manuscripta math. 6, 71 - 103 (1972)

UNZERLEGBARE DARSTELLUNGEN I

Peter Gabriel

Herrn Professor E. Witt zum 60. Geburtstag

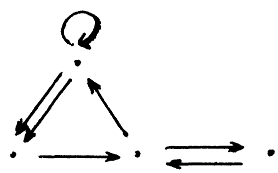
Let $\underline{K}$ be the structure got by forgetting the composition law of morphisms in a given category. A linear representation of $\underline{K}$ is given by a map V associating with any morphism $\varphi : a \to e$ of $\underline{K}$ a linear vector space map $V(\varphi) : V(a) \to V(e)$. We classify those $\underline{K}$ having only finitely many isomorphy classes of indecomposable linear representations. This classification is related to an old paper by Yoshii [3].

1. Einleitung.

1.1. In dieser Arbeit betrachten wir 4-Tupel $\underline{K} = (\underline{F}(\underline{K}), \underline{P}(\underline{K}), \underline{n}_{\underline{K}}, \underline{s}_{\underline{K}})$ bestehend aus einer Punktmenge $\underline{P}(\underline{K})$, einer Pfeilmenge $\underline{F}(\underline{K})$ und zwei Abbildungen $\underline{n}_{\underline{K}}, \underline{s}_{\underline{K}} : \underline{F}(\underline{K}) \rightrightarrows \underline{P}(\underline{K})$, die jedem Pfeil $\varphi \in \underline{F}(\underline{K})$ seine Nock $\underline{n}_{\underline{K}}(\varphi) \in \underline{P}(\underline{K})$ und seine Spitze $\underline{s}_{\underline{K}}(\varphi) \in \underline{P}(\underline{K})$ zuordnen. Für einen solchen 4-Tupel schlagen wir die Bezeichnung Köcher vor, und nicht etwa Graph, weil letzterem Wort schon zu viele verwandte Begriffe anhaften. Die Menge aller Pfeile mit Nock a und Spitze e bezeichnen wir mit $\underline{K}[a,e]$ oder $[a,e]$, und wir schreiben $\varphi : a \to e$ statt $\varphi \in [a,e]$, wie es in Kategorien üblich ist. Jedoch wird für die Pfeile eines Köchers keine Komposition gegeben.

Bekanntlich können Köcher wie im folgenden Beispiel schematisch veranschaulicht werden.

$\underline{K}$



In unseren Klassifikationssätzen spielen folgende Klassen von Köchern eine wichtige Rolle

$\underline{\underline{A}}_n$ $\quad 1 — 2 — 3 — \ - - - \ — n-1 — n, \ n \geq 1$

$$\begin{array}{lccccccccc} & & 1'' & & & & & \\ & & | & & & & & \\ \underline{\underline{D}}_n & 1' — & 0 & — 1 — & - - - & — n-4 — & n-3, & n \geq 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc} & & & 1'' & & & & \\ & & & | & & & & \\ \underline{\underline{E}}_6 & 2' — & 1' — & 0 & — 1 — & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc} & & & 1'' & & & & \\ & & & | & & & & \\ \underline{\underline{E}}_7 & 2' — & 1' — & 0 & — 1 — & 2 — & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} & & & 1'' & & & & & \\ & & & | & & & & & \\ \underline{\underline{E}}_8 & 2' — & 1' — & 0 & — 1 — & 2 — & 3 — & 4 \end{array}$$

Dabei darf anstelle jedes Striches ein Pfeil beliebiger Richtung eingesetzt werden. Es gibt zum Beispiel 3 Isomorphieklassen von Köchern der Klasse $\underline{\underline{A}}_3$, nämlich

$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \ , \quad \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \quad \text{und} \quad \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot$$

<u>1.2.</u> Es seien $\underline{K}$ ein Köcher und k ein Körper. Eine (k-lineare) <u>Darstellung</u> V von $\underline{K}$ besteht aus zwei Abbildungen, die jedem Punkt $p \in \underline{P}(\underline{K})$ einen k-Vektorraum $V(p)$ und jedem Pfeil $\varphi : a \to e$ eine k-lineare Abbildung $V(\varphi) : V(a) \to V(e)$ zuordnen. Ein Morphismus $f : V \to V'$ zwischen zwei Darstellungen V, V' besteht aus einer Familie $(f(p) : V(p) \to V'(p))_{p \in \underline{P}(\underline{K})}$ von k-linearen Abbildungen, die für jedes $\varphi \in [a,e]$ der Kommutativitätsbedingung $f(e)\,V(\varphi) = V'(\varphi)\,f(a)$ genügen. Die Komposition dieser Morphismen wird durch die Zusammensetzung der Abbildungen $f(p)$ gegeben. Die Kategorie $_k\underline{K}$ der k-linearen Darstellungen von $\underline{K}$ ist abelsch, und die direkte Summe wird durch die Formeln $(\bigoplus_{i \in I} V_i)(p) = \bigoplus_{i \in I} V_i(p)$ gegeben. Die <u>Dimension</u> einer Darstellung V ist $[V : k] = \sum_{p \in \underline{P}} [V(p) : k]$. Die Darstellung heißt <u>unzerlegbar</u>, wenn $[V : k] \neq 0$, und wenn aus $V \cong V' \oplus V''$ folgt, daß $[V' : k] \cdot [V'' : k] = 0$.

