IB1a. RATIONALE FUNKTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN; IHRE NULLSTELLEN

VON

E. NETTO

IN GIESSEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Monographien grösseren Umfanges, welche das gesamte Gebiet der rationalen Funktionen und nur dieses umfassen, bestehen nicht. In den meisten Lehrbüchern der Algebra und in einigen der Analysis sind die dahingehörigen Kapitel zu suchen. Das ist bei den folgenden Angaben zu berücksichtigen.

R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. Aufl. Leipzig 1881.
F. Faà di Bruno, Théorie des formes binaires. Turin 1876. Mit Unterstützung von *M. Noether* deutsch von *Th. Walter*. Leipzig 1881.

Sn. Burnside and *W. Panton*, Theory of equations. 3. ed. Dublin 1892. New-York 1893.
A. Capelli, Lezioni di Algebra complementare. 2. Aufl. Napoli 1898.
P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgeg. von *G. Kerschensteiner.* I. Determinanten. Leipzig 1885. II. Binäre Formen. Leipzig 1887.
H. Laurent, Traité d'Algèbre. 4. et 5. éd. Paris 1887—1894.
E. Netto, Vorlesungen über Algebra. I. Leipzig 1896. II. Leipzig 1898/99.
S. Pincherle, Algebra complementare. Milano 1893—1894.
G. Salmon, Modern higher Algebra. 4. ed. Dublin 1885. Deutsch von *W. Fiedler.* 2. Aufl. Leipzig 1877.
J.-A. Serret, Algèbre supérieure. 5. éd. Paris 1885. Deutsch von *G. Wertheim.* 2. Aufl. Leipzig 1878.
O. Stolz, Allgemeine Arithmetik. 2. 4. Abschn. Leipzig 1886.
C. Chrystal, Algebra. Edinburgh. 1. 1886. 2. 1889.
E. Cesàro, Corso di Analisi algebrica. Torino 1894.
H. Weber, Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. I. Braunschweig 1898. II. ib. 1899.
N. Cor et *J. Riemann,* Traité d'algèbre élémentaire. Paris 1898.

---

1. Definitionen. Ein Ausdruck von der Form

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

in welchem die a Konstanten und z eine Veränderliche bedeuten, heisst eine *ganze Funktion* (gz. F.) *der Variablen z* vom *Grade n*; die $a_0, a_1, \ldots a_n$ heissen ihre *Koeffizienten* (Koeff.). Der Ausdruck Funktion rührt in diesem und in allgemeinerem Sinne von *G. W. Leibniz* her[1]); die symbolische Bezeichnung $f(z)$ hat nach *R. Baltzer*'s Angabe[2]) zuerst *A. Cl. Clairaut* angewendet. Der Quotient zweier ganzer Funktionen heisst eine *gebrochene Funktion* (gbr. F.); gz. und gbr. F. werden als *rationale Funktionen* (rat. F.) zusammengefasst[3]). Haben die Koeff. a keinen gemeinsamen Teiler, dann heisst f eine *primitive* F.[4]). Das Produkt zweier primitiver F. ist eine ebensolche F.[5]). Setzt man $y^n f(x:y)$ an, so wird dies homogen und heisst eine *binäre Form* n^{ten} Grades (vgl. Nr. **24**).

2. Konstantenzählung. Interpolationsproblem. Partialbrüche. $f(z)$ enthält $(n+1)$ Konstanten und ist daher bestimmt, wenn man

1) Acta Eruditorum Lips. 1694, p. 306. Ganz modern definiert schon *Joh. Bernoulli I.* (Paris Mém. 1718, p. 100 = Oeuvres [Laus. et Genève 1742] 2, p. 241): „On appelle ici fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes." *Leibniz* schloss sich dem an; Commerc. epist. I, p. 386.

2) Elemente d. Math. 1, Leipzig 1872, p. 214 [7. Aufl. 1885, p. 236].

3) *L. Euler,* Introductio in anal. infin. Lausannae 1748. Lib. I. Cap. I. § 1—9.

4) Eingeführt von *C. F. Gauss,* Disq. arithm. § 226. — *H. Weber,* Algebra. 1, § 2. — *L. Kronecker,* Grundzüge einer arithm. Theorie der algebr. Grössen, J. f. Math. 92 (1882), p. 49.

5) Vgl. Nr. **9**; (*Gauss'* Satz).

den Werten $z_0, z_1, \ldots z_n$ des Argumentes z $(n+1)$ Werte $u_0, u_1, \ldots u_n$ der F. zuordnet. Die Bestimmung kann durch die Lösung eines Systems linearer Gleichungen (Gl.) mit der Determinante $|z_\lambda^\varkappa|$ bei $(\varkappa, \lambda = 0, 1, \ldots n)$ geschehen und ist, da für verschiedene z_λ die Determinante $\neq 0$ wird, stets eindeutig möglich.

Dieses *Interpolationsproblem* findet seine Erledigung durch mancherlei Interpolationsformeln. Eine solche stammt von *J. Newton* her[6]; sie hat die Gestalt

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)(z - z_1) + c_3(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) + \cdots,$$

$$c_0 = u_0;\ c_1 = \frac{u_0}{z_0 - z_1} + \frac{u_1}{z_1 - z_0};\ c_2 = \frac{u_0}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} + \cdots + \frac{u_2}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)};\ \cdots$$

Eine andere Formel, die sich aus dieser leicht ableiten lässt (wie auch umgekehrt), hat *J. L. Lagrange* gegeben[7]). Setzen wir

$$g(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

und bezeichnen mit $g'(z)$ die *Ableitung* (vgl. Nr. **6**) von $g(z)$, so ist

$$f(z) = \sum u_\lambda \frac{g(z)}{(z - z_\lambda) g'(z_\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n),$$

wobei die Bedeutung jedes einzelnen Gliedes klar ist. Aus ihr folgen, wenn man $u_\lambda = f(z_\lambda)$ setzt, die *Euler*'schen Formeln[8])

$$\sum_\lambda \frac{z_\lambda^\varkappa}{g'(z_\lambda)} = \begin{cases} 0 & (\varkappa < n) \\ 1 & (\varkappa = n) \end{cases} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n),$$

aus denen man umgekehrt die *Lagrange*'sche Formel herleiten kann. In beiden müssen die z_λ ihrer Bedeutung nach von einander verschieden sein. *Jacobi* gab Ausdehnungen für den Fall gleicher Werte z_λ.[9]) Über den Fall $\varkappa > n$ vgl. *F. Brioschi*, J. f. Math. 50 (1855), p. 239.

Die Formeln reichen zur Zerlegung einer gebr. F. in *Partialbrüche* aus, d. h. in Brüche, deren Nenner nur für je einen einzigen Wert von z verschwinden, und deren Zähler zugleich konstant sind[10]). Vgl. Nr. **5**, sowie den Schluss von Nr. **14**.

---

6) Princip. Phil. Nat. ed. Amstelod. 1723, Lib. III, lemma 8; p. 446. Vgl. auch *J. Fr. Encke*, Berl. Astr. Jahrb. für 1830, p. 265 (1828).

7) J. Éc. polyt. cah. 8 (1812), p. 277 = Oeuvres 7, p. 285.

8) Instit. Calc. Integr. Petrop. 1768—1770, 2, § 1169.

9) Diss. Berol. 1825 = Werke 3, p. 1. — Auch *Ch. Hermite* hat (J. f. Math. 84 [1878], p. 70) eine Erweiterung in analytischer Behandlung geliefert, nämlich die, eine Funktion $F(x)$ des Grades $(n - 1)$ herzustellen, welcher n Werte

$$F^{(\varkappa)}(z_\lambda) \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, l; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots k_\lambda \quad \left(\sum k_\lambda = n\right)$$

vorgeschrieben sind, wenn dabei $F^{(\varkappa)}(z)$ die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung von $F(z)$ bedeutet.

10) Diese Art der Zerlegung stammt von *Leibniz*, Acta Erud. Lips. 1702, p. 210; 1703, p. 19 = Op. 3, p. 65, 66. Weiter siehe *Euler*, Introd. Cap. 2. u. 12;

A. L. Cauchy lieferte eine Erweiterung der Interpolationsformel auf gebr. F.[11]), ohne einen Beweis für sie zu geben; *K. G. J. Jacobi* gab ihn[12]) und diskutierte eingehend verschiedene Darstellungsformen für Zähler und Nenner. *Kronecker* zeigte, dass die *Cauchy*'sche Aufgabe nicht stets lösbar sei, und stellte die Bedingungen fest, unter denen sie es ist[13]). An die *Cauchy*'sche Formel lassen sich, ähnlich wie an die *Lagrange*'sche andere vom Charakter der obigen *Euler*'schen anknüpfen[14]).

L. Stickelberger verallgemeinert die Interpolationsaufgabe in der Weise, dass er die Reste $\varphi_\lambda(z)$ vorschreibt, welche $f(z)$ bei der Division durch gegebene Funktionen $h_\lambda(z)$ haben soll[15]).

3. Interpolations- und Ausgleichungs-Rechnung. Die charakteristische Aufgabe für Interpolationsformeln liegt darin, an die Stelle einer F., deren analytischer Ausdruck unbekannt oder unbequem ist, eine bekannte oder bequemere aus gegebenen numerischen Werten gebildete zu setzen, die sich innerhalb gewisser Grenzen statt jener zu numerischen Zwecken benutzen lässt[16]). Das einfachste und zugleich wichtigste Problem tritt auf, wenn die z_λ äquidifferent sind, $z_1 - z_0 = h$, $z_2 - z_1 = h, \cdots$. Setzt man, wie in der *Differenzenrechnung* (vgl. Nr. 4) als Symbole für Differenzen erster und höherer Ordnungen

$$\varDelta u_\mu = u_{\mu+1} - u_\mu;\quad \varDelta^2 u_\mu = \varDelta u_{\mu+1} - \varDelta u_\mu;\quad \varDelta^3 u_\mu = \varDelta^2 u_{\mu+1} - \varDelta^2 u_\mu;\ \cdots$$

dann liefert die *Newton*'sche Formel aus Nr. 2 in der Gestalt

$$f(z) = u_0 + (z - z_0)\frac{\varDelta u_0}{h} + \frac{(z-z_0)(z-z_1)}{1\cdot 2}\frac{\varDelta^2 u_0}{h^2} + \cdots$$
$$+ \frac{(z-z_0)\cdots(z-z_{n-1})}{n!}\frac{\varDelta^n u_0}{h^n}$$

Inst. calc. diff. 2, Cap. 18. — Ausführliche Litteraturangaben liefert *A. L. Crelle,* J. f. Math. 9 (1832) p. 231; 10 (1833), p. 42. Ferner siehe *Jacobi* (Anm. 9) und *Gauss,* Werke 3; Nachlass p. 265, § 3. — *Jacobi* dehnt die Zerlegung auch auf den Fall aus, dass als die Nenner der einzelnen Partialbrüche die Produkte mehrerer Wurzelfaktoren $(z - z_\lambda)\,(z - z_\mu)$ auftreten.

11) Cours d'analyse, Paris 1821, Note V.

12) J. f. Math. 30 (1846), p. 127 = Werke 3, p. 479. Vgl. auch Nr. **16**, *F. Rosenhain.*

13) Berl. Ber. 1881 Juni, p. 535, bes. § II. Vgl. auch *Netto,* Math. Ann. 42 (1893), p. 453.

14) *Netto,* Zeitschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 107.

15) Math. Ann. 30 (1887), p. 405.

