IB1b. RATIONALE FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHEN

VON

E. NETTO

IN GIESSEN.

Inhaltsübersicht.

1. Definitionen.
2. Wurzeln. — Identisches Verschwinden.
3. Potenzentwickelung gewisser rationaler Funktionen.
4. Mehrfache Wurzeln. — Unendlich grosse Wurzeln.
5. Reduktibilität und Irreduktibilität.
6. Elimination. — *Bézout*'sche Methode.
7. *Poisson*'sche Methode. — Eliminante.
8. *Cayley*'sche und *Sylvester*'sche Methode.
9. *Kronecker*'sche Methode. — Stufenzahl.
10. *Minding*'sche Regel. — *Labatie*'s Theorem.
11. Vielfache und unendliche Wurzeln eines Gleichungssystems.
12. Auflösung linearer Gleichungen. — Spezielle Eliminationsprobleme.
13. Eigenschaften der Eliminante.
14. Resultante und ihre Eigenschaften.
15. Reduzierte Resultante.
16. Reduktibilität und Teilbarkeit von Gleichungssystemen.
17. Diskriminante éines Gleichungssystems.
18. Diskriminante einer Gleichung.
19. Unabhängigkeit von Funktionen.
20. Unabhängigkeit von Gleichungen.
21. Funktionaldeterminante.
22. *Hesse*'sche Determinante.
23. *Jacobi*'s Erweiterung einer *Euler*'schen Formel.
24. Wurzelrelationen eines Gleichungssystems. — Interpolation.
25. Charakteristik eines Funktionensystems.
26. Modul- oder Divisoren-Systeme.
27. Weitere Hinweise. Verzeichnis der Abkürzungen.

Hinsichtlich der Litteratur muss auf die beim vorigen Abschnitte aufgeführten Werke verwiesen werden; speziell für rationale Funktionen mehrerer Variablen giebt es keine Monographien.

1. Definitionen. Ein Ausdruck

$$(1) \qquad f(z_1, z_2, z_3, \dots z_m) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma\dots} c_{\alpha\beta\gamma\dots} z_1^\alpha z_2^\beta z_3^\gamma \dots z_m^\delta,$$

in welchen die m *Veränderlichen, Variablen* $z_1, z_2, \dots z_m$ und die Konstanten $c_{\alpha\beta\gamma\dots}$ eintreten, und in dem die Summe $(\alpha + \beta + \dots + \delta)$ alle Werte $0, 1, 2, \dots n$ durchläuft, während die $\alpha, \beta, \dots$ ganze nicht negative Zahlen sind, heisst eine *ganze Funktion* n^{ter} *Dimension* (gz. F.) der m Variablen z_λ. Sie hat[1]) im allgemeinen Falle

$$N(n, m) = \binom{n+m}{m} = N(m, n)$$

Terme (Potenzprodukte). Die Anzahl derjenigen Terme unter ihnen, die durch keins der Monome $z_1^{a_1}, z_2^{a_2}, \dots z_m^{a_m}$ teilbar sind, beträgt in der Bezeichnung der Differenzenrechnung $\Delta^{(m)}_{a_1,\dots a_m} N(n, m)$.

Man kann vermittelst der Auflösung linearer Gleichungen für die c durch $N(n, m)$ vorgeschriebene Werte $f^{(\varrho)}$ von (1) für eben so viele Wertsysteme $(z_1, z_2, \dots z_m) = (\zeta_{1\varrho}, \zeta_{2\varrho}, \dots \zeta_{m\varrho})$ „im allgemeinen" die F. (1) bestimmen, d. h. dann und nur dann, wenn das System $(\zeta_{1\varrho}, \dots)$ eine gewisse Determinante nicht zu Null macht[2]). Das naturgemäss hierher gehörige Interpolationsproblem kann erst in Angriff genommen werden, wenn weitere Vorbereitungen erfolgt sind (vgl. Nr. **24**).

Kommen in (1) nur Terme vor, bei denen $(\alpha + \beta + \gamma + \cdots)$ denselben Wert n besitzt, dann heisst f eine *homogene* gz. F. der n^{ten} Dimension (*Euler*, Introductio 1, cap. 5).

2. Wurzeln. Identisches Verschwinden. Einen Wertkomplex $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$, welcher (1) zu Null macht, nennen wir eine *Wurzel* (W.) (Auflösung, solutio) von $f = 0$ oder eine Nullstelle von f; $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m$ heissen nach gebräuchlicher geometrischer Bezeichnung die *Koordinaten.* Die in Nr. **1** besprochenen Eigenschaften zeigen, dass

---

1) Derartige Abzählungen zum Zwecke der Elimination hat *É. Bézout* angestellt, Théorie générale des équations, Paris 1779. Weitere Ausführungen stammen von *J.-A. Serret:* Algèbre supérieure 1 (troisième édit. Paris 1866), p. 142 ff. und von *E. Netto*, Algebra 2, 1 (Leipzig 1898).

2) Aus der Nichtberücksichtigung dieses Umstandes folgt das *Euler*'sche Paradoxon. *L. Euler,* Berl. Mém. 1748, p. 219 schliesst z. B., dass durch 9 Punkte einer Ebene *stets eine* und *nur eine* Kurve dritter Ordnung gelegt werden könne; dies stehe dann im Widerspruch zu dem Umstande, dass zwei Kurven dritter Ordnung sich in 9 Punkten schneiden (Nr. **6**). Vgl. auch *G. Cramer,* Analyse etc. § 48, p. 78; *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 15 (1836), p. 285 = Werke 3, p. 329. Das Paradoxon löst sich sofort, wenn man das Verschwinden jener Determinante aus Potenzprodukten der Koordinaten beachtet.

zwischen je $N(n, m)$ W. von (1) Relationen bestehen, so dass also (anders als für $m = 1$) die Gesamtheit der W. einer Gl. $f(z_1, z_2, \ldots) = 0$ nicht willkürlich gewählt werden kann (vgl. Nr. **24**).

Ist jedes beliebige Wertsystem $(\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ eine W. von (1), dann sind alle c gleich Null, d. h. es ist $f \equiv 0$. — Wenn ein Produkt mehrerer gz. F. für jedes Wertsystem $(\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ verschwindet, dann ist mindestens einer der Faktoren identisch gleich Null.

3. Potenzentwickelung gewisser rationaler Funktionen. Über die Entwickelung gewisser rationaler F. mehrerer Var. nach steigenden und fallenden Potenzen derselben stellt *C. G. J. Jacobi*[3]) Untersuchungen an, deren Wesen aus dem folgenden, für zwei Var. gegebenen Resultate klar wird. Der erste (zweite) Bruch des Produktes

$$R(x, y) = \frac{1}{ax + by - t} \cdot \frac{1}{b_1 y + a_1 x - t_1}$$

wird nach fallenden Potenzen von x (von y) entwickelt; dann liefert $R(x, y)$ dreierlei Arten von Gliedern: α) solche, in denen x und y; β) solche, in denen nur x; endlich γ) solche, in denen nur y in negativen Potenzen auftreten. Man kann $R = L_\alpha + L_\beta + L_\gamma$ derart bestimmen, dass die Entwickelung der einzelnen L_α, L_β, L_γ alle und nur die einzelnen Glieder α) bezw. β) und γ) liefert. — Ferner werden Theoreme abgeleitet, wie das folgende: Die Koeffizienten von $x^{-\mu} y^{-\nu}$ und von bezw. $t^m t_1^n$ in

$$\frac{1}{(ax + by)^{m+1}} \cdot \frac{1}{(b_1 y + a_1 x)^{n+1}} \quad \text{und in} \quad \frac{(b_1 t - b t_1)^{\mu-1} (a t_1 - a_1 t)^{\nu-1}}{(a b_1 - a_1 b)^{\mu+\nu-1}}$$

stimmen überein. — Weitergeführt sind diese Untersuchungen nicht.

4. Mehrfache Wurzeln. — Unendlich grosse Wurzeln. Man kann durch eine lineare, umkehrbare Transformation eine gegebene F. f so zubereiten, dass dadurch jede der neuen Var. zu einem Grade aufsteigt, die der Dimension der F. gleich wird. Dadurch werden Besonderheiten der Gl.-Form vermieden, z. B. die, dass Wurzeln von $f = 0$ vorkommen, bei denen nur einzelne Koordinaten unendlich gross werden. Vgl. Nr. **11**.

Ist nämlich, nach fallenden Potenzen von z_1 geordnet,

$$f = \varphi_0(z_2, \ldots z_m) z_1^\nu + \varphi_1(z_2, \ldots z_m) z_1^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu(z_2, \ldots z_m),$$

und bedeutet $(\zeta_2, \ldots \zeta_m)$ eine W. von $\varphi_0 = 0$, so nennt man auf Grund einer Grenzbetrachtung oder der Einführung von $y_1 = 1 : z_1$ auch $(\infty, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ eine W. von $f = 0$. Durch die erwähnte Substitution kann man es erreichen, dass keine W. existiert, welche gleichzeitig endliche und unendliche Koordinaten hat.

3) J. f. Math. 5 (1830), p. 344 = Werke 3, p. 67.

Ist f homogen, und $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$ eine W. von $f = 0$, so ist für jedes ϱ auch $(\zeta_1\varrho, \zeta_2\varrho, \dots \zeta_m\varrho)$ eine W. von $f = 0$.

Ist f nicht homogen, und ordnet man es nach homogenen Komplexen von Gliedern fallender Dimensionen:

$$f = g_n(z_1, z_2, \cdots z_m) + g_{n-1}(z_1, z_2, \cdots z_m) + \cdots + g_0,$$

ist ferner $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$ eine W. der homogenen Gl. $g_n = 0$, dann ist für $\varrho = \infty$ auch $(\zeta_1\varrho, \zeta_2\varrho, \dots \zeta_m\varrho)$ eine W. von $f = 0$; oder auch, $\zeta_1 : \zeta_2 : \cdots : \zeta_m$ giebt das Verhältnis der Koordinaten einer unendlich grossen W. von $f = 0$. Ist g_n eine „definite Form", d. h. hat es ausser $(0, 0, \dots)$ keine reellen Nullstellen, dann liegt $f = 0$ ganz im Endlichen.

Der Teilbarkeit von $f(z)$ durch $(z - \zeta)$, wenn ζ eine W. von $f(z) = 0$ ist, stellt sich hier als Analogon zur Seite, dass wenn $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ eine W. von (1) ist, dann Gleichungen der Form

$$f(z_1, \cdots z_m) = (z_1 - \zeta_1)\chi_1 + (z_2 - \zeta_2)\chi_2 + \cdots + (z_m - \zeta_m)\chi_m$$

bestehen[4]). Hat jedes $\chi_1 = 0, \dots \chi_m = 0$ wieder dieselbe W. $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$, dann kann ähnlich weiter auf verschiedene Weise

$$f = \sum_{(\alpha, \beta)} (z_\alpha - \zeta_\alpha)(z_\beta - \zeta_\beta)\psi_{\alpha,\beta}$$

gesetzt werden. In diesem Falle heisst $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ eine *Doppelwurzel*. In gleicher Weise kann man Wurzeln *höherer Multiplizitäten* definieren. Für eine ϱ-fache W. verschwinden mit f zugleich alle Ableitungen bis inclusive der $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$. Vgl. Nr. **11** und Nr. **17**.

5. Reduktibilität und Irreduktibilität. f heisst *reduktibel* (red.) oder *irreduktibel* (irred.), je nachdem es als ein Produkt ähnlicher Faktoren wie f dargestellt werden kann oder nicht. Anders als bei einer einzigen Var. gilt hier der Satz, dass auch bei beliebig erweitertem Rationalitätsbereiche allgemeine F. nicht in (lineare) Faktoren zerlegbar sind[5]). Ob eine gegebene F. red. ist oder nicht, kann prak-

4) *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1865, p. 687 hat diese Form seinen Untersuchungen über Interpolation zu Grunde gelegt.