Eine endlichdimensionale Darstellung V von $\underline{K}$ ist ein Objekt endlicher Länge in ${}_k\underline{K}$. Wenn V unzerlegbar ist, so ist der Endomorphismenring $[V, V]$ von V in ${}_k\underline{K}$ lokal, und der Satz von Krull-Remak-Schmidt-Azumaya gilt. In einer Summenzerlegung $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ mit unzerlegbaren endlichdimensionalen Summanden ist folglich die Anzahl der V_i, die einer gegebenen Isomorphieklasse von unzerlegbaren Darstellungen angehören, eine Invariante der Darstellung V. Das Ziel des ersten Teiles unserer Arbeit ist der

<u>SATZ:</u> <u>Ein Köcher $\underline{K}$ hat genau dann nur endlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren endlichdimensionalen k-linearen Darstellungen, wenn $\underline{K}$ eine "disjunkte Vereinigung" endlich vieler Köcher der Klassen $\underline{\underline{A}}_e$, $\underline{\underline{D}}_m$ oder $\underline{\underline{E}}_n$ ist,</u> $e \geqslant 1$, $m \geqslant 4$, $6 \leqslant n \leqslant 8$.

Wir zeigen in §§ 2-4, daß die Bedingung hinreichend ist, indem wir eine explizite Konstruktion der Darstellungen in den einzelnen Fällen geben. Wir beweisen dann anschließend in § 5, daß die Bedingung auch notwendig ist.

<u>1.3.</u> In dieser Arbeit benützen wir auch gefilterte Vektorräume. Sei $\underline{M}$ eine geordnete Menge. Unter einem <u>$\underline{M}$-Raum</u> verstehen wir einen k-Vektorraum A zusammen mit einer <u>$\underline{M}$-Filtrierung</u>, d.h. einer Familie $(A(m))_{m\in\underline{M}}$ von Unterräumen, derart, daß $A(m) \subset A(n)$ für $m \leqslant n$. Ein Morphismus zwischen zwei $\underline{M}$-Räumen A und B wird durch eine k-lineare Abbildung $f : A \to B$ mit der Eigenschaft $f(A(m)) \subset B(m)$ für $m \in \underline{M}$ gegeben. Die additive Kategorie der $\underline{M}$-Räume bezeichnen wir mit ${}_k\underline{M}$.

Eine besondere Rolle spielen die geordneten Mengen

$$\underline{I}_n = \{1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant \dots \leqslant n-1 \leqslant n\}$$

und $\underline{I}_{m,n} = \underline{I}_m \times \underline{I}_n$. Für jeden $\underline{I}_{m,n}$-Raum A gibt es eine Basis mit der Eigenschaft, daß jeder Teilraum $A(i,j)$ durch eine "Teilbasis" aufgespannt wird. Die Existenz einer solchen "angepaßten"

Basis bedeutet, daß A als Objekt der Kategorie ${}_k\underline{I}_{m,n}$ eine direkte Summe von eindimensionalen $\underline{I}_{m,n}$-Räumen ist. Unsere Arbeit hängt damit zusammen, daß es keinen entsprechenden Satz für $\underline{I}_m \times \underline{I}_n \times \underline{I}_r$ -Räume gibt. Der Schlüssel zu Satz 1.2 liegt in folgendem

SATZ: *Sei* $\Delta = \underline{I}_4 \amalg \underline{I}_2 \amalg \underline{I}_1$ *die geordnete Menge* $\{1 < 2 < 3 < 4,\ 1' < 2',\ 1''\}$. *Jeder* Δ*-Raum ist eine direkte Summe von* Δ*-Räumen der Dimension* ≤ 6. *Es gibt bis auf Isomorphie genau* 106 *unzerlegbare* Δ*-Räume, darunter* 30 *der Dimension* 1, 30 *der Dimension* 2, 20 *der Dimension* 3, 15 *der Dimension* 4, 6 *der Dimension* 5 *und* 5 *der Dimension* 6.

Dabei werden die direkten Summen natürlich in der Kategorie ${}_k\Delta$ konstruiert, insbesondere trägt ein (direkter) Summand B von A stets die induzierte Filtrierung $(B(m) = B \cap A(m)\ !)$. Ferner heißt A unzerlegbar, wenn $A \neq 0$, und wenn 0 und A die einzigen Summanden von A sind.

<u>1.4.</u> In einem zweiten Teil unserer Arbeit werden wir eine Beziehung zur Darstellungstheorie der Ringe herstellen. Wir skizzieren sie hier kurz. Sei $\underline{A}$ eine endliche abelsche Kategorie ("endlich" soll bedeuten, daß jedes Objekt noethersch und artinsch ist, daß es also eine endliche Länge hat). Wir nehmen zusätzlich an, daß der Körper k im Zentrum von $\underline{A}$ (= Endomorphismenring des identischen Funktors) enthalten ist und sich mit dem Endomorphismenkörper jedes einfachen Objekts identifizieren läßt (es sei z.B. A eine k-Algebra und S eine Menge von einfachen A-Moduln mit Endomorphismenkörper k; man nehme für $\underline{A}$ die Kategorie aller A-Moduln endlicher Länge, deren Kompositionsfaktoren zu Moduln aus S isomorph sind).

