

Werk

Titel: Monatshefte für Mathematik

Verlag: Springer

Jahr: 1955

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN362162050_0059

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN362162050_0059|LOG_0012

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl, welche die Form $p - 1$ haben.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 19. Oktober 1954.)

1.

Sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler, $\delta(n)$ die Anzahl der Teiler von der Form $p - 1$, der natürlichen Zahl n , wobei mit p allgemein ungerade Primzahlen bezeichnet werden. Die Funktion $\delta(n)$ ist kürzlich bei einer gruppentheoretischen Untersuchung aufgetreten (vgl. W. Nöbauer, Monatshefte f. Math. 58 (1954), S. 190).

Bekanntlich gilt

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x})^1 \quad (1)$$

und

$$d(n) > 2^{(1-\varepsilon) \log n / \log \log n}, \quad \varepsilon > 0 \text{ fest}, \quad (2)$$

für unendlich viele n .

In dieser Arbeit zeigen wir

Satz 1: Es ist

$$\sum_{n \leq x} \delta(n) = x \log \log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad (3)$$

B eine Konstante.

Satz 2: Für unendlich viele n ist²

$$\delta(n) > \exp\left(c \frac{\log n}{(\log \log n)^2}\right) \quad (4)$$

bei passendem $c > 0$. (Wie üblich, bezeichnen wir positive Konstanten mit c).

¹ C -Eulersche Konstante.

² Wenn $\log \log M$ vorkommt, so soll automatisch $M > e$ vorausgesetzt werden.

Beim Beweis von Satz 2 wird ein Satz von *Rodowski* benötigt, der auch von *Tatuzawa* bewiesen wurde (vgl. z. B. *Tatuzawa*, Jap. Journ. of Math. 21 (1951) 93. Über die Beweismethode vgl. z. B. *P. Erdős*, Quaterly Journal 7, (1936) 227).

(3) und (4) lassen eine merkwürdig starke Unregelmäßigkeit in der Verteilung der Werte von $\delta(n)$ erkennen. Wir zeigen noch weiter
Satz 3: Wenn die Riemann'sche Vermutung für die Dirichlet'schen L -Reihen richtig ist, so gilt sogar

$$\delta(n) > 2^{(\frac{1}{2}-\epsilon) \log n / \log \log n} \quad (5)$$

für unendlich viele n .

Unter Annahme der Riemann'schen Vermutung folgt also, daß $\delta(n)$ „im wesentlichen“ ebenso groß werden kann wie $d(n)$, während es im Mittel nach Satz 1 „viel kleiner“ ist als $d(n)$.

Es ist wohlbekannt, daß

$$\sum_{n \leq x} d^2(n) \sim c x \log^3 x.$$

Wir beweisen noch

Satz 4: Es gilt

$$\sum_{n \leq x} \delta^2(n) = o(x \log^2 x)$$

Der Beweis von Satz 4 wird durch Verwendung von Hilfssatz 2 (unten) ermöglicht, welcher mittels der Brun'schen Siebmethode bewiesen werden kann, was wir aber hier nicht durchführen wollen.

2.

Beweis von Satz 1: Wir setzen zur Abkürzung $\log x = Lx$, $\log \log x = L_2x$, usw. Dann ist

$$\sum_{n \leq x} \sum_{p-1|n} 1 = \sum_{p \leq x+1} \left[\frac{x}{p-1} \right] = x \sum_{p \leq x} \frac{1}{p-1} + o\left(\frac{x}{Lx}\right)$$

und es gilt

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p-1} - \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{2 \leq p < \infty} \frac{1}{p(p-1)} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

woraus Satz 1 folgt, da $\sum_{p \leq x} 1/p = L_2x + c_1 + o\left(\frac{1}{Lx}\right)$.

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir

Hilfssatz 1: Sei $k > 1$ ($k, l = 1$) und $\pi(x, k, l)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ mit $p \equiv l \pmod{k}$. Es gilt bei passendem c_2

$$\pi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k) Lx} \left(1 + O\left(\frac{1}{Lx}\right) \right) \quad (6)$$

für $k \leq \exp(c_2 Lx/L_2x)$; ausgenommen sind dabei eventuell die k , welche durch ein festes $k_0 = k_0(x) \geq 3$ teilbar sind.

