf{C} \\ {\scriptstyle \exp D}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle \varphi(e)} \\ & R(G) & \end{array}$$

LEMMA. *A compact group is arcwise connected if and only if it is the union of all one-parameter subgroups.*

Proof. By ([11] Theorem 1) every arc beginning at the unit element is homotopic to the restriction to $[0,1]$ of a one-parameter subgroup.

Proof of theorem 3. Suppose first that G is arcwise connected. In this case for every $x \in G$ there exists $\lambda \in \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(\mathbf{R}, G)$ and $a \in \mathbf{R}$ with $\lambda(a) = x$. There exists $D \in \mathscr{D}(G)$ such that $\lambda(at) = \varphi^{-1}(\varphi(e) \exp t D)$ and therefore $\varphi(e) \exp D = \varphi(x)$.

Conversely suppose that for every $x \in G$ there exists $D \in \mathscr{D}(G)$ such that $\varphi(x) = \varphi(e) \exp D$. If we set $\lambda(t) = \varphi^{-1}(\varphi(e) \exp t D)$ we obtain $\lambda \in \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(\mathbf{R}, G)$ and $\lambda(1) = x$.

Remarks.

1) The classical result for compact abelian groups ([3]) is: G is arcwise connected if and only if for every $x \in G$ there exists $\lambda \in \operatorname{Hom}(\hat{G}, \mathbf{R})$ such that

$$\begin{array}{ccc} \hat{G} & \xrightarrow{x} & S^1 \\ {\scriptstyle \lambda}\searrow & & \uparrow{\scriptstyle e^{2\pi i}} \\ & \mathbf{R} & \end{array}$$

commutes.

2) It is not necessary to give conditions which imply the local arcwise connectedness of G because a compact connected group is locally arcwise connected if and only if it is arcwise connected ([11]).

The dimension of a compact abelian group is equal by ([10] p. 32) to the rank of its character group. The next theorem is to be considered as a possible generalization to the non abelian case.

THEOREM 4. *The dimension of a compact group G is equal to the dimension of the real vector space $\mathscr{D}(G)$.*

Proof. There exists an inverse system $(G_\alpha, u_{\alpha\beta})$ consisting of compact Lie groups G_α and continuous epimorphisms $u_{\beta\alpha}: G_\beta \to G_\alpha (\alpha < \beta)$ such that $G \cong \varprojlim (G_\alpha, u_{\alpha\beta})$. We denote by π_α the projection of G onto G_α; by R_α, the Hopf subalgebra of $R(G)$, $(\operatorname{Ker}\pi_\alpha)^\perp$; by $\mathscr{D}_\alpha$ the set of all $\mathbf{C}$-derivations of R_α which commute with complex conjugation and all left translations and finally by $i_{\alpha\beta}$ $(\alpha < \beta)$ the natural injection of R_α into R_β. It follows from ([2]) that $R(G)$ and $\varinjlim (R_\alpha, i_{\alpha\beta})$ are isomorphic. The restriction $R_{\beta\alpha}$ $(\alpha < \beta)$ of an element of $\mathscr{D}_\beta$ to R_α belongs to $\mathscr{D}_\alpha$. The differential $u'_{\beta\alpha}$ of $u_{\beta\alpha}$ is a linear map of the Lie algebra g_β of G_β onto g_α. It is easy to verify that the projective systems $(\mathscr{D}(G), \mathrm{id})$, $(\mathscr{D}_\alpha, \mathrm{Res}_{\alpha\beta})$ and $(g_\alpha, u'_{\alpha\beta})$ are isomorphic. From $\dim \mathscr{D}_\alpha = \dim G_\alpha$ (corollary of prop. 3), $\dim G = \sup_\alpha \dim G_\alpha$ and $\dim \mathscr{D}(G) = \sup_\alpha \dim \mathscr{D}_\alpha$ the theorem follows.

4. Applications

For non-compact groups the relations between the properties of G and those of $R(G)$ are more complicated.

If the $\mathbf{C}$-algebra $R(G)$ of a locally compact maximally almost periodic group G is finitely generated, then G is a Lie group. The condition is not necessary. However, if G is a Lie group such that G/G_0 is finite then $R(G)$ is finitely generated if and only if the factor group of G modulo the closure of the commutator of G_0 is compact ([7] theorem 11.1).

PROPOSITION 5. *If a topological group G is connected, then every non constant representative function over G is non algebraic. If every representative function over a maximally almost periodic group is algebraic then the group is totally disconnected.*

Proof. The connectedness of G implies the same property for $S(R(G))$. From Theorem 1 the first part of proposition 5 follows. The proof of the second part is completely analogous.

THEOREM 5. *Every locally countably compact torsion group with a maximally almost periodic connected component of the identity is totally disconnected.*

Proof. Suppose that G is a compact torsion group. For every $f \in R(G)$ consider $R(f)$ and the corresponding continuous finite dimensional representation ϱ_f; $\varrho_f(G)$ is a compact torsion Lie group and therefore is a finite group. It follows $\operatorname{Ker} \varrho_f \supset G_0$ i.e. $f \in G_0^{\perp}$. Using theorem 1, we have that G is totally disconnected. For the general case consider, the continuous map $\alpha_n : G \to G$ defined by $\alpha_n(x) = x^n$ for every positive integer n. By assumption we have $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \alpha_n$, the category theorem of Baire implies the existence of n_0 such that $\operatorname{Ker} \alpha_{n_0}$ is open and therefore $\operatorname{Ker} \alpha_{n_0} \supset G_0$. From this it follows that $S(R(G_0))$ is a torsion group. Using the first part of the proof, theorem 1 and proposition 5 we have the desired result.

Remark. This theorem generalizes a result proved by Braconnier ([1] p. 51) for the case of a locally compact abelian group.

BIBLIOGRAPHY

[1] BRACONNIER, J., *Sur les groupes topologiques localement compacts*, J. Math. Pures et Appl. [N. S.] *27* (1948), 1–85.
[2] DERIGHETTI, A., *Über die Zusammenhangskomponente des Neutralelements einer kompakten Gruppe*, Math. Zeit. (to appear).
[3] DIXMIER, J., *Quelques propriétés des groupes abéliens localement compacts*, Bull. Sci. Math. *81* (1957), 38–48.
[4] HEWITT, E. and ROSS, K. A., *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. I (Springer, 1963).
[5] HEWITT, E. and ZUCKERMAN, H. S., *A Group-Theoretic Method in Approximation Theory*, Ann. of Math. (2) *52* (1950), 557–567.
[6] HOCHSCHILD, G., *Structure of Lie groups* (Holden-Day, San Francisco 1965).
[7] HOCHSCHILD, G. and MOSTOW, G. D., *Representations and Representative Functions of Lie Groups*, Ann. of Math. *66* (1957), 495–542.
[8] LOOMIS, L. H., *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis* (Van Nostrand, Princeton 1953).
[9] MORITA, K., *On Closed Mappings and Dimension*, Proc. Japan Academy *32* (1956), 161–165.
[10] PONTRJAGIN, L. S., *Topologische Gruppen*, Bd. II (Teubner, Leipzig 1958).
[11] RICKERT, N. W., *Arcs in locally compact groups*, Math. Annalen *172* (1967), 222–228.

Forschungsinstitut für Mathematik,
E.T.H., Zürich, Switzerland

Eingegangen den 18.2.69

On the Gauss Mapping for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Sphere*

By KATSUMI NOMIZU and BRIAN SMYTH

The proof of the Bernstein conjecture on minimal hypersurfaces in Euclidean space – for those dimensions in which it is known (see [1], [2], [4]) – raises the following interesting speculation on the geometry of minimal hypersurfaces in the Euclidean spheres:

If the Gauss image of a compact minimal hypersurface M^n in the Euclidean sphere S^{n+1} lies in a closed hemisphere of S^{n+1}, then M^n must be a great hypersphere in S^{n+1}.

E. de Giorgi [2] and J. Simons [4] have shown that the Gauss image of a minimal hypersurface other than a great hypersphere cannot lie in an open hemisphere. We prove here that the above speculation is indeed true and generalizes to hypersurfaces of constant mean curvature (Theorem 2).

To prove this result we first obtain a characterization of the hyperspheres (great or small) of S^{n+1} among all complete hypersurfaces of S^{n+1} in terms of their Gauss images (Theorem 1). With this preparation the main theorem follows more or less directly on using the standard integral formulas for hypersurfaces in the sphere.

We follow here the terminology and notations of Chapter VII, Volume II, of Kobayashi–Nomizu [3].

We should like to acknowledge conversations with W. Fleming which gave the motivation for this work.

§ 1. The Gauss Mapping

In the sequel M will be a complete orientable Riemannian manifold of dimension n and $f: M \to S^{n+1}$ is an isometric immersion of M into the unit sphere S^{n+1} in the Euclidean space $\mathbf{E}^{n+2}$ with centre at the origin. By a hypersphere Σ^n in S^{n+1} we will mean the intersection of S^{n+1} with a hyperplane in $\mathbf{E}^{n+2}$. Σ^n is called a great (equatorial) or small (non-equatorial) hypersphere according as the hyperplane passes through the origin of $\mathbf{E}^{n+2}$ or not. It may of course degenerate into a single point.

Since M is orientable we may choose a global field of unit vectors ξ, normal to M in S^{n+1} with respect to the immersion f. For vector fields X and Y on M the Riemannian connections $\tilde{\nabla}$ and ∇ of S^{n+1} and M, respectively, are related by

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\,\xi,$$

* This work was supported by National Science Foundation Grants GP-7610, GP-7403.

where g is the metric on M and A is the symmetric tensor field of type (1.1) on M defined by

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -AX.$$

The Gauss mapping

$$\phi: M^n \to S^{n+1}$$

is defined by $\phi(p) = \xi_{f(p)} \in S^{n+1}$ for each $p \in M$. $\phi(M)$ is called the Gauss image of M. Depending, as it does, on the choice of ξ, the Gauss image is only determined to within the antipodal mapping of S^{n+1}. Thus the statement that the Gauss image of M is contained in a closed hemisphere (or in a hypersphere) of S^{n+1} is independent of the Gauss mapping selected. We remark that $\phi(\Sigma^n)$ is a point (resp. a small hypersphere) of S^{n+1} if Σ^n is a great (resp. small) hypersphere of S^{n+1}.

THEOREM 1. *Let M be a complete orientable Riemannian manifold of dimension $n \geqslant 2$ isometrically immersed in S^{n+1} and let ϕ be the associated Gauss mapping.*

i) *If $\phi(M)$ is contained in a great hypersphere of S^{n+1} then M is imbedded as a great hypersphere and so $\phi(M)$ is a single point.*

ii) *If $\phi(M)$ is contained in a small hypersphere of S^{n+1} but is not a single point, then M is imbedded as a small hypersphere and $\phi(M)$ is a full small hypersphere.*

Proof. We first observe that either of the above conditions on the Gauss image gives rise to a unit vector a in $\mathbf{E}^{n+2}$ for which $\langle \xi, a \rangle$ is a constant on M – α say – with $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Here $\langle\ ,\ \rangle$ denotes the Euclidean metric on $\mathbf{E}^{n+2}$. With the usual identification of tangent spaces under the immersion f of M into S^{n+1} we define a vector field Z on M by

$$Z_p = a - \langle \xi_{f(p)}, a \rangle \, \xi_{f(p)} - \langle x_{f(p)}, a \rangle \, x_{f(p)}, \tag{1}$$

where $x_{f(p)}$ is the position vector of $f(p) \in S^{n+1}$ in $\mathbf{E}^{n+2}$. Denoting the connection on $\mathbf{E}^{n+2}$ by D and differentiating the equation $\langle \xi, a \rangle = \alpha$ on M, we obtain, for $X \in T(M)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle D_X \xi, a \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X \xi - \langle X, \xi \rangle \, x, a \rangle \\ &= \langle -AX, a \rangle \end{aligned}$$

since $\tilde{\nabla}_X \xi = -AX$ and $\langle X, \xi \rangle = 0$. In other words $g(AX, Z) = 0$ for all $X \in T(M)$, so that

$$Z \in \operatorname{Ker} A \tag{2}$$

by the symmetry of A. Moreover

$$\left.\begin{aligned}\nabla_X Z &= \tilde{\nabla}_X Z - g(AX, Z)\,\xi \\ &= \tilde{\nabla}_X Z \quad \text{by (2)}, \\ &= D_X Z + g(X, Z)\,x \\ &= -\langle \xi, a\rangle D_X \xi - \langle X, a\rangle x - \langle x, a\rangle X + g(X, Z)\,x \quad \text{by (1)}, \\ &= \langle \xi, a\rangle AX - \langle x, a\rangle X \\ &= (\alpha A - \beta I)\,X,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

where I is the identity transformation and the function β on M is given by $\beta(p) = \langle x_{f(p)}, a\rangle$. By reason of Codazzi's equation and (2) we have

$$\begin{aligned}(\nabla_Z A)\,X &= (\nabla_X A)\,Z \\ &= \nabla_X (AZ) - A\nabla_X Z \\ &= (\beta A - \alpha A^2)\,X\end{aligned}$$

for each $X \in T(M)$, that is,

$$\nabla_Z A = \beta A - \alpha A^2. \tag{4}$$

In particular

$$Z(\operatorname{Tr} A) = \operatorname{Tr}(\nabla_Z A) = \beta \operatorname{Tr} A - \alpha \operatorname{Tr} A^2 \tag{5}$$

where Tr denotes the trace.