16) *S. F. Lacroix,* Traité des différences et des séries; Paris 1800. — *J. Stirling,* Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, Lond. 1730; unvollst. schon Lond. Trans. 1718. — *Lagrange,* Leçons élementaires (V leç.). Oeuvres 7. — *A. Markoff,* Differenzenrechnung, St. Petersb. 1891 (deutsch von *Th. Friesendorff* und *E. Prümm.* Leipzig 1896, Teil I), wo ausführliche Litteraturangaben zu finden sind.

die Lösung des Problems durch Angabe einer interpolierenden Funktion n^{ten} Grades[17]. *J. F. Encke*[18] bearbeitete eine von *J. Stirling*[19] gegebene Methode, von der Mitte der gegebenen Werte aus zu interpolieren; diese ist deshalb von Wichtigkeit, weil der Fehler der Interpolation am kleinsten wird, wenn man das z des gesuchten u möglichst nahe an die Mitte der gegebenen Werte legt. Man vgl. I D 3.

Auf Interpolation durch periodische Reihen und durch Exponentialfunktionen sei hingewiesen[20]. Die Interpolation des Integrals einer F. aus einzelnen Werten derselben heisst „*mechanische Quadratur*" und gehört in den Bereich der Integralrechnung[21]. [II A 2 Nr. **50** u. f.]

Mit der Interpolationsrechnung steht die *Ausgleichungsrechnung* insofern in Zusammenhang, als bei ihr zur Bestimmung einer Funktion n^{ten} Grades f *mehr* als $(n+1)$ Werte u_α gegeben sind; dabei handelt es sich dann um Herstellung einer Funktion f, welche sich den gegebenen Werten „möglichst gut" anschmiegt. Siehe I D 2, wo auch darzulegen sein wird, in welcher Art diese unbestimmt gehaltene Forderung bei willkürlichen u_α zu präzisieren ist.

4. Differenzenrechnung. Die Differenzenrechnung untersucht den Zusammenhang zweier F. $F(x)$ und $f(x)$, die in der Beziehung stehen

$$f(x) = \Delta F(x) = F(x+h) - F(x),$$

wobei h eine gegebene Zahl bedeutet; und deshalb gehört, soweit F oder f ganze F. sind, ein Hinweis an diese Stelle[22]. Für eine willkürliche Reihe von Grössen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ gelten die Einführungen $\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u, \ldots$ der vorigen Nummer. Man kann symbolisch setzen

$$\Delta^n u_\alpha = (u-1)^{(n)} u^{(\alpha)}; \quad u_{n+\alpha} = (1+\Delta)^{(n)} u_\alpha,$$

wobei nach Unterdrückung der Exponentenklammern und Ausführung des Potenzierens $u_\varkappa$ statt $u^\varkappa$ zu setzen und $\Delta^\varkappa u_\alpha$ als $\varkappa^{\text{te}}$ Differenz aufzufassen ist.

Die m^{te} Differenz $\Delta^m F$ einer gz. F. des Grades $n (\geqq m)$ ist eine

---

17) Brief an *H. Oldenburg,* Okt. 24. 1676; auf mehrere Variable ausgedehnt von *Lacroix,* l. c. § 894; umgeformt von *P. S. Laplace,* Théorie anal. des probab. Paris 1812 = Oeuvres 3, p. 13.

18) Berl. astron. Jahrb. für 1837 (1835), p. 251.

19) l. c. Anm. 16, Propos. 20.

20) *Gauss,* Werke 3, p. 279 ff.; *F. W. Bessel,* Abhandl. 2, p. 364, 393; *Encke,* Berl. astron. Jahrb. für 1860 (1857), Abh. I. — *M. R. de Prony,* J. Éc. Polyt. cah. 2 (1795, an IV.), p. 24.

21) *Markoff,* l. c. Anm. 16, Kap. V.

22) *J. Fr. W. Herschel,* Collect. of exampl. of the applic. of the calcul. of finite differences. Cambr. 1820.

gz. F. des Grades $(n-m)$. Ist $f(x)$ eine gz. F. von x des Grades n, so ist $F(x)$ eine solche des Grades $(n+1)$.

Eine allgemeine Differenzengleichung ist von der Form

$$\Phi(x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots \Delta^m f(x)) = 0,$$

in der Φ eine gegebene und $f(x)$ die unbekannte F. bedeutet; man kann ihr die Form geben, in welcher h bekannt ist:

$$\Psi(x, f(x), f(x+h), \ldots f(x+mh)) = 0.$$

Das Problem, $f(x)$ zu finden, findet seine Besprechung in I E.[23])

5. Wurzeln und ihre Multiplizität. Nullstellen. Die Differenz $f(z) - f(z_1)$ ist durch $(z - z_1)$ teilbar, und der Quotient $f_1(z)$ wird dabei eine gz. F. $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren höchster Koeff. wieder a_0 ist. Falls also $f(z_1) = 0$ wird, hat man $f(z) = (z - z_1) f_1(z)$. Wird ebenso für einen Wert z_2 wieder $f_1(z_2) = 0$, so folgt ebenso $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) f_2(z)$, wo f_2 vom Grade $(n-2)$ ist, u. s. f. So kommt man möglicherweise zu einer Zerlegung in n Linearfactoren

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Einen Wert z_1, der $f(z_1) = 0$ macht, nennt man eine *Wurzel* (W.) der Gl. $f(z) = 0$, häufig auch eine *Nullstelle* von $f(z)$. Mehr als n W. kann eine Gl. n^{ten} Grades nicht haben, ohne dass ihr Polynom identisch verschwindet. Dies war schon *Newton* bekannt[24]). Ob eine Zerlegung in n Linearfaktoren stets möglich ist, steht noch dahin (vgl. Nr. 7). Aus dem Satze über die Maximalanzahl der W. folgt, dass zwei gz. F. n^{ten} Grades gleiche Koeff. haben, wenn ihre numerischen Werte für $(n+1)$ Argumente übereinstimmen.

Findet obige Zerlegung statt, so können mehrere z_λ gleich werden. Ist $f(z)$ durch $(z - z_1)^{\mu_1}$ aber durch keine höhere Potenz von $(z - z_1)$ teilbar, dann heisst z_1 eine μ_1*-fache* W. oder eine W. *von der Multiplizität* μ_1. Ordnet man nach den von einander verschiedenen Wurzeln so kann man mit Hervorhebung der Multiplizität schreiben

$$f(z) = a_0 (z - z_1)^{\mu_1} (z - z_2)^{\mu_2} \cdots \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots = n).$$

Hat bei einer Partialbruch-Zerlegung der Nenner die μ-fache W. z_1, so treten μ Brüche auf, deren Nenner für $z = z_1$ Null ist,

$$\frac{c_0}{(z - z_1)^\mu} + \frac{c_1}{(z - z_1)^{\mu - 1}} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{z - z_1}.$$

23) Vgl. *Laplace,* Anm. 17. — *Lagrange,* Recherches sur les suites récurrentes. Berlin, Mém. 1775 = Oeuvres 4, p. 149. — *Lacroix,* Anm. 16. — *O. Schlömilch,* Theorie d. Differenzen u. der Summen. Halle 1848. — *G. Boole,* A treatise on the calculus of finite differences. Lond. 1872; 1880. — *Markoff,* Anm. 16. (Teil II.)

24) Arithm. univers. ed. s'Gravesande; Lugd. 1732, p. 181.

Sind alle Koeff. a_λ von $f(z)$ reell, und ist ein $z_\lambda = x_\lambda + iy_\lambda$ komplex, so folgt aus $f(x_\lambda + iy_\lambda) = 0$ auch $f(x_\lambda - iy_\lambda) = 0$.[25]) Daher gehört zu jeder μ_λ-fachen W. $(x_\lambda + iy_\lambda)$ von $f = 0$ eine μ_λ-fache W. $(x_\lambda - iy_\lambda)$; zu jedem Faktor $(z - x_\lambda - iy_\lambda)^{\mu_\lambda}$ von $f(z)$ der konjugiert komplexe $(z - x_\lambda + iy_\lambda)^{\mu_\lambda}$. — Jede gz. F. einer W. z_1 kann so umgeformt werden, dass sie höchstens bis zum Grade $(n-1)$ aufsteigt.

6. Ableitung und Stetigkeit. Entwickelt man $f(z+h)$ nach Potenzen von h und schreibt

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(z) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z),$$

dann heisst $f^{(\lambda)}(z)$ die λ^{te} *Ableitung* von $f(z)$ (vgl. II A 2). Die μ^{te} Ableitung der ν^{ten} Ableitung ist die $(\mu+\nu)^{\text{te}}$ Ableitung.

Aus dieser Darstellung fliesst der Satz, dass $f(z)$ eine *stetige* F. (II A 1, Nr. 9) von z ist, d. h. dass $|f(z+h) - f(z)|$ mit $|h|$ zur Null konvergiert. Dabei bedeutet nach *C. Weierstrass* $|a|$ den absoluten Betrag oder den Modul von a. Sowohl bei reellen wie bei komplexen Werten von h entscheidet das Verhalten von $f'(z)$ über den Sinn der Änderung von $f(z)$.[26])

Bei einer Anzahl algebraischer Beweise wird folgende Stetigkeitseigenschaft benutzt: Setzt man $z = x + yi$, $f(z) = u + vi$, dann lässt sich stets, wenn $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$ von Null verschieden ist, ein Paar hinlänglich kleiner reeller Werte h, k so bestimmen, dass

$$|f(x + h + iy + ik)| < |f(x + iy)|$$

wird[27]).

7. Fundamentaltheorem der Algebra. Handelt es sich um die Frage, ob die allgemeine Gl. $f(z) = 0$ W. besitzt, so reicht es aus, die Koeff. reell anzunehmen; denn bei komplexen Koeff. braucht man nur $f(z)$ mit der konjugiert komplexen F. $f_1(z)$ zu multiplizieren und die Gl. mit reellen Koeff. $f(z) f_1(z) = 0$ zu betrachten.

Unter der Annahme reeller Koeff. folgt aus Stetigkeitsbetrachtungen (II A 1, Nr. 9), dass jede Gl. ungeraden Grades stets eine reelle W. besitzt; ebenso, dass jede Gl. geraden Grades, in welcher das Produkt $a_0 a_n$ negativ ist, eine positive und eine negative reelle W. hat[28]).

Besitzt jede Gl. eine W., dann folgt aus Nr. 3, dass eine jede

---

25) *Euler,* Introductio etc. Cap. 2.

26) Siehe z. B. *Serret-Wertheim,* Algebra, 2. Aufl. 1, § 51—52.

27) *A. M. Legendre,* Théorie des nombres, 2. éd. Paris 1808, p. 149.

28) *Euler,* Introduct. Cap. 2; ebenda finden sich weitere elementare Eigenschaften von Funktionen zusammengestellt.

Gl. n^{ten} Grades genau n W., reelle oder gewöhnliche komplexe Zahlen habe, wenn jede W. so oft gezählt wird, als ihre Multiplizität angiebt. Der Satz, dass dies wirklich der Fall ist, heisst nach *Gauss* das *algebraische Fundamentaltheorem.*

Die Existenz einer W. für jede algebraische Gl. schlossen die Mathematiker des vorigen Jahrhunderts zunächst aus der Betrachtung besonderer Gl., z. B. der binomischen, ferner derjenigen von ungeradem Grade und derjenigen von geradem Grade mit $\operatorname{sgn}(a_0 a_n) = -1$. Der Nachweis im allgemeinen Falle kostete grosse Mühe; *J. d'Alembert, Euler, Daviet de Foncenex, Lagrange* versuchten vergeblich ihn zu liefern. Der erste, strengeren Anforderungen genügende Beweis des Fundamentaltheorems wurde im Jahre 1797 von *C. F. Gauss* gefunden und 1799 in seiner Dissertation[29]) unter Vermeidung der Benutzung komplexer Grössen veröffentlicht. Ebenda (Werke 3, p. 7—20) befindet sich eine eingehende Besprechung der früheren ernsthaften Versuche einer Begründung des Fundamentaltheorems. *Gauss* hat in der Folge noch *drei* andere Beweise des Satzes gegeben[30]). Jetzt liegen so viele Beweise vor, dass eine Aufzählung nicht möglich ist; wir müssen uns darauf beschränken, die gelieferten zu gruppieren und die Gruppen zu charakterisieren. Dabei sehen wir von solchen Beweisen ab, welche sich auf Lehren der Integralrechnung oder der Funktionentheorie stützen[31]).

