I A 2. KOMBINATORIK

VON

E. NETTO

IN GIESSEN.

Inhaltsübersicht.

Die Monographien sind in Nr. **1** und Nr. **35** angegeben.

1. Kombinatorik; historische Würdigung. Die *Kombinatorik* hat sich weder in ihren elementaren noch in ihren höheren analytischen Gebieten so entwickelt, wie dies zu Beginn des Jahrhunderts in überschwänglicher Weise von den Vertretern der „kombinatorischen Schule“ erhofft wurde. Anfänge der Kombinatorik lassen sich weit zurück verfolgen; als Zweig der Wissenschaft darf sie erst von *Bl. Pascal*[1]), *G. W. Leibnitz*[2]), *J. Wallis*[3]), besonders aber von *Jac. Bernoulli I.* und *A. de Moivre*[4]) an gelten. Die Grundzüge der elementaren Teile sind in jedes Lehrbuch übergegangen; die analytischen Anwendungen treten sehr zurück. So stammen die umfassenderen Monographien sämtlich aus früherer Zeit[5]), und tiefer eindringende Abhandlungen sind nur in geringer Zahl vorhanden[6]).

2. Kombinatorische Operationen. Definitionen. Von den unendlich vielen möglichen kombinatorischen Operationen haben drei als gleichberechtigt (trotz logischer Bedenken) hauptsächliche Geltung erlangt, die Permutationen (P.), die Kombinationen[7]) (K.) und die Variationen (V.). Jede Anordnung von n Elementen nennen wir eine Komplexion (Kp.) derselben. — P. von n Elementen heifsen die Kp., welche alle gegebenen Elemente in allen möglichen Aufeinanderfolgen liefern. Sind die Elemente von einander verschieden, dann giebt es $n!$, kommen unter ihnen a gleiche einer Art, b gleiche einer andern Art u. s. w. vor, dann giebt es $n! : (a!\, b! \ldots)$.

K. von n Elementen zur k^{ten} Klasse sind alle Kp. von je k jener n Elemente ohne Berücksichtigung der Anordnung; darf jedes Element nur einmal aufgenommen werden, dann sind es K. ohne Wiederholung (o. W.), sonst mit Wiederholung (m. W.). Es giebt in k^{ter} Klasse

$$\text{K. o. W. } \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad \text{K. m. W. } \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

1) Traité du triangle arithmétique. Paris 1665, geschrieb. 1664 (Op. posth.).

2) Dissertatio de arte Combinatoria. Lipsiae 1668. Opp. II, T. I, p. 339.

3) Treatise of algebra. Lond. 1673 und 1685.

4) *Bernoulli,* Ars conjectandi. Basil. 1713 (Op. posth.). — *Moivre,* Probabilities. Lond. 1718.

5) *K. F. Hindenburg,* Nov. Syst. Permutationum etc. Lips. 1781. — *J. Weingärtner,* Lehrb. d. combinator. Analysis. Leipz. 1800. — *Knr. Stahl,* Grundrifs d. Kombin.-Lehre. Jena 1800. — *Bernh. Thibaut,* Grundr. d. allgem. Arithm. od. Analysis. Götting. 1809. — *Chr. Kramp,* Élem. d'Arithm. Cologne 1808. — *Fr. W. Spehr,* Lehrbegr. d. rein. Kombin.-Lehre. Braunschw. 1824. — *A. v. Ettingshausen,* D. kombinat. Analysis. Wien 1826. — *L. Öttinger,* Lehre v. d. Kombinat. Freiburg 1837.

6) *Hessel,* Arch. f. Math. 7 (1845), p. 395. — *Öttinger,* ib. 15 (1850), p. 241.

7) *Hindenburg* schreibt auch „Komplexionen“; diese zerfallen in eigentliche Kombinationen, in Konternationen, Konquaternationen u. s. w.

V. entstehen, wenn man in den K. die Elemente permutiert. Es giebt in k^{ter} Klasse

$$\text{V. o. W. } \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad \text{V. m. W. } n^k.$$

3. Inversion; Transposition. Da die Elemente nur insofern gelten, als sie identisch oder verschieden sind, so kann ihre Bezeichnung beliebig z. B. durch Ziffern 1, 2, 3, ... oder durch Buchstaben $a, b, c, \dots$ bewirkt werden. Dadurch kommt ein neues Agens in die Betrachtung, welches nun nach verschiedenen Richtungen hin benützt werden kann. Eine Kp. heisst *gut geordnet*, wenn stets die höhere Ziffer (der alphabetisch spätere Buchstabe) hinter der niederen (dem früheren) steht. Jede Abweichung davon heifst *Inversion*[8]). Für die Abzählung der Inversionenzahl bei umfangreichen Kp. giebt *P. Gordan* eine Regel[9]). Eine Kp. verschiedener Elemente gehört zur *ersten* oder *zweiten* Klasse (ist *gerade* oder *ungerade*), je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen enthält[10]). Durch eine *Transposition*, d. h. Umstellung zweier Elemente, wird die Klasse geändert[11]).

4. Permutationen mit beschränkter Stellenbesetzung. P. mit *beschränkter Stellenbesetzung* sind solche, bei denen entweder eine vorgeschriebene Anzahl von Elementen ihre Plätze beibehält, oder bei denen gewisse Stellen nur von gewissen Elementen eingenommen werden dürfen.

L. Euler[12]) führt eine Funktion $f(n)$ ein, welche die Zahl der P. giebt, bei denen jedes Element den ursprünglichen Platz ändert. Hiermit in Verbindung steht ein $F(n, m)$, welches angiebt, bei wievielen P. von n Elementen genau m ihren Platz behalten[13]). Es ist

---

8) *G. Cramer,* Introduct. à l'Analyse des lignes courbes (1750); Genève. Appendice p. 658. — *T. P. Kirkman,* Cambr. a. Dubl. J. 2 (1847), p. 191.

9) Vorles. üb. Invarianten-Theor., herausgeg. v. *G. Kerschensteiner* (1885), Leipz. I, p. 2.

10) *E. Bézout,* Mém. Paris (1764), p. 292. — *A. L. Cauchy,* J. d. l'Éc. pol. cah. 10 (1815), p. 41. — *K. G. Jacobi,* Werke 3, p. 359 = J. f. M. 22 (1841), p. 285.

11) *P. S. Laplace,* Mém. Paris (1772), p. 294.

12) Mém. Pétersb. 3 (1809), p. 57. — *Öttinger,* Lehre v. d. Kombin. Freiburg 1837. — *M. Cantor,* Z. f. Math. 2 (1857), p. 65. — *R. Baltzer,* Leipz. Ber. (1873), p. 534. — *S. Kantor,* Z. f. Math. 15 (1870), p. 361. — *A. Cayley,* Edinb. Proceed. 9 (1878), p. 338 u. 388.

13) *M. Cantor,* Z. f. Math. 2 (1857), p. 410. — *J. J. Weyrauch,* J. f. Math. 74 (1872), p. 273.

$$f(n) = nf(n-1) + (-1)^n = (n-1)[f(n-1) + f(n-2)];$$
$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0.$$
$$F(n, m) = \binom{n}{m} f(n-m).$$

Eine andere Beschränkung der Stellenbesetzung ist die, dass gewisse Stellen nur von gewissen Elementen eingenommen werden dürfen[14]), z. B. die geraden Stellen nur von geraden Zahlen[15]); oder, falls gleiche Elemente vorkommen, dass nicht zwei solche aufeinander folgen[16]).

Auch darin liegen Beschränkungen der Stellenbesetzung, dass die P. selbst in verschiedene Anordnungen treten, z. B. so dass n P. von n Elementen so untereinander gesetzt werden sollen, dass in keiner Spalte gleiche Elemente vorkommen[17]) (lateinisches Quadrat).