The zeroes of the vector field Z occur at those points p of M where a is orthogonal to $f_*(T_p(M))$. If $Z \equiv 0$ on M, $f(M)$ lies in one of the hyperspheres determined by the system of hyperplanes in $\mathbf{E}^{n+2}$ orthogonal to a, and by completeness of M, the set $f(M)$ is a full hypersphere in S^{n+1}. In particular, when $\alpha = 1$ (i.e. $\xi = a$) we have $Z \equiv 0$ and $\langle x, a\rangle \equiv 0$, so that $f(M)$ is a full great hypersphere.

We therefore suppose henceforth that $Z \not\equiv 0$ on M and as remarked above we must then have $0 \leqslant \alpha < 1$. It will be shown that $f(M)$ is then a full great hypersphere, a separate argument being necessary for the case $\alpha = 0$.

By virtue of (2) and (3), $\nabla_Z Z = -\beta Z$ on M and therefore $Z/\|Z\|$ is a geodesic vector field on the open submanifold

$$M' = \{p \in M;\, Z_p \neq 0\}$$

of M, where $\|Z\|$ denotes the length of Z. Fixing $p_0 \in M'$, let γ be the geodesic (parametrized by arc length s and extended indefinitely in both directions along M) which emanates from p_0 tangent to Z_{p_0}. By virtue of the above remarks, the vector field Z is tangent to γ along γ. Consider the real function h defined on $\mathbf{R}$ by

$$h(s) = g\big(\dot{\gamma}(s), Z_{\gamma(s)}\big)$$

where $\vec{\gamma}(s)$ is the velocity vector of $\gamma(s)$. Let (a, b) be the maximal interval (possibly semi-infinite or infinite) containing 0 for which $\gamma((a, b))$ lies in the connected component of M' containing p_0. Then

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \vec{\gamma}(s)\, g(\vec{\gamma}(s), Z_{\gamma(s)}) \\ &= g(\vec{\gamma}(s), \nabla^{\rightarrow}_{\gamma(s)} Z_{\gamma(s)}) \\ &= g(\vec{\gamma}(s), (\alpha A - \beta I)\,\vec{\gamma}(s)) \quad \text{by (3)}, \\ &= -\beta \circ \gamma(s), \quad s \in (a, b), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

since $\vec{\gamma}(s)$ is a multiple of Z when $s \in (a, b)$ and $Z \in \operatorname{Ker} A$ by (2). Thus

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2h}{ds^2} &= -\frac{d}{ds}\langle x_{\gamma(s)}, a\rangle \\ &= -\langle \vec{\gamma}(s), a\rangle \\ &= -h(s), \quad s \in (a, b). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

The solution of this differential equation with initial conditions $dh/ds(0) = -\beta \circ \gamma(0) = -\beta_0$ and $h(0) = \sqrt{1-\alpha^2-\beta_0^2}$ is

$$h(s) = \sqrt{1-\alpha^2}\cos(s + s_0), \quad s \in (a, b), \tag{8}$$

where $s_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ is determined by $\sin s_0 = \beta_0/\sqrt{1-\alpha^2}$. Furthermore, it follows from (6) that

$$\beta \circ \gamma(s) = \sqrt{1-\alpha^2}\sin(s + s_0), \quad s \in (a, b), \tag{9}$$

and from (8) that

$$Z_{\gamma(s)} = \sqrt{1-\alpha^2}\cos(s + s_0)\,\vec{\gamma}(s), \quad s \in (a, b). \tag{10}$$

$h(0)$ being positive, it follows that h is positive on (a, b) and we infer from (8) that (a, b) is a finite interval. The maximality condition on the interval (a, b) implies that $Z_{\gamma(a)} = 0$ and $Z_{\gamma(b)} = 0$ which means, by virtue of (10) and continuity, that

$$\cos(a + s_0) = \cos(b + s_0) = 0 \tag{11}$$

Letting $k(s) = (\operatorname{Tr} A) \circ \gamma(s)$ we may rewrite (5) as

$$\sqrt{1-\alpha^2}\cos(s + s_0)\frac{dk}{ds} = \sqrt{1-\alpha^2}\sin(s + s_0)\,k(s) - \alpha(\operatorname{Tr} A^2)_{\gamma(s)}$$

on (a, b), that is,

$$\sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{d}{ds}(\cos(s + s_0)\,k(s)) = -\alpha(\operatorname{Tr} A^2)_{\gamma(s)} \tag{12}$$

on (a, b).

Consequently the function $\cos(s+s_0)\,k(s)$ is monotone decreasing on (a, b) and vanishes at $s=a, b$. Thus $k=0$ along (a, b) and it follows from (12) that $\operatorname{Tr}A^2=0$ along $\gamma((a, b))$, if $\alpha\neq 0$, and in particular $A=0$ at $p_0=\gamma(0)$. Assuming $\alpha\neq 0$ we have therefore proved that $A\equiv 0$ on M'. However $Z=0$ and $\beta^2=1-\alpha^2$ on the open set $M-\bar{M}'$, so that $A\equiv((1-\alpha^2/\alpha)\,I$ there, by virtue of (3). Since M is connected and M' is non empty, $A\equiv 0$ on M. The completeness of M now implies that $f(M)$ is a full great hypersphere.

It remains to attend to the case where $Z\not\equiv 0$ and $\alpha=0$. Here the equation essential to our proof is

$$Z(\operatorname{Tr}A^2) = \operatorname{Tr}\nabla_Z A^2 = 2\beta \operatorname{Tr}A^2, \tag{13}$$

which is an easy consequence of (4). Since $\alpha=0$ it is readily verified that the equations (6)–(10) are valid for all $s\in\mathbf{R}$. Using these equations and setting $l(s)=(\operatorname{Tr}A^2)\circ\gamma(s)$, (13) reduces to

$$\cos(s+s_0)\frac{dl}{ds} = 2\sin(s+s_0)\,l(s).$$

Thus $l(s)=c/\cos^2(s+s_0)$ on $-\pi/2<s+s_0<\pi/2$ for some constant c, and we have a contradiction unless c – and therefore l – is zero; thus $A=0$ on M'. Since $\alpha=0$ and $Z=0$ on $M-M'$, we have $\beta^2=1$ on $M-M'$; by virtue of (4), $A=0$ on $M-M'$. It now follows as before that $f(M)$ is a full great hypersphere.

In every case it has been shown that f immerses M on a full hypersphere Σ^n in S^{n+1}. The completeness of M then implies that $f: M^n\to\Sigma^n$ is a covering map (p. 176, Volume I, [3]) and since Σ^n is simply connected if $n\geqslant 2$, f is an imbedding if $n\geqslant 2$. This completes the proof of the theorem.

Remark. Theorem 1 remains valid of course if $n=1$, except that f is no longer an imbedding in general.

It seems appropriate at this point to emphasise that Theorem 1 is a global result, that is to say that there is no local analogue if the assumption of completeness is dropped. Indeed the example which follows serves to construct a large class of hypersurfaces in S^{n+1} whose Gauss images lie in a great hypersphere. There is even a large class of minimal hypersurfaces having this property.

Example. Let ψ be an immersion of a connected orientable $(n-1)$-dimensional manifold N into a great hypersphere S^n in S^{n+1} With e_{n+2} denoting the unit vector orthogonal to the hyperplane of S^n in $\mathbf{E}^{n+2}$ and angle θ as coordinate on the unit circle S^1, the suspension $f: N\times S^1\to S^{n+1}$ of the immersion ψ by geodesics from the north and south poles of S^{n+1} is defined as

$$f(p, \theta) = \cos\theta\,\psi(p) + \sin\theta\,e_{n+2},$$

where p is any point of N. Choosing local coordinates $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ on N we see that

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \cos\theta \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \sin\theta\, \psi + \cos\theta\, e_{n+2}.$$

Thus f immerses $N' = \{(p, \theta) \in N \times S^1;\ \theta \neq \text{odd multiple of } \pi/2\}$ in S^{n+1}. We denote by M one of the two connected components of N'.

Let η be a unit vector field normal to N in S^n and let B be the matrix of the second fundamental form in the coordinates $(x^1, \ldots, x^{n+1})$. If ξ is a unit vector field normal to M in S^{n+1} we observe that ξ is orthogonal to $f(p, \theta)$, $f_*(\partial/\partial x^i)$ and $f_*(\partial/\partial\theta)$ and therefore to $\psi(p)$, e_{n+2} and $\partial\psi/\partial x^i$. Consequently, choosing the direction of ξ suitably we have $\xi_{f(p,\theta)} = \eta_{\psi(p)}$ for all $(p, \theta) \in M$. In particular $\langle \xi, e_{n+2} \rangle \equiv 0$ on M, that is, *the Gauss image of M lies in a great hypersphere of S^{n+1}*. On the other hand it is easily seen that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j} = \cos\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i\, \partial x^j},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial \theta} = -\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\cos\theta\, \psi - \sin\theta\, e_{n+2},$$

from which it follows that the matrix of the second fundamental form of M in the coordinates $(x^1, \ldots, x^{n+1}, \theta)$ is given by

$$A = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consequently, *M is totally geodesic (minimal) if and only if N is totally geodesic (minimal).*

§ 2. The Main Theorem

On an n-dimensional orientable Riemannian manifold isometrically immersed in S^{n+1}, the Laplacians of the functions $\langle x, a \rangle$ and $\langle \xi, a \rangle$ restricted to M are easily computed as

$$\Delta \langle x, a \rangle = \operatorname{Tr} A \langle \xi, a \rangle - n \langle x, a \rangle, \tag{14}$$

$$\Delta \langle \xi, a \rangle = -\langle \operatorname{grad}(\operatorname{Tr} A), a \rangle - \operatorname{Tr} A^2 \langle \xi, a \rangle + \operatorname{Tr} A \langle x, a \rangle, \tag{15}$$

a being any constant unit vector in $\mathbf{E}^{n+2}$. Since we will now be concerned only with hypersurfaces of constant mean curvature (i.e. $\operatorname{Tr} A = \text{constant}$ on M), we rewrite (15) as

$$\Delta \langle \xi, a \rangle = - \operatorname{Tr} A^2 \langle \xi, a \rangle + \operatorname{Tr} A \langle x, a \rangle . \tag{16}$$

Combining (14) and (16) we obtain

$$\left.\begin{aligned} \Delta \langle n\xi + \operatorname{r} Ax, a \rangle &= - \{ n \operatorname{Tr} A^2 - (\operatorname{Tr} A)^2 \} \langle \xi, a \rangle \\ &= - \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \langle \xi, a \rangle , \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ denote the characteristic roots of A.

The following result sharpens and generalizes Theorem 5.2.1 of Simons [4].

THEOREM 2. *Let M be any compact connected orientable manifold of dimension $n \geqslant 2$ immersed in the sphere S^{n+1} with constant mean curvature. If the Gauss image of M lies in a closed hemisphere of S^{n+1}, then M imbeds onto a hypersphere in S^{n+1}.*

Proof. The assumption on the Gauss image of M is equivalent to the existence of a constant unit vector a in $\mathbf{E}^{n+2}$ for which $\langle \xi, a \rangle \geqslant 0$ on M. By virtue of (17), we have $\Delta \langle n\xi + \operatorname{Tr} Ax, a \rangle \leqslant 0$ and E. Hopf's lemma implies that $\langle n\xi + \operatorname{Tr} Ax, a \rangle$ is constant on M. If M is minimal $\langle \xi, a \rangle$ is constant on M and the result follows from Theorem 1. We now assume that $\operatorname{Tr} A \neq 0$. By (17) every point of $W = \{ p \in M ; \langle \xi_{f(p)}, a \rangle > 0 \}$ is an umbilic. However $\langle n\xi + \operatorname{Tr} Ax, a \rangle$ being constant on M, it is clear that $\langle x, a \rangle$ is constant on $M - \bar{W}$. Therefore $M - \bar{W}$ immerses into a hypersphere of S^{n+1} so that $M - \bar{W}$ is also totally umbilic. Thus M immerses totally umbilically in S^{n+1} and must therefore be an imbedded hypersphere.

BIBLIOGRAPHY

[1] F. ALMGREN, *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math. *85* (1966), 277–292.

[2] E. de GIORGI, *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Della Scuola Normale Superiore di Piza, Scienze Fis. Mat. *III*, *XIX*, *I* (1965), 79–85.

[3] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Volumes I–II(John Wiley & Sons, New York 1963 and 1969 [Interscience Tracts]).

[4] J. SIMONS, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. *88* (1968), 62–105.

Brown University; University of Notre Dame

Received October 10, 1968

Über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers

von H. GROSS und P. HAFNER

Es sei K ein angeordneter Körper und Δ_1 ein reeller Abschluss von K (d.h. Δ_1 ist ein maximaler formal reeller, algebraischer Überkörper von K, dessen einzige Anordnung diejenige von K fortsetzt). Nach Artin und Schreier [1] ist ein solcher Körper Δ_1 durch K „eindeutig" bestimmt: ist Δ_2 ein weiterer reeller Abschluss von K, dann gibt es einen ordnungstreuen Körperisomorphismus zwischen Δ_1 and Δ_2, der auf K die Identität ist. Im Beweise von Artin und Schreier wird von dem bekannten Sturmschen Satze Gebrauch gemacht, wonach sich bereits in K bestimmen lässt, wieviele Nullstellen α ein Polynom $f(x)\in K[x]$ in einem reellen Abschluss Δ besitzt, α zwischen vorgeschriebenen Grenzen a und b aus K.