Hat $f(z) = 0$ nicht zufällig eine rationale W. (vgl. Nr. **10**, *Newton*), dann ist es nicht möglich, eine W. der Gl. durch eine endliche Anzahl von rationalen Operationen darzustellen; ebensowenig gelingt es, die Existenz der W. ohne Benutzung von Stetigkeitsbetrachtungen (analytischer oder geometrischer Natur) oder von unendlich fortgesetzten Operationen nachzuweisen.

Die eine Gruppe von Beweisen wendet derartige Hülfsmittel an. Bei ihrer Beurteilung ist der Standpunkt, den man gegenüber der Auffassung der geometrischen Stetigkeit und des Irrationalen einnimmt, von entscheidender Bedeutung. Solange ohne Bedenken jeder Strecke

---

29) Helmstädt 1799 = Werke 3, p. 1: „Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi ordinis resolvi posse.“ Über die früheren Beweisversuche vgl. *G. Loria,* Riv. di mat. 1 (1891), p. 185, Bibl. math. (2) 5 (1891) p. 99.

30) Comment. Götting. 3, 1816; (1815, 7. Dez. und 1816, 30. Jan.). — Götting. Abh. 4, 1850. Der vierte Beweis kann als eine Neuredaktion des ersten unter Benutzung der komplexen Grössen angesehen werden; er weist zugleich die Existenz aller n W. der Gl. gleichzeitig nach.

31) Hierher gehört der dritte *Gauss*'sche Beweis, einer der *Cauchy*'schen Beweise u. s. f.

eine entsprechende Zahl zugeordnet wurde (vgl. I A 3, Nr. 4), galten die geometrischen Beweise als bindend. Mit der Erkenntnis, dass solche Zuordnung ein geometrisches Axiom involviere, änderte sich diese Meinung. — Ebenso steht es bei den Beweisen, die sich auf eine explizit-ausführbare Annäherung an den „Wurzelwert“ stützen, gegenüber der Auffassung des Irrationalen. Einen extremen Standpunkt nahm in dieser Hinsicht *Kronecker* (J. f. Math. 101 [1887], p. 337) ein, der die „sogenannte Existenz der reellen irrationalen Wurzeln algebraischer Gleichungen einzig und allein in der Existenz von Intervallen sieht“, die beliebig geringe Ausdehnung haben, an deren Anfangs- und End-Punkt $f(z)$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, und innerhalb deren $|f(z)|$ gewisse obere Grenzen nicht überschreitet. — Entsprechend definiert *F. Mertens*, Monatsh. f. Math. 3 (1892), p. 293: die W.-Existenz beweisen, heisse, eine Methode zur Bestimmung eines rationalen komplexen Wertes für z geben, durch den beide „Koordinaten“ der F. $f(z)$ von gewünschter Kleinheit würden. — *D. Hilbert* dagegen nennt diese Definition geradezu inkorrekt, Fortschr. d. Math. 24 (1895), p. 87.

Die andere Gruppe bedient sich solcher Hülfsmittel nicht und reduziert daher das Problem nur so weit, als es bei dieser Einschränkung geschehen kann: es wird gezeigt, dass jede Gl. dann eine W. besitzt, wenn dies für jede Gl. ungeraden Grades der Fall ist. So wird der arithmetische Teil scharf vom „transcendenten“ getrennt, wie *Gordan* sich treffend ausdrückt[32]).

Die Beweise der ersten Gruppe können in solche unterschieden werden, welche geometrische Stetigkeit benutzen und in solche, welche ein Verfahren angeben, durch das man sich einem W.-Werte asymptotisch nähert.

Zu den charakteristischen geometrischen Beweisen zählen vor allem der erste bezw. der vierte *Gauss*'sche. Ihr Prinzip beruht darauf, $f(x+iy)=u+iv$ zu setzen, (x, y) als Punkt der komplexen (*Gauss*'schen) Ebene zu deuten und dann zu zeigen, dass die Kurven $u(x, y)=0$, $v(x, y)=0$ Schnittpunkte haben. Dies folgt aus ihrer für grosse Moduln $\sqrt{x^2+y^2}$ leicht zu überblickenden Konfiguration[33]). Andere Beweise stützen sich auf die Umschlingung des Nullpunktes durch die Kurve (u, v) in einer zweiten imaginären Ebene, wenn

---

32) Vorles. über Invariantentheorie 1, herausgeg. v. *Kerschensteiner,* Leipzig 1885, p. 166.

33) Vgl. dazu *Kronecker,* Berl. Ber. 1878, p. 151, 152, welcher als Kernpunkt den Übergang zu „reinen“ oder „binomischen“ Gl. heraushebt.

(x, y) in der seinigen eine passend gewählte geschlossene Kurve durchläuft[34]).

Der erste Beweis von *Cauchy*[35]), der sich im wesentlichen auf eine von *Legendre*[36]) herrührende Idee stützt, benutzt die Gestaltung der Fläche $w = u^2(x, y) + v^2(x, y)$, wobei x, y, w rechtwinklige Raumkoordinaten bedeuten, setzt die (als selbstverständliche Annahme angreifbare) Existenz eines Minimums für das niemals negative w voraus und weist mit Hülfe des Schlusssatzes in Nr. **6** nach, dass dieses Minimum nicht von 0 verschieden sein kann; so wird für das entsprechende (x, y) gefunden $u = 0$, $v = 0$, d. h. $f = u + iv = 0$.

Der zweite *Cauchy*'sche Beweis[37]) bringt ein eigenartiges Element in die Betrachtung, nämlich das Verhalten des Quotienten $u : v$ beim Umkreisen eines W.-Punktes: „Verfolgt man die Wertänderung des Quotienten $u : v$ beim Durchlaufen einer einfachen geschlossenen Kurve der xy-Ebene, indem man dabei ihr Inneres zur Linken lässt, dann geht der Quotient so oft vom Positiven durch Null zum Negativen, als die doppelte Anzahl der im Innern der Kurve liegenden W.-Stellen beträgt.“ Von diesem allgemeinen Satze kommt *Cauchy* dann auf das Fundamentaltheorem durch Betrachtung eines hinlänglich grossen (*Gauss*'schen) Kreises an Stelle der geschlossenen Kurve.

Die zweite Unterabteilung der Beweise erster Gruppe giebt analytische Vorschriften zur Annäherung an einen Wert z_1, für den $f(z)$ verschwindet. Eine Reihe von Beweisen der ersten Unterabteilung lässt sich bei geänderter Darstellung direkt in diese Form bringen.

Der *d'Alembert*'sche Beweis[38]), der erste, welcher für das Fundamentaltheorem versucht wurde, gehört hierher; er beruht auf der analytischen Umkehrung der F. $y = f(z)$. *Gauss*, der ihn in einigen Punkten als unzureichend nachweist, giebt zugleich an, wie er zu voller Strenge umgestaltet werden könne[39]).

---

34) Vgl. z. B. *C. Ullherr*, J. f. Math. 31 (1846), p. 231.

35) Exerc. de Math. 4, Paris 1829, p. 98. — Vgl. Cours d'Analyse, Chap. X. Siehe auch *J. R. Argand*, Gergonne Ann. 5 (1815), p. 201. Wegen der Existenz des Minimums vgl. z. B. *Weber* 1, § 41.

36) Théorie des nombres, Paris 1808, p. 149 ff.

37) J. Éc. polyt. Cah. 25 (1837), p. 176. — Vgl. *Ch. Sturm* u. *J. Liouville*, J. de Math. 1 (1836), p. 278 u. p. 290. *F. N. M. Moigno*, ibid. 5 (1840), p. 75. Auf eine Lücke in diesem Beweise hat *F. Rudio*, Naturf.-Ges. Zürich 38 (1894) aufmerksam gemacht; es wird nämlich die Zerlegbarkeit der Ebene in Teilgebiete von bestimmter Eigenschaft unbewiesen angenommen.

38) Berlin Hist. de l'Acad. 1746, p. 182.

39) l. c. Werke 3, p. 29. — Vgl. *Ch. v. Staudt*, J. f. Math. 29 (1845), p. 97.

In rein analytischer Form giebt *R. Lipschitz* einen Beweis[40]), der sich auf das Schlusstheorem von Nr. **6** stützt.

Zwei in ihrem Gedankengange ähnliche, aber in ihrer Durchführung von einander völlig verschiedene Beweise sind die von *F. Mertens*[41]) und von *C. Weierstrass*[42]); beide benutzen die *Newton*sche Näherungsformel als Algorithmus, vgl. I B 3a.

Unter den Beweisen der zweiten Gruppe ist zunächst der zweite *Gauss*'sche Beweis zu nennen[43]). Hier wird ein systematisch wichtiges Hülfsmittel benutzt: Eine Reihe von Eigenschaften einer Gl. n^{ten} Grades mit n W. $g(z) = 0$ lässt sich durch Relationen ausdrücken, welche selbst in den W. symmetrisch und also durch die Koeff. von $g(z)$ rational darstellbar sind; diese Koeff. darf man nun durch die entsprechenden Koeff. einer Gl. $f(z) = 0$, über deren W.-Existenz nichts bekannt ist, ersetzen und kann aus dem Bestehen der Relationen auf die jener Eigenschaften auch bei f schliessen[44]). Eine Umgestaltung des Beweises rührt von *Kronecker* her[45]). Beide Beweise zeigen, wie unter der Voraussetzung von W. jeder Gl. des Grades $2^\mu \cdot \nu$ (ν ungerade) die Existenz von W. der Gl. des Gr. $2^{\mu+1} \cdot \nu_1$ (ν_1 ungerade) folgt. Nach *Gordan* (Anm. 32) heisst μ der „Grad der Auflösbarkeit“.

Auf andere, einfachere Art führt *Gordan*[46]) den Existenzbeweis, indem er Resultanteneigenschaften benutzt (vgl. Nr. **18**).

Eine neue Darstellung giebt *E. Phragmen*[47]) dem Beweise dadurch, dass er eine algebraische Kongruenz (vgl. Nr. **15**) herleitet,

$$f(z) \equiv F(w, r) z + G(w, r) \qquad \text{mod. } (z^2 - 2wz + r^2),$$

bei der $r = \varrho$ durch eine Gl. mit vermindertem Auflösbarkeitsgrade so bestimmt wird, dass $F(w, \varrho) = 0$, $G(w, \varrho) = 0$ eine gemeinsame W. $w = \omega$ besitzen; demnach ist $f(z)$ durch $z^2 - 2\omega z + \varrho^2$ teilbar.

Vgl. hierzu auch die von *Kronecker* aufgestellten Kongruenzen (Nr. **15**), welche zur Zerlegung von $f(z)$ in Linearfaktoren führen.

---

40) Lehrbuch d. Analysis, Bonn 1877, 1, § 61. — Eine nach *Dedekind* und *G. Frobenius* vereinfachte Darstellung findet sich in *Weber*'s Algebra 1, § 42, p. 143.

41) Wien. Abh. 1888 Dez. Abt. II^a. — Monatsh. f. Math. 3 (1892), p. 291.

42) Berl. Ber. 1891, p. 1085. — Vgl. auch *Ch. Méray*, Bull. d. scienc. math. (2) 15 (1891), p. 236.

43) Werke 3, p. 31.

44) Ausführlich dargestellt bei *J. Molk*, Acta math. 6 (1885), p. 1. — Zu dieser Gruppe gehört der Beweis von *Th. Vahlen*, Acta math. 21 (1897), p. 287.

45) Grundzüge einer arithm. Theorie u. s. w., J. f. Math. 92 (1882), § 13.

46) Math. Ann. 10 (1876), p. 572; Invariantentheorie 1, p. 166. — Vgl. auch *E. B. Elliott*, Lond. Math. Soc. Proc. 25 (1894), p. 173.