5. Verwandte Permutationen. *Verwandte Permutationen* sind nach *H. A. Rothe*[18]) zwei P. dann, wenn die Stellenordnung und das Stellenelement (als Zahl) der einen gegen die der anderen vertauscht sind; es wird zu bestimmen sein, wie viele P. sich selbst verwandt sind[19]). *P. A. Mac-Mahon* giebt Erweiterungen dieser Begriffe[19]).

6. Sequenzen. *D. André* hat den Begriff der *Sequenz* bei P. eingeführt und in einer ganzen Reihe von Abhandlungen durchforscht[20]). Aufeinanderfolgende Zahlenelemente einer P. bilden eine Sequenz, wenn jedes folgende gröſser (kleiner) als das vorhergehende ist. Jede P. zerfällt in Sequenzen. Die Anzahl der vorkommenden Sequenzen bestimmt die „Art“ der P. Es wird untersucht, wieviele P. einer bestimmten Art angehören. Es zeigt sich, dass die Anzahl der P. mit gerader Sequenzenzahl gleich derjenigen der P. mit ungerader Sequenzenzahl ist. Es werden geometrische Repräsentationen gegeben, u. s. w.

---

14) *C. W. Baur,* Z. f. Math. 2 (1857), p. 267.

15) *A. Laisant,* C. R. 112 (1891), p. 1047.

16) *O. Terquem,* J. d. Math. 4 (1839), p. 177. — Weitere Einschränkungen in der Stellenbesetzung untersucht *Th. Muir,* Edinb. Proceed. 10 (1881), p. 187. *A. Holtze,* Arch. f. Math. (2), 11 (1892), p. 284.

17) *A. Cayley,* Messenger (2), 19 (1890), p. 135. *M. Frolov,* J. m. spéc. (3), 4 (1890), p. 8 u. 25. *J. Bourget,* J. de Math. (3), 8 (1882), p. 413. *P. Seelhof,* Arch. f. Math. (2), 1 (1884), p. 97.

18) Hindenb. Arch. f. M. (1795).

19) *P. A. Mac Mahon,* Messeng. (2), 24 (1894), p. 69.

20) C. R. 97 (1883), p. 1356; 115 (1892), p. 872; 118 (1894), p. 575. [*G. Darboux* Rapport; C. R. 118 (1894), p. 1026]. Soc. m. d. Fr. 21 (1893), p. 131; Ann. Éc. Norm. (3), 1 (1884), p. 121.

7. Anwendung auf Fragen der Arithmetik. Im Zusammenhange mit den P.-Theoremen stehen die Fragen, auf wie viele Arten man Summen oder Produkte gegebener Elemente, die verschieden oder zum Teil einander auch gleich sind, mit oder ohne Umstellung dieser Elemente, rechnerisch durchführen könne[21]).

8. Kombinationen zu bestimmter Summe oder bestimmtem Produkte. Auch bei den K. und V. können die einzelnen Kp. Beschränkungen unterworfen werden. Die bekannteste und wichtigste besteht darin, dafs die K. und V. der natürlichen Zahlen betrachtet werden, deren Elemente m. W. oder o. W. eine *bestimmte Summe* haben, welche das *Gewicht* der Kp. genannt wird. Ihre Bedeutung tritt in der Invariantentheorie zu Tage. *L. Euler* war der Erste, welcher diese Frage behandelte (Introd. in Anal. Lausanne 1748, § 299 ff.; Comm. Acad. Petr. 3 [1753], p. 159), der für die Anzahl dieser K. Entwickelungscoefficienten gewisser Produkte gab und dadurch zu Beziehungen zwischen K. m. W. und K. o. W. gelangte. Diese Fragen wurden später vielfach weiter verfolgt[22]), und ihre Beantwortung besonders von *Cayley*[23]) und *J. J. Sylvester*[24]) durch Aufstellung von Tabellen und geometrische Repräsentationen gefördert. *Mac-Mahon* hat diese Untersuchungen weitergeführt, die dann auch auf die Zerlegung von Zahlenpaaren ausgedehnt wurden. Wir müssen uns mit diesen Bemerkungen begnügen, da die weiteren Anwendungen auf symmetrische Funktionen und die Invariantentheorie nicht mehr kombinatorischer Natur sind.

In ähnlicher Weise hat *Möbius* die K. behandelt, bei denen die Elemente der Kp. ein *bestimmtes Produkt* besitzen[25]). Sie werden nach ihren Klassen geordnet, und die Anzahlen der zugehörigen K. mit einander in Verbindung gebracht. Derartige Relationen treten auch für den Fall auf, dafs den Kp. noch Bedingungen auferlegt werden, z. B. dafs bei dem vorgeschriebenen Produkte $a^\alpha b^\beta$ in jeder Kp. jedes Element mindestens einen Faktor b hat.

Ettingshausen ist ferner darauf eingegangen, jede Kp. als Produkt

21) *E. Ch. Catalan,* J. d. Math. 6 (1874), p. 74. *E. Schröder,* Z. f. Math. 15 (1870), p. 361.

22) *M. Stern,* J. f. M. 21 (1840), p. 91 u. p. 177, ibid. 95 (1883), p. 102. *C. Wasmund,* Arch. f. Math. 21 (1853), p. 228, ibid. 34 (1860), p. 440.

23) Lond. Transact. 145 (1855), p. 127, ibid. 148 (1858), p. 47. Amer. J. 6 (1883), p. 63.

24) Quart. J. 1 (1855—57), p. 81 u. p. 141. Amer. J. 5 (1882), p. 251. C. R. 96 (1883). Vgl. auch *Mac Mahon,* Lond. Trans. 184 (1894), p. 835, sowie den Bericht über Combin. Analysis: Lond. M. S. Pr. 28 (1897), p. 5.

25) J. f. M. 9 (1832); 105.

aufzufassen, und alle solche zu einer K.-Klasse gehörigen Produkte zu summieren[26]). Weiter werden die Klassen nach bestimmten Moduln eingeteilt und Zahlenbeziehungen zwischen ihnen ermittelt[27]).

Und nicht nur auf die K. selbst beziehen sich solche Untersuchungen, sondern auch auf Kp., die in verschiedenartiger Weise aus den gewöhnlichen K. abgeleitet sind. Es wird z. B. zum ersten Elemente jeder Kp. 0 addiert, zum zweiten 1, ... zum n^{ten} $(n-1)$. So entstehen Produkte, zwischen deren Summen wieder merkwürdige Beziehungen sich angeben lassen[28]). Vgl. auch *Th. B. Sprague,* Edinb. Proc. 37 (1893), p. 399.

9. Kombinationen mit beschränkter Stellenbesetzung. Der Weg der Untersuchung, welcher sich auf *beschränkte Stellenbesetzung* bezieht, gliedert sich hier. Zunächst werden, ähnlich wie bei den P., Forderungen gestellt, dass gewisse Elemente in einer vorgeschriebenen Anzahl von Malen vorkommen[29]), oder dass eine Maximalzahl für ihr Auftreten gegeben ist[30]).

10. Tripelsysteme. Eine andere Richtung aber hat sich für die Geometrie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, für die Algebra als besonders wichtig herausgestellt. Unabhängig von einander stellten *T. P. Kirkman*[31]) und *J. Steiner*[32]) fast identische Aufgaben; der Erste sein „Schulmädchen-Problem“: Fünfzehn Mädchen werden 35mal ausgeführt in Reihen zu je 3, so dass nicht 2 zweimal zusammen gehen; der Letzte das folgende: Aus N Elementen sollen K. der 3^{ten} Klasse (Ternen) so ausgewählt werden, dass jede Ambe ein- und nur einmal vorkommt; ferner K. der 4^{ten} Klasse (Quaternen) so, dass in ihnen jede Terne, die unter den vorigen nicht auftrat, ein- und nur einmal vorkommt u. s. w. *Cayley*[33]) und *R. R. Anstice*[34]) behandelten einzelne Fälle der „*Tripelsysteme*“. Eine allgemeine Regel für die Bildung solcher Systeme, welche $N = 6n + 1$, $6n + 3$ fordern, gab *M. Reiss*[35]).