Ein Beweis für diese Eindeutigkeit von Δ_1 *ohne* Verwendung des Sturmschen Theorems ist uns bisher nicht bekannt. Bourbaki [2] verweist auf van der Waerden [5], der den ursprünglichen Beweis von Artin und Schreier bringt. Denselben Beweis findet man bei Jacobson [3] dargestellt. Serge Lang versucht in seiner Algebra [4] den Gebrauch des Sturmschen Theorems durch eine Verwendung des Zwischenwertsatzes zu umgehen. Der Beweis versagt, da er zur Voraussetzung macht, dass der Körper K, bei der üblichen Betragstopologie, in Δ_1 dicht liege; dazu gibt es aber Gegenbeispiele, und in der zweiten Auflage von [4] steht dann auch wieder der alte Beweis. Wie uns Herr van der Waerden berichtet, hatten er, Artin und Schreier versucht, ohne den Sturmschen Satz auszukommen.

Im folgenden beweisen wir nun durch Induktion nach dem Grad eines Polynoms $f(x)\in K[x]$, dass $f(x)$ eine Nullstelle in Δ_2 besitzt, falls es eine Nullstelle in Δ_1 besitzt. Die im Beweis stillschweigend verwendeten Sätze, nämlich der Weierstraßsche Nullstellensatz und der Satz von Rolle, folgen aus der Tatsache, dass $\Delta_1(\sqrt{-1})$ und $\Delta_2(\sqrt{-1})$ algebraisch abgeschlossen sind, d.h. ohne jede Verwendung des Sturmschen Satzes. Aus diesem Resultat ergibt sich dann die Eindeutigkeit von Δ wie üblich mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

SATZ: *$\sigma: K_1 \to K_2$ sei ein ordnungstreuer Isomorphismus irgendwelcher angeordneter Körper K_1 und K_2, Δ_i seien reelle Abschlüsse von K_i $(i=1, 2)$, $f(x)\in K_1[x]$ besitze eine Nullstelle in Δ_1. Dann gilt:*

(i) *$f^\sigma(x)\in K_2[x]$ hat eine Nullstelle in Δ_2. Ist $f(x)$ zudem noch irreduzibel, so gilt ferner:*

(ii) *es gibt Wurzeln $\alpha\in\Delta_1$, $\beta\in\Delta_2$ von $f(x)$ bzw. $f^\sigma(x)$, derart, dass der Isomorphismus $\varphi: K_1(\alpha)\cong K_2(\beta)$ mit $\varphi(\alpha)=\beta$ und $\varphi|_{K_1}=\sigma$ ordnungstreu ist.*

Bemerkung: es ist klar, dass (ii) auch für reduzible f gilt (Folgerung (a) enthält diese Überlegung). Die Voraussetzung der Irreduzibilität erspart uns eine Fallunterscheidung im Beweis.

Beweis: durch Induktion nach dem Grad von $f(x)$.

1) Für lineare Polynome ist nichts zu beweisen.

2) Induktionsvoraussetzung: der Satz sei richtig für Polynome vom Grad $\leqslant n-1$; $f(x)\in K_1[x]$ sei ein Polynom vom Grad n mit höchstem Koeffizienten 1 (o.B.d.A.) und mit einer Nullstelle in Δ_1.

Folgerungen: (a) Ist $h(x)\in K_1[x]$ ein Polynom vom Grad $\leqslant n-1$ und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ alle verschiedenen Nullstellen von $h(x)$ in Δ_1, sind ferner $\beta_1, \ldots, \beta_s$ alle verschiedenen Nullstellen von $h^\sigma(x)$ in Δ_2, so gilt:

(i) $r=s$,

(ii) es gibt einen Isomorphismus $K_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \cong K_2(\beta_1, \ldots, \beta_r)$,

der ordnungstreu ist und σ fortsetzt.

Das folgt sofort aus der Induktionsvoraussetzung (die Rolle der K_i kann auch von endlichen ordnungsisomorphen algebraischen Erweiterungen K_i', $K_i \subset K_i' \subset \Delta_i$ gespielt werden. Die dabei festgehaltenen Körper Δ_i sind je auch reelle Abschlüsse der K_i').

(b) Seien $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ nun insbesondere alle Nullstellen der Ableitung $f'(x)$ in Δ_1, β_i alle Nullstellen von $f'^\sigma(x) = f^{\sigma\prime}(x)$ in Δ_2, $\tilde{K}_1 = K_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\tilde{K}_2 = K_2(\beta_1, \ldots, \beta_r)$. Nach (a) gibt es einen ordnungstreuen Isomorphismus

$$\tau: \tilde{K}_1 \cong \tilde{K}_2,$$

der σ fortsetzt.

(c) Wir setzen zusätzlich voraus, $f(x)$ sei irreduzibel und $f^\sigma(x)$ besitze eine Nullstelle in Δ_2. $\alpha \in \Delta_1$ bzw. $\beta \in \Delta_2$ sei die grösste Nullstelle von $f(x)$ bzw. $f^\sigma(x)$. Ist $\hat{K}_i$ Teilmenge von Δ_i, so definieren α bzw. β je einen Schnitt $\hat{K}_i = U_i \cup O_i$ (disjunkt), wobei $U_1 = \{x \mid x \in \hat{K}_1, x \leqslant \alpha\}$, $O_1 = \{x \mid x \in \hat{K}_1, x > \alpha\}$, analog U_2 und O_2. Es seien nun $\hat{K}_i$ Unterkörper von Δ_i, welche $\tilde{K}_i$ umfassen und für die eine ordnungstreue Fortsetzung

$$\kappa: \hat{K}_1 \cong \hat{K}_2$$

von τ (und damit von σ) existiert. (Zu jedem $\hat{K}_1$ mit $[\hat{K}_1 : \tilde{K}_1] \leqslant n-1$ gibt es $\hat{K}_2$, so dass diese Bedingung erfüllt ist).

Behauptung:

$$\kappa(O_1) = O_2, \quad \kappa(U_1) = U_2.$$

Beweis: wir zeigen: $\kappa(O_1) \cap U_2 = \emptyset$; eine analoge Betrachtung ergibt

$\kappa^{-1}(O_2)\cap U_1=\emptyset$. Daraus wird klar, dass $\kappa(O_1)\subset O_2$, $\kappa^{-1}(O_2)\subset O_1$, also $\kappa(O_1)=O_2$ ist. Und daraus folgt natürlich auch $\kappa(U_1)=U_2$.

α ist die grösste Nullstelle von $f(x)$, also ist $f(\zeta)>0$ für alle $\zeta\in O_1$ (denn 1 ist der höchste Koeffizient in f). Falls $f'^{\sigma}(x)$ in U_2 eine Wurzel hat, bezeichnen wir die grösste Wurzel $\leqslant\beta$ von $f'^{\sigma}(x)$ mit γ; andernfalls sei γ ein beliebiges Element aus U_2. Wegen der Irreduzibilität von f^{σ} und da $\hat{K}_2$ sämtliche Nullstellen von f'^{σ} enthält, gilt $f^{\sigma}(\eta)\leqslant 0$ für alle $\eta\in[\![\gamma,\beta]\!]\subset\hat{K}_2$. Falls es ein $\xi'\in O_1$ gibt mit $\kappa(\xi')\in U_2$, so gibt es auch ein $\xi\in O_1$ mit $\kappa(\xi)\in[\![\gamma,\beta]\!]$, nämlich $\xi=\xi'$ oder $\xi=\kappa^{-1}(\gamma)$. Also gilt

$$f(\xi)>0 \quad\text{und}\quad f^{\sigma}(\kappa(\xi))\leqslant 0;$$

dies ist ein Widerspruch, da κ eine ordnungstreue Fortsetzung von τ und σ ist.

(3) Induktionsschritt: ist der Grad von $f(x)$ ungerade, so hat $f^{\sigma}(x)$ selbstverständlich eine Nullstelle in Δ_2. Ist der Grad von $f(x)$ gerade, so hat $f(x)$ in Δ_1 mindestens zwei (evtl. zusammenfallende) Nullstellen. Es sei θ die grösste Nullstelle von $f'(x)$ in Δ_1, zu der es eine Wurzel $\pi\in\Delta_1$ von $f(x)$ mit $\theta\leqslant\pi$ gibt; dann ist $f(\theta)\leqslant 0$. Nun ist $\theta\in\tilde{K}_1$, also gilt in $\tilde{K}_2$ entsprechend $f^{\sigma}(\tau(\theta))\leqslant 0$. Ist $f^{\sigma}(\tau(\theta))\neq 0$, so muss man noch den Weierstraß'schen Nullstellensatz anwenden. Damit ist (i) bewiesen.

Für den Beweis von (ii) dürfen wir annehmen, dass f irreduzibel ist über K_1 (von geradem oder ungeradem Grad). Es ist zu zeigen, dass eine Wurzel $\alpha\in\Delta_1$ von $f(x)$ existiert, so dass es einen ordnungstreuen Isomorphismus $K_1(\alpha)\to\Delta_2$ gibt, welcher σ fortsetzt. Sei α die grösste Wurzel von $f(x)$ in Δ_1, β die grösste Wurzel von $f^{\sigma}(x)$ in Δ_2. Ist $[\tilde{K}_1(\alpha):\tilde{K}_1]\leqslant n-1$, dann ist die Abbildung:

$$\varrho:\tilde{K}_1(\alpha)\cong\tilde{K}_2(\beta) \quad\text{mit}\quad \varrho(\alpha)=\beta \quad\text{und}\quad \varrho|_{K_1}=\tau$$

ein ordnungstreuer Isomorphismus. Ist $[\tilde{K}_1(\alpha):\tilde{K}_1]=n$, dann ist $f(x)$ auch irreduzibel über $\tilde{K}_1$, d.h. ϱ ist auf alle Fälle ein Isomorphismus. Wäre ϱ nicht ordnungstreu, so gäbe es ein Element

$$\omega=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i>0 \quad\text{in}\quad \tilde{K}_1(\alpha) \quad\text{mit}\quad \varrho(\omega)=\sum\tau(a_i)\beta^i<0.$$

Man hätte also ein Polynom

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\in\tilde{K}_1[x]$$

vom Grad $\leqslant n-1$ mit $p(\alpha)>0$, $p^{\tau}(\beta)<0$. Es gibt einen irreduziblen Faktor $p_0(x)$ von $p(x)$, für den ebenfalls gilt $p_0(\alpha)>0$, $p_0^{\tau}(\beta)<0$. Sind $\delta_1,\ldots,\delta_t$ alle Nullstellen von $p_0(x)$ in Δ_1, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t$ alle Nullstellen von $p_0^{\tau}(x)$ in Δ_2, $\hat{K}_1=\tilde{K}_1(\delta_1,\ldots,\delta_t)$, $\hat{K}_2=\tilde{K}_2(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)$, so gibt es nach Folgerung (a) einen ordnungstreuen Isomorphismus

$$\kappa:\hat{K}_1\cong\hat{K}_2,$$

der τ fortsetzt. Die Anzahl der Nullstellen von $p_0(x)$ in der Oberklasse $O_1 \subset \hat{K}_1$ von α ist verschieden von der Anzahl Nullstellen von $p_0^\tau(x)$ in der Oberklasse $O_2 \subset \hat{K}_2$ von β, d.h.

$$\kappa(O_1) \neq O_2$$

im Widerspruch zu Folgerung (c); ist nämlich der höchste Koeffizient a_0 von p_0 positiv, so liegen in O_1 eine gerade Anzahl Nullstellen von $p_0(x)$, während die Anzahl der Nullstellen von $p_0(x)$ in O_2 ungerade ist; analog für $a_0 < 0$. (Will man in dieser elementaren Beweisführung auch das Zählen von Vorzeichenwechseln bei mehrfachen Nullstellen zulassen – beispielsweise unter Verwendung der Taylorschen Entwicklung – dann kann man sich den Übergang von $p(x)$ zu $p_0(x)$ natürlich ersparen.)

KOROLLAR: *Sind Δ_1 und Δ_2 reelle Abschlüsse des angeordneten Körpers K, dann existiert eine ordnungstreue Isomorphie $\varphi: \Delta_1 \cong \Delta_2$ mit $\varphi|_K = \mathrm{Id}_K$.*

Beweis: Mit Hilfe des Lemmas von Zorn findet man maximale Erweiterungen $K_1 \subset \Delta_1$, $K_2 \subset \Delta_2$ von K, auf die sich die Identität von K ordnungstreu fortsetzen lässt. Wegen des vorangehenden Satzes können K_1 und K_2 aber nur maximal sein, wenn $K_1 = \Delta_1$, $K_2 = \Delta_2$ ist.

In diesem Beweis kommt man also auch ohne den Trick mit dem Hinzufügen von Quadratwurzeln aus.

LITERATUR

[1] E. ARTIN, und O. SCHREIER, *Algebraische Konstruktion reeller Körper.* Abh. Math. Sem. Hamburgischen Universität *5* (1926), 85–99 (=The collected papers of Emil Artin (Addison-Wesley, Reading, Mass. – Palo Alto – London – Dallas – Atlanta 1965), 258–272).

[2] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. VI (Hermann et Cie., Paris 1952 [Actualités Sci. Ind., No. 1179]), p. 38.