5) Über die Zerlegbarkeit bei $m = 2$ vgl. *S. H. Aronhold*, J. f. Math. 55 (1858), p. 97; *F. Brioschi*, Ann. di mat. (2) 7 (1875/76), p. 189; *A. Thaer*, Math. Ann. 14 (1879), p. 545. Die Frage nach den Bedingungen des Zerfallens, sowie nach den Faktoren der zerfällbaren Formen wird mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Funktionen mehrerer Grössenreihen von *Fr. Junker* behandelt, Math. Ann. 45 (1894), p. 1, der an Untersuchungen von *A. Brill*, Gött. Nachr. Dez. 1893, p. 757 anknüpft. Das gleiche Problem behandelt *P. Gordan*, Math. Ann. 45 (1894), p. 410, unter Verwendung gewisser Differentialprozesse, besonders für ternäre Formen. Vgl. weiter *Brill*, Math. Ann. 50 (1898), p. 157; ferner *J. Hadamard*, Bull. soc. math. 27 (1899), p. 34.

tisch entweder so untersucht werden, dass man substituiert: $z_1 = t$, $z_2 = t^q$, $z_3 = t^{q^2}, \ldots$ und dabei q so hoch nimmt, dass alle Potenzprodukte in f als Potenzen von t verschiedene Exponenten erhalten; dann die neue F. der einen Var. t auf ihre Reduktibilität untersucht, und von den etwa gefundenen Faktoren in t auf solche in den z zurück zu gehen sucht[6]); oder man kann das *Kronecker*'sche Verfahren bei einer Var., welches sich auf die *Lagrange*'sche Interpolationsformel stützt[7]), direkt auf den Fall mehrerer Var. erweitern.

Die Ableitung des grössten gemeinsamen Teilers (gr. gm. T.) ist auch für $m > 1$ mit Hülfe des *Euklid*'schen Algorithmus möglich (vgl. I B 1a Nr. **12**). Bei den hier nötigen Divisionen wird eine der Var. etwa z_1 bevorzugt; dadurch treten gebrochene F. der anderen $z_2, z_3, \ldots$ auf, deren sonst störender Einfluss durch eine vorläufige Transformation (Nr. **4**) beseitigt werden kann (vgl. auch Nr. **10** das *Labatie*'sche Theorem). Über die bei dem Algorithmus der fortgesetzten Division auftretenden Hülfsfunktionen gelten ähnliche Sätze wie bei einer Var. (I B 1a Nr. **12**). Dasselbe gilt für die Darstellung des gr. gm. T. als einer homogenen linearen F. der gegebenen F.

Durch Erweiterung kommt man zu dem Satze, dass wenn T der gr. gm. T. von $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ist, dann Polynome $P_1, P_2, \ldots$ gefunden werden können, welche eine Gl.

$$f_1 P_1 + f_2 P_2 + f_3 P_3 + \cdots = T \cdot \Phi$$

befriedigen, in der Φ *nicht mehr alle* Var. z enthält.

Jetzt ist die Ableitung der Hauptsätze über irred. F. möglich; sie gestaltet sich in diesem Gebiete viel umständlicher als bei einer Var. und sie wird im allgemeinen auf den Schluss von n auf $(n+1)$ aufgebaut[8]).

Es zeigt sich, dass die Zerlegung in irred. Faktoren eindeutig ist. — Eine irred. F. g teilt entweder die beliebige F. f oder ist zu ihr teilerfremd. — Ist $(f_1 \cdot f_2)$ durch eine irred. F. g teilbar, so ist mindestens einer der Faktoren f_1, f_2 durch g teilbar. — Ist f in zwei Faktoren zerlegbar, die in z_1 ganz und in $z_2, z_3, \ldots$ rational aber gebrochen sind, dann giebt es auch eine Zerlegung von f, in welcher beide Faktoren gz. F. aller z sind; *Gauss*'scher Satz (vgl. I B 1a Nr. **13**). — Verschwindet $f(z_1, \ldots)$ für alle W. von $g(z_1, \ldots) = 0$, dann ist f durch jeden einzelnen irred. Faktor von g teilbar[9]), und also

6) *L. Kronecker*, Grundlagen einer arithm. Theorie u. s. w. § 4.

7) *Netto*, Algebra 2, 1. Vgl. I B 1a Nr. **3** und Nr. **10**.

8) *J. Molk*, Acta math. 6 (1885), p. 1; *H. Weber*, Algebra 1; *Netto*, Algebra 2, 1.

9) *J. J. Sylvester*'s „logic of characteristics", Cambr. Dubl. Math. J. 6 (1851), p. 186; bewiesen von *O. Hölder*, Böklen math. nat. Mitt. 1 (1884), p. 60; von

wird eine Potenz von f durch g selbst teilbar werden. Dieser Satz hat eine wesentliche Erweiterung durch *D. Hilbert* erfahren[10]; wir heben hier den für geometrische Anwendungen wichtigsten Fall seines allgemeinen Theorems heraus: Wenn f für alle Wertsysteme $z_1, z_2, \ldots z_n$ verschwindet, welche $g_1 = 0, g_2 = 0, \ldots g_m = 0$ machen, dann giebt es einen Exponenten r derart, dass die Potenz f^r linear und homogen durch $g_1, g_2, \ldots g_m$ darstellbar wird.

Ein anderer wichtiger, auf die Irreduktibilität bezüglicher Satz stammt gleichfalls von *Hilbert*[11]: Wenn $f(z_1, z_2, \ldots; p, q, \ldots)$ eine irred. gz. ganzzahlige F. der Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots$ und der Parameter $p, q, \ldots$ bezeichnet, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, für die Parameter $p, q, \ldots$ gz. rationale Zahlen einzusetzen, so dass dadurch die Funktion in eine irred. F. der Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots$ übergeht. Dieses Theorem ist z. B. für die *Galois*'sche Theorie der Gleichungen von grundlegender Bedeutung.

Hier muss ferner ein Satz von *E. Bertini*, Lomb. Rend. (2) 15, p. 24 (1882, Jan.) angeführt werden, mit dem sich auch *J. Lüroth*, Math. Ann. 42 (1893), p. 457; 44 (1894), p. 539 beschäftigt: Zerfällt $f(z_1, \ldots; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots)$ in Bezug auf die z bei unbestimmten Parametern $\varkappa$, so lässt sich von f ein Faktor abspalten, der nur die z enthält, oder f kann mit Hülfe einer Gl., deren Koeffizienten linear in den $\varkappa$ sind, in ein Produkt von gz. F. zerlegt werden, die einem und demselben Büschel angehören.

6. Elimination. Bézout'sche Methode. Sind allgemein m Gl. $f_1 = 0, \ldots f_m = 0$ von den Dimensionen $n_1, n_2, \ldots n_m$ mit m Unbekannten $z_1, \ldots z_m$ vorgelegt, so heisst $(\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ eine *Wurzel dieses Gleichungssystems*, wenn die Substitution $(z_1, \ldots z_m) = (\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ alle Gl. $f_\lambda = 0$ befriedigt. Es fragt sich, ob jedes System W. besitzt, wie viele, und wie sie bestimmt werden können.

Der *Bézout*'sche Satz besagt, dass im allgemeinen Falle W. existieren, und dass die Zahl dieser W. gleich dem Produkte $(n_1 \cdot n_2 \cdots n_m)$

Weber, Netto. — Über die Reduktibilität vgl. den eingehenden Aufsatz von *W. Fr. Meyer*, Math. Ann. 30 (1887), p. 30, in welchem es sich um die Lösung folgenden Problems handelt: Sind $f_0(\lambda), \ldots f_d(\lambda)$ linear unabhängige, ganze F. von λ, so sollen die Grössen $u_0, \ldots u_d$ als gz. F. von n Variabeln $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ so bestimmt werden, dass $u_0 f_0 + u_1 f_1 + \cdots + u_d f_d$ reduktibel in λ wird. Siehe auch *W. Fr. Meyer,* Münch. Ber. 1885, p. 415.

10) Vgl. *M. Noether,* Math. Ann. 6 (1872), p. 351; *E. Bertini,* ib. 34 (1889), p. 450; *E. Netto,* Acta math. 7 (1885), p. 101; *D. Hilbert,* Math. Ann. 42 (1892), p. 320.

11) J. f. Math. 110 (1892), p. 104. Der Beweis stützt sich auf Reihenentwickelungen der Wurzeln; vgl. Nr. **10**.

der Dimensionen $n_1, n_2, \ldots$ der gegebenen Gl. sei. Für den Fall $m = 2$ wurde das Theorem zuerst von *C. Mac Laurin* ausgesprochen[12]; *G. Cramer*[13] und *Euler*[14] versuchten, Beweise für diesen Fall zu geben. Der erste, wenigstens seinem Prinzipe nach ausreichende Beweis für den allgemeinen Satz wurde von *Bézout* geliefert[15]; dieser erkannte zuerst und sprach es aus, „dass nicht eine allmälige, sondern nur eine gleichzeitige Elimination von $(m-1)$ der m Variablen zum richtigen Grade der *Endgleichung* oder der *Eliminante* führen könne". Bei allmählicher Elimination treten nämlich stets fremde Lösungen auf[16]. *Bézout* zeigt durch eine Konstantenabzählung (vgl. Nr. **1**) die Möglichkeit, m gz. F. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ der Var. so zu bestimmen, dass die Summe

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \cdots + f_m\varphi_m = R(z_1)$$

von $z_2, z_3, \ldots z_m$ frei wird. Die W. von $R(z_1) = 0$ geben dann die z_1-Koordinaten der W. des Gleichungssystems. Die Bestimmung der φ_λ hängt von linearen Gl. ab, deren Anzahl diejenige der Unbekannten übertrifft. Aus einem besonderen, einfachen Falle wird dann die Auflösbarkeit des Systems der linearen Gl. erschlossen[17]. *J. Liouville*[18] bemerkte zuerst, dass noch zur Vervollständigung der Methode zu beweisen bleibt, dass zu jeder einfachen W. ζ_1 von $R(z_1) = 0$ auch eine einzige W. $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ des Systems gehöre, und füllte diese Lücke aus. *Bézout* wendete (l. c.) seine Methode gleichfalls auf unvollständige Gl. und auf Gl. von besonderer Form an. Es ist dabei der Satz unerlässlich, dass jede gz. F. der W. so reduziert werden kann, dass ζ_1 höchstens bis zum Grade $(n_1 - 1)$, ferner ζ_2 höchstens bis zum Grade $(n_2 - 1), \ldots$ aufsteigt[19].

Das obige $R(z_1)$ wird passend als *Eliminante* bezeichnet; natürlich kann sich die Bildung der Eliminante auf jede der Var. beziehen.

12) Geometria organica (Lond. 1720), Sect. V. Lemn. 3. Cor. 1.

13) Introduction à l'analyse etc. (Génève 1750.) Append. V.

14) Berl. Hist. 1748, p. 234—248.

15) Cours de math. à l'usage des Gardes du Pavillon, an. 1764/69, p. 209. — Théorie générale des équat. algébr. (Paris 1779.)

16) Vgl. *Netto*, Algebra 2, 1, p. 98.

17) Vgl. *C. Schmidt*, Zeitschr. f. Math. 31 (1886), p. 214, wo nachgewiesen wird, dass dieser Schluss nicht ohne weiteres richtig ist, und wo eine Ergänzung desselben geliefert wird.