Mit $\underline{K}(\underline{A})$ bezeichnen wir folgenden Köcher: die Punktmenge $\underline{P}(\underline{A})$ besteht aus allen Isomorphieklassen von einfachen Objekten aus $\underline{A}$;

für $e, f \in \underline{P}(\underline{A})$ ist die Anzahl der Pfeile in $[e, f]$ gleich der k-Dimension von $\mathrm{Ext}^1(S, T)$, wobei $S \in e$, $T \in f$. Die gegebene Kategorie $\underline{A}$ ist dann äquivalent zu einer abgeschlossenen Unterkategorie von ${}_k\underline{K}(\underline{A})$ (eine Unterkategorie heißt abgeschlossen, wenn sie abgeschlossen ist bezüglich der Konstruktion von Unterobjekten, Restklassenabjekten und direkten Summen). Daraus folgt insbesondere, daß es in A bis auf Isomorphie nur endlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren Objekten gibt, vorausgesetzt $\underline{K}(\underline{A})$ ist eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Köcher der Klassen $\underline{\underline{A}}_e$, $\underline{\underline{D}}_m$ oder $\underline{\underline{E}}_n$, $e \geqslant 1, m \geqslant 4, 6 \leqslant n \leqslant 8$.

Für Objekte der Höhe $\leqslant 2$, kann die letzte Aussage noch verschärft werden. Sei $K'(\underline{A})$ der Köcher mit Punktmenge $\underline{P}(\underline{A}) \times \{0, 1\}$, dessen Pfeile folgendermaßen erklärt sind: für $e \in \underline{P}(\underline{A})$, sei $e_o = (e, 0)$ und $e_1 = (e, 1)$; es gelte dann $[e_o, f_1] = [e, f]$, und $[e_o, f_o] = [e_1, f_1] = [e_1, f_o] = \emptyset$ für alle $e, f \in \underline{P}(\underline{A})$. Ist $\underline{A}$ zum Beispiel die Kategorie der endlichdimensionalen Moduln über der Algebra der Dreiecksmatrizen n-ter Ordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in k,$$

so sind $\underline{K}(\underline{A})$ und $\underline{K}'(\underline{A})$ folgende Köcher

$\underline{K}(\underline{A})$ $\quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \; \ldots \; n-1 \longrightarrow n$

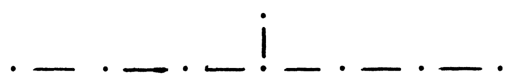
$\underline{K}'(\underline{A})$

$$\begin{tikzcd}
1_o \arrow[dr] & 2_o \arrow[dr] & \cdots & (n-2)_o \arrow[dr] & (n-1)_o \arrow[dr] & n_o \\
1_1 & 2_1 & 3_1 & \cdots & (n-1)_1 & n_1
\end{tikzcd}$$

Wir werden unter anderem im 2.Teil zeigen, daß $\underline{K}'(\underline{A})$ die Isomorphieklassen von Objekten der Höhe $\leqslant 2$ aus $\underline{A}$ beschreibt. Die <u>Höhe</u> eines Objekts M ist die kleinste Ordinalzahl n mit der Eigenschaft, daß das n-te Glied der aufsteigenden Loewy-Reihe von M gleich M ist. Infolgedessen hat M die Höhe 1, wenn M halbeinfach ist, und eine Höhe ≤ 2, wenn das Restklassenobjekt von M nach seinem Sockel halbeinfach ist. Satz 1.2 hat folgenden Korollar.

SATZ. *Unter den obigen Voraussetzungen gibt es genau dann nur endlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren Objekten der Höhe* ≤ 2 *aus* $\underline{A}$, *wenn* $\underline{K}'(\underline{A})$ *eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Köcher der Klassen* $\underline{\underline{A}}_e$, $\underline{\underline{D}}_m$ *oder* $\underline{\underline{E}}_n$ *ist*, $e \geq 1$, $m \geq 4$, $6 \leq n \leq 8$.

Unsere vorige Behauptung geht im wesentlichen auf YOSHII zurück (1956 [3]). Der Beweis von Yoshii ist jedoch bis heute voller Rätsel geblieben. Wir zeigen, daß er falsch ist. Yoshii "beweist" nämlich auch, daß Köcher vom Typ

$\underline{\underline{F}}_8$ 

zulässig sind, und das ist falsch. Hingegen zeigt er nicht, daß Köcher der Typen $\underline{\underline{E}}_n$, $n = 6, 7, 8$, zugelassen sind. Hierfür begnügt er sich mit der Bemerkung: " this proof is quite same as the case $\underline{\underline{F}}_8$". Nichtsdestoweniger enthält seine Arbeit sehr wertvolle Ansätze.