47) Stockholm Öfv. 16 (1891), p. 113. — Siehe ferner *D. Seliwanoff*, Bull. Soc. Math. de France 13 (1885), p. 119.

8. Zerlegung in Faktoren. Durch den Nachweis der W.-Existenz ist der Anschluss an Nr. 5 gewonnen; damit ist der Satz bewiesen, dass jede gz. F. n^{ten} Grades sich, abgesehen von a_0, in lineare Faktoren

$$f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$
$$= a_0(z - z_1)^{\mu_1}(z - z_2)^{\mu_2}\cdots(z - z_r)^{\mu_r} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n)$$

zerlegen lässt. Wir setzen $a_0 = 1$. Multipliziert man die erste Form aus und vergleicht die Koeff. gleicher Potenzen von z, so folgt

$$\sum z_\lambda = -a_1, \quad \sum z_\lambda z_\mu = +a_2, \quad \sum z_\lambda z_\mu z_\nu = -a_3, \cdots$$

d. h. es ergeben sich fundamentale Beziehungen zwischen den Koeff. und den symmetrischen F. der W. Auf diese wird in der Theorie der symmetrischen Funktionen I B 3 b eingegangen; wir brauchen hier nur den Satz, dass jede gz. symmetrische F. der W. eine gz. F. der a_λ ist. Er zeigt z. B. sofort, dass jede rat. F. aller W. z_λ als gz. F. derselben darstellbar ist, die in den a_λ gebr. Koeff. haben.

Setzt man $f_\lambda = (z - z_\lambda)(z - z_{\lambda+1})\cdots(z - z_n)$ für $\lambda = 1, 2, \cdots n - 1, n$, so folgt, dass jede W.-Potenz $z_\lambda^\varkappa$, in der $\varkappa > (n - \lambda)$ ist, eine gze. gz.-zahlige F. von $z_\lambda, \ldots z_n$ wird, die in z_λ nur bis zur Potenz $(n - \lambda)$ steigt. Das ergiebt weiter, dass gze. gz.-zahlige F. der W. sich gz. und gz.-zahlig als Aggregate der $n!$ Potenzprodukte

$$z_1^{h_1} z_2^{h_2} \ldots z_{n-1}^{h_{n-1}} \quad (h_k = 0, 1, \cdots n - k;\ k = 1, 2, \cdots n - 1)$$

darstellen lassen, wobei die Koeff. gze. gz.-zahlige F. von $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind[48]). Ein solches System heisst ein *Fundamentalsystem.*

9. Rationalitätsbereich. Bei allen Fragen nach Zerlegbarkeit und Unzerlegbarkeit eines Ausdrucks ist zunächst festzustellen, was als rational bekannt gelten soll. Da mit jeder rational bekannten Grösse zugleich auch alle ihre rationalen F. rational bekannt sind, so genügt es, die Elemente $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ anzugeben, deren rationale F. den *Rationalitätsbereich* $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ ausmachen. Die rat. F. sind dabei stets mit gz. gz.-zahligen Koeff. zu bilden[49]).

Eine gz. F. kann in einem Rationalitätsbereiche (Rat.-Ber.) unzerlegbar, irreduktibel (irred.) sein, während sie in einem erweiterten zerlegbar, reduktibel (red.) ist. Im Bereiche der reellen Zahlen ist nach dem Fundamentaltheorem jede gz. gz.-zahlige F. $f(z)$ in Faktoren ersten oder zweiten Grades, im Bereiche der komplexen Zahlen in Faktoren

48) *Kronecker*, l. c. § 12.

49) *Abel* hat zuerst die Notwendigkeit dieser Festsetzungen erkannt: „Sur la résol. algébr. etc.", Oeuvres (éd. *Sylow* u. *Lie*) 2, p. 217. Die weitere Ausbildung stammt von *Kronecker,* Berl. Ber. 1853, p. 365; 1873, p. 117; 1879, p. 205; Grundzüge u. s. w. 1882, p. 3.

ersten Grades zerlegbar. *Gauss* hat gezeigt[50]), dass für Zerlegungen gz. gz.-zahliger F. $f(z)$ der Rat.-Ber. der rat. gebrochenen Zahlen sich durch den der rat. gz. Zahlen ersetzen lässt; mit anderen Worten, dass das Produkt zweier primitiver F. wieder eine primitive F. wird.

10. Reduktibilität. Irreduktibilität. Die Frage, ob eine gz. gz.-zahlige F. $f(z)$ im „natürlichen" Rat.-Ber. $(\mathfrak{R}') = (1)$ zerlegbar ist, kann so entschieden werden, dass man alle W.-Faktoren $(z - z_\lambda)$ bestimmt und einzeln betrachtet, oder zu je zwei, drei, ... multipliziert; Zerlegung findet dann und nur dann statt, wenn dabei eins der Produkte eine gz. gz.-zahlige F. wird. — Die direkte Behandlung der Frage führt auf Eliminationsprobleme und wandelt sie in die andere um, ob gewisse Gl. gz. gz.-zahlige W. haben[51]). Beide Methoden sind praktisch nicht verwendbar. — Nimmt man die W.-Existenz als bewiesen an, dann lässt sich eine Grenze für den absoluten Betrag der Moduln der Koeff. der Faktoren aus den absoluten Beträgen der Koeff. von $f(z)$ herleiten[52]). Damit kann man die Frage durch eine endliche Anzahl von Versuchen bequemer erledigen.

Ohne Voraussetzung des Fundamentaltheorems, welches er aus Gründen der Systematik an eine spätere Stelle setzt, gelangt *Kronecker* zur Lösung des Problems, indem er mit Hülfe der *Lagrange*'schen Interpolationsformel alle F. aufstellt, die überhaupt als Teiler von $f(z)$ in Frage kommen[53]). Diese Methode ist von *Runge* weiter durchgearbeitet und zu praktischem Gebrauche verwendbar gemacht worden[54]).

M. Mandl[55]) ersetzt das *Heine*'sche Eliminationsverfahren (Anm. 51) durch die Lösung einer Reihe diophantischer Gleichungen.

Schon *Newton* hat den Fall linearer Faktoren erledigt[56]), derart dass er für eine Reihe von Argumentwerten die Glieder einer arithmetischen Reihe annimmt; er hat auch die Erweiterung auf Faktoren höherer Ordnung angedeutet; hierbei tritt eine nahe Verwandtschaft der *Kronecker*'schen mit der *Newton*'schen Methode zu Tage.

G. Eisenstein hat einen Satz aufgestellt[57]), durch welchen aus der formalen Beschaffenheit der Koeff. einer F. ein Schluss auf ihre Irred.

---

50) Disq. arithm. Lips. 1801, § 42 = Werke 1, p. 34. Vgl. ibid. § 11.

51) *E. Heine,* J. f. Math. 48 (1854), p. 267.

52) *K. Runge,* J. f. Math. 99 (1886), p. 93, 94; vgl. I B 3 a, Nr. 2.

53) Grundzüge u. s. w. § 4, p. 11.

54) J. f. Math. 99 (1886), p. 89.

55) J. f. Math. 113 (1894), p. 252.

56) Arithmetica universalis, Lugd. 1732.

57) J. f. Math. 39 (1850), p. 160.

gezogen werden kann: sind bei $a_0 = 1$ alle Koeff. $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch die Primzahl p, und ist a_n durch keine höhere Potenz von p als die erste teilbar, dann ist f irreduktibel. — *L. Königsberger*[58]) hat eine Verallgemeinerung dieses Theorems durch eine ganze Reihe von Sätzen gegeben; an diese schliessen sich andere in derselben Richtung an, die *Netto* fand[59]).

Der *Eisenstein*'sche Satz liefert einen unmittelbaren Beweis für die Irred. der „Kreisteilungsgl." $z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1 = 0$ für eine Primzahl p und ebenso für eine Primzahlpotenz (l. c.). Der erste Beweis für die Irreduktibilität der Kreisteilungsgl. stammt von *Gauss* (Disq. arith. Sect. VII, § 341); in der Folgezeit wurde eine ganze Anzahl weiterer Beweise gegeben[60]). — Ein einfacher Beweis für die Irreduktibilität von $z^p - a$, falls a keine p^{te} Potenz ist (*Abel:* Sur la résol. alg. § 2), stammt von *Mertens*, und ein rein arithmetischer Beweis von *A. Kneser*[61]).

Die Behandlung der Reduktibilität in einem willkürlichen Rat.-Ber. fordert genaues Eingehen auf die Theorie der Elimination und der algebraischen Grössen. Man findet eine grundlegende Untersuchung bei *Kronecker* („Grundzüge") und Erläuterungen dazu bei *Molk* (l. c.) und bei *A. Kneser*, Math. Ann. 30 (1887), p. 179, § 3. Die Irreduktibilität der Kreisteilungsgl. in allgemeineren Rat.-Gebieten findet sich in den, Anm. 60 zitierten Arbeiten gleichfalls behandelt.

Über die Irreduktibilität von Funktionen $f(z) = \theta_1(\theta_2(z))$ hat *A. Capelli* Untersuchungen angestellt[62]). Dabei gehören die Koeffizienten der Funktionen $\theta_1(y)$, $\theta_2(z)$ einem beliebigen Rationalitätsgebiete $(\mathfrak{R})$ an. Für die Irreduktibilität von f ist es charakteristisch, dass $\theta_1(y)$ in $(\mathfrak{R})$ und $\theta_2(z) - y_1$ in $(\mathfrak{R}, y_1)$ irreduktibel ist; y_1 bedeutet hier eine Wurzel von $\theta_1(y) = 0$.

Mit Hülfe dieses allgemeinen Satzes erledigt *Capelli* die Frage nach der Irreduktibilität der binomischen Gleichung $z^n - a = 0$ für beliebige Rationalitätsbereiche. Die Potenzen von 2, für n genommen, treten bei den Resultaten in eine Ausnahmestellung.

---

58) J. f. Math. 115 (1895), p. 53 und weiter Berl. Ber. 1898, p. 735.

59) Algebra 1, p. 61.

60) *Kronecker,* J. f. Math. 29 (1845), p. 280; J. de Math. 19 (1845), p. 177; ibid. (2) 1 (1856), p. 399 [= Werke 1, p. 1, 75, 99]; J. f. Math. 100 (1887), p. 79. *Serret,* J. de Math. 15 (1850), p. 296. *Th. Schönemann,* J. f. Math. 32 (1846), p. 93. *Dedekind,* ibid. 54 (1857), p. 27. *F. Arndt,* ibid. 56 (1859), p. 178. *V.-A. Lebesgue,* J. de Math. (2) 4 (1859), p. 105.

61) *F. Mertens,* Monatsh. f. Math. 2 (1891), p. 291; *A. Kneser,* J. f. Math. 106 (1890), p. 48.

62) Napoli Rend. (1897, Dez.; 1898, Febr., Mai).

11. Teilbarkeitseigenschaften. Den Irreduktibilitäts- können *Teilbarkeits*-Eigenschaften gegenübergestellt werden, bei denen es sich darum handelt, dass gewisse F. durch andere geteilt werden können. Bei Umformungen in der Determinantentheorie begegnet man häufig solchen Formeln. Hervorzuheben ist eine Arbeit von *W. Fr. Meyer*[63]) über die Teilbarkeit ganzer Funktionen höherer Differentialquotienten Δ_k, wo $k!\,\Delta_k$ den Zähler der k^{ten} Ableitung eines Bruches $g(z):f(z)$ bedeutet. Es mag hier angemerkt werden, dass alle Determinanten $|\Delta_{i+k}|$ sehr leicht als solche dargestellt werden können, deren Elemente Ableitungen der f, g sind, woraus allgemeinere Teilbarkeits-Eigenschaften entspringen. Ferner sei auf den Zusammenhang dieser Formeln mit den Entwickelungen der C_ϱ gegen Ende von Nr. **12** hingewiesen.