26) Die kombinatorische Analysis. Wien (1826).

27) *A. A. Cournot,* Bull. sci. m. (1829). *Ch. Ramus,* J. f. M. 11 (1834), p. 353.

28) *H. F. Scherk,* J. f. M. 3 (1828), p. 96; J. f. M. 4 (1829), p. 226.

29) *Ad. Weiss,* J. f. M. 34 (1847), p. 255.

30) *Öttinger,* Arch. f. M. 15 (1850), p. 241. *Baur,* Z. f. M. 2 (1857), p. 267. *Scherk,* Math. Abhandl. Berlin (1825), p. 67. *André,* Ann. Éc. norm. (2), 5 (1876), p. 155.

31) Cambr. a. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 527 u. 8 (1853), p. 38; vgl. *T. Clausen,* Arch. f. M. 21 (1853), p. 93.

32) J. f. M. 45 (1853), p. 181 = Werke II, p. 435.

33) Phil. Mag. (3), 37 (1850), p. 50. — Ibid. (4), 25 (1862), p. 59.

34) Cambr. a. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 279 u. 8 (1853), p. 149.

35) J. f. M. 56 (1859), p. 326.

In neuerer Zeit wurden analytische Darstellungen für Primzahlen $6n+1$ hergeleitet, ferner für Zahlen $6n+3$, falls dies das Dreifache einer Primzahl von der Form $6k+5$ ist, u. s. w. Endlich wurden analytische Bildungsregeln gegeben, aus denen die Konstruktion für jedes mögliche N folgt[36]). Für $N=13$ sind zwei Tripelsysteme bekannt[37]). Die weiteren Teile der *Steiner*'schen Aufgabe sind noch nicht in Angriff genommen. — Auf ähnliche Aufgaben macht *Cayley* aufmerksam[38]). Vgl. I A 6 Nr. **13** Anm. 67.

11. Ausdehnung des Begriffs der Variation. Der Begriff der V. ist nach der Richtung hin erweitert worden, dass m Reihen von je n Elementen gegeben sind, und als V. m^{ter} Klasse werden dann die Kp. bezeichnet, welche je ein Element aus jeder der m Reihen enthalten. Darf derselbe Stellenzeiger der Elemente nur einmal auftreten, so sind es V. o. W., sonst V. m. W.

12. Formeln. Zwischen den verschiedenen bisher besprochenen Anzahlen bei P., K. und V. giebt es eine ausserordentlich grosse Menge verknüpfender Formeln. Hier muss es ausreichen, auf die hauptsächlichsten Schriftsteller hinzuweisen, welche sich mit der Ableitung oder Zusammenstellung beschäftigt haben[39]).

13. Binomialkoefficienten. Wir haben schon erwähnt, dass die Beweise des *binomischen* und des *polynomischen* Satzes für ganze positive Exponenten n

$$(z_1+z_2+\cdots+z_\varrho)^n = \sum \frac{n!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots\varkappa_\varrho!}\, z_1^{\varkappa_1} z_2^{\varkappa_2}\cdots z_\varrho^{\varkappa_\varrho}$$
$$(\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\varrho = n)$$

Anwendungen kombinatorischer Formeln sind. Die binomische Formel findet sich zuerst bei *H. Briggs*[40]), dann bei *J. Newton*[41]); die Koeffi-

36) *E. Netto*, Substit.-Theorie § 192ff. Leipz. (1882). Math. Ann. 42 (1892), p. 143. *E. H. Moore*, Math. Ann. 43 (1893), p. 271; N. Y. Bull. (2), 4 (1897), p. 11. *L. Heffter*, Math. Ann. 49 (1897), p. 101. *J. de Vries*, Rend. Palermo 8 (1894).

37) *K. Zulauf*, Dissert. Giessen (1897).

38) Phil. Mag. 30 (1865), p. 370.

39) *Hindenburg*, Nov. Syst. Permutationum, Combin. etc. primae lineae. Lips. (1781). — D. polynom. Lehrs., d. wichtigste Theorem d. ganzen Analysis, neu bearb. v. *J. N. Tetens, G. S. Klügel, A. Krauss, J. F. Pfaff* u. *Hindenburg*, herausgeg. v. *Hindenburg*. Leipz. 1796. *Hindenburg*, Infinitonomii dignitatum historia, leges etc. Vgl. auch *J. A. Grunert*, Arch. f. M. 1 (1841), p. 67; *Brianchon*, J. d. l'Ec. Polyt. t. 15 (1837), p. 159.

40) Arithmetica Logarithmica. London (1620).

41) Briefe an *Oldenburg* (1676) 13. Juni u. 24. Oktober.

cienten der binomischen Entwickelung ($n = 2$), die *Binomialkoefficienten* in ihrer Anordnung etc. als „arithmetisches Dreieck“

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

kommen schon bei *Bl. Pascal* vor[42]).

Als Erweiterungen des binomischen Satzes ist zu erwähnen, erstens die Entwickelung von $a(a+b)(a+2b)\cdots(a+nb)$ nach Potenzen von a;[43]) ferner die Entwickelung

$$(x+a)^n = x^n + c_1(x+t_1)^{n-1} + c_2(x+t_1+t_2)^{n-2} + \cdots,$$

wobei die t_α willkürliche Grössen sind[44]).

Als Erweiterung der Binomialkoefficienten sind Ausdrücke der Form

$$[n(n+k)(n+2k)\ldots(n+(p-1)k)] : p!$$

eingeführt worden[45]), deren Zähler als Fakultäten eingehend untersucht sind[46]). Die analytische Behandlung gehört nicht hierher.

Zwischen den Binomialkoefficienten giebt es eine unübersehbare Zahl von Relationen, deren Klassificierung von *J. G. Hagen* angebahnt ist[47]). Vgl. auch die „figurierten Zahlen“ der Alten.

14. Anwendungen. Wie schon in Nr. 1 erwähnt wurde, bieten die meisten Anwendungen analytischer Natur der Kombinatorik nur noch historisches Interesse dar. Wir beschränken uns darauf, die wichtigsten Zweige anzugeben, welche die Kombinatorik zu stützen unternommen hatte. An erster Stelle gehört hierher die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in deren elementaren Teilen ja ununterbrochen kombinatorische Fragen auftreten, und von der aus umgekehrt die Kombinatorik manche Anregung erhalten hat. Sie knüpft ferner an

42) Traité du triangle arithmét. Paris (1665) posth.; u. schon früher bei *M. Stifel,* Arithm. integra. Norimb. (1544), p. 44.

43) *Pascal* „productum continuorum“.

44) *N. H. Abel*, J. f. M. 1 (1826), p. 159 giebt einen Spezialfall; allgemein *A. v. Burg,* J. f. M. 1 (1826), p. 367. — *Cayley,* Phil. Mag. 6 (1853), p. 185 = Werke II, 102.

45) *Bl. Pascal,* siehe oben.

46) *L. Euler,* Calc. diff. II. c. 16 u. 17. Berl. (1755). *Öttinger,* J. f. M. 33 (1846), p. 1, 117, 226, 329; ferner 35 (1847), p. 13 u. 38 (1849), p. 162, 216; endlich 44 (1852), p. 26 u. 147, wo auch Historisches aufgeführt ist.

47) Synopsis. Berlin (1891), p. 64ff. Vgl. auch *G. Eisenstein,* Brief an *M. A. Stern,* Z. f. Math. 40 (1895), p. 193 der hist. Abtl.

die Theorie der Reihen an, bestimmt formal die Produkte, Potenzen, Quotienten von Reihen; das Resultat der Substitution einer Reihe für die Variable z in eine Reihe, die nach Potenzen von z fortschreitet; die formale Umkehrung von Reihen; die Rationalisierung solcher, in welche Irrationalitäten eingehen; die allgemeinen Glieder wiederkehrender Reihen; die Logarithmen von Reihen und Reihen von Logarithmen u. s. w. Ebenso giebt sie die Form für die höheren Differentiale von komplicierteren Funktionen u. s. w. Für ihre Zwecke hatte sie ein vollständiges Bezeichnungssystem ersonnen, welches jetzt freilich durchaus veraltet ist[48]).