18) J. de Math. 6 (1841), p. 359. Auch die *Liouville*'schen Schlüsse bedürfen einer Präzisierung, die *C. Schmidt* ebenfalls (l. c.) giebt.

19) *Serret-Wertheim*, Algebra 1, § 69. Dieses Theorem lässt sich nicht, wie z. B. *H. Laurent* es unternimmt (Traité d'Algèbre, Paris 1894), durch allmälige Elimination erledigen, und tritt in dieser Beziehung dem *Bézout*'schen Satze zur Seite.

7. Poisson'sche Methode. — Eliminante. *S. D. Poisson*[20]) veröffentlichte 1804 eine andere Methode, die er selbst in der Einleitung seiner Abhandlung für eine Erweiterung der von *Cramer* (l. c.) bei $m = 2$ benutzten erklärt. Er stützt sich bei der Durchführung der Elimination auf die Theorie der von *Ch. A. Vandermonde*[21]) untersuchten symmetrischen F. mehrerer Reihen von Grössen (vgl. Nr. **25**) und verwendet gleichzeitig den von *Cramer* (l. c.) eingeführten Begriff des Gewichtes (I B 2) einer F. — *Poisson* denkt sich die $(m - 1)$ ersten Gl. $f_\lambda = 0$ nach $z_2, z_3, \ldots z_m$ aufgelöst. Ihre W. $(\zeta_{2\varkappa}, \zeta_{3\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$ werden sämtlich in f_m eingetragen, und da sie algebraische F. von z_1 sind, so wird das über alle W. erstreckte symmetrische Produkt

$$\Pi f_m(z_1, \zeta_{2\varkappa}, \zeta_{3\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$$

rational durch die Koeffizienten von $f_1, \ldots f_m$ und durch z_1 darstellbar. Es ist dies die *Eliminante.* Schwierigkeiten treten bei der Ableitung dadurch auf, dass die ganzen symmetrischen F. der $(\zeta_{2\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$ gebrochene Ausdrücke der Koeffizienten von $f_1, \ldots f_{m-1}$ werden, bei denen Potenzen einer nur von den Konstanten abhängigen gz. F. ϱ_0 in den Nenner treten können.

8. Cayley'sche und Sylvester'sche Methode. *A. Cayley*[22]) hat die zweite *Euler*'sche Methode der Elimination bei einer Gl. einer Var. auf Systeme von Gl. mit mehreren Unbekannten auszudehnen versucht (vgl. I B 1a Nr. **16**). Er multipliziert in Erweiterung jener Methode sämtliche gegebenen F. f_λ der Reihe nach mit allen Potenzprodukten aller Unbekannten von 0^{ter}, 1^{ter}, ... Dimensionen, bis er Gl. in solcher Anzahl erhält, dass sie die Anzahl der Potenzprodukte in denselben übertrifft, was nach den Abzählungen in Nr. **1** stets möglich ist. Betrachtet man die einzelnen Potenzprodukte als unabhängige Var., so entsteht ein System linearer Gleichungen; eliminiert man alle Potenzprodukte aus einer passenden Zahl dieser Gl., dann erhält man ein *Vielfaches der Eliminante.* Es kommt aber darauf an, sie selbst frei von fremden Faktoren darzustellen. Dies wird von *Cayley* auf folgende Frage der Theorie homogener, linearer Gl. hinausgespielt: „Zwischen n Unbekannten bestehen n_1 homogene lineare Gl.; zwischen deren Polynomen bestehen n_2 homogene lineare Relationen; zwischen deren Polynomen wiederum n_3 Relationen u. s. f.

20) J. Éc. Polyt. 4, Cah. 11 (an X), p. 199.

21) Par. Mém. 1772, II prt., p. 516 = Abhandlungen, deutsch von *C. Itzigsohn*, Berl. 1888, p. 85.

22) Cambr. Dubl. Math. J. 2 (1847), p. 52; ibid. 3 (1848), p. 116 = Coll. Pap. 1, p. 259, 370.

bis n_r. Dabei ist $n < n_1$; $n > n_1 - n_2$; $n < n_1 - n_2 + n_3, \cdots$ $n = n_1 - n_2 + n_3 - \cdots \pm n_r$. Es sollen die charakteristischen Bedingungen dafür aufgesucht werden, dass das System durch n von 0 verschiedene Werte der Unbekannten befriedigt werden kann." *G. Salmon* giebt[23]) eine ungenügende Herleitung für das *Cayley*'sche Resultat; dies ist wahrscheinlich richtig, aber noch unbewiesen. Das Kriterium besteht in dem Verschwinden eines Quotienten aus zwei Determinantenprodukten. In dieser Gestalt tritt dann auch die reine Eliminante des Gl.-Systems bei *Cayley* auf.

J. Sylvester[24]) hat in anderer Art, aber gleichfalls nicht bindend, die Eliminations-Aufgabe für $m = 3$; $n_1 = n_2 = n_3$ und $m = 4$; $n_1 = \cdots = n_4 = 2$ gelöst. Er ordnet die Terme in verschiedener Weise an, bildet lineare, homogene Gl. aus ihnen und zieht die Determinanten der Aggregate zu Hülfe. Es fehlt hierbei jedoch der notwendige Nachweis dafür, dass die erhaltenen Relationen von einander unabhängig seien[25]).

9. Kronecker'sche Methode. — Stufenzahl. *Kronecker*[26]) hat das Eliminations-Problem so aufgefasst, dass er über die Zahl der Gl. und die der Unbekannten keine Voraussetzungen macht, sondern die allgemeine Frage formuliert: Welche Einschränkungen üben die vorgelegten Gl. auf die sonst unbeschränkte Mannigfaltigkeit $(z_1, z_2, \ldots z_m)$ aus? Dazu tritt die zweite Frage: Wie viele Gl. sind höchstens notwendig, um jede durch Gl. definierte Mannigfaltigkeit *rein* d. h. ohne fremde Punkte $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ darzustellen.

Die *Kronecker*'sche Methode geht so vor: Es wird $f_1 = R_1 F_1$, $f_2 = R_1 F_2, \cdots f_m = R_1 F_m$ gesetzt, wobei R_1 der gr. gm. T. der f sein mag; von vielfachen Faktoren soll stets abgesehen werden. Dann liefern die $F = 0$ nebst $R_1 = 0$ das Gleiche wie die $f_\lambda = 0$, abgesehen von der Multiplizität der W. Mit Hülfe unbestimmter Parameter werden die beiden Gl. $u_1 F_1 + u_2 F_2 + \cdots + u_m F_m = 0$ und $v_1 F_1 + v_2 F_2 + \cdots + v_m F_m = 0$ gebildet, und aus beiden wird z. B. z_m eliminiert. Man

23) Lessons introd. to the modern higher Algebra (4. ed.). Dublin 1885, § 93.

24) Cambr. Dublin Math. J. 7 (1852), p. 68.

25) „Über e. Eliminations-Problem nach *Sylvester*'scher Methode behandelt" siehe *Sylvester,* Cambr. Math. J. 2 (1841), p. 232. *Th. Muir,* Edinb. Proc. 20 (1895), p. 300. *Cayley,* ibid. 306 = Pap. 13, p. 545. Es handelt sich dabei um die Elimination aus den Gl. $ay^2 - 2c_1 xy + bx^2 = 0$, $bz^2 - 2a_1 yz + cy^2 = 0$, $cx^2 - 2b_1 zx + az^2 = 0$; und die Eliminante tritt als Diskriminante von $a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2a_1\eta\zeta + 2b_1\zeta\xi + 2c_1\xi\eta = 0$ auf.

26) Grundzüge einer arithm. Theorie u. s. f. J. f. Math. 92 (1882), p. 1. Vgl auch die ausführlichen Erläuterungen von *J. Molk* (l. c.).

ordnet die Eliminante nach Potenzprodukten der u und v und bezeichnet die dabei auftretenden Koeffizienten mit $g_1, g_2, \ldots$. Dann geben die so erhaltenen Gl. $g_\lambda = 0$ dasselbe wie die Gl. $F_\lambda = 0$. Es wird nun wieder $g_1 = R_2 G_1$, $g_2 = R_2 G_2$, $g_3 = R_2 G_3, \cdots$ gesetzt; auch hier wird von vielfachen Faktoren abgesehen. Dann sind die $f_\lambda = 0$ durch $R_1 \cdot R_2 = 0$ nebst $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \cdots$ ersetzt, u. s. f. Hierdurch entsteht schliesslich die *Gesamteliminante* in der Form $R_1 \cdot R_2 \cdots R_m = 0$, wobei $R_\alpha(z_1, \cdots z_{m-\alpha+1}) = 0$ eine Mannigfaltigkeit der α^{ten} Dimension liefert; diese einzelnen R_α sind die *Teileliminanten.* Die Gesamteliminante zerfällt also hierbei nach den Dimensionen aller verschiedenen durch die $f_\lambda = 0$ gleichzeitig dargestellten Gebilde.

So kommt der Begriff der *Stufe des Modulsystems* $f_1, f_2, \ldots f_n$ zu stande[27]). Es heisst ein System $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$ *von der* m^{ten} *Stufe,* wenn sämtliche Wurzeln feste Koordinaten haben, d. h. eine Mannigfaltigkeit 0^{ter} Dimension bilden. Das System heisst *von der* $(m-1)^{\text{ten}}$ *Stufe,* wenn die Wurzeln eine Mannigfaltigkeit erster Dimension ausmachen; kommen ausser dieser Mannigfaltigkeit, mit ihr verbunden noch einzelne W. mit festen Koordinaten vor, dann heisst das System *gemischt,* andernfalls ist es ein *reines* System. In gleicher Weise kann man weiter gehen. Vgl. Nr. **11**.

Wie schon angedeutet wurde, leidet die *Kronecker*'sche Behandlung an dem Mangel, dass die Multiplizität der Lösungen nicht genügend berücksichtigt wird.

Auf die zweite der oben aufgeworfenen Fragen erhält man die Antwort, dass vermittelst $(m+1)$ Gl. jedes durch eine beliebige Anzahl von Gl. definierte Gebilde von m Var. *rein* dargestellt werden könne; es tritt natürlich $(m+1)$ nur als Maximalzahl auf. Ein Beispiel hierzu giebt für $m = 3$ *K. Th. Vahlen,* J. f. Math. 103 (1891), p. 346.

10. Minding'sche Regel. — Labatie's Theorem. Nach diesen allgemeinen Erörterungen über Elimination wollen wir zwei für zwei Gl. $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ mit zwei Var. wichtige Untersuchungen hervorheben. Zunächst gehen wir auf die *Minding*'sche Regel ein[28]). Diese Regel stellt den Grad der Eliminante bei gegebenen Gl. fest; sie stützt sich auf die Entwickelung aller einzelnen W. z_1 einer der Gl. etwa $f_1(z_1, z_2) = 0$, nämlich $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots$ *nach fallenden Potenzen von* z_2. Eine solche Entwickelung geschieht am einfachsten nach dem Schema,

---

27) *Kronecker,* Grundzüge § 20 u. § 21; J. f. Math. 99 (1886), p. 336. *J. Molk,* Acta math. 6 (1885), Chap. III.

28) J. f. Math. 22 (1841), p. 178; ibid. 31 (1846), p. 1; *L. J. Magnus,* ibid. 26 (1843), p. 365; *E. F. A. Minding,* ibid. 27 (1844) p. 379.

welches durch das *Newton'sche Polygon* gegeben wird[29]). Meist reicht für den angegebenen Zweck die Kenntnis der Ordnung des Anfangsgliedes jeder Entwickelung aus. Hat man die ersten Glieder der Entwickelungen berechnet, dann liefert nach Substitution derselben in das *Poisson*'sche Produkt $f_2(\zeta_{11}, z_2) f_2(\zeta_{12}, z_2) \ldots$ eine Abzählung den Grad der Eliminante nach z_2. Man kann die Eliminante selbst berechnen, wenn man die Entwickelungen soweit benutzt, als in das Produkt positive Potenzen von z_2 eintreten. Die Bestimmung ist hier bequemer als bei den übrigen Methoden, welche sämtlich kompliziertere Rechnungen erfordern.