[3] N. JACOBSON, *Lectures in abstract algebra*, vol. III: *Theory of fields and Galois theory* (D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J. – Toronto, Ont. – London – New York 1964), p. 285.

[4] S. LANG, *Algebra* (Addison-Wesley, Reading 1965), pp. 275–277. Second printing: Addison-Wesley, Reading, Mass. – Palo Alto – London – Don Mills, Ont. 1967, p. 277.

[5] B. L. VAN DER WAERDEN, Algebra I, 7. Aufl. (Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1966), p. 259.

Eingegangen den 5. April 1969.

Finslersche Zahlen

von GUERINO MAZZOLA (Zürich)

Die von Finsler in [1] betrachteten totalendlichen Mengen bilden einen interessanten Bereich $\mathfrak{F}$ von endlichen Mengen, der die „natürlichen Zahlen" $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$,... enthält: Die gewöhnliche, für natürliche Zahlen definierte Addition und Multiplikation kann auf ganz $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ ausgedehnt werden; $\mathfrak{F}$ ist nicht-kommutative reguläre Halbgruppe mit Neutralelement bei beiden Operationen, welche u.a. durch ein Linksdistributivgesetz verknüpft sind.

Zu den Elementen einer „Zahlentheorie" in $\mathfrak{F}$ gehören Sätze über die Zerfällbarkeit von Zahlen aus $\mathfrak{F}$ in Produkte und Summen von multiplikativ resp. additiv unzerlegbaren Zahlen. Unsere wichtigsten Ergebnisse in dieser Richtung finden sich in den Sätzen 11, 18, 20, 23 und 25 weiter unten.

Der Bequemlichkeit halber sind die meisten der in [1] aufgestellten Sätze hier nochmals kurz bewiesen worden.

I. Definitionen

Die Wendung „dann und nur dann" kürzen wir im folgenden mit „falls" ab. Unter $\bigcup a$ verstehen wir wie üblich die Menge $\{x \mid \text{ex. } y \text{ mit } x\in y\in a\}$. Oft schreiben wir statt $\bigcup a$ auch $\bigcup x_{x\in a}$. Die Menge der natürlichen Zahlen kürzen wir mit ω ab.

Sei a eine Menge.

DEFINITION I: Sei $n\in\omega$. Wir definieren die n-te Vereinigung $\bigcup^n a$ rekursiv durch (i) $\bigcup^0 a:=a$. (ii) $\bigcup^{n^+} a:=\bigcup(\bigcup^n a)$.

DEFINITION II: a heisst totalendlich (oder Finslerzahl), falls ein n_0 existiert, sodass $\bigcup^{n_0} a=\emptyset$.

DEFINITION III: Das kleinste n_0 mit $\bigcup^{n_0} a=\emptyset$ heisst die Stufe von a. Bezeichnung: $n_0=:|a|$.

LEMMA 1: *Sei* $a_n:=\{\bigcup^{n-1} x/x\in a\}$ $n\geqslant 1$. *Dann ist* $\bigcup^n a=\bigcup a_n$.

Beweis: Induktion nach n. (i) $n=1$. Dann ist $\bigcup a=\bigcup\{\bigcup^0 x/x\in a\}=\bigcup\{x/x\in a\}$. (ii) $n=m^+$. $\bigcup^{m^+} a=\bigcup(\bigcup^m a)=\bigcup\bigcup\{\bigcup^{m-1} x/x\in a\}$. Zu zeigen ist $f:=\bigcup\times\times\{\bigcup^m x\}_{x\in a}=\bigcup\bigcup\{\bigcup^{m-1} x\}_{x\in a}$. Wir beachten, dass $y\in f$, falls $y\in\bigcup^m x_0$ für ein $x_0\in a$. Ferner ist $\bigcup^m x_0=\bigcup(\bigcup^{m-1} x_0)$. Also ist $y\in f$, falls $y\in z\in\bigcup^{m-1} x_0$. Das heisst aber $z\in\bigcup\{\bigcup^{m-1} x\}_{x\in a}$, somit $y\in\bigcup(\bigcup\{\bigcup^{m-1} x\}_{x\in a})$ QED.

LEMMA 2: *Sei a totalendlich und $|a|=n_0>0$. Dann gilt für jedes $x\in a$ $|x|\leqslant n_0-1$, und es existiert ein x_0 mit $|x_0|=n_0-1$. (Also ist jedes x in einer totalendlichen Menge wieder totalendlich.)*

Beweis: $\bigcup^{n_0}a=\emptyset$. Also wegen Lemma 1 $\bigcup a_{n_0}=\emptyset$. Daher ist $\bigcup^{n_0-1}x=\emptyset$ für alle $x\in a$. Also haben wir $|x|\leqslant n_0-1$ für alle $x\in a$. Da ferner $\bigcup^{n_0-1}a\neq\emptyset$, folgt: (i) Wenn $n_0-1=0$, dann ist a nicht $\emptyset$, sondern $\{\emptyset\}$. Also ist $|\emptyset|=0=n_0-1$. (ii) Sei $n_0-1>0$. Dann existiert ein $x_0\in a$ mit $\bigcup^{n_0-2}x_0\neq\emptyset$. Also ergibt sich $|x_0|>n_0-2$. QED.

LEMMA 3: *Es existieren nur endlich viele a zu fester Stufe n_0.*

Beweis: Für $n_0=0$ ist es klar. Sei $n_0>0$. Dann ist $|x|\leqslant n_0-1$ für alle $x\in a$. Also existieren nach Induktionsvoraussetzung nur endlich viele solcher x. Es folgt die Behauptung. QED.

Zu zwei totalendlichen Mengen werden nun rekursiv nach der Stufe dritte totalendliche Mengen definiert:

(i) Die „Summe" kann nach Finsler folgendermassen definiert werden: $\emptyset+b:=b$. $a+b:=\{\alpha+b/\alpha\in a\}$.

(ii) Das „Produkt" durch: $\emptyset b:=\emptyset$. $ab:=\bigcup_{\alpha\in a}b+\alpha b$.

Dazu zwei Bemerkungen: Man sieht sofort, dass $\emptyset+b=b=b+\emptyset$ und $b\emptyset=\emptyset=b\emptyset$ richtig ist. Wir schreiben somit, wie gewöhnlich, „0" für „$\emptyset$". Ähnlich gilt $\{\emptyset\}a=a=a\{\emptyset\}$. Daher schreiben wir auch wieder „1" für „$\{\emptyset\}$".

SATZ 4: $|a+b|=|a|+|b|$.

Beweis: Wir induzieren nach $|a|$. (i) $|a|=0$. Klar. (ii) $|a|=n^+$. Es existiert ein α_0 mit $|\alpha_0|=n$. Also ist $|\alpha_0|+|b|=|\alpha_0+b|$ maximal unter den $|\alpha+b|$, $\alpha\in a$, also ist $(|\alpha_0|+|b|)^+=|a+b|=n^++|b|=|a|+|b|$. QED.

SATZ 5: $|ab|=|a|\,|b|$.

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $|a|=0$. Klar. (ii) $|a|=n^+$. Also existiert ein $\alpha_0\in a$ mit $|\alpha_0|=n$. Also hat $b+\alpha_0 b$ maximale Stufe unter den $x\subset ab$, mithin gilt $|b+\alpha_0 b|=$ $=|ab|=|b|+|\alpha_0|\,|b|=|\alpha_0|^+\cdot|b|=|a|\cdot|b|$. QED.

SATZ 6: $(a+b)+c=a+(b+c)$. *(Assoziativgesetz.)*

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $(0+b)+c=b+c=0+(b+c)$. (ii) $(a+b)+c=$ $=\{\alpha+b\}_{\alpha\in a}+c=\{(\alpha+b)+c\}_{\alpha\in a}=\{\alpha+(b+c)\}_{\alpha\in a}$. QED.

SATZ 7: $(a+b)\,c=ac+bc$. *(Links Distributivgesetz.)*

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $(0+b)\,c=bc=0c+bc$. (ii) $(a+b)\,c=\bigcup_{\delta\in a+b}c+$ $+\delta c=\{\gamma+(\alpha+b)\,c/(\gamma,\alpha)\in c\times a\}=\{\gamma+\alpha c+bc\}_{\gamma,\alpha}=\{\varepsilon+bc/\varepsilon\in ac\}=ac+bc$. QED.

SATZ 8: $(ab)\,c=a(bc)$. *(Assoziativgesetz.)*

Beweis: Stufeninduktion. $(ab)\,c=\bigcup_{\delta\in ab}c+\delta c=\{\gamma+\delta c\}_{\gamma,\delta}=\{\gamma+(\beta+\alpha b)\,c\}_{\alpha,\beta,\gamma}=$ $=\{(\gamma+\beta c)+\alpha(bc)\}_{\alpha,\beta,\gamma}=a(bc)$. QED.

Für die natürliche Interpretation der totalendlichen Mengen und der erklären Operation mit Hilfe von „Verzweigsfiguren" siehe [1].

II. Zerlegungssätze

Es folgen jetzt die wichtigen Sätze 9 und 11 über das Abspalten von Zahlen. (Satz 9 ist das additive Analogon zu Satz 11 und findet sich schon in [1]). Im Anschluss werden einige Folgerungen bewiesen.

SATZ 9: *$a+b=c+d$ und $|a|=|c|$, falls $a=c$ und $b=d$.*

Beweis: Die Inklusion von rechts nach links ist klar. Die andere ergibt sich durch Induktion nach $|a|=|c|$.

(i) Aus $|a|=0=|c|$ folgt $a=c=0$ und $b=d$.

(ii) Sei $\{\alpha+b\}_{\alpha\in a}=a+b=c+d=\{\gamma+d\}_{\gamma\in c}$. Also existiert für jedes $\alpha\in a$ ein $\gamma\in c$ mit $\alpha+b=\gamma+d$. Somit ist nach Voraussetzung $\alpha=\gamma$ und $b=d$. Daher ist $a\subset c$. Genauso wird $c\subset a$, mithin $a=c$. QED.

LEMMA 10: *Wenn $a+b=c+d$, dann ist $b=x+d$ oder $y+b=d$.*

Beweis: Seien a und c nicht 0, da es sonst klar ist. Dann gibt es für jedes $\alpha\in a$ ein γ aus c, sodass $\alpha+b=\gamma+d$. Nach Induktionsannahme folgt das Lemma. QED.

SATZ 11: *Es ist $ab=cd\neq 0$ und $|a|=|c|$, falls $a=c\neq 0$ und $b=d\neq 0$.*

Beweis: Wir führen Induktion nach $|a|=|c|$.

(i) $|a|=1$. Dann ist $a=c=1$ und daher $b=d$. Die Behauptung sei bewiesen für alle Stufen $|a|=|c|\leqslant n+1$.

(ii) Sei $|a|=n^{++}$. Wir haben $ab=\{\beta+\alpha b\}_{\alpha,\beta}=\{\delta+\gamma d\}_{\gamma,\delta}$. Zu α_0, β_0 mit maximalen Stufen existieren ein γ_0 und ein δ_0 mit maximalen Stufen, sodass $\beta_0+\alpha_0 b=\delta_0+\gamma_0 d$. Also folgt $\alpha_0=\gamma_0$ und $b=d$, denn es ist $|\beta_0|=|\delta_0|=|b|-1=|d|-1$. Somit haben a und c die gleichen maximalen Elemente. Wenn einzusehen ist, dass $\bigcup_{\alpha\neq\max.}b+\alpha b=$ $=\bigcup_{\gamma\neq\max.}d+\gamma d$ ist, dann folgt zunächst einmal $a':=\{\alpha/|\alpha|\neq\text{maximal}\}=\{\gamma/|\gamma|\neq$ $\neq\text{maximal}\}=:c'$, und damit $a=c$. Die geforderte Gleichung gilt, wenn für alle $|\alpha_1|=\text{maximal}$ und für alle $|\alpha_0|\neq\text{maximal}$ $\emptyset=[b+\alpha_1 b]\cap[b+\alpha_0 b]$ ist, und ebenso für $|\gamma_1|=\text{maximal}$ und für alle $|\gamma_0|\neq\text{maximal}$ $\emptyset=[d+\gamma_1 d]\cap[d+\gamma_0 d]$ ist. (Wenn es keine nicht maximale α_0 und γ_0 gibt, sind wir fertig.) Wir beweisen indirekt etwa die erste Gleichung. Wäre dieser Durchschnitt nicht $\emptyset$, so existierten $\beta,\beta'\in b$, sodass $\beta+\alpha_1 b=\beta'+\alpha_0 b$. Nun ist $|\alpha_1 b|>|\alpha_0 b|$. Dann wäre nach Lemma 10 $\alpha_1 b=x+\alpha_0 b$. Jetzt vergleichen wir die Stufen auf beiden Seiten der Gleichung. Links: $|\alpha_1 b|=|ab|-|b|$. Rechts: $|x|+|\alpha_0|\,|b|<|ab|-k|b|$ mit $k\geqslant 1$. Also ist $0<-k'|b|$

mit $k' \geqslant 0$. Das ist ein Widerspruch. Genauso geht der andere Beweis. Also können wir die maximalen Elemente wegtrennen. QED.

SATZ 12: *Im Produkt* $ab = \bigcup_{\alpha \in a} b + \alpha b$ *ist die Vereinigung über die* $\alpha \in a$ *disjunkt:* $ab = \bigcup_{dis} b + \alpha b$.