Für den Beweis vgl. *Tatuzawa*, loc. cit.

Beweis von Satz 2: Sei

$$k = \prod_{p \leq c_3 Lx/L_2x, p \nmid q} p, \quad 0 < c_3 < c_2 \quad (7)$$

wobei $q \mid k_0$ und $q \leq c_3 Lx/L_2x$ sei³.

Es ist dann (für großes x)

$$\begin{aligned} k &\leq \exp\left(\sum_{p \leq c_3 Lx/L_2x} Lp\right) = \exp(\vartheta(c_3 Lx/L_2x)) \\ &< \exp(c_2 Lx/L_2x) \end{aligned} \quad (8)$$

wegen $\vartheta(x) \sim x$. Andererseits

$$k = \exp\left(\sum_{p \leq c_3 Lx/L_2x} Lp - Lq\right) > \exp(c_4 Lx/L_2x), \quad 0 < c_4 < c_3 \quad (9)$$

da $Lq = 0 (L_2x)$; außerdem ist offenbar $k_0 \nmid k$, also Hilfssatz 1 anwendbar. Sei A die Anzahl der Lösungen von

$$m(p-1) \equiv 0 \pmod{k} \quad (10)$$

wenn m alle natürlichen Zahlen $\leq x$ und p alle Primzahlen $\leq x$ durchläuft.

Wir zählen zunächst für festes $d \mid k$ die Anzahl A_d der Lösungen von (10) mit der Bedingung

$$d \mid p-1, \quad \frac{k}{d} \mid m, \quad (m, d) = 1. \quad (11)$$

Nach Hilfssatz 1

$$\sum_{p \leq x, d/p-1} 1 > c_5 \frac{x}{\varphi(d) Lx}, \quad 0 < c_5 < 1. \quad (12)$$

Andererseits

$$\sum_{m \leq x, \frac{k}{d} \mid m, (m, d)=1} 1 \leq \left[\frac{x}{k}\right] \varphi(d), \quad (13)$$

also

$$A_d > c_5 \frac{x}{Lx} \left[\frac{x}{k}\right] = c_5 \frac{x^2}{k Lx} + O\left(\frac{x}{Lx}\right) > c_6 \frac{x^2}{k Lx}, \quad 0 < c_6 < c_5, \quad (14)$$

³ Wenn es kein q gibt, so sind die Überlegungen einfacher.

wegen $k < \exp(c_2 Lx/L_2 x)$. Und daraus

$$A = \sum_{d|k} A_d > c_8 d(k) \frac{x^2}{k Lx} \quad (15)$$

wo $d(k)$ die Anzahl der Teiler von k bedeutet.

Nun haben wir

$$d(k) = 2^{v(k)}$$

wo für $v(k)$, die Anzahl der Primteiler in k , gilt

$$v(k) = \sum_{p \leq c_3 Lx/L_2 x} 1 \sim c_3 \frac{Lx}{L_2^2 x}. \quad (16)$$

Die Anzahl der Zahlen $\leq x^2$, welche durch k teilbar sind, ist $\left[\frac{x^2}{k}\right]$.

Für alle $m \leq x$ und $p \leq x$ mit (10) muß $m(p-1)$ eine solche Zahl sein. Also hat mindestens eine solche Zahl n mehr als

$$A/[x^2/k] > c_6 \frac{d(k)}{Lx} > \exp(c_7 \frac{Lx}{L_2^2 x}) > \exp(c_8 \frac{Ln}{L_2^2 n})$$

Darstellungen $n = m(p-1)$.