Die gesamte Theorie der endlichen discreten Gruppen (I A 6) kann unmittelbar an die Kombinatorik angeschlossen werden.

Noch eine zweite Anwendung, die auf die Lösung linearer Gleichungen gerichtete, hat sich in überraschender Weise entwickelt. Sie ist zur *Lehre von den Determinanten* geworden.

15. Determinanten. Erklärung des Begriffs. Es seien n^2 Grössen a_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots n)$ gegeben; man bilde alle $n!$ Produkte a_{1i_1}, $a_{2i_2}, \dots a_{ni_n}$ in denen $i_1, i_2, \dots i_n$ eine P. von $1, 2, \dots n$ bedeutet und gebe jedem das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem diese P. zur ersten oder zweiten Klasse gehört. Die Summe dieser $n!$ Summanden ist die *Determinante* n^{ten} Grades[49]). *A. L. Cauchy*[50]) definiert sie auch so, dass er das alternierende Produkt $\prod(a_i - a_k)$, $(i = 1, 2, \dots n;\ k = i+1, \dots n)$, entwickelt und die Exponenten als zweite untere Indices schreibt. *E. Schering*[51]) giebt eine geometrische und eine analytische Erklärung, *Kronecker* legte in seinen Vorlesungen eine funktionentheoretische zu Grunde.

An Bezeichnungen sind die üblichsten[52])

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = |\, a_{h1}\, a_{h2} \dots a_{hn} \,| = |\, a_{hk} \,|;$$

$$(h, k = 1, 2, \dots n).$$

---

48) Vgl. *Hindenburg,* Nov. Syst. etc. Leipz. (1781).

49) *Jacobi,* J. f. M. 22 (1841), p. 285 = Werke III, p. 355.

50) Analyse algébrique. Paris (1821).

51) Gött. Abh. 22 (1879), p. 102.

52) Die dritte Bezeichnung ist von *L. Kronecker* vielfach verwendet; die letzte zuerst von *St. Smith*, Brit. Ass. Rep. (1862) p. 504. Als neu eingeführt hat sie dann *L. Kronecker,* J. f. M. 68 (1868), p. 273. Über weitere Bezeichnungen vgl. *Cayley,* Phil. Mag. 21 (1861), p. 180. *Nanson,* Lond. phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 396. *W. Schrader*, Determinanten. Halle 1887.

Historisch zu bemerken ist, dass die Determinanten von *Leibnitz*[53]) und später unabhängig von *Cramer*[54]) erfunden und zunächst zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen benutzt worden sind. Die ersten ausführlichen theoretischen Darlegungen stammen von *J. Binet* und *Cauchy;* allgemein eingeführt wurde die Lehre über die D. durch *Jacobi*[55]). Ausführliche Litteraturangaben findet man bei *Muir*[56]) von Beginn der Theorie bis zum Jahre 1885 fortgesetzt; Historisches auch bei *S. Günther,* Determinantentheorie, Erlangen (1875), bei *Baltzer,* Determinanten, Leipzig (1881) und bei *G. Salmon,* Modern higher algebra, Note I im Anschluss an *Baltzer.*

16. Definitionen. Die Grössen a_{ik} heissen die *Elemente* (El.) der D.; der erste (zweite) Index giebt die Ordnungszahl der Zeile (Spalte). Die Grössen a_{ii} bilden die *Hauptdiagonale;* die $a_{i,n+1-i}$ bilden die *Nebendiagonale.* Das Glied $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ der D. heisst ihr *Hauptglied.* Wählt man m Werte des ersten und m des zweiten Index aus $1, 2, \ldots n$ aus, so bilden die zugehörigen El. eine *Subdeterminante* (Subd.) m^{ten} Grades[57]). Sind die El. ihrer Hauptdiagonale zugleich El. derjenigen der D., dann heisst die Subd. eine *Hauptsubdeterminante.* Ist das Produkt der Hauptglieder zweier Subd. ein Glied der D., so heissen die Subd. *adjungiert,* oder auch *komplementäre* Subd.

Ist $a_{ik} = a_{ki}$, so heisst die D. eine *symmetrische D.*

Ist $a_{ik} = a_{i+k-2}$, so heisst die D. eine *rekurrierende* (einseitige, *orthosymmetrische*). Sie ist symmetrisch[58]).

Ist $a_{ik} = a_{i+1,k+1}$, wobei die Indices mod. n reduciert werden, so heisst die D. eine *Cirkulante*[59]), (auch *negativ-orthosymmetrische D.*).

Ist $a_{ik} + a_{ki} = 0$, $a_{ii} = 0$, so heisst die D. eine *halbsymmetrische.* Ist $a_{ik} + a_{ki} = 0$ für $i \neq k$, dann heisst die D. eine *schiefe*[60]).

53) Lettres à l'Hospital (1693). — Acta Erudit. Leipz. (1700), p. 206.

54) Introd. à l'anal. des courbes algébr. (1750). Genève. Appendice p. 656.

55) J. de l'Éc. Polytechn. Cah. 16 (1812), p. 280 u. Cah. 17 (1812), p. 29. — *Jacobi,* J. f. M. 22 (1841), p. 285 = Werke III, p. 355.

56) Quart. J. 18 (1882), p. 110; ibid. 21 (1886), p. 299. — Edinb. Proc. 13 (1886), p. 547. — Im Phil. Mag. (5), 18 (1884), p. 416 macht *Muir* auf *Ferd. Schweins* als einen vergessenen Entdecker aufmerksam, „Theorie der Differenzen u. Differentiale" (1825). Heidelberg. Cap. IV, p. 317.

57) Auch Unterdeterminante, Partialdeterminante, Minor.

58) *H. Hankel,* Dissert. Leipz. (1861) Göttingen. — „Recurrierend" nach *G. Frobenius;* Berl. Ber. (1894), p. 253.

59) *Th. Muir,* Quart. J. (1882), p. 166. *Hankel* l. c.

60) *Jacobi,* J. f. M. 2 (1857), 354; ibid. 29 (1845), p. 236. *Cayley,* J. f. M. 38 (1849), p. 93; ibid. 32 (1846), p. 119; ibid. 50 (1855), p. 299. *Cayley* bezeichnet die halbsymmetrischen D. als „schiefsymmetrische".

Ist $a_{ik} = a_{n+1-i, n+1-k}$, so heisst die D. eine *centrosymmetrische.*

17. Anzahl-Probleme hinsichtlich der Glieder. Die Anzahl der Glieder einer D. n^{ten} Grades ist $n!$. Es knüpfen sich hieran weitere Fragen: wie viele der Glieder enthalten eine vorgeschriebene Anzahl von El. der Hauptdiagonale[61])? Wie viele Glieder hat eine D., deren Hauptdiagonale k El. 0 enthält[62])? Wie viele verschiedene Glieder giebt es in symmetrischen, wie viele in halbsymmetrischen D.[63])?

18. Elementare Eigenschaften. Die folgenden Eigenschaften elementarer Natur zeigen sich sofort: man kann, ohne den Wert der D. zu ändern, jede α^{te} Z. zur α^{ten} Sp. machen[64]). Bei Transposition zweier Parallelreihen ändert sich das Vorzeichen der D.; folglich ist eine D. mit zwei identischen Parallelreihen gleich Null[65]). Die D. kann als lineare, homogene Funktion der El. jeder Reihe dargestellt werden[66]). Daraus folgt, dass man einen gemeinsamen Faktor aller El. einer Reihe vor die D. ziehen kann. Der Grad einer D. lässt sich durch passende *Ränderung,* d. h. Anfügung neuer Z. und Sp. vermehren. Stimmen zwei D. in $(n-1)$ Reihen überein, so können sie zu einer D. mit denselben $(n-1)$ Reihen summiert werden. Ist $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$ $(k = 1, \dots n)$, so zerfällt umgekehrt die D. in einzelne Summanden. Die lineare, homogene Darstellung liefert die partielle Ableitung der D. nach a_{ik}. Bezeichnen wir sie mit a'_{ki}, so folgt $\sum\limits_{\lambda} a_{i\lambda} a'_{\lambda k} = \varepsilon_{ik} D$, (d. h. $= D$, wenn $i = k$, sonst $= 0$)[67]). Wie die a', so können auch die höheren Subd. als partielle Ableitungen höherer Ordnung dargestellt werden[68]).