Teilbarkeits-Eigenschaften sind ferner für Resultanten und Diskriminanten (Nr. **19**) in grosser Anzahl entwickelt.

D. Hilbert giebt in eleganter Weise die charakteristischen Bedingungen dafür, dass eine binäre Form eine vollständige Potenz einer anderen binären Form sei; hier knüpft *C. Weltzien* an, leitet in den einfachsten Fällen diese Bedingungen elementar ab und erweitert die Untersuchung auf ternäre Formen[64]).

12. Grösster gemeinsamer Teiler. Sind $f(z)$ vom Grade n, und $f_1(z)$ vom Grade $(n - n_1)$ gz. gz.-zahlige Funktionen, dann liefert das *Euklid*'sche Schema des *grössten gemeinsamen Teilers* (gr. gm. T.) eine endliche Reihe von Gleichungen [I B 3a]

$$f_{\lambda-1} = f_\lambda g_\lambda - f_{\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots r;\ f_0 = f),$$

in denen der Grad von $f_{\lambda+1}$ kleiner als der von f_λ ist, und $f_{r+1} = 0$ wird. Das Vorzeichen des Restes wird anderer Untersuchungen halber (*Sturm*'sche Reihe) negativ gewählt. Der Grad von f_λ sei $(n - n_\lambda)$, so dass $n_{\lambda+1} > n_\lambda$ und $n_1 \geqq 0$ wird. Jedes f_λ lässt sich in der Form

$$f_\lambda = f_1 \psi_{\lambda-1} - f \varphi_{\lambda-1}$$

darstellen, wobei ψ_λ und φ_λ bezw. die Grade n_λ und $(n_\lambda - n_1)$ besitzen. Die Koeff. in den f_λ brauchen nicht ganzzahlig zu sein; durch Benutzung von Konstanten, mit denen vor der Division multipliziert wird, kann man ganzzahlige F. $\bar{f}_\lambda$, $\bar{g}_\lambda$ erhalten, so dass

$$r_{\lambda-1}\bar{f}_{\lambda-1} = \bar{f}_\lambda \bar{g}_\lambda - s_{\lambda+1}\bar{f}_{\lambda+1}$$

gesetzt wird, wo alle $\bar{f}_{\lambda+1}$ primitive F. werden. Die fremden

63) Math. Ann. 36 (1890), p. 435.

64) *Hilbert,* Math. Ann. 27 (1886), p. 381; vgl. *F. Brioschi,* Pal. C. M. R. 10 (1896), p. 153; *C. Weltzien,* Progr. d. Friedr. Werd. Ober-Realsch., Berlin 1892.

durch $r_{\lambda-1}$ eingeführten Faktoren fallen durch $s_{\lambda+2}$ wieder heraus, indem $s_{\lambda+2}$ ein Multiplum von $r_{\lambda-1}$ wird[65]). Wir wollen aber bei der ersten Darstellung mit gebrochenen Koeff. bleiben.

Das *Euklid*'sche Schema liefert die Kettenbruchentwickelung

$$\frac{f_1}{f} = 1/g_1 - 1/g_2 - \cdots - 1/g_r$$

und ferner die Darstellung desselben Bruches als Summe von Primbrüchen

$$\frac{f_1}{f} = \frac{1}{\psi_0 \psi_1} + \frac{1}{\psi_1 \psi_2} + \cdots + \frac{1}{\psi_{r-1} \psi_r};$$

das wichtigste Ergebnis des Verfahrens aber ist die Herstellung des gr. gm. T., der freilich mit gebrochenen Koeff. behaftet auftritt,

$$f_r = f_1 \psi_{r-1} - f \varphi_{r-1}.$$

Die Reihe der für die f_λ oben aufgestellten Gl. führt zu der Aufgabe, zwei gz. F. Ψ und Φ so zu bestimmen, dass wenn $f_1 \Psi - f \Phi = F$, und die Grade von Ψ, Φ, F gleich ν, $\nu - n_1$, ϱ werden, dann $\nu + \varrho < n$ ist, wie dies bei $\psi_{\lambda-1}$, $\varphi_{\lambda-1}$, f_λ der Fall war. Diese Aufgabe kann man durch Reihenentwickelung

$$\frac{f_1}{f} = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-2} + \cdots$$

lösen; bezeichnen wir $|c_{p+q}|$ mit C_σ $(p, q = 0, 1, \cdots \sigma - 1)$, so können eindeutige Lösungen nur für solche Gradzahlen von Ψ auftreten, welche gleichzeitig Ordnungszahlen nicht verschwindender C_σ sind. Durch das Verschwinden derartiger Determinanten wird zugleich der Grad des gr. gm. T. der Funktionen f, f_1 bestimmt. Die f_λ, ψ_λ, φ_λ lassen sich durch ähnlich gebildete, mit den C_ϱ verwandte Determinanten darstellen. Die Umwandlung in Determinanten, deren Elemente die Koeff. von f und f_1 statt der c_λ sind, lässt sich auf verschiedene Weise durchführen[66]).

Über die Darstellung des gr. gm. T. vgl. auch den Schlusssatz von Nr. 18.

13. Irreduktible Funktionen. Haben f und f_1 keinen gem. T. ausser einer Konstanten, dann heissen sie *relativ prim* zu einander oder *teilerfremd*. Für solche kann

$$f \cdot F_1 + f_1 \cdot F = 1$$

gesetzt werden, wo F und F_1 passend gewählte gz. F. höchstens von den Graden $(n - n_1 - 1)$ und $(n - 1)$ mit gebrochenen Koeff. sind.

65) *Netto*, J. f. Math. 116 (1896), p. 45.

66) Vgl. zu dieser Nummer: *Kronecker*, Berl. Ber. 1881, p. 535. — *Netto*, Algebra 1, Vorles. 6 und 7.

Aus diesem fundamentalen Satze folgt[67]): Hat f mit einer irred. F. φ einen gem. T., so ist f selbst durch φ teilbar. — Wenn weder f_1 noch f_2 durch die irred. F. φ teilbar ist, dann wird auch $f_1 f_2$ nicht durch φ teilbar. — Ist $f_1 f_2$ durch ein f teilbar, welches keinen gem. T. mit f_2 hat, dann ist f_1 durch f teilbar. — Ist f ein Vielfaches von f_1 und von f_2, und haben f_1 und f_2 keinen gem. T., dann ist f auch ein Vielfaches von $f_1 f_2$. — Jede F. lässt sich auf wesentlich nur eine Art, d. h. abgesehen von konstanten Faktoren, in ein Produkt von irred. Faktoren zerlegen. Hier treten Analogien zur Zahlentheorie heraus; die irredukt. Faktoren übernehmen die Rolle von Primzahlen und die Konstanten diejenige von Einheiten.

14. Trennung vielfacher Wurzeln. Aus der in Nr. 8 gegebenen Form von $f(z)$ folgt, wenn z_λ die Multiplizität μ_λ hat,

$$f'(z) = \sum \frac{\mu_\lambda f(z)}{z - z_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r),$$

und daraus ergiebt sich, dass f und f' als gr. gm. T. das Produkt

$$f_1(z) = (z - z_1)^{\mu_1 - 1}(z - z_2)^{\mu_2 - 1} \cdots (z - z_r)^{\mu_r - 1}$$

haben, d. h. das Produkt aller Wurzelfaktoren, jeden in einer um 1 verminderten Multiplizität gegenüber $f(z)$.

Verfahren wir ebenso mit f_1 und f_1', so wird deren gr. gm. T.:

$$f_2(z) = (z - z_1)^{\mu_1 - 2}(z - z_2)^{\mu_2 - 2} \cdots (z - z_r)^{\mu_r - 2},$$

wo alle Faktoren mit negativen Exponenten zu unterdrücken sind; u. s. f. Es enthält $f(z) : f_1(z) = 0$ alle W. von $f = 0$, und zwar eine jede einfach; $f_1(z) : f_2(z) = 0$ alle W. von $f = 0$, die mindestens die Multiplizität 2 haben, und zwar eine jede einfach; u. s. w. Ferner liefern

$$\frac{f(z) f_2(z)}{f_1^2(z)} = 0, \quad \frac{f_1(z) f_3(z)}{f_2^2(z)} = 0, \cdots$$

alle einfachen, alle Doppel-W., ... und zwar jede in der Multiplizität 1.[68])

Jede μ-fache W. von $f(z) = 0$ ist zugleich W. von $f'(z) = 0$, $\ldots f^{(\mu-1)}(z) = 0$ und umgekehrt[69]).

Setzen wir unter Wahrung der Bedeutung von f, f' und f_1

$$f(z) = f_1(z) \cdot g(z), \quad f'(z) = f_1(z) \cdot h(z),$$

67) Diese Analoga zu Sätzen der Zahlentheorie sind in jedem Lehrbuche der Algebra zu finden; vgl. auch *Molk* l. c.

68) Vgl. z. B. *Serret-Wertheim* Algebra, 2. Aufl., 1, § 50.

69) *J. Hudde*, Brief an *F. van Schooten* (Epist. II) in dessen Ausgabe von Descartes Geometrie, Amstelod. 1658. — *Euler*, Inst. Calc. Diff. 2, § 249.

so folgt, dass $g(z) = 0$ keine vielfachen W. habe, aus dem Fundamentaltheorem. *Fr. Engel*[70]) hat ohne Voraussetzung desselben den gleichen Satz bewiesen, indem er von einer Bemerkung von *Gauss* ausging[71]).

Ist eine gz. F. $f(z)$ so in Faktoren zerlegt, $f = M^m P^p \ldots S^s$, dass die Gl. $M \cdot P \cdots S = 0$ nur einfache W. besitzt, dann giebt es, wie *Ch. Hermite* gezeigt hat[72]), eine Zerlegung jedes Bruches

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{\mathfrak{M}}{M^m} + \frac{\mathfrak{P}}{P^p} + \cdots + \frac{\mathfrak{S}}{S^s},$$

wobei die Zähler $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$, ... $\mathfrak{S}$ rat. gz. Funktionen sind. Diese Darstellung, welche auf rationalem Wege durchgeführt werden kann, ist für die Integration des Bruches von Wichtigkeit. [II A 2.]

Bestehen unter den W. einer Gl. μ Relationen $z_\alpha = z_\beta$, dann nennt *J. J. Sylvester* (Phil. Mag. [4] 3 [1852], p. 375 u. 460) μ die *Multiplizität der Gl.*; diese kann je nach dem Zusammenhange der W. sehr verschiedenen Charakter haben. Für alle bestehen gewisse nur von μ abhängige (Evectanten-) Eigenschaften. (Über die Definition der Evectanten vgl. *G. Salmon*, Higher Algebra § 134, sowie I B 2.) Vgl. weiter Nr. 22.

15. Algebraische Kongruenzen. Ist

$$F(z) = f(z) + g(z) \cdot \varphi(z),$$

dann heissen $F(z)$ und $f(z)$, in Analogie zu Bezeichnungen der Zahlentheorie, einander kongruent nach dem Modul $g(z)$. Dies liefert die *„algebraische Kongruenz“*

$$F(z) \equiv f(z) \quad (\text{mod. } g(z)),$$

deren erste Behandlung von *Cauchy* stammt[73]), und deren weitere Erforschung durch Arbeiten von *J.-A. Serret*[74]), von *Th. Schönemann*[75]) und von *R. Dedekind*[76]) gegeben wurde. Sind alle auftretenden Zahlenkoeff. in F und g gz. Zahlen, dann kann man sie nach einem Zahlenmodul k betrachten. Demnach lassen sich auch alle ganzen, ganzzahligen Funktionen sowohl mod. $g(z)$ als auch mod. k, also nach dem *Doppelmodul* $(g(z); k)$ betrachten. $g(z)$ heisst dabei nach *Serret* die *Modularfunktion.* Man kann die Anzahl der Modularfunktionen eines vor-

70) Leipz. Ber. 49 (1897), p. 603.
71) Demonstr. nova altera, § 10, Werke 3, p. 44.
72) Cours d'Analyse 1 (1873), p. 265.
73) Exerc. d'anal. 3 (1844), p. 87.
74) *Serret,* Paris Mém. 35 (1866), p. 617 und Algèbre 2, Section 3.
75) J. f. Math. 31 (1846), p. 269.
76) J. f. Math. 54 (1857), p. 1.

geschriebenen Grades bei gegebenem Modul k bestimmen; ebenso die Anzahl der Reste $f(z)$, bei denen weder Grad noch Betrag der Koeff. mod. $(g(z); k)$ erniedrigt werden kann.