$\underline{\underline{1.5.}}$ Daß in unseren Klassifikationssätzen Dynkin-Diagramme auftauchen, dürfte kein Zufall sein. J.TITS hat mir einen einfachen Grund dafür gezeigt (zumindest, wenn k unendlich ist). Sei $\underline{K}$ ein endlicher Köcher, und $n : \underline{P}(\underline{K}) \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$ eine Abbildung. Eine Darstellung V von $\underline{K}$ derart, daß $V(i) = k^{n_i}$ für alle Punkte i gilt, wird durch ein Element des Produkts

$$M = \prod_{i,\,j} M(n_i,\, n_j)^{[j,i]}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $M(n_i,\, n_j)$ den Raum der Matrizen mit n_i Reihen, n_j Spalten und mit Koeffizienten in k. Auf M operiert die algebraische Gruppe

$$G = (\prod_i GL(n_i,\, k)) \;/\; GL(1,\, k),$$

wobei $GL(1, k)$ "diagonal" in das Produkt abgebildet wird. Ferner liefern zwei Elemente aus M genau dann isomorphe Darstellungen von $\underline{K}$, wenn sie auf derselben Laufbahn von G in M liegen. Diese Laufbahnen entsprechen demnach den Isomorphieklassen der Darstellungen V von $\underline{K}$ mit der Eigenschaft $[V(i) : k] = n_i$, $i \in \underline{P}(\underline{K})$. Es gibt folglich unendlich viele Isomorphieklassen, und insbesondere unendlich viele unzerlegbare Darstellungen, wenn $\hat{\mathrm{Dim}}\ G < \mathrm{Dim}\ M$, d.h. wenn

$$\sum_i n_i^2 - 1 < \sum_{i,j} q_{ij}\, n_i\, n_j ,$$

gilt, wobei $q_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})$ und γ_{ij} = Kardinalität von $[j, i]$. Die Frage stellt sich also, für welche Zahlen $q_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $q_{ii} \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sum_i n_i^2 - \sum_{i,j} q_{ij}\, n_i\, n_j \leqslant 0$$

positive ganzzahlige Lösungen n_i besitzt. Dies ist offensichtlich der Fall, wenn $q_{ij} \geqslant 1$ für ein (i, j) gilt. Wir dürfen also annehmen, daß $q_{ii} = 0$ und $q_{ij} = 0, \frac{1}{2}$ für $i \neq j$. Ferner ist klar, daß unsere Ungleichung genau dann keine positiven ganzzahligen Lösungen hat, wenn die quadratische Form

$$\sum_i n_i^2 - \sum_{i,j} q_{ij}\, n_i\, n_j$$

positiv definit ist. Dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn $\underline{K}$ eine disjunkte Vereinigung von Köchern der Typen $\underline{\underline{A}}_e$, $\underline{\underline{D}}_m$ oder $\underline{\underline{E}}_n$ ist, $e \geqslant 1$, $m \geqslant 4$, $n = 6, 7, 8$ (siehe z.B. Bourbaki, Groupes et Algebres de Lie, Chap. V, § 4, Nr.8, théorème 2, und Chap. VI, § 1, Nr. 1, théorème 1).

2. Darstellungen von Köchern der Klasse $\underline{\underline{A}}_n$.

2.1. Wir geben zunächst einige Definitionen. Ein Köcher $\underline{L}$ heißt ein *Unterköcher* von $\underline{K}$, wenn $\underline{P}(\underline{L}) \subset \underline{P}(\underline{K})$, $\underline{F}(\underline{L}) \subset \underline{F}(\underline{K})$, und wenn $\underline{n}_L$, $\underline{s}_L$: $\underline{F}(\underline{L}) \rightrightarrows \underline{P}(\underline{L})$ durch die entsprechenden Abbildungen $\underline{n}_K$, $\underline{s}_K$ induziert werden. $\underline{L}$ heißt ein *voller* Unterköcher von $\underline{K}$, wenn für je zwei $a, e \in \underline{P}(\underline{L})$ die Gleichung $\underline{L}[a, e] = \underline{K}[a, e]$ gilt. Sei $\underline{L}$ ein Unterköcher von $\underline{K}$ und V eine k-lineare Darstellung von $\underline{K}$. Wir bezeichnen mit $V \mid \underline{L}$ die *Einschränkung* von V auf $\underline{L}$; sie wird durch die Bedingungen $(V \mid \underline{L})(p) = V(p)$ für $p \in \underline{P}(\underline{L})$ und $(V \mid \underline{L})(\varphi) = V(\varphi)$ für $\varphi \in \underline{F}(\underline{L})$ festgelegt. Andererseits bezeichnen wir mit $U^{\underline{K}}$ die *Erweiterung* einer Darstellung U von $\underline{L}$ auf $\underline{K}$; es gilt $U^{\underline{K}} \mid \underline{L} = U$ und $U^{\underline{K}}(p) = 0 = U^{\underline{K}}(\varphi)$ für $p \in \underline{P}(\underline{K}) \setminus \underline{P}(\underline{L})$ und $\varphi \in \underline{F}(\underline{K}) \setminus \underline{F}(\underline{L})$. Schließlich nennen wir eine Darstellung V von $\underline{K}$ *treu an der Stelle* $p \in \underline{P}(\underline{K})$, oder einfach p-*treu*, wenn aus $V \cong V_1 \oplus V_2$ und $V_2(p) = 0$ folgt, daß $V_2 = 0$. Wenn V eine direkte Summe von endlichdimensionalen Darstellungen ist, so ist V genau dann p-treu, wenn kein unzerlegbarer Summand U von V die Bedingung $U(p) = 0$ erfüllt (denn V ist dann eine direkte Summe von endlichdimensionalen unzerlegbaren Darstellungen, vgl. 1.2).