Beweis: Sei $|\alpha'| = |\alpha|$ und $\alpha' \neq \alpha$. Dann ist wegen Satz 9 und 11 $[b + \alpha b] \cap [b + \alpha' b] = \emptyset$. Sei $|\alpha'| > |\alpha|$. Wenn wir einen nichtleeren Schnitt haben, ist $\alpha' b = x + \alpha b$, also $|x| \geqslant |b|$. Das ist ein Widerspruch. QED.

KOROLLAR 13: *Es ist* $\operatorname{card}(ab) = \operatorname{card}(a) \operatorname{card}(b)$.

Nun einige Bemerkungen zum Begriff der natürlichen Zahlen. Offensichtlich sind die endlichen Ordinalzahlen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,... totalendlich. Mithin ist für diese Produkt und Summe definiert. Man sieht aber ohne Mühe, dass sich die Finslerschen Operationen auf $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$ von den in der ordinalen Arithmetik üblichen arithmetischen Operationen unterscheiden. Hingegen gibt es unter den totalendlichen Mengen eine Teilfamilie, die bezüglich Addition und Multiplikation isomorph zu ω ist. Diese besteht aus den Mengen: 0, 1, $\{1\}$, $\{\{1\}\}$,. Sie... spielt daher die Rolle der natürlichen Zahlen unter den Finslerzahlen. Wir bezeichnen sie mit ω^*. Es ist etwa die n-fache Summe $a + a + \cdots + a = na$, wo $n \in \omega^*$.

SATZ 14: *Es ist* $a + b = b + a$, *falls* $a = mc$ *und* $b = nc$, *wo* $m, n \in \omega^*$.

Beweis: Induktion nach $(a, b) := \operatorname{Max}.(|a|, |b|)$. Sei $|a| \neq |b|$, sonst ist es klar wegen Satz 9.

(i) $(a, b) = 0$. Klar. (ii) $(a, b) > 0$. Wegen Lemma 10 ist entweder $b = x + a$ oder $a = y + b$. Sei etwa $a = y + b$. Dann ist $a + b = y + b + b = b + y + b$. Also ist wegen Satz 9 $y + b = b + y$. Ferner gilt $(y, b) < (a, b)$, da $|b| < |a|$ und $|y| < |a|$. Also ist $y = m' \cdot c$ und $b = nc$. Hiermit ist $a = (m' + n)\, c = mc$. QED.

SATZ 15: *Wenn* $mb = na \neq 0$, *wo* $m, n \in \omega^*$, *dann ist* $a = k'c$ *und* $b = k''c$ *und* $mb = kc$, *wo das* $\operatorname{kgV}(k', k'')$ k *teilt.*

Beweis: Wir nehmen wegen Satz 11 $|a| \neq |b|$, etwa $|b| > |a|$ an. $na = a + (n-1)\, a = b + (m-1)\, b$. Also ist $(n-1)\, a = \delta + (m-1)\, b$, somit $b = a + \delta$. Anderseits ist auch $(n-1)\, a + a = (m-1)\, b + b$, also $b = \gamma + a$, wo $|\gamma| = |\delta|$. Das ergibt:

$$(a + \delta) + (a + \delta) + \cdots + (a + \delta) = (\gamma + a) + (\gamma + a) + \cdots + (\gamma + a),$$

und

$$\delta + (a + \delta) + \cdots + (a + \delta) = \gamma + a + (\gamma + a) + \cdots + \gamma\ ,$$

was $\gamma = \delta$ zeigt. Deshalb ist nach Satz 14 $a = k'c$ und $\delta = m'c$, somit wird $b = (k' + m')\, c = k''c$, und $mb = mk''$. $c = na = nk'c$, das heisst $mk'' = nk'$; und daraus folgt mit $k := mk''$, dass das $kgV(k', k'')$ k teile. QED.

Endlich noch ein einfaches Korollar zum Links-Distributivgesetz.

KOROLLAR 16: $a_0a_1\ldots a_n=\{\alpha_n+\alpha_{n-1}a_n+\alpha_{n-2}a_{n-1}a_n+\cdots+\alpha_0a_1\ldots a_n\}$ *alle* $\alpha_i\in a_i$.

Wir fragen nun:

Wie zerfällt eine totalendliche Menge additiv und multiplikativ? Dazu zwei Definitionen:

DEFINITION

IV) a heisst mono, falls aus $a=a_1+a_2$ folgt $a_1=0$ oder $a_2=0$ (also 0 ist Monozahl)

V) a heisst prim, falls aus $a=a_1a_2$ folgt $a_1=1$ oder $a_2=1$ (also 0 ist keine Primzahl, aber 1 ist Primzahl)

SATZ 17: *Für jedes totalendliche* $a\neq0$ *existiert genau eine additive Zerlegung in Monozahlen* $\neq0$.

Beweis: Sei $a=a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_m$, wo die a_i, b_k Monozahlen $\neq0$ sind. a_n und b_m sind stufengleich, also gleich, wegen Lemma 10 und Satz 9, usw. induktiv. QED.

SATZ 18: *Zu jeder geordneten Faktorzerlegung der Stufe einer Finslerzahl existiert höchstens eine Faktorzerlegung der letzteren, sodass sich die Faktorstufen wie in der Stufenzerlegung folgen.*

Beweis: Die Eindeutigkeit im obigen Sinne ergibt sich durch Satz 11 und Induktion sofort. QED.

Nun möchten wir schliessen: $ab\neq0$ ist unzerlegbar in Monozahlen $\neq0$, falls a und b nicht additiv zerlegbar sind.

Dazu den

SATZ 19: $a(b+c)=x+c$ *für* $a, b\neq0$.

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $|a|=1$. Dann kommen wir mit $x=b$ durch. (ii) $a(b+c)=\{\beta+c+\alpha(b+c)\}_{\alpha,\beta}$ Gesucht wird x. Für $\alpha=0$ nehmen wir alle $\beta\in b$ in x auf; wenn $\alpha\neq0$ ist, dann gilt nach Voraussetzung $\alpha(b+c)=\xi'(\alpha)+c$; also nehmen wir noch alle $\beta+c+\xi'(\alpha)$ in x auf. Dieses x genügt unseren Wünschen. QED.

Zusammen mit dem Links-Distributivgesetz hat man also: Wenn $ab\neq0$ unzerlegbar ist, dann sind a und b unzerlegbar.

Und die Umkehrung:

SATZ 20: *Wenn* $ab\neq0$ *additiv zerlegbar ist, dann ist a oder b zerlegbar.*

Beweis: Induktion nach $|ab|$.

Sei $ab=k+l_0=\{\kappa+l_0\}_{\kappa\in k}$ und l_0 nicht zerlegbar. Ferner ist $ab=\{\beta+\alpha b\}_{\beta,\alpha}$. Es gibt für alle $\alpha\in a$ und $\beta\in b$ genau ein $\kappa(\alpha,\beta)$ mit $\beta+\alpha b=\kappa(\alpha,\beta)+l_0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) Es gibt ein β_0 mit $|\beta_0|=|\kappa(\alpha_0,\beta_0)|$. Also ist $\alpha_0b=l_0$, also sind α_0, b unzerlegbar.

(i0) Es gebe kein α mit $|\alpha|>|\alpha_0|$. Jedes α gleicher Stufe wie α_0 ist diesem gleich, was man durch Einsetzen sieht. Ferner existieren keine α mit $|\alpha|<|\alpha_0|$, wenn l_0 nicht zerlegbar ist. Also ist $a=1+\alpha_0=\{\alpha_0\}$.

(i1) Es existiere ein α_1 mit $|\alpha_1|>|\alpha_0|$. Sei $\beta+\alpha_1 b=\kappa(\beta,\alpha_1)+l_0$. Also ist $\alpha_1 b=v+l_0$, mit $v\neq 0$; also ist nach Induktionsvoraussetzung $\alpha_1=\bar{\alpha}_1+\bar{\bar{\alpha}}_1$, wo $\bar{\bar{\alpha}}_1$ nicht zerlegbar ist. Daher wird $\alpha_1 b=\bar{\alpha}_1 b+\bar{\bar{\alpha}}_1 b=v+\alpha_0 b$, dh. $\bar{\bar{\alpha}}_1=\alpha_0$. Somit ist $a=x+\alpha_0$, mithin zerlegbar.

(ii) Es gibt kein β_0 mit $|\beta_0|=|\kappa(\alpha_0,\beta_0)|$. Also ist für alle $\beta\in b$ (und $\alpha\in a$) $|\beta|<|\kappa(\beta,\alpha)|$. $|\beta|>|\kappa(\beta,\alpha)|$ ist ausgeschlossen, denn l_0 wäre dann zerlegbar. Somit gilt für alle $\alpha\in a$ eine Zerlegung $\alpha b=v+l_0$, $v\neq 0$. Dh. alle $\alpha\in a$ sind zerlegbar oder b ist es. Sei b nicht zerlegbar. Also sind alle $\alpha\in a$ zerlegbar: $\alpha=\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)$, wo $\mu(\alpha)$ nicht zerlegbar und nicht 0 ist. Hiermit haben wir $\alpha b=\lambda(\alpha)\,b+\mu(\alpha)\,b=\nu(\alpha)+l_0$. Da aber l_0 und $\mu(\alpha)\,b$ nicht zerlegbar sind, ist $l_0=\mu(\alpha)\,b$, also $\mu(\alpha)=\text{const.}$ für alle $\alpha\in a$. Also ist $a=\{\lambda(\alpha)\}_\alpha+\mu$. QED.

Damit haben wir den folgenden Satz gewonnen:

SATZ 21: *$ab\neq 0$ ist zerlegbar, falls a oder b zerlegbar ist.*

KOROLLAR 22: *Ein Produkt $a_0 a_1 \ldots a_n\neq 0$ ist zerlegbar, falls mindestens ein a_i zerlegbar ist.*

Aus dem Vorangehenden wollen wir zwei wichtige Folgerungen ziehen.

(I) Jede Finslerzahl ausser 0 und 1 ist Summe von Produkten von primen Monozahlen. Um dies einzusehen, beachten wir erstens, dass jede Finslerzahl Summe von Monozahlen ist und zweitens, dass jede Monozahl Produkt von primen Monozahlen ist.

(II) Der grosse FERMATsche Satz ist für Finslerzahlen gültig, falls er in ω^* gilt. Denn wenn er für Finslerzahlen stimmt, dann auch für ihre Stufen, also in ω^*. Nehmen wir ein Tripel a, b, c von totalendlichen Mengen. Es ist $a^n+b^n=c^n$ wegen Satz 21 nur für zerlegbare c. Um ein Gegenbeispiel zu finden, muss also die Zerlegbarkeit von c wesentlich verwendet werden.

Wir interessieren uns wegen der Folgerung (I) für Produkte von primen Monozahlen. Dazu den

SATZ 23: *Sei $ac=bd\neq 0$ mit c und d mono, prim und $\neq 1$. Dann ist $c=d$ (und wegen Satz 11 $a=b$).*

Beweis: Induktion nach $(a,b)\,(=\text{Max}(|a|,|b|))$

(i) $(a,b)=1$. Also $a=b=1$ und $c=d$.

(ii) $(a,b)>1$. Das heisst $|a|$ oder $|b|>1$. Behauptung: $|a|$ und $|b|>1$. Beweis: Wäre $a=1$ und $|b|>1$, dann wäre $c=bd$, aber dann könnte c nicht prim sein, denn b und d sind grösser als 1. Seien $\alpha_0\in a$, $\beta_0\in b$, $\gamma\in_0 c$, $\delta_0\in d$ alle maximal (also α_0 und $\beta_0\neq 0$) mit $\gamma_0+\alpha_0 c=\delta_0+\beta_0 d$. Sei weiter $\alpha_0=\alpha_0'+\alpha_0''$, wo $\alpha_0''\neq 0$ und mono, $\beta_0=\beta_0'+\beta_0''$, wo

$\beta_0'' \neq 0$ und mono. Dann ist $0 \neq \alpha_0'' c = \beta_0'' d$, da c und d mono sind. Also ist $c = d$. QED.

KOROLLAR 24: *Ein Produkt von primen Monozahlen* $\neq 1$ *ist eindeutig, dh., wenn* $a_0 a_1 \ldots a_n = b_0 b_1 \ldots b_m$ *ist, wo die* a_i *und die* b_k *prim, mono und* $\neq 1$ *sind, dann ist* $n = m$ *und* $a_i = b_i$ *für alle* i.

Beweis: $a_0 a_1 \ldots a_n = (a_0 a_1 \ldots)\, a_n = (b_0 b_1 \ldots)\, b_m$. Also ist $a_n = b_m$. Usf. Somit ergibt sich der wichtige

SATZ 25: (Zerlegungssatz) *Jede totalendliche Menge* $\neq 0$ *lässt sich als eindeutige Summe von eindeutigen Produkten von primen Monozahlen schreiben.*

Beweis: Satz 9 und Korollar 24.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FINSLER, *Totalendliche Mengen*, Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich (Zürich) *108*, H. 2 (1963).
[2] FINSLER, *Zur Goldbachschen Vermutung*, Elem. Math. (Basel) *XX*/6 (1965).