Die D. ändert ihren Wert nicht, wenn zu einer Reihe eine Parallelreihe addiert oder von ihr subtrahiert wird[69]).

---

61) *Baltzer,* Determin. 4. Aufl. Leipz. 1875, p. 39. Leipz. Ber. (1873), p. 534. *C. J. Monro,* Messeng. (2), 2 (1872), p. 38.

62) *N. v. Szütz,* Math. Ann. 33 (1889), p. 477.

63) *J. J. Weyrauch,* J. f. M. 74 (1872), p. 273. *Cayley,* Monthly Not. of Astron. Soc. 34 (1873—74), p. 303 u. p. 335. *G. Salmon,* Modern Algebra. Dublin (1885), p. 45.

64) *J. C. Becker,* Z. f. M. 16 (1871), p. 326. *Gordan,* Vorles. üb. Invar.-Th. (1885), p. 21. — Die D. wird „gestürzt".

65) *Ch. A. Vandermonde,* Par. Acad. (1772), 2e part., p. 518, 522.

66) *Cramer,* l. c. *J. L. Lagrange,* Berl. Mem. (1773), p. 149, 153.

67) ε_{ik} von *Kronecker* eingeführt, J. f. Math. 68 (1868), p. 273. Setzt man $a'_{ik} : D = \alpha_{ik}$, so nennt *Kronecker* die Systeme a_{ik}, α_{ik} reciproke Systeme.

68) *Jacobi,* J. f. Math. 22 (1841), p. 285, § 10 = Werke III, p. 365.

69) *Jacobi,* J. f. Math. 22 (1841), p. 371 = Werke III, p. 452.

Mit Hülfe der angegebenen Sätze kann die Berechnung von D. mit Zahlen-El. häufig abgekürzt werden, ebenso wie die von D., deren El. analytischen Gesetzen folgen. Es besteht eine fast unübersehbare Zahl von Einzelresultaten; die Heraushebung auch nur der wichtigsten würde den Rahmen dieser Darstellung sprengen[70]).

19. Laplace'sche und andere Zerlegungssätze. Von *P. S. Laplace*[71]) rührt ein wichtiger Satz her über die Entwickelung von D. nach Produkten adjungierter Subd. Aus den m ersten Z. (Sp.) werden alle möglichen Subd. m^{ten} Grades, aus den folgenden Z. (Sp.) alle adjungierten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades gebildet. Dem Produkte zweier adjungierten wird ein solches Vorzeichen gegeben, dass das Produkt ihrer Hauptglieder ein Glied der D. ist. Die Summe dieser Produkte ist gleich der D. Nimmt man beliebige m und $(n-m)$ Z. (Sp.), so ist die Summe $=0$, wenn auch nur eine gemeinsame Reihe vorkommt[72]). *Jacobi* zieht hieraus eine Reihe von Schlüssen über D. mit Null-Elementen[73]).

Sehr naheliegend ist die Erweiterung des Satzes nach der Richtung, dass die Produkte aus mehr als zwei Faktoren bestehen[74]).

Eine andere Erweiterung benutzt die Ränderung der D. und giebt an, wie aus jedem durch die *Laplace*'sche Formel gelieferten Resultate ein neues über geränderte D. sich ableiten lässt[75]). Dieser Erweiterung stellt sich eine andere die adj. Subd. betreffend zur Seite[76]).

20. Entwickelungen. Von weitern Entwickelungen wäre noch zu erwähnen die einer D., bei welcher die Diagonalglieder $a_{ii}=b_{ii}+z$ heissen; die Entwickelung geschieht nach Potenzen von z.[77]) Ferner ist die Entwickelung einer einreihig geränderten D. $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades nach den El. des Randes von Wichtigkeit[78]). Von *O. Hesse* stammt

---

70) Vgl. die Beispiele in *Baltzer*, *S. Günther, R. F. Scott, Salmon* u. s. w.

71) Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Paris Ac. d. Sc. (1772) 2e part., p. 267. — *Cauchy,* l. c. p. 100. — *Jacobi,* l. c. Nr. 5.

72) *Cauchy,* l. c.

73) *Jacobi,* l. c. Nr. 5.

74) *Vandermonde,* l. c. p. 524. — *Laplace,* l. c. p. 294. — *Jacobi,* l. c. Nr. 8.

75) *Netto,* J. f. Math. 114 (1895), p. 345.

76) *E. Pascal,* Rend. Acc. d. Linc. (5) 5, (1896), p. 188. Das dort aufgestellte Theorem folgt übrigens aus dem vorigen vermittels eines allgemeinen Satzes von *Th. Muir*, Edinb. Transact. 30 (1882), p. 1, durch den man von einer Formel über Subd. zu einer andern über adjungierte Subd. übergehen kann.

77) *Laplace,* Mécan. céleste, 1, liv. 2, Nr. 56. Paris (1799). — *Jacobi,* J. t. Math. 12 (1834), p. 15 = Werke III, p. 208.

78) *Cauchy,* l. c. p. 69.

ein Satz über Zerfällung der geränderten D., falls die ungeränderte verschwindet[79]).

21. Komposition und Produkt. Das Produkt einer D. m^{ten} in eine D. n^{ten} Grades lässt sich durch Aneinanderschieben in Diagonalrichtung (*Laplace*'scher Satz) leicht als D. $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades darstellen. *J. Ph. M. Binet* und *A. L. Cauchy* haben das Produkt zweier D. n^{ten} Grades wieder als D. n^{ten} Grades dargestellt[80]). Gleichzeitig haben sie folgende Erweiterung gegeben: Aus zwei Systemen a_{ik}, b_{ik} wird ein drittes c_{ik} gebildet, *komponiert*,

$$a_{ik} \quad (i=1,\ldots m;\ k=1,\ldots n); \quad b_{ik} \quad (i=1,\ldots n;\ k=1,\ldots m)$$
$$c_{ik} = \sum a_{i\lambda} b_{\lambda k} \quad (i=1,\ldots m;\ k=1,\ldots m;\ \lambda=1,\ldots n);$$

dann ist $|c_{ik}| = 0$ für $m > n$; ferner $|c_{ik}| = |a_{ik}|\,|b_{ik}|$ für $m = n$; und endlich $|c_{ik}| = \sum_t |a_{it}|\,|b_{it}|$ für $m < n$, wobei t alle möglichen Kombinationen m^{ter} Klasse aus $1, 2, \ldots n$ durchläuft. Der mittlere Fall giebt die Multiplikationsregel[81]); die verschiedene Anordnung der El. in Z. und Sp. liefert vier verschiedene Formen für das Produkt[82]). An diese Darstellung knüpfen sich analytisch und zahlentheoretisch wichtige Formeln[83]).

22. Andere Art von Komposition. Auf eine andere Art von Komposition hat *Kronecker*[84]) aufmerksam gemacht: a_{ik} $(i, k = 1,\ldots m)$ und b_{gh} $(g, h = 1,\ldots n)$ werden zu $c_{pq} = a_{ik} b_{gh}$ $(p = (i-1)n + g;$ $q = (k-1)n + h;$ $i, k = 1,\ldots m;$ $g, h = 1,\ldots n)$ komponiert. Dann ist

$$|c_{pq}| = |a_{ik}|^n \cdot |b_{gh}|^m.$$

23. Zusammengesetzte Determinanten. Eingehendes Interesse hat sich der Frage nach den *zusammengesetzten* D. (compound det.) zugewendet, d. h. nach solchen, deren Elemente selbst wieder nach gewissen Gesetzen gebildete D. sind. Am nächstliegenden ist die Untersuchung der aus den El. a'_{ik}, d. h. den Adjunkten der a_{ik} gebildeten D. *Cauchy*[85]) hat für $|a'_{ik}|$ $(i, k = 1,\ldots n)$ den Wert ange-

79) J. f. Math. 69 (1868), p. 319.