Eine andere Regel, welche *Minding* giebt (J. f. Math. 31), zeichnet sich dadurch vor dei ersten aus, dass sie eine Formel liefert, welche die Koeffizienten von f_1 und f_2 symmetrisch enthält.

Das *Labatie*'sche Theorem[30]) ist wichtig für die Elimination, weil es die Methode des gr. gm. T. benutzt, dabei aber die fremden Faktoren, welche bei den fortgesetzten Divisionen auftreten, wieder zu entfernen weiss (vgl. Nr. 5). Es tritt zugleich die Zerlegung der Eliminante in Faktoren ein. Die Methode gilt auch noch, wenn die beiden Gl. vielfache W. besitzen. Sie beruht auf folgendem: Sind $f_0(z_1, z_2)$, $f_1(z_1, z_2)$ die gegebenen F., so führt das Schema des gr. gm. T. nach z_1 auf eine Reihe von Gl. der Form:

$$f_\lambda \psi_\lambda = f_{\lambda+1} q_{\lambda+1} - f_{\lambda+2} \varphi_{\lambda+2} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

in denen die f und die q gz. in z_1, z_2; die φ und die ψ gz. in z_2 und gebrochen in z_1 sind. Bezeichnet man den gr. gm. T. von

$$\psi_1, \varphi_3 \text{ mit } d_1; \text{ von } \frac{\psi_1 \psi_2}{d_1}, \varphi_4 \text{ mit } d_2; \text{ von } \frac{\psi_1 \psi_2 \psi_3}{d_1 d_2}, \varphi_5 \text{ mit } d_3; \ldots$$

dann gilt der Satz, dass jede W. von $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ auch eines der Systeme $f_\lambda = 0$, $\frac{\varphi_{\lambda+1}}{d_{\lambda+1}} = 0$ befriedigt, und dass umgekehrt die W. aller dieser Systeme auch sämtliche W. von $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ geben.

---

29) Opuscula ed. Castillon 1, p. 12 u. 39; Method of fluxions, ed. *J. Colson*, London 1736, § 29. Vgl. *Br. Taylor*, Method. incrementorum, Lond. 1715. — *J. P. de Gua* ersetzte das Parallelogramm durch ein Dreieck „le triangle algébrique", Usage de l'Analyse, Paris 1740, p. 24ff.; *G. Cramer*, Introduct. à l'Analyse, Genève 1750, benutzt dasselbe als „triangle analytique" (Chap. VII) und bezieht sich dabei (§ 92) auf *Newton* und *Stirling*, Lineae 3i ordinis, Oxon. 1717. — Vgl. die Darstellung von *C. Jordan* in seinem „Cours d'analyse" 1, Paris 1882, p. 89; 2. Aufl. 1893, p. 90; von *R. Baltzer*, „Analyt. Geometrie", Leipzig 1882, § 39, von *F. Lindemann-A. Clebsch*, Geometrie, Leipzig 1876, p. 331 und von *E. Netto*, Algebra 2, § 369.

30) Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur. Paris 1835.

11. Vielfache und unendliche Wurzeln eines Gleichungssystems. In die Behandlung des Eliminations-Problems führte gelegentlich *S. D. Poisson*[31]) und später bei seinen Untersuchungen systematisch *J. Liouville*[32]) eine wesentliche Vereinfachung ein durch die Substitution einer Grösse x vermittelst der Gl.

$$x = \varkappa_1 z_1 + \varkappa_2 z_2 + \cdots + \varkappa_m z_m,$$

in welcher die $\varkappa$ unbestimmte Parameter bedeuten. Substituiert man nämlich x an Stelle einer der Var., z. B. an Stelle von z_1 in die vorgelegten Gl., und eliminiert aus ihnen $z_2, \dots z_m$, so bleibt eine Eliminante R in x zurück. $R(x) = 0$ hängt in den Koeffizienten von $\varkappa_1, \dots \varkappa_m$ ab; setzt man $\varkappa_\alpha = 1$ und die übrigen $\varkappa$ gleich Null, so entsteht die Eliminante für z_α. Ist $R(x) = 0$ gelöst, wobei sich zeigt, dass $R(x)$ in lineare Faktoren nach $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m$ zerfällt, dann liefert dieselbe Substitution aus den W. $x_1, x_2, \dots$ die W.-Koordinaten der z_α. Die Darstellung der $\zeta_{1\alpha}, \zeta_{2\alpha}, \dots \zeta_{m\alpha}$ aus x_α ist auch in der Form $\zeta_{\varrho\alpha} = H_\alpha(x_\alpha)$ möglich. Damit ist auch das dritte Problem aus Nr. **6** erledigt.

Die Einführung des x ist ausserdem dadurch von Wichtigkeit, dass $R(x)$ in relativ einfacher Weise die symmetrischen Funktionen der Grössen $\zeta_{1\alpha}, \zeta_{2\alpha}, \dots \zeta_{m\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, \dots k)$ giebt, sobald man die Koeffizienten von $R(x)$ als Formen der $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m$ auffasst.

Ferner bietet sich bei der Einführung von $R(x)$ die Definition der Multiplizität einer W. des Systems von selbst dar. Hat $R(x) = 0$ eine q-fache W. $x = \xi$, so ist das zugehörige $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$ *eine q-fache Wurzel der Gl.* $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\dots$ $f_m = 0$; vgl. Nr. **17**. — Ist $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$ eine q_1-fache W. von $f_1 = 0$, eine q_2-fache W. von $f_2 = 0$, u. s. f., dann ist es eine mindestens $(q_1 \cdot q_2 \cdots q_m)$-fache W. des gesamten Gl.-Systems[33]). Dieser Satz ist für die Theorie der Schnittpunkte bei geometrischen Gebilden von Wichtigkeit.

Über die verschiedenen Arten der „Multiplizität“ und ihre Unterscheidungen ist auf I B 1a, Nr. **14** zu verweisen; die erwähnten Untersuchungen *J. J. Sylvester*'s[34]) beziehen sich auch auf mehrere Var., zumal die Sätze über Evektanten (*Salmon*, Higher Algebra § 134, u. I B 2).

Die Anzahl der W. kann für besondere Systeme von Gl. nur dann unter die nach dem *Bézout*'schen Theorem vorhandene Anzahl

---

31) J. Éc. Polyt. Cah. 11 (an X), p. 199.

32) J. de Math. 12 (1847), p. 68.

33) Vgl. *P. Gordan-G. Kerschensteiner* 1, § 142, p. 148, wo die Forderung nach einer rein algebraischen Begründung dieses allgemeinen Satzes ausgesprochen ist. Dieser wird genügt bei *Netto*, Algebra 2, § 400 durch Einführung einer Erweiterung des Begriffes „Gewicht eines Terms“.

34) Phil. Mag. (4) 3 (1852), p. 375 u. p. 460.

$(n_1 \cdot n_2 \cdots n_m)$ sinken, wenn der erste Koeffizient von $R(x)$ oder mehrere der ersten verschwinden. In diesem Falle können und müssen wir wieder den Begriff von unendlich grossen W. einführen. Die Existenz solcher unendlich grossen W. fordert, dass die homogenen Gl., welche entstehen, wenn man bei allen $f = 0$ nur die Glieder höchster Dimension beibehält, von $(0, \ldots 0)$ verschiedene W. haben, vgl. Nr. 4. Erst *L. Euler*[35]) nimmt bei der Abzählung von W. sowohl auf die vielfachen als auch auf die unendlichen W. gebührende Rücksicht. Frühere Mathematiker wurden durch das Auftreten solcher Wurzeln vom Aussprechen des *Bézout*'schen Satzes zurückgehalten.

Es ist ferner möglich, dass die $f_\lambda = 0$ überhaupt keine W. haben; dies tritt ein, wenn sich $R(x)$ auf eine Konstante reduziert, und ist demnach so aufzufassen, als ob alle $(n_1 \cdot n_2 \cdots n_m)$ W. des allgemeinen Systems in diesem besonderen Falle unendlich gross geworden wären. Beispiele hierzu lassen sich leicht konstruieren, wie $f_1(z_1, z_2) = 0$, $f_2(z_1, z_2) \equiv f_1(z_1, z_2) + \text{const.} = 0$ zeigt.

Endlich ist die Möglichkeit vorhanden, dass die Gl. $f_\lambda = 0$ unendlich viele W. miteinander gemein haben. Charakteristisch ist dafür der Umstand, dass die Eliminante $R(x)$ identisch verschwindet. Es ist zu beachten, dass aus dem identischen Verschwinden von $R(x)$ nicht der scheinbar plausible Schluss gezogen werden kann, dass alle Koordinaten $z_1, z_2, \ldots z_m$ unendlich viele Werte annehmen können. Die einschlägigen Verhältnisse klärt die *Kronecker*'sche Eliminations-Methode (Nr. 9) durch die Einführung der *Stufenzahl*, durch welche bei den Lösungen eines Systems, geometrisch gesprochen, die gemeinsamen Punkte, Kurven, Flächen u. s. w. getrennt werden. Entscheidend ist dabei folgendes: Das Gl.-System $f_\lambda = 0$ von m Unbekannten ist von der m^{ten} Stufe, wenn $R(x)$ nicht identisch verschwindet. — Das System wird von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Stufe, wenn zwar $R(x) \equiv 0$ ist, aber bei unbestimmten z_m und bei der Elimination von $z_2, z_3, \ldots z_{m-1}$ aus $(m-1)$ passend gewählten Gl. des Systems wenigstens ein $R_1(x, z_m)$ nicht identisch Null wird. Hierbei kann man dann die Unbekannte z_m beliebig wählen, x durch Lösung von $R_1 = 0$ bestimmen und dadurch die übrigen Koordinaten festlegen, so dass die W. eine Mannigfaltigkeit *erster Dimension* bilden; kommen ausser diesen keine anderen vor, so heisst das System der f_λ ein *reines System* der $(m-1)^{\text{ten}}$ Stufe; kommen noch andere mit festen Koordinaten vor, dann heisst es ein *gemischtes* System dieser Stufe. In derselben Weise kann man fortgehen, wenn auch alle $R_1 \equiv 0$ sind. Man lässt

---

35) Berl. Hist. 1748, p. 234.

dann nämlich z_{m-1} und z_m unbestimmt und eliminiert $z_2, z_3, \dots z_{m-2}$ aus je $(m-2)$ der Gl. $f_\lambda = 0$; u. s. f. — Bei diesem Verfahren ist eine vorläufige Transformation (vgl. Nr. 4) nötig, durch welche vermieden wird, dass etwa zu festen $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_{m-1}$ unendlich viele Werte ζ_m gehören[36]).

R. Perrin untersucht mit Hülfe seiner Eliminantendarstellung (vgl. Nr. **14**, Anm. 60) die Kriterien der verschiedenen Arten gemeinsamer, vielfacher Lösungen zweier Gleichungen mit einer, sowie dreier Gleichungen mit zwei Unbekannten[37]); er bestimmt also z. B., wann die Polynome $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Gestalten $f_1 = \alpha^2\beta^2\varphi_1$, $f_2 = \alpha^2\beta\varphi_2$ annehmen, wobei α, β lineare Faktoren sind, und φ_1, φ_2 keinen gemeinsamen Teiler besitzen. In gleicher Weise wird eine ganze Reihe von Kriterien abgeleitet, und gleichzeitig wird die allgemeine Methode der Behandlung des Problems für m Var. gegeben.