Die Fassung der Begriffe Irreduktibiliät und Teilbarkeit, von Kongruenzwurzeln, u. s. w. ist klar. Bei den binomischen Kongruenzen

$$x^n - 1 \equiv 0 \qquad \text{mod. } (g(z); k)$$

treten die Wurzeln, die zu gewissen Exponenten *„gehören"*, zusammen; dieser Begriff sowie derjenige der *primitiven* W. entspricht dem in der Zahlentheorie gebräuchlichen.

Auch in diesem Gebiete ist das Problem der Zerlegung einer gegebenen F. $F(z)$ in irred. Faktoren zu lösen[77]). —

Hier seien ferner die *Kronecker*'schen[78]) Untersuchungen erwähnt, durch welche zu jeder gz. F. von z ein Modul gefunden wird, für welchen sie in lineare Faktoren von z zerfällt werden kann. So ist z. B.

$$4 \cdot (9c)^3(z^3 - c) \equiv (9cz - t^4)(18cz + 9ct + t^4)(18cz - 9ct + t^4)$$
$$\text{mod. } (t^6 + 27c^2).$$

16. Resultantendarstellung. Sind zwei Gl., $f(z) = 0$ vom Grade m mit den Koeff. $a_0, \dots a_m$ und den W. $\alpha_1, \dots \alpha_m$, und $g(z) = 0$ vom Grade n mit den Koeff. $b_0, \dots b_n$ und den W. $\beta_1, \dots \beta_n$ gegeben, (wo $m \geqq n$ sei), dann schliesst bei unbestimmten a, b die Kette des *Euklid*'schen Algorithmus mit einem konstanten aus den a, b gebildeten Bruche. Das Verschwinden seines Zählers giebt die Bedingungen für einen gm. T. von f und g. Nach *Brill-Noether*, Deutsche Math. Ver. 3 (1892—93), p. 134 stammt diese Methode von *J. P. de Gua.*

Die Frage nach diesem gm. T. wird auch durch die Betrachtung des Produkts (erste *Euler*'sche Methode)

$$R(f, g) = a_0^n b_0^m \prod (\alpha_\varkappa - \beta_\lambda) \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots m; \ \lambda = 1, 2, \dots n)$$

erledigt; der Faktor vor dem Π bewirkt, dass die symmetrische F. R sich als gz. F. der a, b ausdrücken lässt.[79]) Es ist

$$R(f, g) = a_0^n g(\alpha_1) \dots g(\alpha_m) = (-1)^{mn} b_0^m f(\beta_1) \dots f(\beta_n) = (-1)^{mn} R(g, f).$$

$R = 0$ liefert die charakteristische Bedingung für einen gm. T.

R heisst die *Resultante* (R.) von f und g.[80]) *Euler* gab eine Me-

77) In engem Zusammenhange hiermit steht die Theorie der *Galois*'schen imaginären Wurzeln. Vgl. Bull. Férussac 13 (1830), p. 428 = J. de Math. 11 (1846), p. 399 = Oeuvres publ. p. *É. Picard*, Paris 1897, p. 15. [I C 1].

78) Mathesis, Mai 1885, p. 102; J. f. Math. 100 (1887), p. 490.

79) *Euler*, Berl. Hist. 1748, p. 243. — *G. Cramer*, Introduct. à l'Analyse des lignes courbes etc. Genf 1750.

80) *Newton*, Arithm. univers 1. Über d. Elimination; *Bézout*, Paris Mém. 1764, p. 286. — Von englischen Mathematikern wird auch die Bezeichnung Eliminante gebraucht. Vgl. über diese Nomenklatur I B 1 b, Nr. **13** u. **14**.

thode[81]), die Berechnung von R bei $n = m$ auf das gleiche Problem für $(m - 1)$ zu reduzieren; *Bézout* erweiterte sie[82]) und führte die Aufgabe auf ein Eliminationsproblem für lineare Gleichungen zurück, indem er (*Bézout*'sche Methode)

$$\varphi_\alpha = a_0 z^\alpha + a_1 z^{\alpha-1} + \cdots + a_\alpha, \quad \psi_\alpha = b_0 z^\alpha + b_1 z^{\alpha-1} + \cdots + b_\alpha,$$
$$\psi_\alpha f - \varphi_\alpha g = d_{\alpha 1} z^{m-1} + d_{\alpha 2} z^{m-2} + \cdots + d_{\alpha m} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \cdots m-1)$$

setzte und aus dem letzten Gl.-Systeme die Potenzen $1, z, z^2, \cdots z^{m-1}$ eliminierte[83]). *Jacobi* hat diese Methode durchgearbeitet[84]) und zuerst das Verschwinden der Determinante $S = |d_{\mu\nu}|$ als die Bedingung eines gm. T. angegeben[85]). *Rosenhain*[86]) erweitert die Methode auf den Fall $m > n$; *Cayley*[87]) kommt durch die Betrachtung der Koeff. von $\zeta^{m-1}, \zeta^{m-2}, \cdots 1$ in

$$[f(z)g(\zeta) - f(\zeta)g(z)] : (z - \zeta)$$

zu denselben $\psi_\alpha f - \varphi_\alpha g$ wie *Bézout.*

Die Elemente der Determinante $S = |d_{\mu\nu}|$ sind noch F. der Koeff. *O. Hesse*[88]) hat zuerst die Bedingung in die Form einer verschwindenden Det. gebracht, deren Elemente die Koeff. selbst sind. Die einfachste Herleitung dieses Resultates wurde von *Sylvester*[89]) mittels seiner „dialytischen" Methode geliefert: Multipliziert man $f = 0$ und $g = 0$ mit $1, z, z^2, \cdots z^{n-1}$ bezw. $1, z, z^2, \cdots z^{m-1}$, so entstehen $(n + m)$ lineare Gl. mit den $(n + m - 1)$ Unbekannten $z, z^2, \cdots z^{m+n-1}$; ihre Elimination aus diesen Gl. ergiebt die Determinante

$$T = \begin{vmatrix} a_\varkappa & a_{\varkappa+1} \cdots\cdots a_{\varkappa+m+n-1} \\ b_\lambda & b_{\lambda+1} \cdots\cdots b_{\lambda+m+n-1} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, -1, \cdots, -n+1 \\ \lambda = 0, -1, \cdots, -m+1 \end{pmatrix}$$

(alle $a_\varkappa$, b_λ, deren Indices negativ oder grösser als m bez. n werden, sind 0). Es lässt sich zeigen, dass $T = 0$ auch hinreichende Bedingung für einen gm. T. ist. *Hesse* hat[90]) die Übereinstimmung von

81) Introd. in Anal. Inf. 2; § 474 ff. — Berlin Hist. 1764, p. 96.

82) *Bézout,* l. c. Anm. 80.

83) *Euler* benutzt zu seiner Reduktion nur die Gl. mit $\alpha = 0$ und $\alpha = m - 1$ (sogen.: „Zweite *Euler*'sche Methode"); diese findet sich übrigens bereits in der Arithm. univers. von *Newton* dargelegt.

84) J. f. Math. 15 (1836), p. 101 = Werke 3, p. 295.

85) Von *Sylvester,* Phil. Trans. 143 (1853), p. 407 als *Bézoutiante* bezeichnet.

86) J. f. Math. 28 (1844), p. 268.

87) J. f. Math. 53 (1857), p. 366 = Pap. 4, p. 38; dazu Zeichenerläuterungen v. *Borchardt* ib. p. 367. Vgl. auch *Borchardt,* J. f. Math. 57 (1860), p. 111, 183 = Werke p. 391.

88) J. f. Math. 27 (1844), p. 1 = Werke, p. 83.

89) Phil. Mag. 1840, Nr. 101; wesentlich nur eine andere Darstellung der Methode von *F. J. Richelot,* J. f. Math. 21 (1840), p. 226 und *Hesse,* l. c. Anm. 88.

90) Kritische Zeitschr. f. Math. (1858), p. 483 = Werke, p. 475; auf andere Weise *Borchardt,* J. f. Math. 57 (1860), p. 183 = Werke, p. 145.

$R(f, g)$ und T direkt nachgewiesen; ferner *Baltzer*[91]) die Gleichung $S = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} T$ (bei $m = n$).

W. Stahl liefert für $n = m$ eine Determinante, welche nur von der Ordnung $(m-1)$ ist[92]).

Die erste *Euler*'sche Darstellung benutzt die Werte α und β, für welche die F. f bez. g verschwinden; *G. Rosenhain* löst das allgemeinere Problem, die Resultante aus den Werten $f(\gamma_1), \dots f(\gamma_{m+n})$; $g(\gamma_1), \dots g(\gamma_{m+n})$ darzustellen, welche beide F. für willkürliche Argumente $\gamma_1, \dots \gamma_{m+n}$ annehmen[93]). Mit Hülfe seines Resultats kann man die *Cauchy*-sche Interpolationsformel herleiten. Diese „interpolatorische" Darstellung wurde von *Borchardt* folgendermassen modifiziert[94]): bei *Rosenhain* sind die Werte $f(\gamma_1), \dots f(\gamma_{m+n})$ und ebenso $g(\gamma_1), \dots g(\gamma_{m+n})$ nicht von einander unabhängig (vgl. Nr. 2); *Borchardt* nimmt bei $m = n$ die von einander unabhängigen Werte von f und g für willkürliche $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{n+1}$ und bestimmt daraus die R.

Hervorzuheben ist hier noch eine Arbeit von *P. Gordan* (Math. Ann. 7 [1874], p. 433), in der eine Determinantenformel von *A. Brill* (Math. Ann. 4 [1871], p. 530) zur Aufstellung von Relationen zwischen Wurzel-Potenz-Determinanten und Koeffizienten einer Gleichung benutzt wird; diese liefern dann nicht nur die R. in ihrer Determinantenform, sondern auch eine Erweiterung derselben, bei welcher eine Determinante aus den Koeffizienten dreier Gleichungen gebildet wird, deren Verschwinden gleichfalls von der Existenz gemeinsamer Wurzeln abhängt. In derselben Abhandlung wird eine explicite Darstellung für den gr. gm. T. zweier F. geliefert.

17. Bedingungen für gemeinsame Teiler. Weiter noch trägt die Frage nach den Bedingungen dafür, dass f und g einen Faktor von vorgeschriebenem Grade k gemeinsam haben. Sie lässt sich nach der zweiten *Euler*'schen Methode behandeln und führt dabei auf die Bedingungen, dass ausser R auch $(k-1)$ einfach gebildete Subdeterminanten von R verschwinden müssen. Sehr übersichtlich sind diese Ergebnisse von *W. Scheibner*[95]) hergeleitet.

---

91) Determinanten § 11. Conziser dargestellt von *Gordan-Kerschensteiner* 1, p. 153. Ein anderer Beweis von *Netto* (Algebra 1, § 144) erstreckt sich auch auf die Umformung entsprechender Subdeterminanten der Res.

92) Math. Ann. 35 (1890), p. 395.

93) J. f. Math. 30 (1846), p. 157.

94) J. f. Math. 57 (1860), p. 111 = Berl. Ber. 1859, p. 376 = Werke p. 131. Erweitert wurden diese Formeln durch *Kronecker*, Berl. Ber. 1865 Dez., p. 686.