80) J. de l'Éc. polyt. Cah. 16 (1812), p. 280; Cah. 17 (1812), p. 29.

81) Weitere Beweise u. a.: *J. König,* Math. Ann. 14 (1879), p. 507. *M. Falk,* Brit. Ass. Rep. (1878), p. 473. *A. V. Jamet,* Nouv. Corresp. M. 3 (1877), p. 247.

82) *Cauchy,* l. c. p. 83.

83) *Ch. Hermite,* J. f. Math. 40 (1850), p. 297. *K. F. Gauss* Werke 3, p. 384. *Baltzer,* Leipz. Ber. (1873), p. 352. *S. Gundelfinger,* Z. f. Math. 18 (1873), p. 312.

84) Vorlesungen. *K. Hensel,* Acta mat. 14 (1890—91), p. 317. *Netto,* Acta mat. 17 (1894), p. 200. *B. Igel,* Monatsh. f. Math. 3 (1892), p. 55. *G. v. Escherich,* ib. 3 (1892), p. 68.

85) l. c. p. 82.

geben; *Jacobi*[86]) allgemeiner für $|a'_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots m;\ m < n)$. Im ersten Falle tritt eine Potenz von D. auf, im zweiten eine solche, multipliciert mit einer Subd. $|a_{ik}|$.

Diese Sätze sind von *Franke*[87]) erweitert worden; statt der a'_{ik} werden die Subd. m^{ten} Grades p_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots \mu)$ betrachtet, wo $\mu = \binom{n}{m}$ ist, und die Numerierung auf alle μ Subd. m^{ten} Grades von D. sich erstreckt. Ferner soll p'_{ik} zu p_{ik} adjungiert sein, d. h. p'_{ik} ist eine Subd. $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades von $|a_{ik}|$, und das Produkt der Hauptglieder von p_{ik} und p'_{ik} ist ein Glied von $|a_{ik}|$. Es ergiebt sich dann

$$|p_{ik}| = D^{\binom{n-1}{m-1}}, \qquad |p'_{ik}| = D^{\binom{n-1}{m}},$$

und auch hier kann man die Subd. von $|p'_{ik}|$ in ähnlicher Weise darstellen, wie bei *Jacobi* die Subd. von $|a'_{ik}|$.[88])

Allgemeiner noch ist der *Sylvester*'sche Satz[89]), den wir kurz dahin charakterisieren können, dass er sich auf Ränderung der D. $|p_{ik}|$ bezieht.

Andere Arbeiten beschäftigen sich damit, D. aus Reihen zweier gegebenen D. zusammenzusetzen, und diese neuen D. als Elemente einer D. aufzufassen[90]).

24. **Rang der Determinante.** Nach *Kronecker* bezeichnet man als *Rang* r einer D. die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht alle Subd. r^{ten} Grades verschwinden[91]). Durch Vertauschung und durch lineare Kombinationen der Reihen wird r nicht geändert. Ist D vom Range r, so können seine El. aus zwei Systemen

$$a_{ik} \quad (i = 1, \ldots n;\ k = 1, \ldots r) \qquad \text{und} \qquad b_{ik} \quad (i = 1, \ldots r;\ k = 1, \ldots n)$$

komponiert werden[92]). Von Wichtigkeit ist dieser Begriff für viele Fragen der Algebra, besonders Auflösung linearer Gleichungen (I B 1 b).

---

86) l. c. § 11. — *C. W. Borchardt*, Brief an *Baltzer* (1853).

87) J. f. Math. 61 (1863), p. 350.

88) *C. W. Borchardt*, J. f. Math. 61 (1863), p. 353, 355, macht darauf aufmerk- dass der Satz ein Spezialfall des früher von *Sylvester* gegebenen ist; *Kronecker*, Berl. Ber. (1882), p. 822 weist seine Identität mit dem obigen von *Jacobi* nach. — Vgl. *Picquet*, C. R. 86 (1878), p. 310; J. de l'Éc. Pol. cah. 45 (1878), p. 201.

89) Phil. Mag. (4), 1 (1851), p. 415. Vgl. *Frobenius*, J. f. Math. 86 (1879), p. 54); Berl. Ber. (1894), p. 242. — *Netto*, Acta mat. 17 (1894), p. 201; J. f. Math. 114 (1895), p. 345. *R. F. Scott*, Lond. Proceed. 14 (1883), p. 91. *C. A. v. Velzer*, Amer. J. 6 (1883), p. 164. *Ém. Barbier*, C. R. 96 (1883), p. 1845; ib. 97 (1883), p. 82. *E. J. Nanson*, Lond. phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 396.

90) *Picquet*, l. c. *G. Zehfuss*, Z. f. Math. 7 (1862), p. 496.

91) Berl. Ber. (1884), p. 1071.

92) *Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), p. 152. *Baltzer*, Determinanten, 4. Aufl. Leipz. (1875), p. 53.

25. Hier mag noch ein auf allgemeine D. bezüglicher Satz von *Mac-Mahon* erwähnt werden (Phil. Trans. 185 (1894), p. 146). Zwischen einer D. und all den Subd., deren Hauptdiagonalen in die Hauptdiagonale der D. fallen, bestehen $2^n - n^2 + n - 2$ Relationen. Vgl. auch *Muir,* Phil. Mag. (1894), p. 537; Edinb. Proceed. 20 (1895), p. 300. *Cayley,* ibid. p. 306. *Nanson,* ibid. (1897), p. 362.

26. Symmetrische Determinanten. Bei *symmetrischen,* d. h. solchen D., deren El. in Beziehung auf die Hauptdiagonale symmetrisch sind, bilden auch die a'_{ik} eine symmetrische D. — Jede Potenz einer symmetrischen D., und jede gerade Potenz einer beliebigen D. ist symmetrisch[93]). Das Produkt aus einer symmetrischen D. in das Quadrat einer beliebigen D. ist als symmetrische D. darstellbar[94]). Ist r der Rang einer symm. D., so hat sie eine nicht verschwindende Hauptsubd. vom Grade r.[95]) *H. G. Grassmann* hatte zuerst angegeben[96]), dass zwischen den Subd. symmetrischer D. lineare Relationen bestehen; denselben Satz hat später *Kronecker* wieder gefunden[97]), und *C. Runge* hat gezeigt[98]), dass die von ihm gegebenen Relationen die einzigen vorhandenen sind. Diese haben folgenden Charakter:

$$|a_{gh}| = \sum |a_{ik}| \quad \begin{array}{l}(g = 1, \ldots m;\ h = m+1, \ldots 2m;\ i = 1, \ldots m-1, r;\\ \qquad k = m+1, \ldots r-1, m, r+1, \ldots 2m).\end{array}$$

Rändert man eine symmetrische, verschwindende D. in symmetrischer Weise, so ist die entstehende D. als Function der Ränderungs-Elemente aufgefasst ein Quadrat[99]), wie sich aus Nr. **19** leicht ergiebt. Trägt man $a_{ii} + z$ statt der a_{ii} ein und setzt die entstehende symmetrische D. gleich Null, dann hat diese Gleichung in z nur reelle Wurzeln. Die entstehende Gleichung heisst die „Säculargleichung"[100]). (Vgl. Nr. **31.**)

---

93) *H. Seeliger,* Z. f. Math. 20 (1875), p. 468 bestimmt die El. einer beliebigen Potenz einer sym. D.