Eingegangen den 17. Februar 1969

Imbeddings of Simplicial Complexes

BRANKO GRÜNBAUM[1])

1. Introduction

The main aim of the present note is to show that certain n-dimensional simplicial complexes which are not imbeddable into the $(2n)$-dimensional Euclidean space E^{2n} are *minimal* with respect to that property, in the following strong sense: Every proper subcomplex of one of those complexes is even geometrically imbeddable in E^{2n}. (A simplicial complex is *geometrically imbedded* in E^k provided each of its simplices is a geometric, rectilinear simplex.) This result adds credibility to the following conjecture, established for $n=1$ by Wagner [14] (see also Fáry [4] and Stojaković [13]):

Conjecture. If an n-dimensional simplicial complex is topologically imbeddable in E^{2n} then it is even geometrically imbeddable in E^{2n}.

It has recently been established by Weber [15] that the weaker conjecture dealing with piecewise-linear (instead of geometric) imbeddings is true.

We shall start (in Section 2) by extending the class of known examples of n-complexes (that is finite, n-dimensional, simplicial complexes) not imbeddable in E^{2n}. The only examples of such complexes we found in the literature (van Kampen [8], Flores [5, 6], Rosen [11], Wu [16]) are:

(i) The *complete n-complex* $\mathscr{C}^n(k)$ with k vertices, where $k \geqslant 2n+3$; clearly, only the case $k=2n+3$ is interesting.

(ii) The *join* $\mathscr{C}^0(3) \vee \mathscr{C}^0(3) \vee \cdots \vee \mathscr{C}^0(3)$ of $n+1$ triplets of points.

For $n=1$ those examples reduce to the well-known graphs of Kuratowski [10], which may be used to characterize non-planar graphs.

In Section 3 we shall show that each subcomplex of each of the n-complexes constructed in Section 2 is geometrically imbeddable in E^{2n}. This generalizes recent results of Zaks [17], who has established for some of the complexes of Section 2 the possibility of geometrically imbedding each of their subcomplexes in E^{2n}, while establishing for the other cases only the possibility of a piecewise-linear imbedding (see the more detailed comments in Section 4).

The last Section is devoted to some additional remarks and problems.

I am indebted to the referee for a number of helpful remarks and references.

[1]) Research supported in part by Office of Naval Research contract N00014-67-A-0103-0003.

2. Some n-Complexes Not Imbeddable in E^{2n}

We shall denote finite simplicial complexes by script capitals $\mathscr{C}$, $\mathscr{K}$, etc.; their faces (simplices) will be indicated by capitals F, V, etc., and also by enumerating the vertices; for example, $F^3=(V_0, V_1, V_2, V_3)$. Superscripts will denote dimension; S^n is the n-sphere (the unit sphere in E^{n+1} if metric considerations are involved), and T^n indicates the n-simplex. For a complex K imbedded in some Euclidean space we denote by set K the set of points underlying the complex. (We find this symbol more convenient and more indicative than the more usual "absolute value" notation.)

If $F'=(V_0, \ldots, V_n)$ and $F''=(W_0, \ldots, W_m)$ are disjoint (abstract) simplices, we shall denote their *join*[1]) by $F' \vee F''=(V_0, \ldots, V_n, W_0, \ldots, W_m)$. For disjoint (abstract) simplicial complexes $\mathscr{K}'$ and $\mathscr{K}''$ the *join* $\mathscr{K}' \vee \mathscr{K}''$ is defined by $\mathscr{K}' \vee \mathscr{K}''=\{F' \vee F'' \mid F' \in \mathscr{K}', F'' \in \mathscr{K}''\}$. Note that this coincides with the usual definition, since we include the empty set $\emptyset$ as face in each complex.

If $\mathscr{K}'$ and $\mathscr{K}''$ are topological simplicial complexes contained in skew affine subspaces of a Euclidean space, their join $\mathscr{K}' \vee \mathscr{K}''$ is also a topological simplicial complex. Its faces $F' \vee F''$ may be represented by

$$F' \vee F'' = \{\lambda x' + (1-\lambda) x'' \mid x' \in F', x'' \in F'', 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

If $\mathscr{K}'$ and $\mathscr{K}''$ are geometric simplicial complexes in skew affine subspaces of a Euclidean space, then $\mathscr{K}' \vee \mathscr{K}''$ is also a geometric complex, and the above representation simplifies to $F' \vee F''=\operatorname{conv}(F' \cup F'')$, where $\operatorname{conv} A$ denotes the convex hull of the set A. (As is well known, the assumption that $\mathscr{K}'$ and $\mathscr{K}''$ are contained in skew affine spaces is not essential; the only condition required is that the convex combinations used do not introduce any unwanted intersections, or degenerate simplices. We shall assume this condition fulfilled whenever we use the symbol $\vee$.)

If A' and A'' are topological spaces, the *join* $A' \vee A''$ is the space obtained from the Cartesian product $A' \times A'' \times [0, 1]$ by identifying $(a', A'', 0)$ with a' for each $a' \in A'$, and similarly identifying $(A', a'', 1)$ with a'' for each $a'' \in A''$. If $j: A' \times A'' \times [0, 1] \to A' \vee A''$ is the identification map, then $A' \vee A''$ may be topologized by defining $N \subset A' \vee A''$ open if and only if $j^{-1}(N)$ is open in $A' \times A'' \times [0, 1]$.

The connection between the two notions of join is given by the easily established fact:

For topological simplicial complexes $\mathscr{K}'$ and $\mathscr{K}''$, there is a natural homeomorphism between $\operatorname{set}(\mathscr{K}' \vee \mathscr{K}'')$ and $(\operatorname{set}\mathscr{K}') \vee (\operatorname{set}\mathscr{K}'')$.

If $B=\{b\}$ is a one-pointed set, then $A \vee B$ is for obvious reasons called the *pyramid* over A with apex b; we shall denote it by $A^+(b)$, or simply A^+ if no confusion is

[1]) Because of lattice-theoretic connotations we prefer to indicate the join-operation by the symbol $\vee$ instead of the frequently used $*$.

likely to arise. ($A^+(b)$ is frequently called the "cone" over A with vertex b; we avoid this term since it is used with a different meaning in other fields.)

We note the well known and easily established facts:

(1) $T^n \vee T^m$ is homeomorphic to T^{n+m+1}.

(2) $S^n \vee S^m$ is homeomorphic to S^{n+m+1}.

A selfhomeomorphism π of a topological space A is called *antipodal* provided π is an involution (that is, $\pi^2(a)=a$ for each $a\in A$) and has no fixed points. The unit n-sphere S^n has a *natural antipodality* π defined by $\pi(a)=-a$. If A' and A'' are topological subspaces of a Euclidean space, with antipodalities π' and π'', then there is a natural antipodality $\pi=\pi' \vee \pi''$ on $A' \vee A''$ defined by

$$\pi(\lambda a' + (1-\lambda)\, a'') = \lambda\pi'(a') + (1-\lambda)\,\pi''(a'').$$

The homeomorphism mentioned in (2) above may be chosen in such a manner as to preserve the natural antipodalities of the spheres involved. Indeed, let

$$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+m+2}) \in E^{n+m+2} \mid \|x\| = 1,\ x_{n+2} = \cdots = x_{n+m+2} = 0\}$$

and

$$S^m = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+m+2}) \in E^{n+m+2} \mid \|x\| = 1,\ x_1 = \cdots = x_{n+1} = 0\};$$

then the mapping which sends the point $\lambda x + (1-\lambda)\, y$ of $S^n \vee S^m$ (where $x\in S^n$, $y\in S^m$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$) onto the point $\lambda^{1/2}x + (1-\lambda)^{1/2}\, y$ of S^{n+m+1} has this property.

Let now $\mathscr{K}$ be a topological simplicial n-complex, and let $\mathscr{K}^* = \vartheta(\mathscr{K})$ be a complex isomorphic to $\mathscr{K}$ under an isomorphism ϑ such that $\mathscr{K}$ and $\mathscr{K}^*$ are contained in skew affine spaces. We define a simplicial $(2n+1)$-complex $\mathscr{K}^\vee$ as the subcomplex of $\mathscr{K} \vee \mathscr{K}^*$ consisting of all simplices $F \vee F^*$ (where $F\in\mathscr{K}$, $F^*\in\mathscr{K}^*$, and $F\cap\vartheta^{-1}(F^*) = \emptyset$) and their faces. If $K=\operatorname{set}\mathscr{K}$, we shall use the notation $K^\vee = \operatorname{set}(\mathscr{K}^\vee)$. The set $K^\vee$ has a natural antipodality π defined by

$$\pi(\lambda x_1 + (1-\lambda)\,\vartheta(x_2)) = (1-\lambda)\, x_2 + \lambda\vartheta(x_1),$$

where x_i belongs to an n-simplex F_i of $\mathscr{K}$ and $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

We have the following *lemma*:

(3) *If $\mathscr{K}_i$ is a simplicial n_i-complex, $i=1,\cdots,p$, then there is a natural homeomorphism φ, which preserves the natural antipodalities, between $(\mathscr{K}_1 \vee \mathscr{K}_2 \vee \cdots \vee \mathscr{K}_p)^\vee$ and $K_1^\vee \vee K_2^\vee \vee \cdots \vee K_p^\vee$.*

Proof. It is clearly enough to consider the case $p=2$. Then a typical point of $(\mathscr{K}_1 \vee \mathscr{K}_2)^\vee$ is of the form

$$x = \lambda(\mu' x_1' + (1-\mu')\, x_2') + (1-\lambda)\,\vartheta(\mu'' x_1'' + (1-\mu'')\, x_2''),$$

where $0\leqslant\lambda, \mu', \mu''\leqslant 1$, $x_i'\in F_i'$, $x_i''\in F_i''$, $F_i', F_i''\in\mathscr{K}_i$, and $(F_1' \vee F_2') \cap (F_1'' \vee F_2'') = \emptyset$, that is, $F_1' \cap F_1'' = \emptyset$ and $F_2' \cap F_2'' = \emptyset$. On the other hand, the typical point of $K_1^\vee \vee K_2^\vee$ is

given by

$$y = \beta(\alpha_1 y_1' + (1-\alpha_1)\,\vartheta(y_1'')) + (1-\beta)(\alpha_2 y_2' + (1-\alpha_2)\,\vartheta(y_2'')),$$

where $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2, \beta \leqslant 1$, $y_i' \in F_i'$, $y_i'' \in F_i''$, $F_i', F_i'' \in \mathscr{K}_i$, and $F_i' \cap F_i'' = \emptyset$ for $i = 1, 2$. Assuming without loss of generality that ϑ is affine, x may be made to correspond to y by taking $x_i' = y_i'$, $x_i'' = y_i''$, and

$$\beta = \lambda\mu' + (1-\lambda)\,\mu'',$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda\mu'}{\lambda\mu' + (1-\lambda)\,\mu''} \qquad \alpha_2 = \frac{\lambda(1-\mu')}{\lambda(1-\mu') + (1-\lambda)(1-\mu'')}.$$

The continuity of the mapping and the preservation of antipodality by it are easily checked, and the proof of lemma (3) is completed.

As a corollary of (3) and (2) we have:

(4) If $\mathscr{K}_i$ is a complex such that $K_i^{\vee}$ is homeomorphic to the n_i-sphere S^{n_i}, then $(\mathscr{K}_1 \vee \mathscr{K}_2 \vee \cdots \vee \mathscr{K}_p)^{\vee}$ is homeomorphic to the $(p-1+\sum_{i=1}^{p} n_i)$-sphere $S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \cdots \vee S^{n_p}$. Moreover, the homeomorphism may be assumed to preserve antipodes.

Let $\mathscr{K}$ be a topological simplicial n-complex; we construct a new set $\hat{K}$ as follows. $\hat{K}$ is a subset of $K^+ \times K^+$, and consists of those pairs (a, b) of points of K^+ which satisfy:

(i) at least one of a, b belongs to K;

(ii) there exist disjoint n-simplices F_a and F_b of such that $a \in F_a^+$, $b \in F_b^+$.

$\hat{K}$ is clearly a compact metric space; it has a natural antipodality making points (a, b) and (b, a) correspond to each other. One of the properties of $\hat{K}$ which is of special interest to us is:

(5) For each n-complex $\mathscr{K}$, the set $\hat{K}$ is homeomorphic to the set $K^{\vee}$ by a homeomorphism φ which preserves antipodality.

Indeed, denoting by v the apex of K^+, each point of $\hat{K}$ is uniquely expressible in the form $(\lambda a + (1-\lambda)\,v,\ \mu b + (1-\mu)\,v)$, where a and b belong to disjoint n-simplices of $\mathscr{K}$, $0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1$, and $\max\{\lambda, \mu\} = 1$. We define

$$\varphi(\lambda a + (1-\lambda)\,v,\ \mu b + (1-\mu)\,v) = \begin{cases} (1-\tfrac{1}{2}\mu)\,a + \tfrac{1}{2}\mu\vartheta(b) \in K^{\vee} & \text{if } \lambda = 1 \\ \tfrac{1}{2}\lambda a + (1-\tfrac{1}{2}\lambda)\,\vartheta(b) \in K^{\vee} & \text{if } \mu = 1. \end{cases}$$

It is trivial to check that φ has all the desired properties.

We need one more definition. Let $\mathscr{K}$ be a topological simplicial complex and let $K = \operatorname{set}\mathscr{K}$. A mapping f of K^+ shall be called a *K-homeomorphism* provided the restriction of f to K is a homeomorphism (between K and $f(K)$). We shall say that $\mathscr{K}$ is *n-entangled* (or absolutely knotted in E^n) if and only if

$$f(K) \cap f(K^+ \backslash K) \neq \emptyset$$

for every K-homeomorphism f of K^+ into E^n.