95) Leipz. Ber. 40 (1888), p. 1. Vgl. auch *Faà di Bruno* l. c. § 5 ff., besonders § 11. — *Gordan-Kerschensteiner*, l. c. Nr. 129 ff. Weitere Untersuchungen

Nach derselben Richtung gehen die in Nr. **12** erwähnten *Kronecker*schen Untersuchungen, welche an die Entwickelung von $f:g$ nach fallenden Potenzen von z anknüpfen[96]). Setzt man, wie dort, $|c_{p+q}| = C_\varrho$ $(p, q = 0, 1, \dots \varrho - 1)$, dann folgen für $n = m - 1$ als charakteristische Bedingungen für die Existenz eines gr. gm. T. k^{ten} Grades von f und g und keines höheren Grades:

$$C_n = 0, \quad C_{n-1} = 0, \dots \quad C_{n-k+1} = 0, \quad C_{n-k} \neq 0.$$

Netto hat die direkte Umwandlung dieser Determinanten in S und in die entsprechenden Subdeterminanten gegeben[97]).

18. Eigenschaften der Resultanten. Aus den Darstellungen der R. lässt sich eine Reihe von Eigenschaften ablesen (I B 2): die R. ist homogen in den a vom n^{ten} und in den b vom m^{ten} Grade; sie ist *isobarisch* in den a und b vom Gewichte $m \cdot n$. Es ist $R(f, g_1 g_2) = R(f, g_1) \cdot R(f, g_2)$; und $R(f, g + \varkappa f) = R(f, g)$, wenn $\varkappa$ eine Konstante bedeutet; ferner ist für $m = n$, wenn $\varkappa, \lambda, \varkappa', \lambda'$ Konstanten bedeuten, $R(\varkappa f + \lambda g, \varkappa' f + \lambda' g) = (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)^m \cdot R(f, g)$, (Invariantencharakter).[98]) Für die Resultanten bestehen Differentialgleichungen[99]), z. B. die beiden folgenden:

$$m a_0 \frac{\partial R}{\partial a_1} + (m-1) a_1 \frac{\partial R}{\partial a_2} + \cdots + n b_0 \frac{\partial R}{\partial b_1} + (n-1) b_1 \frac{\partial R}{\partial b_2} + \cdots = 0,$$

$$b_0 \frac{\partial R}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_1} + \cdots + b_m \frac{\partial R}{\partial a_m} = 0,$$

die zur numerischen Berechnung der in R eintretenden Konstanten benutzt werden können. *M. Nöther* hat bewiesen (*Faà di Bruno-Walter*, l. c. p. 281), dass alle hier möglichen Differentialgleichungen Folgen der einen charakteristischen sind:

$$\sum (a_{\varkappa+1} b_0 - a_0 b_{\varkappa+1}) \frac{\partial R}{\partial a_\varkappa} + b_1 R = 0.$$

Sind die a, b allgemeine Grössen, dann ist R. irreduktibel[100]); sind dieselben aber Funktionen anderer Variablen $u, v, \dots$, so kann R in Faktoren zerfallen, deren einige von $u, v, \dots$ frei sind; *Sylvester*

---

sind von *V. Hioux*, Ann. Éc. Norm. (2) 10 (1881), p. 389; von *B. Igel*, Wien. Ber. 75 (1877), p. 145; *G. Darboux*, Bull. scienc. math. 10 (1876), p. 56 u. (2) 1 (1877), p. 54, ohne wesentlich Neues zu fördern, angestellt worden.

96) Berl. Ber. 1881, p. 535. *N. v. Szütz*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 34.

97) J. f. Math. 116 (1896), p. 33.

98) *Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 101 = Werke 3, p. 295.

99) Von *F. Brioschi* aufgestellt J. f. Math. 53 (1857), p. 372; Ann. di mat. 2 (1859). Weiter behandelt von *Faà di Bruno*, J. f. Math. 54 (1857), p. 283; später von *Noether* genauer untersucht in der Übersetzung von *Faà di Bruno*.

100) *Netto*, Algebra 1, § 153.

nennt sie (Anm. 85) „spezielle Faktoren“ und den zurückbleibenden Teil, welcher ihm aus geometrischen Gründen wichtig ist, die *reduzierte* R.[101]). — Haben $f=0$, $g=0$ nur eine W. ζ gemeinsam, dann ist für beliebige λ, μ, $\varkappa$ und σ[102])

$$\zeta^\lambda : \zeta^\mu = \frac{\partial R}{\partial a_{m-\lambda-\varkappa}} : \frac{\partial R}{\partial a_{m-\mu-\varkappa}} = \frac{\partial R}{\partial b_{n-\lambda-\sigma}} : \frac{\partial R}{\partial b_{n-\mu-\sigma}}.$$

Dieser Satz lässt sich auf mehrere gemeinsame Wurzeln ausdehnen.

Setzt man mit einem Parameter ϱ

$$f = a_0\varrho^k + a_1\varrho^{k-1}z + \cdots + a_{k-1}\varrho z^{k-1} + a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \cdots + a_m z^m,$$

$$g = b_0\varrho^l + b_1\varrho^{l-1}z + \cdots + b_{l-1}\varrho z^{l-1} + b_l z^l + b_{l+1}z^{l+1} + \cdots + b_n z^n$$

$$\varphi = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k; \qquad \varphi' = b_0 + b_1 z + \cdots + b_l z^l,$$

$$\psi = a_k + a_{k+1}z + \cdots + a_m z^{m-k}; \quad \psi' = b_l + b_{l+1}z + \cdots + b_n z^{n-l},$$

so wird $R(f, g)$, nach steigenden Potenzen von ϱ entwickelt, mit dem Gliede $R(\varphi, \varphi')\cdot R(\psi, \psi')\cdot \varrho^{kl}$ beginnen[103]). —

Mit Hülfe der *Kronecker*'schen Entwickelungen von $f:g$ (Nr. **12**) kann die Theorie der R. ohne Voraussetzung des Fundamentaltheorems durchgeführt, und dann darauf der Beweis dieses Theorems gestützt werden. Das ist der *Gordan*'sche Gang (vgl. Nr. **5**) des W.-Existenzbeweises. — *Gordan* fasst[104]) die R. auch als bilineare Form $\sum \pm A_\varkappa B_\varkappa$ auf, wobei nach dem *Laplace*'schen Zerlegungssatze die $A_\varkappa$ Determinanten der a, und die $B_\varkappa$ Determinanten der b bedeuten. Die Determinante dieser bilinearen Form hat dann den Wert ± 1.

J. Lüroth[105]) leitet die Hauptsätze über R. mittels des Begriffes des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, statt, wie es gewöhnlich geschieht, des grössten gemeinsamen Teilers her.

19. Berechnung der Resultanten. Die Berechnung der Resultanten ist umständlich. *Cayley*[106]) bedient sich einer Art geometrischer Darstellung der R., um ihre Koeff. übersichtlich anzuordnen. Die erste von ihm benutzte Berechnungsmethode hatte schon *Cramer* (Anm. 79) angewendet; sie stützt sich auf die *Cramer-Poisson*'sche Produkt-

---

101) *Cayley,* J. f. Math. 34 (1847), p. 30 = Coll. Pap. 1, p. 143. Über eine andere Bedeutung dieses Ausdrucks siehe I B 1 b Nr. **15**.

102) *Richelot,* J. f. Math. 21 (1840), p. 226.

103) *W. Fr. Meyer,* Gött. Nachr. 1895, p. 119 u. 135; Acta math. 19 (1895), p. 385. (Analog für $D(f)$, vgl. Nr. **20** u. f.) *Netto,* Gött. Nachr. 1895, p. 209. Andere Bemerkungen über die Struktur der R. liefert *A. Brill,* Math. Ann. 16 (1880), p. 348.

104) Math. Ann. 45 (1894), p. 405. Die Bedeutung des Satzes erhellt erst aus einer Arbeit von *A. Hurwitz,* ibid. 45 (1894), p. 401.

105) Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 247.

106) Lond. Trans. 147 (1857), p. 703 = Coll. Pap. 2, p. 440.

darstellung und auf die Benutzung symmetrischer F.; *Cayley's* zweite Methode knüpft an die Determinanten-Form an und benutzt die Nr. **18** gegen Ende erwähnte Darstellung $\sum \pm A_\varkappa B_\varkappa$. Dieselbe Form wertet *E. Dr. Roe* jr.[107]) aus, indem er die R. als vierfache Summe darstellt; die Glieder der R. zerfallen in „Normalformen" und in „reducible Formen". — Schon *Newton* giebt in der „Arithmetica universalis" die einfachsten Resultate an. In *Salmon's* „Higher algebra" finden sich die R. für $(m, n) = (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2); (3, 3), (4, 3); (4, 4)$. Bei (4, 4) giebt es bereits 217 Terme. Eine ähnliche Tabelle giebt *Faà di Bruno* in seinen „Binären Formen". *Gordan*[108]) liefert die Untersuchungen zur allgemeinen invariantentheoretischen Berechnung, sowie die fertigen Formeln für $(m, n) = (6, 2); (5, 3); (5, 4)$; *Clebsch*[109]) für $(m, 2)$ mittels symbolischer Produkte; *Roe* (l. c.) wieder für $(m, 2)$ und (5, 4); *E. Pascal*[110]) für $(m, 3)$.

Bei manchen geometrischen Untersuchungen handelt es sich lediglich darum, den Grad einer Resultante oder Diskriminante (siehe folgende Nummer) abzuzählen. Solche Bestimmungen finden sich bei *W. Fr. Meyer*[111]), wo die Grade bei einer Anzahl von speziellen, geometrisch wichtigen Gleichungen angegeben werden.

Ebenda wird auf *Reduktibilitätsfragen* bei R. und Diskriminanten (Nr. **20**) eingegangen; aus der Natur der Singularitäten von ebenen wie räumlichen Kurven schliesst man, dass das Zusammenrücken zweier singulärer Elemente meistens noch dasjenige eines weiteren singulären Elementes zur Folge hat. Daher haben die Diskriminanten und R. der Gl., von denen die einfachsten Singularitäten abhängen, Faktoren miteinander gemeinsam. Die Zerlegung solcher R. und Diskriminanten wird in den beiden Arbeiten geliefert. (Vgl. noch *Brill,* Math. Ann. 16, 1880, p. 348.)

Die R. gewisser, aus einer Stammform abgeleiteter Formen sind durch die Diskriminante der Form (Nr. **20**) teilbar[112]). Ebenso werden in einer ausgedehnten Reihe von Fällen die Invarianten und Kovarianten binärer Formen durch gewisse Potenzen der R. oder der Diskriminante der Stammform teilbar[113]).

---

107) „Die Entwickelung der Sylvester'schen Determinante nach Normalformen". Leipz., Teubner (1898).

108) Math. Ann. 3 (1871), p. 389.

109) J. f. Math. 58 (1861), p. 273.

110) Gi. di mat. 25 (1887), p. 257; Nap. Rend. (2) 2 (1888), p. 67.

111) Math. Ann. 38 (1891), p. 369 und ibid. 43 (1893), p. 286.

112) *P. Gordan,* Math. Ann. 4 (1871), p. 169.

113) *G. Kohn,* Wien. Ber. 100 (1891), p. 865 u. 1013; ib. 102 (1893), p. 801. — *E. Waelsch,* ibid. 100 (1891), p. 574.

20. Diskriminante. Nimmt man $g(z) = f'(z)$ und setzt $R(f, f') = a_0 D(f)$, so heisst D die *Diskriminante* (D.) von f.[114]) Es wird

$$D = a_0^{m-2} f'(\alpha_1) \cdots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{1}{2} m(m-1)} a_0^{2m-2} \Pi(\alpha_\lambda - \alpha_\mu)^2 .$$

$D = 0$ ist charakteristisch dafür, dass f und f' einen gm. T. haben, dass also $f = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt (Nr. **14**). Aus der Determinantenform von R folgt hier

$$D = \frac{1}{a_0} \begin{vmatrix} a_\varkappa & a_{\varkappa+1} & \cdots a_{2m-2+\varkappa} \\ (m-\lambda) a_\lambda & (m-\lambda-1) a_{\lambda+1} & \cdots (-m+2-\lambda) a_{2m-2+\lambda} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varkappa = 0, -1, \cdots -m+1 \\ \lambda = 0, -1, \cdots -m \end{pmatrix}$$

($a_\varkappa$ ist 0, wenn $\varkappa$ negativ oder grösser als n genommen wird).