Beweis von Satz 3: Wenn die Riemann'sche Vermutung über die Nullstellen der Dirichlet'schen L -Reihen richtig ist, so gilt

$$\pi(x, k, l) > c_9 \frac{x}{\varphi(k) Lx} \text{ für } k \leq x^{1/2-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0, \text{ fest}). \quad (17)$$

Dies folgt aus einem bekannten Resultat von *Titchmarsh* (vgl. *Titchmarsh*, *Rendiconti Palermo* 54 (1930) 414). Wenn man in dem eben durchgeführten Beweis von Satz 2 statt des oben verwendeten k setzt

$$k = \prod_{p \leq (\frac{1}{2}-\varepsilon) Lx} p \quad (18)$$

so ergibt sich Satz 3.

Beweis von Satz 4: Zunächst bemerken wir, daß $\sum_{n \leq x} \delta^2(n)$ die Lösungszahl S von

$$r(p-1) = s(q-1) \leq x \quad (19)$$

ist, wo r, s natürliche Zahlen und p, q ungerade Primzahlen durchlaufen. Wir setzen $p-1 = a m$, $q-1 = b m$, $(a, b) = 1$, $m \geq 2$. Aus (19) folgt wegen $(a, b) = 1$, daß $r = b u$, $s = a u$ und $u a b m \leq x$ sein muß. Nun verwenden wir den folgenden

Hilfssatz 2: Sei $N > 0$, ganz, $(a, b) = 1$. Die Anzahl der m mit $1 \leq m \leq N$, für die beide Zahlen $a m + 1$, $b m + 1$ prim sind, ist

$$< c \frac{N}{L^2 N} g(a b \mid a-b \mid) \quad (20)$$

wobei allgemein $g(n) = \prod_{p|n} (1+1/p)$ gesetzt wurde. Der Beweis von (20) besteht in einer direkten Anwendung der Siebmethode von *Viggo Brun* oder der neuen Siebmethode von *Atle Selberg*.

Aus Hilfssatz 2 ergibt sich, wegen $m \geq 2$,

$$S < c \sum_{uab \leq x/2, (a,b)=1} \frac{x}{u a b} L^{-2} \frac{x}{u a b} g(a b \mid a-b \mid) = c \sum_{u \leq x/2} \frac{x}{u} S\left(\frac{x}{u}\right) \quad (21)$$

wo

$$S(\xi) = \sum_{ab \leq \xi/2} \frac{1}{a b} L^{-2} \frac{\xi}{a b} g(a b \mid a-b \mid) \quad (22)$$

Im folgenden zeigen wir

$$S(\xi) < c L \xi \quad (23)$$

Wenn das gezeigt ist, so folgt Satz 4 unmittelbar wegen

$$S < c \sum_{u \leq x/2} \frac{1}{u} L \frac{x}{u} < c L^2 x.$$

Um (23) zu beweisen, schreiben wir

$$\begin{aligned} S(\xi) &\leq \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{\xi/2}} \frac{1}{a} g(a) \sum_{a \leq b \leq \xi/2a} \frac{1}{b} g(b) g(b-a) L^{-2} \frac{\xi}{ab} \\ &+ \sum_{1 \leq b \leq \sqrt{\xi/2}} \frac{1}{b} g(b) \sum_{b \leq a \leq \xi/2b} \frac{1}{a} g(a) g(a-b) L^{-2} \frac{\xi}{ab} = S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Es genügt, S_1 zu betrachten, da $S_2 = S_1$ ist. Wir teilen das Intervall $[a, \xi/2a]$ in Teilintervalle der Form $J_n = [\xi/2^{n+1}a, \xi/2^n a]$ $n = 1, 2, \dots, s-1 < c L \xi$. Das letzte Intervall soll $J_s = [a, \xi/2^s a]$ sein und ist im allgemeinen nicht ganz von der Form wie die $J_1, \dots, J_{s-1}$.