2.2. Es seien $\underline{A}$ ein Köcher der Klasse $\underline{\underline{A}}_n$ und r, s zwei natürliche Zahlen mit $1 \leqslant r < s \leqslant n+1$. Wir setzen $I_{r,s}(p) = k$ für $p \in \underline{P}(\underline{A}) = \{1, 2, \dots, n\}$ und $r \leqslant p < s$, $I_{r,s}(p) = 0$ für die anderen Punkte p, und $I_{r,s}(\varphi) = \mathrm{id}$ für $\varphi \in \underline{F}(\underline{A})$ und $r \leqslant \underline{n}_A(\varphi) < s$, $r \leqslant \underline{s}_A(\varphi) < s$. Wenn r und s variieren, erhalten wir so insgesamt $n(n+1)/2$ *unzerlegbare Darstellungen* von A. Für $\underline{A} = \{\cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot\}$ erhält man zum Beispiel die Darstellungen

$$k \rightarrow 0 \leftarrow 0\,,\quad 0 \rightarrow k \leftarrow 0\,,\quad 0 \rightarrow 0 \leftarrow k,$$

$$k \xrightarrow{\mathrm{id}} k \leftarrow 0\,,\quad 0 \rightarrow k \xleftarrow{\mathrm{id}} k \quad\text{und}\quad k \xrightarrow{\mathrm{id}} k \xleftarrow{\mathrm{id}} k$$

SATZ. *Jede Darstellung eines Köchers $\underline{A}$ der Klasse $\underline{\underline{A}}_n$ ist eine direkte Summe von endlichdimensionalen unzerlegbaren Darstellungen. Jede unzerlegbare Darstellung ist isomorph zu einer der Darstellungen*

I

Der Beweis folgt aus den Lemmata 2,3 und 2.4 (vgl. [1]).

2.3 Sei $\underline{A}'$ der volle Unterköcher von $\underline{A}$ mit Punktmenge $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ und $V' = V \mid \underline{A}'$ die Einschränkung einer Darstellung V von $\underline{A}$. Die Darstellung V gibt Anlaß zu einer $\underline{I}_{n-1}$ - Filtrierung

$$N(1) \subset N(2) \subset \ldots \subset N(n-1)$$

von $N = V(n)$. Sie wird durch Induktion nach n definiert. Sei φ der einzige Pfeil zwischen n und $n-1$ und $N' = V(n-1)$ der durch V' induzierte $\underline{I}_{n-2}$ - Raum. Im Fall $\varphi : n-1 \to n$ setzen wir $N(n-1) = \operatorname{Im} V(\varphi)$ und $N(i) = V(\varphi)(N'(i))$ für $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Im Fall $\varphi : n \to n-1$ setzen wir $N(1) = V(\varphi)^{-1}(0)$ und $N(i) = V(\varphi)^{-1}(N'(i-1))$ für $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Im Spezialfall $\underline{K} = \{1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow 6\}$ zum Beispiel gibt die Darstellung

$$V(1) \xleftarrow{\epsilon} V(2) \xrightarrow{\delta} V(3) \xrightarrow{\gamma} V(4) \xleftarrow{\beta} V(5) \xrightarrow{\alpha} V(6)$$

von $\underline{K}$ Anlaß zu folgender Filtrierung von $V(6)$

$$\alpha\beta^{-1}0 \subset \alpha\beta^{-1}\gamma\,\delta\,\epsilon^{-1}0 \subset \alpha\beta^{-1}\gamma\,\delta\,V(2) \subset \alpha\beta^{-1}\gamma\,V(3) \subset \alpha\,(V(5))$$

Umgekehrt gibt jede $\underline{I}_{n-1}$-Filtrierung

$$M(1) \subset M(2) \subset \ldots\ldots \subset M(n-1)$$

eines Vektorraumes M Anlaß zu einer Darstellung U von $\underline{A}$, die wiederum durch Induktion nach n definiert wird. Im Fall $\varphi : n-1 \to n$ setzen wir $U(n-1) = M(n-1)$, $U(n) = M$, und $U(\varphi)$ ist die Inklusion; ferner wird $U' = U \mid \underline{A}'$ durch die $\underline{I}_{n-2}$ - Filtrierung $\{M(i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n-2}$ von $M(n-1)$ induziert. Im Fall $\varphi : n \to n-1$ setzen wir $U(n) = M$, $U(n-1) = M/M(1)$, und $U(\varphi) : M \to M/M(1)$ ist die kanonische Projektion; ferner wird $U' = U \mid \underline{A}'$ durch die $\underline{I}_{n-2}$ - Filtrierung $\{M(i+1)/M(1)\}_{1 \leqslant i \leqslant n-2}$ von $M/M(1)$ induziert. Im Spezialfall $\underline{A} = \{1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow 6\}$ zum Beispiel induziert die $\underline{I}_5$ - Filtrierung