Man kann die D. in Gestalt einer Determinante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellen. Macht man bei $z = \frac{x}{y}$ durch Multiplikation mit y^m die F. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ ganz und homogen, so ist

$$D = \frac{1}{m^{m-2}} R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Führt man die Koeffizienten der Entwickelung von $f'(z) : f(z)$ ein (vgl. die C_ϱ in Nr. **17**), welche hier (vgl. die erste Formel in Nr. **14**) Summen der Wurzelpotenzen werden $c_0 = s_0$, $c_1 = s_1, \ldots$, so folgt die *Cayley*'sche Darstellungsform, J. de Math. 11 (1846), p. 298 = Coll. Pap. 1, p. 306

$$D = (-1)^{\frac{1}{2} m(m-1)} a_0^{2m-2} \cdot | s_{\varkappa+\lambda} | \quad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \cdots m-1).$$

21. Eigenschaften der Diskriminante. Die D. ist in den Koeff. von $f(z)$ homogen vom Grade $(2m-2)$ und isobarisch vom Grade $m(m-1)$. — Ist ζ eine Doppelw. von $f = 0$, so gilt die Gl.

$$1 : \zeta : \zeta^2 : \cdots = \frac{\partial D}{\partial a_m} : \frac{\partial D}{\partial a_{m-1}} : \frac{\partial D}{\partial a_{m-2}} : \cdots;$$

dieser Satz lässt sich auf Wurzeln von höherer Multiplizität, entsprechend modifiziert, ausdehnen[115]). — Es ist ferner

$$D(f_1 f_2) = (-1)^{m_1 m_2} D(f_1) \cdot D(f_2) \cdot R^2(f_1, f_2),$$

wenn m_1, m_2 die Ordnungen von f_1 und von f_2 bedeuten. — Für die D. gelten partielle Differentialgl., wie z. B.

---

114) *Sylvester*, Phil. Mag. (4) 2 (1851) II, p. 406; Cambr. a. Dubl. M. J. 6 (1847), p. 52. — *Gauss* gebraucht dafür die Bezeichnung: „Determinante", Disq. arithm. Sect. V, § 154 = Werke 1, p. 122.

115) Vgl. *Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 106; *Richelot*, J. f. Math. 21 (1840), p. 228. — *C. Brioschi*, Teor. dei Determinanti, Pavia 1854.

$$m a_0 \frac{\partial D}{\partial a_1} + (m-1) a_1 \frac{\partial D}{\partial a_2} + \cdots + a_{m-1} \frac{\partial D}{\partial a_m} = 0;$$

auch hier hat *Noether* (l. c. Nr. **18**) nachgewiesen, dass alle möglichen Differentialgl. aus einer einzigen abgeleitet werden können. — *Serret*[116]) benutzt solche Differentialgl. zur Berechnung der Zahlenfaktoren der D.

Hilbert[117]) löst die Aufgabe, zwei binäre Formen f_1, f_2 des Grades n so zu bestimmen, dass $D(\varkappa f_1 + \lambda f_2)$ eine gegebene Form des Grades $(2n-2)$ von $\varkappa$ und λ wird.

Für die Gleichungen niederer Grade ist es gelungen, D durch „fundamentale" Invarianten (niedrigeren Grades) auszudrücken (I B 2). *G. Boole*[118]) hat D von $az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e = 0$ auf die Form $D = 16(I^3 - 27J^2)$ gebracht, wobei für I und J die Invarianten

$$I = ae - 4bd + 3c^2, \quad J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

zu setzen sind. Für Gl. 5ten, 6ten, 7ten Grades ist ähnliches durch *G. Salmon*[119]), *F. Brioschi*[120]), *G. Maisano*[121]), *Gordan*[122]) geleistet. Ein systematisches Verfahren hierfür hat *Gordan* angegeben[123]).

G. Bauer knüpft im Anschluss an *A. Cayley* die Berechnung der D. binärer Formen an die Gestalt $D = a_1{}^2 V + a_0 U$ an[124]).

22. Diskriminantenfläche. Deutet man bei $a_0 = 1$ die unbestimmt gedachten Koeff. $a_1, a_2, \ldots a_n$ von $f(z)$ als Koordinaten eines Punktes P im Raume von n Dimensionen, dann liefert $D(a_1, \ldots a_n) = 0$ die *Diskriminantenfläche.* Ändern sich bei der Bewegung des Punktes P die Realitätsverhältnisse der Gl.-W., so ist dies nur möglich, wenn P, auch den Multiplizitäts-Charakter ändernd (Nr. **14**), $D = 0$ passiert[125]). $D = 0$ teilt den Raum in Gebiete von invariantem Realitäts-Charakter. Hierauf hat *Kronecker* im Anschluss an seine Charakteristikentheorie aufmerksam gemacht (vgl. I B 1 b, Nr. **25**). Er untersucht

---

116) *Serret,* Alg. supér. 1, Nr. 202.

117) Math. Ann. 31 (1887), p. 482.

118) Cambr. M. J. 2 (1841), p. 70. Siehe ferner *Cayley,* Cambr. M. J. 4 (1845), p. 193 = Coll. Pap. 1, p. 94: weiter Lond. Trans. 148 (1858), p. 429, § 129 = Coll. Pap. 2, p. 527; vgl. auch *Clebsch,* J. f. Math. 64 (1865), p. 95.

119) Cambr. a. Dubl. M. J. 9 (1854), p. 32.

120) Ann. di Mat. (2) 1 (1867), p. 159.

121) Math. Ann. 30 (1885), p. 442.

122) Math. Ann. 31 (1888), p. 566.

123) *Gordan-Kerschensteiner,* Vorlesungen 2, p. 108.

124) *G. Bauer,* Münch. Ber. (1886), p. 189; *Cayley,* J. f. Math. 47 (1854), p. 109 = Coll. Pap. 2, p. 164. Vgl. noch Anm. 103.

125) *Brill,* Math. Ann. 12 (1877), p. 87; *Kerschensteiner,* Diss. Erl. 1888.

nach dieser Methode die Gl. vierten Grades[126]. *Hilbert* zeigt, dass die Bestimmung der mannigfaltigen Ausartungen einer f durch die D. und ihre Polaren allein schon möglich sei[127]. Seine Arbeit steht mit früheren von *Cayley*[128] und *Sylvester*[129] im Zusammenhange, wo „Evektanten“ (vgl. Nr. **14** Schluss) und deren Struktur zu gleichem Zwecke verwendet werden.

23. Funktionen mit reellen Nullstellen. Realitätsverhältnisse. Die Frage nach den Gebieten, in welche die $D(a_1, \ldots) = 0$ den Raum teilt, führt zu der Frage nach dem Gebiete, welches die Funktionen mit nur reellen Nullstellen bestimmt. Von den hierüber bekannten Theoremen führen wir an: Das *Legendre*'sche Polynom, d. h. die n^{te} Ableitung von $(z(z-1))^n$ hat lauter getrennte, reelle, zwischen 0 und 1 liegende Nullstellen; die „Säkulargleichung“ (vgl. I A 2, Nr. **26**, Anm. 100) hat reelle Wurzeln; das Gleiche gilt für die *Biehler*'schen Gleichungen $U = 0$, $V = 0$, wobei $U + iV = \prod (z - a_\lambda - ib_\lambda^2)$ ist. Es giebt nach dieser Richtung hin eine Fülle von Spezialuntersuchungen[130], auf die wir nur hindeuten können.

Die Theorien über die Realitätsverhältnisse der W. einer Gl. fallen in die Behandlung der Gl. (vgl. I B 3a). — Hier seien noch die Arbeiten von *Fr. Meyer* erwähnt[131], welche folgendes Problem erledigen: Welchen Änderungen sind die Anzahlen der reellen Singularitäten von Kurven unterworfen, wenn bei Variation der Kurven ein Zusammenfallen zweier Singularitäten durch das Verschwinden gewisser Faktoren der D. oder der R. stattfindet, welche den Singularitätsgleichungen angehören. Wenn man ferner jedesmal noch die D. der quadratischen Gl., deren W. näherungsweise die beiden koincidierenden W. sind, auf ihr Vorzeichen untersucht, kann man daraus wesentliche Schlüsse auf gewisse bei jener Variation invariante Zahlen ziehen. Die Methode geht offenbar über die besprochene Aufgabe hinaus.

24. Hinweise auf angrenzende Gebiete. Die Theorie der binären Formen ist lediglich wegen der Verschiedenheit der verwendeten Hülfs-

126) Berl. Ber. 1878, Febr. p. 119; siehe auch *C. Faerber,* Dissert. Berl. 1889; *R. E. Hoppe,* Arch. f. Math. u. Phys. 14 (1896), p. 398; *Brill,* Math. Ann. 20 (1882), p. 330.

127) Math. Ann. 30 (1887), p. 437.

128) Lond. Trans. 147 (1857), p. 727 = Coll. Pap. 2, p. 465.

129) Phil. Mag. (4) 3 (1852), p. 375 u. 460.

130) Ausführliche Angaben finden sich in *Netto,* Algebra I, Abschnitt 2.

131) *A. Brill*, Math. Ann. 16 (1880), p. 345 u. 348; *W. Fr. Meyer*, ibid. 38 (1891), p. 369; 43 (1893), p. 286; Gött. Nachr. 1888, p. 74; 1890, p. 366 u. 493; 1891, p. 14 u. 88; Monatsh. f. Math. Phys. 4 (1893), p. 229 u. 331.

mittel der Forschung an anderer Stelle untergebracht (I B 2). — Die Fragen nach der Umwandlung rationaler F. durch lineare Substitutionen gehören gleichfalls zum Gebiete der Invariantentheorie I B 2. — Die Ketten von F., welche in Nr. **12** als $f, f_1, f_2, \dots f_r$ aufgeführt sind, werden als *Sturm*'sche Reihen in I B 3 a besprochen werden. — Erwähnt seien die Untersuchungen von *P. L. Tschebyscheff* über gz. rat. F., die sich innerhalb eines bestimmten Intervalles gegebenen F. möglichst genau anschmiegen, also z. B. die gz. F., welche dem Wert des Bruches $\frac{1}{a-z}$ in einem Intervalle möglichst nahe bleibt; diese Aufgabe ist für die Integration gewisser F. von Wichtigkeit [II A 2]. Damit im Zusammenhange stehen seine Arbeiten über gz. F. $g(z)$, deren grösste absolute Werte in gegebenen Intervallen möglichst klein werden[132]) [I D 2, 3; I E]; wenn nämlich $\varphi(z)$ die gegebene F. und $F(z)$ das annähernde Polynom ist, dann wird dieses durch die Bedingung bestimmt, dass $\varphi(z) - F(z)$ für alle Wurzeln von $g(z)$ verschwindet.

132) St. Petersb. Denkschr. 61 (1889); 64 (1891), p. 1; St. Petersb. Abh. 72 (1893), p. 1; St. Pétersb. Mém. 22 (1873); Moscou Soc. Philom. 4 (1870). Acta math. 18 (1894), p. 113; *E. Vallier* C. R. 116 (1893). p. 712.

Verzeichnis der Abkürzungen.

D = Diskriminante
F = Funktion
gbr = gebrochen
Gl = Gleichung
gm = gemeinsam
gr = grösster
gz = ganz
irred = irreduktibel
Koeff = Koeffizient
R = Resultante
rat = rational
Rat.-Br = Rationalitäts-Bereich
red = reduktibel
T = Teiler
W = Wurzel