If K is homeomorphic to a subset of E^{n-1} then $\mathscr{K}$ is clearly not n-entangled (since in this case K^+ is homeomorphic to a subset of E^n). Hence, if we succeed in proving that some complex is n-entangled, then this complex is certainly not imbeddable in E^{n-1}.

Let now $\mathscr{K}$ be an n-complex and let f be a K-homeomorphism of K^+ into E^{2n+1}. Then we define a mapping $\hat{f}$ of $\hat{K}$ into E^{2n+1} by setting, for $(a, b)\in\hat{K}$,

$$\hat{f}(a, b) = f(a) - f(b).$$

Clearly, $\hat{f}$ is continuous and $\hat{f}(a, b) = -\hat{f}(b, a)$.

We shall prove:

(6) If $0\in\hat{f}(\hat{K})$ for every K-homeomorphism f of K^+ into E^{2n+1}, then $\mathscr{K}$ is $(2n+1)$-entangled (and therefore not homeomorphic to any subset of E^{2n}).

Indeed, if $\mathscr{K}$ is not $(2n+1)$-entangled there exists a K-homeomorphism f of K^+ into E^{2n+1} such that $f(K)\cap f(K^+\setminus K)=\emptyset$. From $0\in\hat{f}(\hat{K})$ it follows that for suitable $(a, b)\in\hat{K}$ we have $0=\hat{f}(a, b)=f(a)-f(b)$, that is, $f(a)=f(b)$. Since K contains at least one of a, b, and since f is a K-homeomorphism, it follows that $a=b$, contradicting condition (ii) of the definition of $\hat{K}$.

Combining lemma (6) with the above remark $\hat{f}(a, b)=-\hat{f}(b, a)$ we obtain at once:

(7) If for every K-homeomorphism f of K^+ into E^{2n+1} some pair of antipodal points of $\hat{K}$ is mapped by $\hat{f}$ onto the same point of E^{2n+1}, then $\hat{K}$ is $(2n+1)$-entangled.

In the cases we shall discuss we shall find the following situation: $\hat{K}$ is homeomorphic to $K^\vee$, and $K^\vee$ is homeomorphic to S^{2n+1}, both homeomorphisms preserving antipodality. By the Borsuk-Ulam theorem (see Borsuk [1]), *every* mapping of S^{2n+1} into E^{2n+1} maps some pair of antipodal points of S^{2n+1} onto the same point of E^{2n+1}; because of the antipodality-preserving homeomorphism between $\hat{K}$ and S^{2n+1} the same conclusion is valid for $\hat{K}$. Hence, by lemma (7), the complex $\mathscr{K}$ is $(2n+1)$-entangled and thus not imbeddable in E^{2n}.

Now we are ready for

THEOREM 1. *Let $n, p, n_1, \ldots, n_p$ be non-negative integers such that $n=n_1+n_2+\cdots+n_p+p-1$. Then the n-complex*

$$\mathscr{C}^{n_1}(2n_1+3)\vee\mathscr{C}^{n_2}(2n_2+3)\vee\cdots\vee\mathscr{C}^{n_p}(2n_p+3)$$

is not imbeddable in E^{2n}.

Proof. In view of the above remark and previous lemmas, it is obviously enough to show that

(8) For each positive integer k, the set $(\mathscr{C}^k(2k+3))^\vee$ is homeomorphic to S^{2k+1} under a mapping that preserves antipodes.

Let $\mathscr{C}^k(2k+3)$ be represented by the k-skeleton $\mathscr{K}$ of a $(2k+2)$-simplex $T^{2k+2}=$ $=\operatorname{conv}\{x_0,\ldots,x_{2k+2}\}\subset R^{2k+2}$ such that

$$\sum_{i=0}^{2k+2} x_i = 0, \tag{*}$$

but each proper subset of the x_i's is linearly independent. Then $K^\vee$ may be obtained by taking $\vartheta(\mathscr{K})=-\mathscr{K}=\{-F \mid F\in\mathscr{K}\}$; hence $K^\vee$ is the union of all sets of the form $\operatorname{conv}(F_i\cup(-F_j))$, where F_i and F_j are disjoint members of $\mathscr{K}$.

In order to show that $K^\vee$ is homeomorphic to S^{2k+1} it is obviously enough to show that for each unit vector u in E^{2k+2}, the ray $L=\{\lambda u \mid \lambda\geqslant 0\}$ intersects $K^\vee$ in precisely one point, different from the origin.

We first establish $L\cap K^\vee\neq\emptyset$. Let $\lambda u=\sum_{i=0}^{2k+2}\alpha_i x_i$, with $\lambda>0$, $\alpha_i\geqslant 0$, $\sum_i\alpha_i=1$. Without loss of generality we may assume that $\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{2k+2}$. Then, using (*), we have

$$0\neq\lambda u=\lambda u-\alpha_{k+1}0=\sum_{i=0}^{2k+2}(\alpha_i-\alpha_{k+1})x_i=\sum_{i=0}^{2k+2}\beta_i x_i.$$

where $\beta_i\leqslant 0$ for $0\leqslant i\leqslant k$, $\beta_{k+1}=0$, $\beta_i\geqslant 0$ for $k+2\leqslant i\leqslant 2k+2$, and not all β_i are 0. Let $\beta'=-\sum_{i=0}^{k}\beta_i$, $\beta''=\sum_{i=k+2}^{2k+1}\beta_i$, and $\beta=\beta'+\beta''$; then

$$L\ni\frac{\lambda}{\beta}u=\frac{\beta'}{\beta}\sum_{i=0}^{k}\left(-\frac{\beta_i}{\beta'}\right)(-x_i)+\frac{\beta''}{\beta}\sum_{i=k+2}^{2k+2}\frac{\beta_i}{\beta''}x_i\in K^\vee.$$

as claimed. (If $\beta'=0$ or $\beta''=0$, the corresponding sum should be omitted.)

On the other hand we shall show that if $y\in K^\vee$ for $y\neq 0$, and if $\lambda y\in K^\vee$ for $\lambda>0$, then $\lambda=1$. Indeed, assuming without loss of generality that $y=\sum_{i=0}^{2k+2}\alpha_i x_i$, where

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i\leqslant 0 \quad \text{for} \quad 0\leqslant i\leqslant k,\\ \alpha_i=0 \quad \text{for} \quad i=k+1,\\ \alpha_i\geqslant 0 \quad \text{for} \quad k+2\leqslant i\leqslant 2k+2,\end{array}\qquad \sum_{i=0}^{2k+2}|\alpha_i|=1,\right\} \tag{**}$$

and $\lambda y=\sum_{i=0}^{2k+2}\beta_i x_i$, where

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=0}^{2k+2}|\beta_i|=1, \text{ at most } k+1 \text{ of the } \beta_i\text{'s are negative and at most}\\ k+1 \text{ of the } \beta_i\text{'s are positive.}\end{array}\right\} \tag{***}$$

Then

$$0=y-\frac{\lambda y}{\lambda}=\sum_{i=0}^{2k+2}\left(\alpha_i-\frac{\beta_i}{\lambda}\right)x_i.$$

By (*) it follows that $\alpha_i-\beta_i\lambda^{-1}=\gamma$ is a constant independent of i. In other words,

$\beta_i=\lambda(\alpha_i-\gamma)$. Therefore, if $\gamma=0$, assumptions (**) and (***) would contradict each other. Thus $\gamma=0$, and then $1=\sum_i|\beta_i|=\sum_i|\lambda\alpha_i|=\lambda\sum_i|\alpha_i|=\lambda$, as claimed.

Finally, $0\notin K^\vee$ follows at once from (*).

This completes the proof of lemma (8) and thus also the proof of Theorem 1.

3. Geometric Imbeddings in E^{2n}

In the present section we shall show that every proper subcomplex of each of the n-complexes of Theorem 1 is geometrically imbeddable in E^{2n}.

A few *lemmas* are needed in the proof; the first is a special case of the general theorem.

(1) *Let $\mathscr{C}_0^k(2k+3)$ be a complex obtained from $\mathscr{C}^k(2k+3)$ by deleting one k-face. Then $\mathscr{C}_0^k(2k+3)$ is geometrically imbeddable in E^{2k}.*

Proof. Let T_1 and T_2 be two k-simplices in E^{2k} such that $T_1\cap T_2$ is a single point, relatively interior to both T_1 and T_2. Let $T_k^{2k}=\mathrm{conv}(T_1\cup T_2)$, and denote by $\mathscr{T}_m$ the m-skeleton of T_k^{2k}. It is well known (see, for example, Grünbaum [7], where the terms and facts used in the sequel may be found) that $\mathscr{T}_k$ contains all the geometric k-simplices determined by the $2k+2$ vertices of T_k^{2k}, except T_1 and T_2, while $\mathscr{T}_{k-1}$ contains all the $(k-1)$-simplices determined by those vertices ([7, p. 98]). Taking, if necessary, a suitable projective image of T_k^{2k}, we may without loss of generality assume that there exists a point $V\in E^{2k}$ that is beyond all facets of T_k^{2k} except one. Then $\{T_1\}\cup\mathscr{T}_{k-1}^+(V)\cup\mathscr{T}_k$ is isomorphic to $\mathscr{C}_0^k(2k+3)$, and the proof of (1) is completed.

Figure 1 illustrates the steps of the above proof for $k=1$.

We shall say that an n-complex $\mathscr{K}$ is *nicely imbedded* in E^m provided $\mathscr{K}$ is geometrically imbedded in E^m and there exists a point (say the origin 0 of E^m) with the property:

For each unit vector $u\in E^m$ except one, u_0, the ray $L(u)=\{\lambda u \mid \lambda\geqslant 0\}$ intersects set$\mathscr{K}$ in at most one point, while $L(u_0)\cap$ set$\mathscr{K}$ consists of two points, each in the relative interior of an n-face of $\mathscr{K}$. We call u_0 the *exceptional direction*, and the two n-faces $L(u_0)$ meet the *exceptional faces* of $\mathscr{K}$.

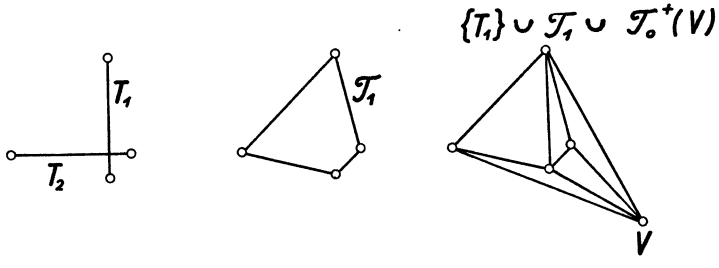


Figure 1

We need the following lemmas:

(2) $\mathscr{C}^k(2k+3)$ *is nicely imbeddable in* E^{2k+1}.

Proof. Let E_1^k be the n-dimensional affine subspace of E^{2k+1} defined by

$$E_1^k = \{(x_1, \ldots, x_{2k+1}) \in E^{2k+1} \mid x_{k+1} = \cdots = x_{2k} = 0,\ x_{2k+1} = 1/(2k+3)\}$$

and let

$$E_2^k = \{(x_1, \ldots, x_{2k+1}) \in E^{2k+1} \mid x_1 = \cdots = x_k = 0,\ x_{2k+1} = 1\}.$$

Let T_i^k be a regular simplex of edge-length 1 in E_i^k, $i=1, 2$ having its centroid at $x_1 = \cdots = x_{2k} = 0$, and $x_{2k+1} = 1/(2k+3)$ respectively $x_{2k+1} = 1$. Let $\mathscr{C}^k(2k+3)$ have as vertices the $2k+2$ vertices of T_1^k and T_2^k, and the point $V = (-1, 0, \ldots, 0, -2)$. Then a trivial computation shows that this $\mathscr{C}^k(2k+3)$ is nicely imbedded in E^{2k+1}, with $u_0 = (0, \ldots, 0, 1)$ as the only exceptional direction. (See Figure 2 for an illustration of the case $k=1$.) This completes the proof of (2).

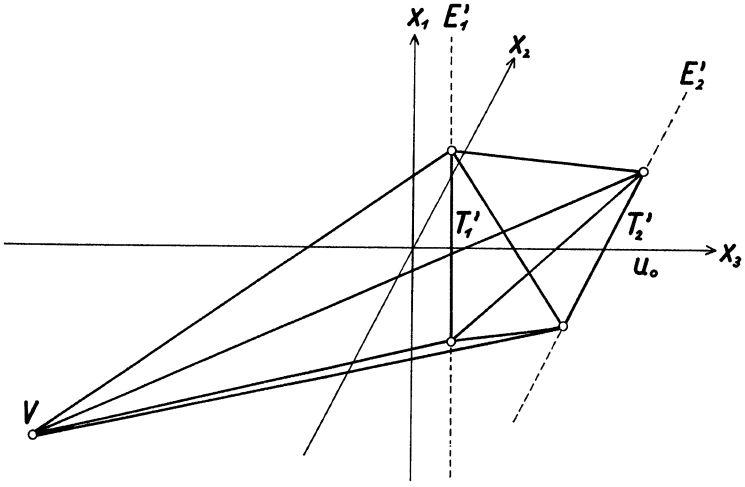


Figure 2

(3) *Let* $\mathscr{K}^{k_1}$ and $\mathscr{K}^{k_2}$ *be complexes nicely imbedded in spaces* E^{2k_1+1} *and* E^{2k_2+1}, *and let* $k = k_1 + k_2 + 1$. *Then* $\mathscr{K} = \mathscr{K}^{k_1} \vee \mathscr{K}^{k_2}$ *is a k-complex nicely imbeddable in* E^{2k+1}.