94) *O. Hesse,* J. f. Math. 49 (1853), p. 246. — Vgl. über eine Erweiterung *Muir,* Amer. J. 4 (1881), p. 351.

95) *S. Gundelfinger,* J. f. Math. 91 (1881), p. 235; vgl. *Hesse,* analyt. Geom. d. Raumes, 3. Aufl. Leipz. (1881), p. 460. *Frobenius,* Berl. Ber. (1894), p. 245.

96) Ausdehnungslehre, Berlin (1862), p. 131. Vgl. *Mehmke,* Math. Ann. 26 (1885), p. 209. Die Art wie *Grassmann* statt der D. gewisse „kombinatorische Produktbildungen" benutzt, erkennt man am einfachsten aus der „Übersicht" (Arch. f. Math. 6 [1845], p. 337). Genaueres findet sich in der „Ausdehnungslehre" § 37, § 51 ff., § 63 ff. Die D. tritt dabei als ein Produkt $\Pi(a_{i_1} e_1 + a_{i_2} e_2 + \cdots)$ „extensiver Grössen" auf, bei dem $e_\varkappa{}^2 = 0$, $e_\varkappa e_\lambda = - e_\lambda e_\varkappa$ ist.

97) Berl. Ber. (1882), p. 821. Vgl. *Darboux,* J. d. Mat. (2) 19 (1874), p. 347.

98) J. f. Math. 93 (1882), p. 319.

99) *Cauchy,* l. c., p. 69.

100) *J. L. Lagrange,* Mém. de Berlin (1773), p. 108 für $n = 3$; allgemein

27. Rekurrierende Determinanten. Cirkulanten. Die Symmetrie tritt bei *rekurrierenden* D. $a_{ik} = a_{i+k-2}$ in noch verstärktem Masse auf. *Hankel* (l. c.), der sie als orthosymmetrisch bezeichnet, stellt sie als $|\Delta_k|$ dar, wo die Δ_k die Anfangsglieder der Differenzenreihen der a_{i+k} sind. Diese D. treten vielfach in der Algebra auf[101]); ihr Rang wird dabei von Bedeutung.

Einen Specialfall hiervon bilden diejenigen rekurrierenden D. n^{ten} Grades, bei denen $a_{n+i} = a_i$ ist[102]); und mit diesen hängen eng die *Cirkulanten* (vgl. Nr. **16**) zusammen $(a_{i,k} = a_{i+1,k+1})$, die in Beziehung auf die Nebendiagonale symmetrisch sind, welche sich durch Vertauschung der Z. in jene umwandeln lassen. Eine Cirkulante ist in das Produkt aus den n Faktoren

$$a_1 + \omega^{\alpha} a_2 + \omega^{2\alpha} a_3 + \cdots + \omega^{(n-1)\alpha} a_n, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

auflösbar, wobei ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit bedeutet; daraus folgt sofort, dass eine Cirkulante $2n^{\text{ten}}$ Grades als solche n^{ten} Grades darstellbar ist[103]). Eine Cirkulante $2n^{\text{ten}}$ Grades kann ferner als Produkt einer solchen n^{ten} Grades und einer ähnlich gebildeten ausgedrückt werden[104]).

28. Halbsymmetrische Determinanten. Für *halbsymmetrische* D. $(a_{ik} = -a_{ki};\ a_{ii} = 0)$[105]) gelten die Sätze: $a'_{ik} = a'_{ki}$; $\frac{\partial D}{\partial a_{ik}} = 0$; $D = 0$ für ungerades n; dagegen $a'_{ik} = -a'_{ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial a_{ik}}$; $a'_{ii} = 0$; und D ist ein Quadrat für gerades n. Jedes Glied von $\sqrt{D}$ ist ein Produkt von $\frac{1}{2}n$ El. a_{ik}, deren Indices alle unter einander verschieden sind, wie z. B. das in $\sqrt{D}$ auftretende Glied $a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n}$ zeigt. $\sqrt{D}$ wird von *Cayley* (l. c.) $= \pm (1, 2, \ldots n)$ gesetzt und als „*Pfaffian*" bezeichnet.

Cauchy, Exerc. d. Math. 4 (1829), p. 140. Vgl. *E. Kummer,* J. f. Math. 26 (1843), p. 268. *G. Bauer,* J. f. Math. 71 (1870), p. 46. *Sylvester,* Phil. Mag. 2 (1852), p. 138. *Borchardt,* J. de Math. 12 (1847), p. 50; J. f. Math. 30 (1846), p. 38.

101) *Jacobi,* J. f. Math. 15 (1836), p. 101. *Kronecker,* Berl. Ber. (1881), Juni; J. f. Math. 99 (1886), p. 346. *Frobenius,* Berl. Ber. (1894), p. 241.

102) „persymmetrische D." nach *Muir,* Quart. J. 18 (1882), p. 264.

103) *J. W. L. Glaisher,* Quart. J. 15 (1878), p. 347; ibid. 16 (1878), p. 31. Vgl. auch I A 6, Nr. **23, 24**.

104) *R. F. Scott,* Quart. J. 17 (1880), p. 129.

105) *Lagrange* u. *S. D. Poisson* sind wohl, *Jacobi* zufolge, zuerst auf solche D. gestossen. Vgl. *Jacobi,* J. f. Math. 2 (1827), p. 354. — *Cayley,* J. f. Math. 38 (1849), p. 93, nennt sie „schief-symmetrisch". Er beweist zuerst, dass D ein Quadrat ist bei geradem n. J. f. Math. 32 (1846), p. 119; ibid. 50 (1855), p. 299.

106) *Brioschi,* J. f. Math. 52 (1856), p. 133. *Cayley,* l. c. Vgl. eine Erweiterung von *Muir,* Phil. Mag. (5) 12 (1881), p. 391.

Das Quadrat jeder D. geraden Grades kann in eine halbsymmetrische D. umgeformt werden[106], so dass die D. selbst als Pfaffian auftritt. *Cayley* hat ferner gezeigt (l. c.), dass wenn man eine halbsymmetrische D. ungeraden Grades beliebig durch $a_{\alpha k}$, $a_{i\beta}$ rändert, die entstehende D. in ein Produkt $\pm(\alpha, 2, \ldots n) \cdot (\beta, 2, \ldots n)$ zweier Pfaffians zerfällt. Für $\alpha = \beta = 1$ geht daraus der vorige Satz hervor.

29. Schiefe Determinanten. Lässt man die Bedingung $a_{ii} = 0$ fallen, so gelangt man zu den *schiefen* D., deren Behandlung gleichfalls auf *Cayley* zurückzuführen ist (l. c.). Die Entwickelung der schiefen D. nach den Gliedern der Hauptdiagonale (Nr. **20**) liefert Aggregate von halbsymm. D. Ist also jedes $a_{ii} = z$, so treten bei der Entwickelung von D. nach Potenzen von z nur die Glieder mit den Exponenten n, $n-2$, $n-4$, ... auf.

30. Centrosymmetrische und andere Determinanten. Endlich seien noch die *centrosymmetrischen* D. $(a_{ik} = a_{n+1-i,\, n+1-k})$ kurz erwähnt. Jede derartige von geradem Grade $2m$ kann als Produkt zweier D. m^{ten} Grades dargestellt werden. Da nun Cirkulanten (Nr. **27**) durch Umstellung der Zeilen zu centrosymmetrischen D. gemacht werden können, so folgt der (Nr. **27**) erwähnte Satz leicht aus diesem.

31. Weitere Determinantenbildungen. Ausser den angeführten besonderen Bildungen sind noch viele andere untersucht worden; so knüpfen sich z. B. an die letztbesprochenen die centroschiefen D. an; ferner sind die *Vandermonde*'schen oder *Potenzdeterminanten* zu erwähnen, bei denen $a_{ik} = a_i^{\nu_k}$ ist, wobei die ν_k beliebige Zahlen bedeuten. Die Kettenbruch-Determinanten[107]), die *Continuanten* (*Sylvester*), liefern die Darstellung der Zähler und Nenner der Näherungswerte eines Kettenbruches[108]). *Hermite* betrachtet Par. C. R. 41 (1855), p. 181, J. f. Math. 52 (1856), p. 40 Det., in denen a_{ik} und a_{ki} konjugiert complex sind. Erweiterung der Säkulargleichung.