$$M(1) \subset M(2) \subset M(3) \subset M(4) \subset M(5)$$

von M die Darstellung

$$M(3)/M(2) \xleftarrow{\text{kan.}} M(3)/M(1) \xrightarrow{\text{Inkl.}} M(4)/M(1) \xrightarrow{\text{Inkl.}} M(5)/M(1) \xleftarrow{\text{kan.}} M(5) \xrightarrow{\text{Inkl.}} M$$

von $\underline{A}$.

LEMMA. Der Funktor $M \longmapsto U$ ist volltreu und liefert eine Äquivalenz von ${}_k\underline{I}_{n-1}$ auf die volle Unterkategorie von ${}_k\underline{A}$ bestehend aus den Darstellungen V, derart, daß $V(\psi)$ injektiv für direkte ψ und surjektiv für inverse ψ ist.

Dabei heißt ein Pfeil $\psi : a \to e$ direkt wenn $e = a+1$, invers wenn $e = a-1$. Der Beweis folgt leicht mittels einer Induktion nach n aus der Bemerkung, daß die Funktoren $V \mapsto V(n)$ und $M \mapsto U$ bis auf Isomorphie zueinander invers sind.

2.4 LEMMA. Jede Darstellung V von $\underline{A}$ ist von der Form $V_1 \oplus V_2$, wobei $V_2(n)$ null ist, und V_1 die Eigenschaft von Lemma 2.3 hat.

Beweis. Nach Induktion gibt es nämlich eine entsprechende Zerlegung $V' = V \mid \underline{A}' = W_1 \oplus W_2$. Wir definieren zwei Unterdarstellungen U_1, U_2 von V durch $U_2 = W_2^{\underline{A}}$ und $U_1(n) = V(n)$, $U_1' = U_1 \mid \underline{A}' = W_1$. Es gilt dann $V = U_1 \oplus U_2$. Das ermächtigt uns von vorneherein anzunehmen, daß $V = U_1$, also daß V' die Eigenschaft von Lemma 2.3 besitzt. Sei φ der einzige Pfeil zwischen $n-1$ und n. Wenn φ direkt ist, sei S ein Supplement von $K = \varphi^{-1}(0)$ in $V'(n-1)$ mit der Eigenschaft, daß die Zerlegung $V'(n-1) = S \oplus K$ mit der $\underline{I}_{n-2}$ - Filtrierung von $V'(n-1)$ verträglich ist, also daß $V'(n-1)(i) = (S \cap V'(n-1)(i)) \cap (K \cap V'(n-1)(i))$ für alle i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$ (man konstruiere zuerst ein Supplement $S(1)$ von $K(1) = K \cap V'(n-1)(1)$ in $V'(n-1)(1)$, dann ein Supplement $S(2) \supset S(1)$ von $K(2) = K \cap V'(n-1)(2)$ in $V'(n-1)(2)$ ...). Nach Lemma 2.3 wird die Zerlegung $V'(n-1) = S \oplus K$ in ${}_k\underline{I}_{n-2}$ von einer Zerlegung $V' = X_1 \oplus X_2$ in ${}_k\underline{A}'$ induziert. Es gilt also $X_1(n-1) = S$, $X_2(n-1) = K$, und wir definieren V_1 und V_2 durch $V_2 = X_2^{\underline{A}}$, $V_1(n) = V(n)$ und $V_1' = V_1 \mid \underline{A}' = X_1$. Der Beweis ist ähnlich, wenn φ invers ist.

2.5 Beweis von Satz 2.2. Aus Lemma 2.4 folgt unmittelbar, daß eine Darstellung V von $\underline{A}$ genau dann die Eigenschaft von Lemma 2.3 hat, wenn sie n-treu ist (2.1).

Lemma 2.4 und eine Induktion nach n führen den Beweis auf den Fall zurück, wo V n-treu ist. Da $V(n)$ als Objekt von ${}_k\underline{I}_{n-1}$ eine direkte Summe von eindimensionalen $\underline{I}_{n-1}$-Räumen ist, so führt uns Lemma 2.3

ferner auf den Fall $[V(n) : k] = 1$ zurück. Dann gilt $V \cong I_{r,n+1},\ 1 \leqslant r \leqslant n$.