W. End beschäftigt sich[38]) bei der Erweiterung eines *Jacobi*'schen Satzes (vgl. Nr. **22**) mit dem Falle, dass die $f_i(z_1, z_2, z_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ ausser für eine endliche Anzahl einzelner Werte noch für ein einfach unendliches Wertsystem verschwinden; geometrisch also mit dem Falle, dass drei Flächen ausser einer endlichen Anzahl diskreter Punkte noch eine Kurve gemeinsam haben.

12. Auflösung linearer Gleichungen. — Spezielle Eliminationsprobleme. Das einfachste Eliminations-Problem liefert die Aufgabe, m lineare Gl. für m Unbekannte aufzulösen; dies war der Ausgangspunkt für die Einführung und das Studium der Determinanten [I A 2]. *Leibniz*[39]) war der erste, welcher sich mit dieser Frage beschäftigte; ihm folgten *Cramer*[40]), *Vandermonde*[41]) und *Laplace*[42]). *C. G. J. Jacobi* bespricht den allgemeinen Fall[43]), ohne auf alle möglichen Besonderheiten einzugehen; er erklärt dies (l. c. Ende von § 7) für ein „paullo prolixum negotium“. Weiter sind *Cauchy*[44]) und *H. Grassmann*[45]) zu erwähnen. Man überwindet alle Schwierigkeiten durch

---

36) „Grundzüge“ u. s. w. § 10. Ferner: J. f. Math. 99 (1886), p. 336. — Vgl. auch *Molk* l. c.

37) Par. C. R. 106 (1888), p. 1789; ibid. 107 (1888), p. 22 u. p. 219.

38) Math. Ann. 35 (1890), p. 82; Auszug aus e. Tübinger Dissertation (1887).

39) Brief an *G. F. de l'Hôpital* (1693); Acta Erudit. 1700, p. 200.

40) Introduction etc., Append. 1750.

41) Paris Mém. 1772, II part., p. 516.

42) Ibid. p. 294.

43) J. f. Math. 22 (1841), p. 285.

44) „Analyse algébrique“, Paris 1821, Chap. 3, § 2. — J. Éc. Polyt. Cah. 17 (1812), p. 69. — Résumés analytiques, Paris 1833, § 4, p. 19.

45) „Lineale Ausdehn.-Lehre“, Leipz. [1844] 1878, p. 71 u. 72.

die Einführung des Begriffes vom *Range*[46]) eines Systems aus $p \cdot q$ Grössen. *Baltzer*[47]) giebt *Kronecker*'s erste Resultate in der vollständigen Behandlung des Problems; die späteren sind aus anderen Darstellungen[48]) zu entnehmen. Vielfach findet sich hierbei die Zurückführung des allgemeinen Problems auf homogene Gl. Das erscheint nicht zweckmässig, weil dadurch die Erkenntnis der Bedingungen für die Existenz *endlicher* Lösungen gehindert wird. Deshalb haben auch z. B. *P. Gordan*[49]) und *H. Weber*[50]) diese Fälle getrennt behandelt. Wir wollen eine Übersicht über die Lösung derart geben, dass umgekehrt die Behandlung homogener Gl. als besonderer Fall des allgemeinen erledigt wird[51]).

Liegen die pq Grössen a_{ik} $(i = 1, 2, \cdots p;\ k = 1, 2, \cdots q)$ vor, so heisst das System der a_{ik} vom *Range* r, wenn r die grösste Zahl ist, für welche nicht alle aus r Zeilen und r Spalten der a_{ik} gebildeten Determinanten verschwinden. In diesem Falle kann man die Grössen a_{ik} so angeordnet denken, dass die Determinante $D = |a_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \cdots r)$ von Null verschieden ist. Sind nun p homogene lineare F. in den Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_q$ mit jenen Koeffizienten a_{ik} gegeben:

$$f_\alpha = a_{\alpha 1} z_1 + a_{\alpha 2} z_2 + \cdots + a_{\alpha q} z_q \quad (\alpha = 1, 2, \cdots p),$$

dann ist jedes f_α durch $f_1, f_2, \cdots f_r$ linear und homogen darstellbar, wie die leicht ersichtliche Relation

$$|f_k \quad a_{k1} \quad a_{k2} \cdots a_{kr}| = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots r;\ \alpha)$$

zeigt; denn der Koeffizient von f_α ist D, also $\neq 0$. Sollen nun

---

46) Diesen Begriff hat der Sache wie dem bezeichnenden Worte nach *G. Frobenius* eingeführt. Er hat seine Bedeutung bereits J. f. Math. 82 (1877), p. 290, § 3 „über lineare Gleichungen u. alternierende bilineare Formen" ins rechte Licht gerückt. Die Bezeichnung „Rang" ist von ihm zum ersten Male ib. 86 (1879), p. 1 benutzt: „Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, die m^{ten} Grades aber nicht sämtlich Null sind, so nenne ich m den *Rang* der Determinante." — *Kronecker* hat (Berl. Ber. 1884, p. 1071, 1179) diesen von *Frobenius* bereits mehrfach durchgearbeiteten Begriff übernommen. Hiernach ist die Bemerkung I A 2, Nr. **24** nebst Anm. 91 richtig zu stellen. — *J. J. Sylvester* nennt Amer. J. of Math. 6 (1884), p. 271, Lect. 1 eine Determinante n^{ter} Ordnung, bei der alle Subdeterminanten $(n - i + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, aber nicht alle der $(n - i)^{\text{ten}}$ Ordnung, eine Determinante von der „Nullität" (nullity) i.

47) *Baltzer,* Determin. 2. Aufl., Leipz. 1864, p. 60.

48) J. für Math. 99 (1886), p. 342.

49) *Gordan-Kerschensteiner* l. c., p. 101.

50) *Weber,* Algebra 1 (2. Aufl.), p. 97 u. p. 104.

51) *Kronecker* behandelt die linearen Kongruenzen ähnlich, J. f. Math. 99 (1886), p. 340.

die nicht homogenen Gl. $f_\alpha + a_{\alpha 0} = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots p)$ erfüllbar sein, so muss auch das System a_{ik} $(i = 1, 2, \cdots p;\ k = 0, 1, 2, \cdots q)$ vom Range r werden. Dann ergiebt sich aus der Erfüllung der geforderten Gl. für $\alpha = 1, 2, \cdots r$ die Erfüllung aller vorgelegten p Gleichungen.

Die Betrachtung der Determinante

$$|a_{\varrho 1} z_1 + a_{\varrho, r+1} z_{r+1} + \cdots + a_{\varrho, q} z_q + a_{\varrho 0}, a_{\varrho 2}, \cdots a_{\varrho r}| = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots r)$$

zeigt, dass $(z_1 \cdot D)$ durch die willkürlich bleibenden $z_{r+1}, \cdots z_q$ bestimmt wird. Das gleiche gilt für $(z_2 \cdot D), \cdots (z_r \cdot D)$. Also hat das System *eine Mannigfaltigkeit* $(q - r)^{\text{ter}}$ *Dimension von Lösungen.* Man erkennt die enge Beziehung zwischen Rang und Stufenzahl.

Das gleiche gilt, wenn die $a_{\alpha 0} = 0$, also die Gl. homogen sind, nur dass die auf den Rang bezügliche Lösbarkeitsbedingung fortfällt. Wird dabei $q = r$, so müssen sämmtliche z verschwinden. Ist $q = r + 1$, dann folgt die Proportionalität der $z_1, z_2, \cdots z_q$ zu den entsprechenden ersten Subdeterminanten des Koeffizienten-Systems. —

Von weiteren Spezialuntersuchungen, die sich auf Elimination bei Gleichungen höherer Grade beziehen, mögen die folgenden erwähnt werden: Die Behandlung von drei Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten, welche *O. Hesse*[52]) durchgeführt und zum grossen Nutzen für die Geometrie auf das Studium der Kurven dritter Ordnung angewendet hat; ferner die von *Serret*[53]) ohne wesentlich neue Resultate gelieferte Diskussion der gleichen Aufgabe; endlich das von *A. Clebsch*[54]) wieder zu geometrischen Zwecken gelöste Problem der Elimination bei m homogenen Gleich., von denen $(m - 2)$ linear, eine quadratisch und die letzte von beliebigem Grade ist. Andere weitere Untersuchungen bietet die Geometrie reichlich dar; vgl. für darauf bezügliche Litteratur auch Anmerkung 57.

13. Eigenschaften der Eliminante. Bei der *Poisson*'schen, wie bei der *Bézout*'schen Methode zeigt sich, dass für allgemeine Gl.-Systeme mit unbestimmten Koeffizienten der Grad der Eliminante gleich dem Produkte der Dimensionen der Gl. des Systems wird (*Bézout*'scher Satz). Weiter bemerkt man, dass die Eliminations-Gl. $R(x) = 0$ für $x = \varkappa_1 z_1 + \varkappa_2 z_2 + \cdots$ in den Koeffizienten der Funkt. f_λ homogen von einem Grade wird, welcher dem Produkte der Dimensionen der übrigen f gleichkommt. — Ferner ist R *„isobarisch"* von einem Gewichte gleich dem Produkte der Dimensionen der m Funk-

52) J. f. Math. 28 (1844), p. 68 = Werke p. 89.

53) Algèbre supérieure 1, § 70 ff.

54) J. f. Math. 58 (1861), p. 273.

tionen f_λ (IB2). — Der Grad von R kann nur durch das Verschwinden der ersten Koeffizienten in R verringert werden. Sind nun $\varrho_0, \varrho_1, \cdots$ diese Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in R, so sagt $\varrho_0 = 0$ aus, dass die m homogenen Gl., welche entstehen, wenn man in jedem $f_\lambda = 0$ die Glieder höchster Dimension beibehält, eine von $(0, \ldots 0)$ verschiedene W. haben, oder mit anderen Worten, dass das System $f_\lambda = 0$ unendlich grosse W. besitzt. — Bei allgemeinen Gl. $f_\lambda = 0$ ist R irreduktibel[55]), und bei ihnen ist $\varrho_0 \neq 0$. Werden bei einer besonderen Gl. $\varrho_0 \equiv 0$, $\varrho_1 \equiv 0, \cdots \varrho_{\mu-1} \equiv 0$, so ist jeder von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ abhängige Faktor des ϱ_μ in $\varrho_{\mu+1}, \varrho_{\mu+2}, \ldots$ als Teiler enthalten[56]). — Die Eliminante von

$$f_1 = 0;\ f_2 + q_{2,1} f_1 = 0;\ f_3 + q_{3,2} f_2 + q_{3,1} f_1 = 0;\ \cdots$$

stimmt mit derjenigen von $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0, \cdots$ überein für beliebige gz. F. $q_{\alpha\beta}$; gleichwohl besitzt das erste System gegenüber dem zweiten im allgemeinen noch unendliche Wurzeln. — Bei der *Poisson*'sche Methode ergiebt sich stets das gleiche R, welche der Gleichungen man auch an das Ende setzen und bei der Produktbildung benutzen mag.

Ein Theorem von *Liouville* ist von Bedeutung für die Geometrie geworden; ihm zufolge sind die ersten Koeffizienten der Eliminante nur von gewissen ersten Koeffizienten der einzelnen F. abhängig; es bleibt bei Änderung der übrigen Gl.-Koeffizienten eine von jenen abhängige Reihe von Eliminations-Eigenschaften ungeändert, deren geometrische Bedeutung verwertet werden kann[57]).