An die Funktionentheorie knüpfen Bildungen an wie: 1) die *Wronski*'sche D.; 2) die *Jacobi*'sche (Funktional)-D.; 3) die *Hesse*'sche D.

Bei 1) sind die a_{1i} Funktionen von x; die $a_{\varkappa i}$ ihre $(\varkappa - 1)^{\text{ten}}$ Ableitungen[109]).

---

107) *Painvin*, J. d. Math. (2) 3 (1858), p. 41. *J. Sylvester,* Am. J. 1 (1878), p. 344.

108) *Sylvester,* Phil. Mag. 5 (1859), p. 458; 6 (1853), p. 297. *W. Spottiswoode,* J. f. Math. 51 (1856), p. 209. *E. Heine,* ibid. 57 (1860), p. 231. *S. Günther,* Erlangen (1873) u. Math. Ann. 7 (1874), p. 267. — Vgl. II A 3.

109) *C. J. Malmsten,* J. f. Math. 39 (1850), p. 91. *Hesse,* ibid. 54 (1857), p. 249. *E. B. Christoffel,* ibid. 55 (1858), p. 281. *Frobenius,* ibid. 76 (1873), p. 236. *M. Pasch,* ibid. 80 (1875), p. 177.

Bei 2) sind a_i Funktionen von n Variablen $x_1, \dots x_n$, und $a_{\varkappa i}$ ist $= \frac{\partial a_i}{\partial x_\varkappa}$ [110]).

Bei 3) ist a eine Funktion von $x_1, \dots x_n$, und $a_{\varkappa i}$ ist $= \frac{\partial^2 a}{\partial x_\varkappa \partial x_i} \cdot$ [111])

An die Algebra knüpfen Bildungen an wie *Resultanten* und *Diskriminanten*. Wir verweisen hierüber auf I B 1 a und b.

32. Determinanten höheren Ranges. Determinanten höheren (ν^{ten}) Ranges werden aus n^ν Grössen $a_{h_1, \dots h_\nu}$ derart gebildet, dass man die Indices gleicher Stelle unter sich vertauscht; dann werden Produkte von je n dieser Grössen gebildet, bei denen nie zwei Faktoren an gleicher Stelle gleichen Index haben, und endlich der frühern Zeichenregel entsprechend das $\pm$ Zeichen vorgesetzt. Alle diese Aggregate bilden die D. Von ihnen gelten eine Reihe von Eigenschaften der gewöhnlichen Det.; andere sind zu modifizieren; Det. *geraden* und solche *ungeraden* Ranges verhalten sich in manchen Hinsichten verschieden[112]). Auch hier ist eine Behandlung im Sinne *Grassmann*'s möglich (*G. v. Escherich* l. c.), vgl. Anm. 96.

33. Unendliche Determinanten. Betrachtet man a_{ik} $(i,k=1,2,\dots\infty)$, so kann man $D_n = |a_{ik}|$ $(i,k = 1,2,\dots n)$ als Funktion von n auffassen. Wächst n, so gelangt man zum Begriffe *unendlicher Det.* Vor allem ist hier die Existenzfrage aufzuwerfen[113]). Diese Bildungen sind für Differenzialgleichungen von Wichtigkeit. Vgl. I A 3 Nr. **58, 59.**

34. Matrizen. Ein System von $m \cdot n$ Grössen a_{ik} $(i = 1, 2, \dots m;$ $k = 1, 2, \dots n)$ heisst eine *Matrix*. An diese Gebilde schliesst sich eine Reihe fundamentaler Fragen, deren Behandlung in I A 4 (bilineare

110) *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), p. 38 = Werke III, p. 233; J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke III, p. 393. *Sylvester,* Phil. Trans. (1854), p. 72. *Cayley,* J. f. Math. 52 (1856), p. 276. *Clebsch,* ibid. 69 (1868), p. 355. *Kronecker,* ibid. 72 (1870), p. 155 u. s. w.

111) *Hesse,* J. f. Math. 28 (1844), p. 83; ibid. 42 (1851), p. 117; ibid. 56 (1859), p. 263. *Sylvester,* Cambr. a. Dubl. M. J. 6 (1851), p. 186.

112) Zuerst behandelt wurden kubische D. von *A. de Gasparis* (1861). Es folgten: *Dahlander,* Oefvers. of K. Akad. Stockh. (1863). *G. Armenante,* Giorn. di Battagl. 6 (1868), p. 175. *E. Padova,* ibid. p. 182. *G. Zehfuss,* Frankf. (1868). *G. Garbieri,* Giorn. d. Batt. 15 (1877), p. 89. *H. W. L. Tanner,* Proceed. Lond. M. S. 10 (1879), p. 167. *R. F. Scott,* ib. 11 (1880), p. 17. *G. v. Escherich,* Wien. Denkschr. 43 (1882), p. 1. *L. Gegenbauer,* ib. 43 (1882), p. 17; 46 (1883), p. 291; 50 (1885), p. 145; 55 (1889), p. 39. Wien. Ber. 101 (1892), p. 425.

113) *G. W. Hill,* Acta Math. 8 (1886), p. 1, im Wes. Abdruck einer Monogr. Cambridge U. S. A. (1877). *H. Poincaré,* Bull. Soc. d. Fr. 13 (1884—85), p. 19; 15 (1885—86), p. 77. *Helge von Koch,* Acta math. 15 (1891), p. 53; ibid. 16 (1892 bis 1893), p. 217.

Formen) gegeben wird. Der Begriff des Ranges sowie der Komposition von Matrizen ist festzustellen. Aus einer Matrix können auf verschiedene Weise Det. gebildet werden. Ihr Zusammenhang, sowie ihre invarianten Eigenschaften sind zu untersuchen. Hierher gehört der Fall der *korrespondierenden Matrizen:* a_{ik} $(i = 1, \ldots m;\ k = 1, \ldots \alpha)$ und b_{jl} $(j = 1 \ldots \beta;\ l = 1, 2, \ldots m)$, wobei $\alpha + \beta = m$ ist, und die $\alpha \cdot \beta$ Relationen bestehen $\sum_{(q)} a_{qk} b_{jq} = c_{kj} = 0$, bei denen Proportionalität korrespondierender Determinanten eintritt[114]).

35. Monographien. An Lehrbüchern über Determinanten führen wir, unter Übergehung von nur für den Schulgebrauch bestimmten, als hauptsächlichste an:

Brioschi, La teoria dei determinanti. Pavia (1854). Deutsch, Berlin (1856).

Spottiswoode, Elementary Theorems relating to Determinants, J. f. Math. 51 (1856), p. 209—271 u. 328—381.

Baltzer, Theorie u. Anwendung der Determinanten. Leipzig (1857). Fünfte Aufl. (1881).

Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra. Dublin (1859). Deutsch Leipz. (1877) v. *Fiedler.*

Hesse, Die Determinanten, elementar behandelt. Leipz. (1872).

Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen (1875). Zweite Aufl. (1877).

Scott, A treatise on the theory of determinants. Cambridge (1880).

P. Mansion, Éléments de la théorie des déterminants. Paris 4e éd. (1883).

L. Leboulleux, Traité élémentaire des déterminants. Genève (1884).

A. Sickenberger, Die Determinanten in genetischer Behandlung. München (1885).

Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. I. Determinanten. Leipz. (1885).

Pascal, I determinanti. Milano (1897).

---

114) Der Begriff der Matrix ist von *A. Cayley* eingeführt, J. f. Math. 50 (1855), p. 282. *Cayley* will die Theorie der Matrizen von derjenigen der Determinanten getrennt halten.