<u>2.6.</u> Wir betrachten nun den Köcher $\underline{K}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & r'' & & & & & \\
 & & & & & | & & & & & \\
 & & & & & (r-1)'' & & & & & \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & & 1'' & & & & & \\
 & & & & & | & & & & & \\
q' & — & (q-1)' \ldots 2' & — & 1' & — & 0 & — & 1 & — & 2 \ldots p-1 — p ,
\end{array}
$$

mit $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 1$, wobei anstelle jedes Striches ein Pfeil beliebiger Richtung eingesetzt wird. Es seien $\underline{A}$, $\underline{A}'$ und $\underline{A}''$ folgende volle Unterköcher von $\underline{K}$

$\underline{A}$ $\quad 0 — 1 — 2 \ldots p-1 — p$

$\underline{A}'$ $\quad 0 — 1' — 2' \ldots (q-1)' — q'$

$\underline{A}''$ $\quad 0 — 1'' — 2'' \ldots (r-1)'' — r''$

<u>LEMMA.</u> <u>Jede Darstellung V von $\underline{K}$ ist von der Form</u>

$$V = V_1 \oplus U^{\underline{K}} \oplus U'^{\underline{K}} \oplus U''^{\underline{K}} ,$$

<u>wobei V_1 treu an der Stelle 0 ist, und U, U' und U'' Darstellungen der vollen Unterköcher $1 — \cdots — p$, $1' — \cdots — q'$ und $1'' — \cdots — r''$ bezeichnen.</u>

<u>Beweis.</u> Nach 2.4 gibt es Zerlegungen $V|\underline{A} = U_1 \oplus U^{\underline{A}}$, $V|\underline{A}' = U_2 \oplus U'^{\underline{A}'}$ und $V|\underline{A}'' = U_3 \oplus U''^{\underline{A}''}$, wobei die U_i 0-treu sind. Es genügt folglich V_1 durch $V_1|\underline{A} = U_1$, $V_1|\underline{A}' = U_2$ und $V_1|\underline{A}'' = U_3$ zu definieren.

<u>2.7.</u> Die Darstellung V ist offensichtlich genau dann 0-treu, wenn alle drei Einschränkungen $V|\underline{A}$, $V|\underline{A}'$ und $V|\underline{A}''$ 0-treu sind. Die Struktur der "un0-treuen" Darstellungen wird durch 2.2 gegeben. Wir beschränken deshalb unser Studium auf die 0-treuen Darstellungen.

Sei $\Delta_{p,q,r} = \underline{I}_p \coprod \underline{I}_q \coprod \underline{I}_r$ die geordnete Menge $\{1 \leqslant 2 \leqslant \dots \leqslant p\, ,\ 1' \leqslant 2' \leqslant \dots \leqslant q'\, ,\ 1'' \leqslant 2'' \leqslant \dots \leqslant r''\}$

Ein $\Delta_{p,q,r}$ - Raum besteht aus einem Vektorraum A zusammen mit Unterräumen $A(1), \dots, A(p), A(1'), \dots, A(q'), A(1''), \dots, A(r'')$, derart, daß $A(1) \subset A(2) \subset \dots \subset A(p)$, $A(1') \subset A(2') \subset \dots \subset A(q')$ und $A(1'') \subset A(2'') \subset \dots \subset A(r'')$. Jede Darstellung V von $\underline{K}$ gibt Anlaß zu einem solchen $\Delta_{p,q,r}$ - Raum $A = V(0)$, wobei die $\underline{I}_p$-, $\underline{I}_q$- und $\underline{I}_r$-Filtrierungen durch die Darstellungen $V|\underline{A}$, $V|\underline{A}'$ und $V|\underline{A}''$ induziert werden (vgl. 2.3 mutatis mutandis). Aus 2.3 folgt nun unmittelbar der

SATZ. Der Funktor $V \longmapsto V(0)$ liefert eine Äquivalenz zwischen der vollen Unterkategorie von ${}_k\underline{K}$, $\underline{K}$ wie in 2.6, bestehend aus allen 0-treuen Darstellungen einerseits und der Kategorie ${}_k\Delta_{p,q,r}$ andrerseits.

2.8. Die geordnete Menge $\Delta_{p,q,r}$ hängt nicht von der Richtung der Pfeile in $\underline{K}$ ab. Die Darstellungstheorie von $\underline{K}$ ist also im wesentlichen auch davon unabhängig. Wir dürfen deshalb unsere Untersuchung auf folgenden Spezialfall beschränken

$$\begin{tikzcd}
 & & & r'' & & & \\
 & & & \vdots \arrow[u, "\gamma_r"] & & & \\
 & & & 1'' \arrow[u, "\gamma_2"] & & & \\
q' & \cdots \arrow[l, "\beta_q"'] & 1' \arrow[l, "\beta_2"'] & 0 \arrow[l, "\beta_1"'] \arrow[u, "\gamma_1"] \arrow[r, "\alpha_1"'] & 1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & \cdots \arrow[r, "\alpha_p"'] & p
\end{tikzcd}$$

$p \geqslant q \geqslant r \geqslant 1$.

Einer Darstellung V von $\underline{K}_{p,q,r}$ entspricht dann folgende $\Delta_{p,q,r}$ - Filtrierung von $V(0)$:

$V(0)(i) = \mathrm{Ker}\, V(\alpha_i \cdots \alpha_2 \alpha_1)$, $V(0)(j') = \mathrm{Ker}\, V(\beta_j \cdots \beta_2\, \beta_1)$, $V(0)(1'') = \mathrm{Ker}\ V(\gamma_1 \cdots \gamma_2\, \gamma_1)$.