14. Resultante und ihre Eigenschaften. Sind $(m+1)$ Gleichungen $f_\alpha = 0$ $(\alpha = 0, 1, \cdots m)$ zwischen den m Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_m$ gegeben; bestimmt man sämtliche W. $(\zeta_{1\varkappa}, \zeta_{2\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$ der letzten m von diesen Gl.; setzt man diese W. in f_0 ein und nimmt das Produkt aller $f_0(\zeta_{1\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$; multipliziert man endlich dieses Produkt mit der einfachsten Konstanten, welche es zu einer gz. F. der Koeffizienten macht, so erhält man eine ganze F. der Gleichungskoeffizienten, deren Verschwinden charakteristisch für das Bestehen

55) *Laurent*, Traité d'Algèbre 4 (Compléments), Paris 1894, und *Netto*, Algebra 2, 1, p. 79.

56) *Netto* l. c., 2, p. 86.

57) *Liouville*, J. de Math. (1), 6 (1841), p. 359. Weitere Arbeiten hierüber lieferten: *E. Laguerre*, Par. C. R. 60 (1865), p. 71; Bull. soc. math. 8 (1879), p. 52; *G. Humbert*, J. de math. (4), 3 (1887), p. 327; 5 (1889), p. 81 u. 129; 6 (1890), p. 233; *G. Fouret*, Nouv. Ann. (3), 9 (1890), p. 258; *J. Hadamard*, Acta math. 20 (1896), p. 201.

gemeinsamer W. der $(m+1)$ Gl. $f_\alpha = 0$ ist. Diese Funkt. heisst „*die Resultante* (Res.) *der* $(m+1)$ *Gleichungen*"[58]. — Macht man die Gl. $f_\alpha = 0$ durch Einführung einer $(m+1)^{\text{ten}}$ Var. u homogen, dann ist die Eliminante derselben nach u gleich jener Res., abgesehen von einer Potenz von u als Faktor. — Fasst man in den $f_\alpha = 0$ die Koeffizienten als gz. F. einer neuen Var. z_0 auf, dann ist die Res., wie sie für die m Var. definiert wurde, die Eliminante nach z_0; der Unterschied von Res. und Eliminante liegt in der Auffassung der Koeffizienten als Konstante oder als gz. F. einer weiteren Var. Daher finden viele Eigenschaften der Eliminante (aus Nr. **13**) hier ihre Analoga.

Mertens[59]) giebt in Parallele zu der *Bézout*'schen Formel eine Ableitung der Result., welche von der Verwendung des Eliminationsprozesses absieht, indem er, falls die $f_\alpha = 0$ keine gem. W. haben, die Existenz eines bestimmten linearen, homogenen Aggregates der Polynome $f_0, f_1, \ldots$ von gewissen Gradeigenschaften nachweist, welches die Var. nicht mehr enthält.

Hinsichtlich dieser Form $R = \sum f_\lambda \varphi_\lambda$ weist *R. Perrin*[60]) nach, dass die Multiplikatoren φ_λ als gz. F. der gegebenen F. f_α gewählt werden können. Er benutzt den Umstand, dass, wenn $g_0, g_1, \ldots$ die Werte sind, die $f_0, f_1, \ldots$ für ein willkürliches Var.-System annehmen, dann die Gl. $f_\alpha - g_\alpha = 0$ gemeinsame W. und also eine verschwindende Res. haben; da diese in den Koeffizienten der $(f_\alpha - g_\alpha)$ ganz ist, so folgt daraus der Satz.

Bei der obigen *Poisson*'schen Produktform der Res. nimmt f_0 eine Ausnahmestellung ein; es giebt demgemäss, je nach der Wahl der ersten Gl. $(m+1)$ verschiedene Formen der Res., deren Übereinstimmung nicht so einfach zu erkennen ist, wie bei $m=1$. Mit diesen verschiedenen Formen beschäftigt sich *O. Biermann*[61]) und eingehender *J. Hadamard*[62]).

Eine ausführliche Theorie der Res. findet man in einer umfangreichen Abhandlung von *L. Schläfli*[63]), der zu früher bekannten Eigenschaften neue hinzufügt. Er zeigt z. B., dass wenn $f_1, f_2, \ldots$ nume-

---

58) Es erscheint nicht unpassend, im Anschluss an englische Autoren die sonst unterschiedlos gebrauchten Bezeichnungen „Eliminante" und „Resultante" begrifflich so zu trennen, wie hier geschehen ist.

59) Wien. Ber. 93 (1886), p. 527.

60) Par. C. R. 106 (1888), p. 1789.

61) Monatsh. f. Math. u. Phys. 5 (1894), p. 17.

62) Acta math. 20 (1896), p. 201.

63) Wien. Denkschr. 1852, Abt. 2, p. 1.

rische Koeffizienten haben, R in lineare Faktoren zerfällt, die in den Koeffizienten von f_0 ganz sind; er fasst die z als rationale F. anderer Var. $y_1, y_2, \ldots y_m$ auf; er untersucht die Struktur der Res.; er stellt gewisse partielle Differential-Gl. her, denen die Res. genügen, u. s. f. — Eine in dem oben, Anm. 52, zitierten Aufsatze von *Hesse* angedeutete allgemeine Eliminationsmethode wird von *Schläfli* [p. 9] als unzureichend nachgewiesen.

K. Th. Vahlen[64]) setzt die Koeffizienten der f_α gleich gz. F. einer zweiten Variablenreihe und untersucht die Dimension der Res. in diesen; es ist das erlangte Resultat für die Theorie der algebraischen Korrespondenzen wichtig.

Die Berechnung von Resultanten nach den angegebenen Methoden ist sehr umständlich. Einige Erleichterung gewährt die Benutzung der eben erwähnten Differentialgleichungen für die Herstellung der numerischen Koeffizienten. — *P. Gordan* hat[65]) die Resultanten ternärer Formen allgemein invariantiv, d. h. durch Überschiebungen dargestellt (I B 2).

Über die Teilbarkeit von Result. verweisen wir auf die in I B 1a Nr. **19** gegebenen Auseinandersetzungen. Ebendort findet man die Litteraturangaben.

15. Reduzierte Resultante. Die in I B 1 a Nr. **14** gemachte Bemerkung über die *Cayley*'sche *„reduzierte Resultante“* gehört auch hierher. — Ferner sind hier (und auch dort) noch andere von *A. Brill* gemachte Untersuchungen[66]) zu erwähnen. Haben m Gleichungen von $(m-1)$ Var. eine bestimmte Anzahl von W. gemeinsam, dann kann man nach den Bedingungen fragen, unter denen die Gl. noch eine weitere gemeinsame W. besitzen. Diese Bedingungen werden durch das Verschwinden der sogenannten *„Brill'schen reduzierten Resultante“* gegeben. Die Existenz eines solchen Gebildes wird begründet; seine Konstitution wird untersucht; dasselbe wird als gm. T. gewisser Glieder einer Entwickelung erkannt, die durch einen einfachen Algorithmus hergestellt werden kann; seine Wichtigkeit für Fragen der Geometrie wird nachgewiesen.

16. Reduktibilität und Teilbarkeit von Gleichungssystemen. In der *Kronecker*'schen Eliminations-Theorie heisst ein F.- oder ein Gl.-System irreduktibel oder reduktibel, wenn die Gesamteliminante

64) J. f. Math. 113 (1894), p. 348.

65) Math. Ann. 50 (1898), p. 113; J. de math. (3), 5 (1897), p. 195; Züricher Kongress (1898), p. 143.

66) Math. Ann. 4 (1871), p. 510; Münch. Abhandl. 17 (1892), p. 89.

(Nr. **9**) es ist. Es folgt die Zerlegung eines reduktiblen Systems in irreduktible; ebenso die Begriffe des Teilers eines Gl.-Systems, der teilerfremden Systeme und des gr. gm. T. zweier Systeme. Es ist zu bemerken, dass Analogieschlüsse gegenüber den F. einer Var. nur mit Vorsicht zu verwenden sind. *J. Molk*[67]) hat analytisch diese Ideen behandelt, die in der Raumgeometrie bereits geläufig waren.

17. Diskriminante eines Gleichungssystems. Eine Erweiterung des Begriffes der *Diskriminante* (Diskr.) einer Gl. $f(z) = 0$ mit einer Var. kann auf verschiedene Arten für mehrere Var. durchgeführt werden, je nachdem man für eine solche Verallgemeinerung diese oder jene Eigenschaft der Diskr. einer Gl. mit einer Unbekannten benutzt. Für $f(z) = 0$ drückt das Verschwinden der Diskr. die Bedingung aus, dass die Gl. vielfache W. besitze. Ist ein Gl.-System $f_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots m$) mit den Unbekannten $z_1, \dots z_m$ gegeben, so kann man ebenso fragen, wann eine W. $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ als vielfache W. der Gl. gilt. Eine solche Bedingung ist Nr. **11** im Anschluss an die Eliminante $R(x)$ angeführt: $R(x) = 0$ muss eine vielfache W. haben. Eine andere folgt daraus, dass die *Funktionaldeterminante*[68]) (Funkt.-Det.)

$$J(z_1, \cdots z_m) = \frac{\partial(f_1, \dots f_m)}{\partial(z_1, \dots z_m)} = \begin{pmatrix} f_1 \cdots f_m \\ z_1 \dots z_m \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta} \right| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots m)$$

für $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ verschwindet. Bildet man nämlich das über alle W. des Systems erstreckte Produkt $\prod J(\zeta_{1\varkappa}, \zeta_{2\varkappa}, \dots \zeta_{m\varkappa})$, so wird dies eine rationale F. der Koeffizienten, welche nur verschwindet, wenn das System $f_\alpha = 0$ mindestens eine mehrfache W. besitzt. In dem sogenannten allgemeinen Falle, in dem die Zahl der W. gleich dem Produkte der Gl.-Dimensionen ist, kann jenes Produkt bis auf einen konstanten Faktor in das Quadrat einer Determinante umgewandelt werden, deren Elemente Potenzprodukte der W. sind. Es tritt also eine Analogie mit den Gl. $f(z) = 0$ einer einzigen Unbekannten auf [69]), wo die Ableitung der F. an der Stelle der hier auftretenden Funkt.-Det. erscheint; vgl. I B 1 a Nr. **20**.

18. Diskriminante einer Gleichung. Dieser Erweiterung steht eine zweite zur Seite, welche an eine andere Diskr.-Eigenschaft bei

67) *Molk* (l. c.) Chap. 5, § 3, p. 155. Vgl. auch *Netto*, Algebra 2, 1 § 435.

68) Eingeführt von *Jacobi*, J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 193; vgl. Nr. **19** u. **20**. Die Engländer bezeichnen sie nach *Cayley*, J. f. Math. 52 (1856), p. 276 = Coll. Pap. 4, p. 30 als „Jacobian". Die zweite Schreibweise im Text stammt von *W. F. Donkin*, Phil. Trans. 1854, 1, p. 72; die dritte von *Gordan-Kerschensteiner* 1, p. 121; *Hesse* gebraucht gelegentlich eine noch kürzere, nämlich: $(f_1, \dots f_m)$.

69) *H. Laurent*, Traité d'analyse, Paris 1885, 1, p. 305.

Gl. mit einer Var. anknüpft. Man legt am einfachsten eine homogene F. $\varphi(z_1, z_2, \ldots z_m)$ zu grunde, und bezeichnet die Res. der n ersten Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial z_m}$ als *Diskriminante*[70]) *von* φ (Diskr.). Verschwindet die Diskr. für irgend einen Punkt des Gebildes $\varphi = 0$, so ist dies ein *singulärer Punkt;* ein solcher lässt, geometrisch gesprochen, mehr als eine Tangentialebene zu. Hierin liegt gleichfalls eine Verallgemeinerung der Diskr.-Eigenschaft der F. mit einer Var. Hat φ die Dimension n, so ist die Diskr. in den Koeffizienten von φ homogen von der Dimension $m(n-1)^{m-1}$ und hat das Gewicht $n(n-1)^{m-1}$.[71]) Ferner besitzt sie Invarianteneigenschaft [I B 2].