Proof. Let us imbed E^{2k_1+1} in E^{2k+1} by

$$E^{2k_1+1} = \{(x_1, \ldots, x_{2k+1}) \in E^{2k+1} \mid x_{2k_1+2} = \cdots = x_{2k} = x_{2k+1} = 0\},$$
$$E^{2k_2+1} = \{(x_1, \ldots, x_{2k+1}) \in E^{2k+1} \mid x_1 = \cdots = x_{2k_1+1} = 0,\ x_{2k+1} = 0\}.$$

We denote by v the vector $v = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in E^{2k+1}$, and we consider the copy $\tilde{\mathscr{K}}^{k_1}$

of $\mathscr{K}^{k_1}$ imbedded in $E^{2k_1+1}+v$, and the copy $\widetilde{\mathscr{K}}^{k_2}$ of $\mathscr{K}^{k_2}$ imbedded in $E^{2k_2+1}+2v$. Defining now $\mathscr{K}=\widetilde{\mathscr{K}}^{k_1}\vee\widetilde{\mathscr{K}}^{k_2}$, we shall show that $\mathscr{K}$ is nicely imbedded in E^{2k+1}. Clearly, $\mathscr{K}$ is a geometric complex in E^{2k+1}.

Let $u\in E^{2k+1}$ be a unit vector such that for some λ, μ with $0<\lambda<\mu$ we have $\lambda u\in\operatorname{set}\mathscr{K}$ and $\mu u\in\operatorname{set}\mathscr{K}$. That is,

$$\left.\begin{aligned}\lambda u &= \alpha y_1 + (1-\alpha)\, z_1 + (2-\alpha)\, v\\ \mu u &= \beta y_2 + (1-\beta)\, z_2 + (2-\beta)\, v,\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

where $0<\alpha, \beta<1$, $y_1, y_2\in\operatorname{set}\mathscr{K}^{k_1}$, and $z_1, z_2\in\operatorname{set}\mathscr{K}^{k_2}$.

Eliminating u from (*) and equating points in E^{2k_1+1}, E^{2k_2+1}, and multiples of v, we obtain

$$\left.\begin{aligned}\mu\alpha y_1 &= \lambda\beta y_2\\ \mu(1-\alpha)\, z_1 &= \lambda(1-\mu)\, z_2\\ \mu(2-\alpha) &= \lambda(2-\beta).\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Clearly $y_1=y_2$ or $z_1=z_2$ would imply $\lambda=\mu$, contradicting the assumption. Hence $y_1\neq y_2$ and $z_1\neq z_2$, and thus (**) expresses the fact that

$$y_1=\gamma_1 u_1 \qquad y_2=\gamma_2 u_1$$
$$z_1=\delta_1 u_2 \qquad z_2=\delta_2 u_2,$$

where u_1 and u_2 are the exceptional directions of $\mathscr{K}^{k_1}$ and $\mathscr{K}^{k_2}$, while $\gamma=\gamma_1/\gamma_2<1$ and $\delta=\delta_1/\delta_2>1$ are well-determined constants. Inserting those values into (**) we obtain

$$\alpha = 2\,\frac{\delta-1}{2\delta-\gamma-1} \quad\text{and}\quad \beta = 2\gamma\,\frac{\delta-1}{\delta\gamma+\delta-2\gamma}.$$

Substituting into (*) we see that u, λ and μ are uniquely determined. Hence the complex $\mathscr{K}$ is nicely imbedded in E^{2k+1} and the proof of (3) is completed.

The last lemma we shall need is

(4) *Let $\mathscr{K}^{k_1}$ and $\mathscr{K}^{k_2}$ be complexes nicely imbedded in E^{2k_1+1} respectively E^{2k_2+1}, let F^{k_1} be the exceptional face of $\mathscr{K}^{k_1}$ nearer to 0, and let F^{k_2} be the exceptional face of $\mathscr{K}^{k_2}$ further from 0. Then $(\mathscr{K}^{k_1}\vee\mathscr{K}^{k_1})\backslash(F^{k_1}\vee F^{k_2})$ is a k-complex, $k=k_1+k_2+1$, which is geometrically imbeddable in E^{2k}.*

Proof. Let $\mathscr{K}$ be the complex constructed in the proof of Lemma (3). Since $\mathscr{K}$ is nicely imbedded in E^{2k+1}, the radial projection of $\mathscr{K}\backslash\{(v+F^{k_1})\vee(2v+F^{k_2})\}$ into the $(2n)$-dimensional affine subspace $\{x\in E^{2k+1} \mid \langle x, v\rangle=3\}$ is clearly a geometric imbedding. This completes the proof of (4).

Now we are ready for our main result:

THEOREM 2. *Let $n, p, n_1, \ldots, n_p$ be non-negative integers such that $n = n_1 + \cdots + n_p + p - 1$. Then every proper subcomplex of the n-complex*

$$\mathscr{K}(n_1, \ldots, n_p) = \mathscr{C}^{n_1}(2n_1 + 3) \vee \cdots \vee \mathscr{C}^{n_p}(2n_p + 3)$$

is geometrically imbeddable in E^{2n}.

Proof. It is clearly sufficient to prove the theorem for each complex $\mathscr{K}_0(n_1, \ldots, n_p)$ obtained from $\mathscr{K}(n_1, \ldots, n_p)$ by deleting one n-face F_0. Each such $\mathscr{K}_0(n_1, \ldots, n_p)$ is obtained by singling out an n_i-face $F_0^{n_i}$ of $\mathscr{C}^{n_i}(2n_i + 3)$ and setting $F_0 = F_0^{n_1} \vee \cdots \vee F_0^{n_p}$.

We distinguish two cases:

(i) $p = 1$. Then the assertion of Theorem 2 reduces to that of lemma (1) above.

(ii) $p > 1$. Using lemmas (2) and (3) we find a nice imbedding of $\mathscr{K}_1 = \mathscr{C}^{n_1}(2n_1 + 3)$ in E^{2n_1+1}, and a nice imbedding of $\mathscr{K}_2 = \mathscr{C}^{n_2}(2n_2 + 3) \vee \cdots \vee \mathscr{C}^{n_p}(2n_p + 3)$ in E^{2m+1}, where $m = n_2 + \cdots + n_p + p - 2$, such that $F_0^{n_1}$ is the exceptional face of $\mathscr{K}_1$ nearer 0 while $F_0^{n_2} \vee \cdots \vee F_0^{n_p}$ is the exceptional face of $\mathscr{K}_2$ further from 0. An application of lemma (4) to the complexes $\mathscr{K}_1$ and $\mathscr{K}_2$ completes the proof of Theorem 2.

4. Remarks

(i) The method used in the proof of Theorem 1 is an elaboration of Flores' [6] proof, extending the similar proofs in Rosen [11] and Grünbaum [7, p. 210]. By avoiding the more powerful – but also more unmanageable – "imbedding classes" of Wu [16, p. 114], it is possible to give a quite elementary proof of the non-imbeddability of the complexes of Theorem 1. By standard manipulations (van Kampen [8], Chrislock [3]) it is easy to extend Theorem 1 to the following

THEOREM 3. *Let n_i, m_i, p be non-negative integers such that $n_i + 3 \leqslant m_i \leqslant 2n_i + 3$ for $i = 1, \ldots, p$. Then the $(n_1 + \cdots + n_p + p - 1)$-complex*

$$\mathscr{C}^{n_1}(m_1) \vee \cdots \vee \mathscr{C}^{n_p}(m_p)$$

is not imbeddable in the Euclidean $(m_1 + \cdots + m_p - p - 2)$-space, but it is even geometrically imbeddable in Euclidean $(m_1 + \cdots + m_p - p - 1)$-space.

Theorem 3 may easily be modified to allow the inclusion of complexes $\mathscr{C}^{n_i}(n_i + 1)$ or $\mathscr{C}^{n_i}(n_i + 2)$. (For some special cases see Wu [16, p. 118].)

The significant difference between Theorems 1 and 3 is the observation that if $m_i < 2n_i + 3$ then the complex is not minimal with respect to the property of being non-imbeddable in the appropriate space. For example ($p = 1, n_1 = 2, m_1 = 6$) the 2-complex $\mathscr{C}^2(6)$ is by Theorem 3 not imbeddable in E^3; however, even the complex obtained from $\mathscr{C}^2(6)$ by deleting the ten 2-faces incident with one vertex is not imbeddable in E^3. Hence there is no hope that the complexes of Theorem 3 satisfy an analogue of Theorem 2.

(ii) Zaks [17] has established Theorem 2 if either $p=1$ (i.e., in the case covered by Lemma (1) of Section 3), or else if all n_i's with at most one exception are equal to 0. His method does not seem to extend to the general case. On the other hand, Zaks proved: If all the proper subcomplexes of the arbitrary simplicial complex K_i are piecewise linearly imbeddable in E^{k_i}, $i=1, 2$, then each proper subcomplex of $K_1 \vee K_2$ is piecewise linearly imbeddable in $E^{k_1+k_2+2}$.

(iii) It is well known that a k-complex imbeddable in E^n is not necessarily geometrically imbeddable in E^n, if $n<2k$ (Cairns [2], van Kampen [9], Grünbaum [7, p. 202]). However, the published examples deal only with the case $n=3$; it would be of some interest to find analogous examples for all k and n with $k \leqslant n \leqslant 2k-1$.

Probably more interesting is the

Conjecture. Each simplicial (= triangulated) manifold imbeddable in a Euclidean space is even geometrically imbeddable in the same space.

This conjecture is open even for triangulations of the torus (in E^3), as well as for triangulations of S^k for $k \geqslant 3$. For triangulations of S^2 an affirmative answer results from a more general theorem of Steinitz concerning convex 3-polytopes (see Steinitz-Rademacher [12, p. 192], Grünbaum [7, p. 235]).

(iv) Considering simplicial complexes imbedded in the n-sphere S^n one may distinguish (as in the case of complexes imbedded in E^n) between topological and geometric imbeddings. While it is easy to show that a simplicial complex geometrically imbeddable in E^n is also geometrically imbeddable in S^n, the following converse seems to be still unsettled:

Conjecture. If $\mathscr{C}$ is a simplicial complex geometrically imbeddable in S^n and if set $\mathscr{C} \neq S^n$, then $\mathscr{C}$ is geometrically imbeddable in E^n.

(v) For $n=1$, the two 1-complexes (= graphs) given by Theorem 1 characterize graphs not imbeddable in the plane as follows (Kuratowski [10]): A graph $\mathscr{G}$ is not imbeddable in E^2 if and only if $\mathscr{G}$ contains a subgraph homeomorphic to one of the graphs of Theorem 1. However, the analogous statement is false for $n \geqslant 2$. As shown by Zaks [18], for every $n \geqslant 2$ there exist infinitely many n-complexes, none homeomorphic to a subcomplex of another, with the property of not being imbeddable in E^{2n}, though each proper subcomplex is piecewise-linearly imbeddable in E^{2n}.

REFERENCES

[1] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. *20* (1933), 177–190.

[2] S. S. Cairns, *Triangulated manifolds which are not Brouwer manifolds*, Ann. of Math. *41* (1940), 792–795.

[3] J. L. Chrislock, *Imbedding a skeleton of a simplex in Euclidean space*, Amer. Math. Monthly *73* (1966), 381–382.

[4] I. Fáry, *On straight line representation of planar graphs*, Acta Sci. Math. (Szeged) *11* (1948), 229–233.

[5] A. FLORES, *Über die Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} topologisch einbettbar sind*, Ergeb. math. Kolloq. *5* (1932/33), 17–24.
[6] A. FLORES, *Über n-dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind*, Ergeb. math. Kolloq. *6* (1933/34), 4–6.
[7] B. GRÜNBAUM, *Convex polytopes* (Wiley, New York 1967).
[8] E. R. VAN KAMPEN, *Komplexe in euklidischen Räumen*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg *9* (1932), 72–78, 152–153.
[9] E. R. VAN KAMPEN, *Remark on the address of S. S. Cairns*, "Lectures in topology", University of Michigan Conference 1940, edited by R. L. WILDER and W. L. AYRES (Ann Arbor 1941), pp. 311–313.
[10] G. KURATOWSKI, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. *15* (1930), 271–283.
[11] R. H. ROSEN, *Decomposing 3-space into circles and points*, Proc. Amer. Math. Soc. *11* (1960), 918–928.
[12] E. STEINITZ and H. RADEMACHER, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder* (Springer, Berlin 1934).
[13] M. STOJAKOVIĆ, *Über die Konstruktion der ebenen Graphen*, Univ. Beograd. Godišnjak Filozof. Fak. Novom Sadu *4* (1959), 375–378.
[14] K. WAGNER, *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. *46* (1936), 26–32.
[15] C. WEBER, *Plongements de polyèdres dans le domaine métastable*, Comment. Math. Helv. *42* (1967), 1–27.
[16] W.-T. WU, *A theory of imbedding, immersion, and isotopy of polytopes in a Euclidean space* (Science Press, Peking 1965).
[17] J. ZAKS, *On a minimality property of complexes*, Proc. Amer. Math. Soc. *20* (1969), 439–444.
[18] J. ZAKS, *On minimal complexes* (to appear).

University of Washington

Received May 13, 1968; in revised version June 30, 1969