Wir betrachten nun

$$\Sigma_n = \sum_{b \in J_n} \frac{1}{b} g(b) g(b-a) L^{-2} \frac{\xi}{ab} \quad (25)$$

Für $b \in J_n$ gilt $L^{-2} \frac{\xi}{ab} < c n^{-2}$; weiter hat man nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{b \in J_n} \frac{1}{b} g(b) g(b-a) \leq \frac{1}{y} \left(\sum_{y < b \leq 2y} g^2(b) \right)^{1/2} \left(\sum_{y < b \leq 2y} g^2(b-a) \right)^{1/2} \quad (26)$$

wobei $y = \xi/2^{n+1}a$ für $n = 1, 2, \dots, s-1$; und $y = a$ für $n = s$. Nun gilt, wenn p über eine beliebige (endliche oder unendliche) Menge von Primzahlen läuft, stets $\prod(1+1/p)^2 < c \prod(1+2/p)$, wo c von der Primzahlmenge unabhängig ist. Wenn wir noch mit $v(d)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von d bezeichnen, so gilt also

$$\begin{aligned} \sum_{y < b \leq 2y} g^2(b) &< c \sum_{y < b \leq 2y, p|b} \prod(1+2/p) \leq c \sum_{d \leq 2y} \frac{1}{d} 2^{v(d)} \sum_{y < kd \leq 2y} 1 < c \sum \frac{1}{d} 2^{v(d)} \left(\frac{y}{d} + 1 \right) \\ &< c (y + L^2 y), \end{aligned} \quad (27)$$

(wo oben nur über die quadratfreien d zu summieren ist), wegen

$$\sum_{d < \infty} \frac{1}{d^2} 2^{v(d)} < \infty$$

und

$$\sum_{d \leq 2y} \frac{1}{d} 2^{v(d)} < c \prod_{p \leq 2y} \left(1 + \frac{2}{p} \right) < c L^2(2y).$$

Weiter gilt wegen $a \leq y$

$$\sum_{y < b \leq 2y} g^2(b-a) < c \sum_{d \leq 2y-a} \frac{1}{d} 2^{v(d)} \sum_{y < a+kd \leq 2y, d \leq 2y-a} 1 < c \sum \frac{1}{d} 2^{v(d)} \left(\frac{y}{d} + 1 \right) < c (y + L^2 y) \quad (28)$$

und aus (25) bis (28) folgt

$$\Sigma_n < c n^{-2}.$$

Also ergibt sich

$$\sum_{r=1}^s \Sigma_n = \sum_{a < b \leq \xi/2a} \frac{1}{b} g(b) g(b-a) L^{-2} \frac{\xi}{ab} = 0 \quad (1)$$

Dies, in (24) eingesetzt, gibt

$$S(\xi) < c \sum_{a \leq \xi} \frac{g(a)}{a} \leq c \sum_{d \leq \xi} \frac{1}{d} \sum_{kd \leq \xi} \frac{1}{kd} < c L \xi,$$

weil $g(a) \leq \sum_{d|a} d^{-1}$. Damit ist (23) und auch Satz 4 bewiesen. Aus Satz 4 folgt noch, daß bei passendem c

$$d(n) > c \sqrt{\log n} \delta(n)$$

für unendlich viele gerade n .

Ebenso wie beim Beweis von Satz 4 kann man zeigen, daß die Anzahl der Primzahlpaare p, q , für welche das kleinste gemeinsame Vielfache

von $p-1$ und $q-1 \leq x$ ist, gleich $O(x \log x)$ ist, woraus wieder Satz 4 folgt.

Zusatz bei der Korrektur: Herr Prof. Erdős, dem ich meine Resultate mitgeteilt hatte, übersandte mir freundlicherweise einen Beweis dafür, daß die letztgenannte Anzahl sogar ein $O(x \log \log x)$ ist, was bei Satz 4 eine Verbesserung auf $O(x \log \log^2 x)$ ermöglicht. Satz 2, 3 erklärt übrigens das Auftreten von abnorm großen Lösungszahlen bei der Darstellung von n als kleinstes gem. Vielfaches von Zahlen $p-1$ (vgl. die Tabelle in Nöbauer loc. cit.). Denn aus einer Formel von Nöbauer, loc. cit. folgt mit Satz 2, daß diese Anzahl $> \exp(\exp cLn/L_2 n)$ ist, für unendlich viele n .