Ist φ eine homogene, nicht lineare F. anderer F. $g_1, g_2, \ldots$ der Var., und sind die F. derart, dass das System $g_\alpha = 0$ unendlich viele W. besitzt, dann verschwindet die Diskr. von φ identisch. — Hat φ nur einen einzigen singulären Punkt, so kann dieser durch Differentiation der Diskr. gefunden werden[72]), vgl. I B 1 a, Nr. **21**.

19. Unabhängigkeit von Funktionen. Sind q F. von m Var. z gegeben $f_\alpha(z_1, \ldots)$, so heissen sie *von einander unabhängig*[73]), wenn keine rationale Gl. $F(f_1, \ldots f_q) = 0$ besteht, deren Koeffizienten von den Var. unabhängig sind, und die nicht für beliebige Werte von $f_1, \ldots f_q$, also nicht identisch erfüllt ist. Ist $q > m$, dann giebt es stets solche Gl. $F = 0$, d. h. $q > m$ F. f_α sind nie von einander unabhängig. Ist $q \leq m$, dann bestimme man alle Eliminanten für je $(q-1)$ Var. aus den q Gl. $f_\alpha(z_1, \ldots) - \varphi_\alpha = 0$, in denen die φ_α Symbole für die f_α sind; wird eine dieser Eliminanten von den übrigen Var. unabhängig, dann und nur dann bilden die f_α ein abhängiges F.-System; diese Eliminante geht für $\varphi_\alpha = f_\alpha$ in eine Relation $F = 0$ über[74]). *Jacobi* hat (l. c.) folgendes Kriterium anderer Art für die Unabhängigkeit eines F.-Systems in dem Falle $m = q$ aufgestellt: Die charakteristische Bedingung für die Abhängigkeit besteht in dem identischen Verschwinden von $J = \frac{\partial(f_1, \cdots f_m)}{\partial(z_1, \cdots z_m)}$. Dieses Kriterium beschränkt sich nicht auf den Fall, dass die f_λ gz. F. der Var. sind.

---

70) Von *Hesse* (l. c.) und *Schläfli* (l. c.) als Determinante der F. φ bezeichnet.

71) Diese und die folgenden nebst weiteren Eigenschaften hat *Schläfli* (l. c.) angegeben.

72) Offenbar sind beide in den Nrn. **17** und **18** gegebenen Erweiterungen nur die Grenzfälle einer allgemeinen, die sich auf willkürliche Gl.-Systeme bezieht. Ihre Behandlung steht noch aus.

73) *Jacobi*, J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 393.

74) *Netto*, Algebra 2, 1.

20. Unabhängigkeit von Gleichungen. *Jacobi* definiert (l. c.) Gleichungen $f_1 = 0, \dots f_q = 0$ als unabhängig oder als abhängig von einander, je nachdem es möglich oder unmöglich ist, aus ihnen q der Unbekannten ($m \geqq q$) durch die übrigen auszudrücken. Statt dessen kann man sagen: $f_q = 0$ heisst dann und nur dann abhängig von $f_1 = 0, \dots f_{q-1} = 0$, wenn jede W. dieses letzten Systems auch $f_q = 0$ befriedigt (vgl. dazu Nr. 5).

21. Funktionaldeterminante. Die F. J spielt in der Theorie der F. mehrerer Var. eine ähnlich bedeutende Rolle, wie die Ableitung $f'(z)$ bei einer F. $f(z)$ einer Var. *Jacobi* hat sie eingeführt und analytisch erforscht[75]). *Bertrand*[76]) giebt von ihr folgende Definition, deren Charakter als Erweiterung der Ableitung klar ist: er setzt statt eines Differential-Quotienten den Quotienten von zwei mit m Differentialen gebildeten Determinanten m^{ter} Ordnung $J = |d_\varkappa f_\lambda| : |d_\varkappa z_\lambda|$, wobei die f Funktionen, ferner die z Variable und $d_1, \dots d_m$ von einander unabhängige Inkremente bedeuten. — *Jacobi* leitet die Bildung von J bei explicit und implicit gegebenen F., sowie bei F. von F. ab; er untersucht den Einfluss linearer Substitutionen; er zeigt ihre Bedeutung bei der Transformation mehrfacher Integrale [II A 2, Nr. **41**]. — Die Funkt.-Det. J von m homogenen Gl. $\varphi_\alpha = 0$ mit m Unbekannten verschwindet für jede W. des Gl.-Systems. — Sind die homogenen F. φ_α dabei von gleichen Dimensionen, dann verschwinden auch die Ableitungen von J für jede W.[77]). — Stets dann und nur dann, wenn J als homogene lineare F. der homogenen φ_α dargestellt werden kann, haben die Gl. eine von $(0, 0, \dots 0)$ verschiedene W. gemein[78]). — Ist eine solche Darstellung bei beliebigen Gl. $f_\alpha = 0$ für die Funkt.-Det. derjenigen homogenen Gl. $\varphi_\alpha = 0$ möglich, welche durch Nullsetzen der Terme höchster Dimension der f_α entstehen, so haben die $f_\alpha = 0$ weniger als $n_1 n_2 \cdots n_m$ endliche W. — Sind $(m+1)$ homogene Gl. $\varphi_\alpha = 0$ gleicher Dimension mit m Unbekannten gegeben, bildet man aus je m unter ihnen die Funkt.-Det. $J_1, J_2, \dots J_{m+1}$; ferner aus je m der F. J_λ die Funkt.-Det. $I_1, I_2, \dots I_{m+1}$, dann ist $I_\alpha = M\varphi_\alpha$, wo M einen von α unabhängigen Wert besitzt[79]).

Zu erwähnen ist die Behandlung der Funkt.-Det. von *Gordan*-

75) J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 393.

76) *J. L. F. Bertrand,* J. de math. 16 (1851), p. 213. [Der Satz wird von „Genocchi-Peano", dtsch. Ausg. (s. II A 2), Anm. zu Nr. 122, p. 329 angefochten.]

77) *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 68 = Werke, p. 87.

78) *Kronecker,* Berl. Ber. 1859, Dez.-Heft, p. 687.

79) *Clebsch*, J. f. Math. 69 (1868), p. 355; ibid. 70 (1869), p. 175 wird auf Grund einer Mitteilung von *Gordan* die Grösse M bestimmt.

Kerschensteiner (l. c. p. 120 ff.), bei der besonders gewisse Ähnlichkeiten mit Brüchen hervorgehoben werden. So ist (vgl. die Bezeichnung der vorigen Nummer)

$$\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \,\ldots\, y_m \\ x_1\, x_2 \,\ldots\, x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1\, z_2 \,\ldots\, z_m \\ y_1\, y_2 \,\ldots\, y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1\, z_2 \,\ldots\, z_m \\ x_1\, x_2 \,\ldots\, x_m \end{pmatrix}.$$

Ebenda werden die Subdeterminanten der Funkt.-Det. wieder als Funkt.-Det. dargestellt; die Funkt.-Det. wird als Produkt partieller Differentialquotienten gegeben u. s. w.

Auch in der Theorie der Charakteristiken (vgl. Nr. **25**) nimmt die Funkt.-Det. eine wichtige Stellung ein, indem sie die Ausdehnung gewisser Sätze über Wurzeln einer Gl. auf Systeme von Gl. ermöglicht. (Vgl. I B 3 a, Nr. **7**, sowie III A 4.)

22. Hesse'sche Determinante. Ist jedes $f_\alpha = \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}$, wobei F eine homogene gz. F. der Var. $z_1, z_2, \ldots$ bedeutet, dann wird J zur symmetrischen Determinante der zweiten Ableitungen von F, nämlich gleich $H = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial z_\varkappa \partial z_\lambda} \right|$; sie heisst die *Hesse'sche Determinante*[80]). *O. Hesse* hat sie eingeführt und ihre Bedeutung für verschiedene Fragen der Geometrie erkannt. Führt man in eine homogene Funkt. F statt der $z_1, z_2, \ldots z_m$ durch lineare homogene Substitutionen andere Variable $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein, und ist eine solche Wahl der y möglich, dass F von höchstens $(m - 1)$ der neuen Variablen abhängig wird, dann ist $H \equiv 0$. *Hesse* versuchte die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen[81]), *M. Pasch* begründete ihre Gültigkeit für kubische Formen von drei und vier Var.[82]), *Gordan* allgemein für ternäre, *Noether* für quaternäre Formen[83]). Endlich wurde von *Gordan* und *Noether* gezeigt[84]), dass im allgemeinen Falle die Umkehrung des Satzes nicht richtig sei [I B 2, Nr. **27**].

Die *Hesse*'sche Grundform H steht in engen Beziehungen zur F, deren ausgezeichneten und singulären Punkten. Ist etwa $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ eine k-fache Nullstelle für F, so ist sie zugleich eine $(3k - 4)$-fache für H, und $F = 0$, $H = 0$ haben k „Tangenten" in $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ gemeinsam. Bei $k = 2$ z. B. fallen (geometrisch gesprochen) in diesem

80) *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 68; die Engländer bezeichnen sie nach *Cayley* (Phil. Transact. 146 [1856], p. 627 = Coll. Pap. 2, p. 627) als *Hessian*. Vgl. auch *J. J. Sylvester*, Cambr. Dubl. M. J. 6, 1851, p. 194.

81) J. f. Math. 42 (1851), p. 117 u. ibid. 56 (1859), p. 263 = Werke p. 289, 481.

82) ibid. 80 (1875), p. 169.

83) Erlang. Ber. 1875, 13. Dez.

84) Math. Ann. 10 (1876), p. 547.

Punkte die Tangenten von $F = 0$ mit denen von $H = 0$ zusammen, so dass dieser Punkt als Lösung von $F = 0$, $H = 0$ sechsfach zählt[85]).

23. Jacobi's Erweiterung einer Euler'schen Formel. Die Analogie zwischen der Funkt.-Det. J und der Ableitung bewährt sich auch bei einem von *Jacobi* gefundenen Satze[86]), welcher als eine Erweiterung der *Euler*'schen Formeln (vgl. I B 1a Nr. 2) zu bezeichnen ist. Bedeutet $g(z_1, \dots z_m)$ eine gz. F. der Var. z_α von einer Dimension $\mu < (\sum n_\alpha - m)$, dann gilt für die über alle W. $(\zeta_{1k}, \dots \zeta_{mk})$ des Systems $f_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ erstreckte Summe

$$\sum_k \frac{g(\zeta_{1k}, \dots \zeta_{mk})}{J(\zeta_{1k}, \dots \zeta_{mk})} = 0,$$

vorausgesetzt, dass $k = n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$ wird, d. h. dass die Gl. $f_\alpha = 0$ überhaupt nur endliche (und von einander verschiedene) W. besitzen[87]).

Dieses Theorem ist auf mancherlei Arten bewiesen worden. *Jacobi* und nach ihm *E. Betti*[88]) leiten es (für ein beliebiges m) aus der Theorie der symmetrischen Funktionen mehrerer Variablenreihen her; *Kronecker* (l. c.) schliesst es aus seiner Verallgemeinerung der *Lagrange*'schen Interpolationsformel; *J. Liouville*[89]) folgert es aus der Bemerkung, dass die Eliminante sich nicht ändert, wenn die Folge der F. bei dem *Poisson*'schen Verfahren geändert wird. — *Liouville* erhält in seiner Arbeit eine scheinbar allgemeinere Formel; doch lässt sich diese aus der *Jacobi*'schen einfach dadurch herleiten, dass für eine der F. f_α ein Produkt zweier F. eingesetzt wird[90]).

---

85) Von der reichhaltigen, hierher gehörigen Litteratur führen wir an: *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 68 u. 97 = Werke p. 89, 123; ibid. 38 (1849), p. 257 = Werke p. 211; ibid. 40 (1850), p. 316 = Werke p. 257 (Brief an *Jacobi* nebst Antwort); ibid. 41 (1851), p. 272 = Werke p. 263; *Clebsch*, J. f. Math. 58 (1861), p. 229; *Cayley*, J. f. Math. 34 (1847), p. 30 = Coll. Pap. 1, p. 337; *Clebsch-Lindemann*, Geometrie 1, p. 176, 191, 206 u. s. w.

86) J. f. Math. 14 (1835), p. 281 = Werke 3, p. 285, wo zunächst $m = 2$ angenommen ist. Die Erweiterung auf beliebige m giebt dann *Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 285, § 6—10 = Werke 3, p. 329; ferner *E. Betti*, Ann. di mat. 1 (1853), p. 1 und *Clebsch*, J. f. Math. 63 (1863), p. 189.

87) *Kronecker*, Berl. Ber. 1865, Dez., p. 687 = Werke 1, p. 133 hat diese Einschränkung betont; übrigens hat *Jacobi* selbst ihre Nothwendigkeit erkannt, wie sich sowohl aus der Arbeit J. f. Math. 15 (1836), p. 285 indirekt, als auch direkt aus einer Bemerkung in *Jacobi*'s Nachlass, abgedruckt: Werke 3, p. 610, ergiebt.

88) Ann. di mat. 1, 1858 [I B 3 b, Nr. **24**].

89) J. de math. 6 (1841), p. 345 und Par. C. R. 13 (1841), p. 467.

90) *A. Harnack*, Math. Ann. 9 (1896), p. 371; vgl. *Clebsch-Lindemann*, Vorles. üb. Geom. 1, p. 826.

24. Wurzelrelationen eines Gleichungssystems. — Interpolation. An anderer Stelle zeigt *Jacobi*[91]), dass die eben erhaltenen Summenrelationen, wenn in ihnen für g der Reihe nach alle Potenzprodukte $(z_1^\alpha z_2^\beta \ldots z_m^\delta)$ eingesetzt werden $(\alpha + \beta + \cdots + \delta < \sum n_\alpha - m)$, nicht sämtlich von einander unabhängig sein können. Die hierbei auftretenden Relationen werden von ihm für $m = 2$, $n_1 = n_2$ genauer untersucht. Die sich anschliessenden allgemeinen Fragen hängen mit dem schon von *Euler*[92]) und *Cramer*[93]) bemerkten Umstande zusammen, dass die $n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$ Schnittpunkte von $f_1 = 0, \cdots f_m = 0$ nicht willkürlich gewählt werden dürfen, da ihre Anzahl grösser ist, als die zur Bestimmung eines f_α verfügbaren Konstanten, d. h. als die Koeffizientenanzahl (vgl. Nr. **1** Anm. 2). Es knüpften *J. Plücker*[94]) und *Jacobi* (l. c.) an dieses Problem an, welches dadurch zum Ausgangspunkte für umfassende Arbeiten algebraisch-geometrischer Natur wurde[95]), auf die hier nur hingewiesen werden kann.

Erst nach der Feststellung dieser Beziehungen zwischen den W eines Gl.-Systems ist es möglich, der Frage nach dem Interpolationsprobleme näher zu treten. Stellt man die F. f_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$, deren Nullstellen wir wieder durch $(\zeta_{1\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$ bezeichnen, gemäss Nr. **4** in der Form

$$f_\alpha = \sum_{\varrho=1}^{m} (z_\varrho - \zeta_{\varrho\varkappa})\, \chi_{\alpha\varkappa\varrho}$$

dar, dann stehen die Determinanten aus den χ in enger Beziehung zu der Funkt.-Det. Sie treten bei der *Kronecker*'schen Behandlung des Interpolationsproblems (l. c.) an die Stelle der Nenner in der *Lagrange*schen Formel. Die Interpolationsformel selbst ist von ähnlicher Konstitution wie die für eine einzige Variable. (Vgl. auch *H. Laurent*, Algèbre.)

25. Charakteristik eines Funktionensystems. Wir haben in Nr. **14** auf die Analogie zwischen der Ableitung $f'(z)$ einer Funktion $f(z)$ einer Var. und zwischen der Funkt.-Determ. J für m Funkt. von m Var. aufmerksam gemacht. Nun ist I B 1 a Nr. **4** darauf hingewiesen worden, dass das Verhalten der Ableitung $f'(z)$ in engster Beziehung zu der Art der Änderung der F. $f(z)$ selbst steht. Ähnliches war also bei einem Systeme von F. hinsichtlich der Funkt.-Det.

91) J. f. Math. 15 (1836), p. 285 = Werke 3, p. 329.
92) Berl. Mém. 1748, p. 219.
93) Introd. à l'analyse p. 78.
94) J. f. Math. 16 (1837), p. 47.
95) Vgl. D. M.-V. 3 (1892—93), p. 347 ff.

zu vermuten. Darauf hindeutende Bemerkungen finden sich bereits bei *J. J. Sylvester*[96]); später hat *Kronecker* in seiner *Charakteristikentheorie* gezeigt[97]), dass diese Analogien in umfassender Weise platz greifen. Auch hier dient das Verschwinden von J dazu, die Gebiete von einander abzugrenzen, in denen die Realitätsverhältnisse der W. des Gl.-Systems verschieden sind. Wir verweisen auf I B 1 a, Nr. 22; I B 3 a, Nr. 7 und auf III 4.

26. Modul- oder Divisorensysteme. Eine Erweiterung des von *Gauss* in die Zahlentheorie eingeführten Begriffs eines *Modul* ist von *Kronecker* für das Gebiet beliebig vieler ganzer F. mit beliebig vielen Var. gegeben worden. Diese Erweiterung führt zu dem Begriffe des *Modulsystems* oder *Divisorensystems*, auf welchen *Kronecker* die arithmetische Behandlung der ganzen rationalen F. eines Rationalitätsbereiches gründet[98]) [I B 1 c, Nr. **13**, **14**]. Das Modulsystem $(f_1, f_2, \dots f_m)$ ist der Inbegriff aller F. von der Gestalt $\sum \varphi_\lambda \cdot f_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \dots m)$, wobei die φ gze. ganzzahlige Funktionen bedeuten. Dieses Modulsystem umfasst gewissermassen alles, was seinen einzelnen Elementen an Eigenschaften gemeinsam ist. Daher ist es auch als Verallgemeinerung des Divisionsbegriffes aufzufassen, indem das bei einer Funktion auftretende Produkt $\varphi \cdot f$ hier durch $\sum \varphi_\lambda \cdot f_\lambda$ ersetzt wird. — Unabhängig von *Kronecker* und nicht so tief eindringend wie dieser, kam *H. Laurent* zu ähnlichen Entwickelungen[99]).

27. Weitere Hinweise. Gewisse Untersuchungen über gz. F. mehrerer Var. werden an anderen Stellen besprochen. So ist z. B. hier nicht behandelt worden die Theorie der *Anzahl der Werte*, welche eine gz. F. bei allen möglichen Permutationen der Var. untereinander annimmt [I A 6]. Die hierzu gehörigen einwertigen oder symmetrischen F. (von einer oder von mehreren Var.-Reihen) haben wir mehrfach streifen müssen. Diese Theorie hängt eng mit der *Galois*'schen Gleichungstheorie zusammen; wir verweisen auf I B 3 b. — Eine beson-

---

96) Lond. Trans. **143** (1853), part. III, p. 407.

97) Berl. Ber. 1869, p. 159 u. 688; ibid. 1878, p. 145. Über die weitere analytische Ausbildung der Theorie vgl. *E. Picard*; J. de math. (4), 8 (1892), p. 5; Par. C. R. 113 (1891), p. 356, 669, 1012; *W. Dyck*, Par. C. R. 119 (1894), p. 1254; ibid. 120 (1895), p. 34; Münch. Ber. 1898, p. 203. Vgl. I B 3 a.

98) Grundzüge u. s. w. II. Abschn. — Die oben citierte *Molk*'sche Abhandlung kann als eine Art von Monographie für die Theorie der Divisorensysteme gelten. — Siehe ferner eine ganze Reihe von Arbeiten von *K. Hensel* im J. f. Math. und die Arbeit von *G. Landsberg*, Gött. Nachr. 1897, Heft 3 [I B 1 c, Nr. **21**].

99) Nouv. Ann. (3) 2 (1883), p. 145; ibid. 5 (1886), pp. 432 u. 456.

dere Art der zweiwertigen F. von n Variablenreihen aus je n Grössen sind die Determinanten n^{ter} Ordnung; ihre Behandlung findet sich I A 2.

In diesen und in den vorigen Artikel gehört weiter auch dem Begriffe nach die gesamte Theorie der Formen, welche aber hauptsächlich wegen der verschiedenartigen Betrachtungsweise und mancher nicht algebraischen Hülfsmittel hier losgetrennt und in I B 2 untergebracht worden ist. Wir müssen jedoch hier wenigstens den sogenannten „*Euler*'schen Satz über homogene Funktionen" hervorheben[100]), da derselbe für viele der oben angedeuteten Beweise unentbehrlich ist. Ist $\varphi(z_1, \dots z_m)$ eine homogene F. der n^{ten} Dimension, so hat man

$$\sum_{\lambda=1}^{m} z_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_\lambda} = m\varphi.$$

Mit der Formentheorie im Zusammenhange steht die der *linearen Substitutionen*, auf welche hier nur verwiesen werden kann.

Auf den polynomischen Satz ist schon I A 1 Nr. **13** in der Theorie der Kombinatorik hingewiesen worden.

An Einzelheiten seien noch zwei Arbeiten von *F. Mertens*[101]) über gewisse Arten von Funktionen mehrerer Variablen erwähnt.

Ferner gehört hierher ein Hinweis auf die Differenzenrechnung bei mehreren Variablen (vgl. I B 1a Nr. **4**).

Ebenso treten Beziehungen zur Theorie der Funktionalgleichungen auf, sobald diese in unserem Gebiete ihre Lösung finden; so z. B. das Problem der „algebraischen Reversibilität"[102]), bei dem es sich um die Bestimmung einer F. $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ handelt, für welche aus den für $y_1, \dots y_n$ angenommenen Gleichungen

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots x_n)}{y_1} = \frac{f(x_2, x_3, \dots x_n, x_1)}{y_2} = \dots = \frac{f(x_n, x_1, \dots x_{n-1})}{y_n}$$

auch umgekehrt folgen soll

$$\frac{f(y_1, y_2, \dots y_n)}{x_1} = \frac{f(y_2, y_3, \dots y_n, y_1)}{x_2} = \dots = \frac{f(y_n, y_1, \dots y_{n-1})}{x_n}.$$

100) Calc. diff. 1, § 225, p. 154. Ticini 1787. [Nach *M. Cantor*, Gesch. d. Math. 3, p. 733/34 schon in der 1. Aufl., Berol. 1755.]

101) Krakauer Abhandl. 2, I (1891), p. 333; Krakauer Denkschr. 17 (1891), p. 143.

102) *D. André*, Bull. soc. math. 24 (1896), p. 135.

Verzeichnis der Abkürzungen.

Diskr. = Diskriminante
F. = Funktion
Funkt.-Det. = Funktional-Determinante
Gl. = Gleichung
gz. = ganz
gr. gm. T. = grösster gemeinsamer Teiler
irred. = irreduktibel
red. = reduktibel
Res. = Resultante
Var. = Variable
W. = Wurzel.