3. <u>Darstellungen von</u> $\underline{K}_{p,1,1}$.

<u>3.1.</u> <u>SATZ.</u> <u>Sei</u> $\Delta_{p,1,1} = \underline{I}_p \amalg \underline{I}_1 \amalg \underline{I}_1$ <u>die geordnete Menge</u>

$$\{1 < 2 < \ldots < p, 1', 1''\}, \quad p \geqslant 1$$

<u>Jeder</u> $\Delta_{p,1,1}$- <u>Raum ist eine direkte Summe von ein- und zweidimensionalen</u> $\Delta_{p,1,1}$-<u>Räumen.</u>

Dabei werden die unzerlegbaren zweidimensionalen $\Delta_{p,1,1}$-Räume durch 2 Invarianten $r, s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant r < s \leqslant p+1$ klassifiziert:

$A_{r,s} = k^2$, $A_{r,s}(1') = k \times 0$, $A_{r,s}(1'') = 0 \times k$, $A_{r,s}(i) = 0$ für $1 \leqslant i < r$, $A_{r,s}(i) = k(1,1)$ für $r \leqslant i < s$ und $A_{r,s}(i) = k^2$ für $s \leqslant i \leqslant p+1$.

Wir geben den Beweis in 3.4 und 3.6.

<u>3.2.</u> Sei $\underline{K}_{p,1,1}$ der Köcher

$$\begin{tikzcd} & 1'' & & & & & \\ 1' & 0 \arrow[l, "\beta"] \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha_1"'] & 1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & 2 & \cdots & p-1 \arrow[r, "\alpha_p"'] & p \end{tikzcd}$$

Nach 2.6 und 2.7 liefert Satz 3.1 die Struktur der Darstellungen von $\underline{K}_{p,1,1}$:

a) Sei $r, s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant r < s \leqslant p+1$. Wir setzen $K_{r,s}(1') = K_{r,s}(1'') = k$, $K_{r,s}(i) = k^2$ für $0 \leqslant i < r$, $K_{r,s}(i) = k$ für $r \leqslant i < s$ und $K_{r,s}(i) = 0$ für $s \leqslant i \leqslant p$. Ferner sei $K_{r,s}(\beta) : k^2 \to k$ die Abbildung $(\lambda, \mu) \mapsto \mu$, $K_{r,s}(\gamma)$ die Abbildung $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda$, $K_{r,s}(\alpha_i)$ die Indentität für $i \neq r,s$, $K_{r,s}(\alpha_r)$ die Abbildung $(\lambda, \mu) \to \lambda - \mu$, und $K_{r,s}(\alpha_s) = 0$, wenn $s \leqslant p$. Dieser Darstellung $K_{r,s}$ von $\underline{K}_{p,1,1}$ entspricht der $\Delta_{p,1,1}$- Raum $K_{r,s}(0) = A_{r,s}$ (vergl. 2.8).

b) Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant r \leqslant p+1$. Wir setzen $I_r(0) = I_r(1') = I_r(1'') = k = I_r(i)$ für $1 \leqslant i \leqslant r$ und $I_r(i) = 0$ für $r \leqslant i \leqslant p$. Ferner sei $I_r(\varphi) = \mathrm{id}$, wenn der Pfeil $\varphi : a \to e$ die Bedingung $I_r(a) = I_r(e) = k$ erfüllt. Die entsprechenden $\Delta_{p,1,1}$-Räume A sind eindimensional und haben die Eigenschaft $A(1') = A(1'') = A$.

c) Sei I'_r die Einschränkung von I_r auf $1' \leftarrow 0 \rightarrow 1 \quad \dots \rightarrow p$. Wir bezeichnen mit J_r die Erweiterung von I'_r auf $\underline{K}_{p,1,1}$. Der entsprechende $\Delta_{p,1,1}$-Raum A ist eindimensional und hat die Eigenschaft $A(1') = A$, $A(1'') = 0$.

d) Es sei analog J'_r die Erweiterung auf $\underline{K}_{p,1,1}$ der Einschränkung von I_r auf $1'' \leftarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow p$. Der entsprechende $\Delta_{p,1,1}$-Raum A hat die Eigenschaft $A(1') = 0$ und $A(1'') = A$.

e) Sei $r, s \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant r < s \leqslant p+1$. Wir setzen $L_{r,s}(1') = L_{r,s}(1'') = L_{r,s}(i) = 0$ für $0 \leqslant i < r$ oder $s \leqslant i \leqslant p$, $L_{r,s}(i) = k$ für $r \leqslant i < s$, und $L_{r,s}(\varphi) = id$, wenn der Pfeil $\varphi : a \rightarrow e$ die Bedingung $L_{r,s}(a) = L_{r,s}(e) = k$ erfüllt. Die Darstellung $L_{r,s}$ ist 0-treu für $r = 0$. Der entsprechende $\Delta_{p,1,1}$-Raum A ist dann eindimensional, und $A(1') = A(1'') = 0$.

f) Schließlich bezeichnen wir mit J_{p+2} (bezw. mit J'_{p+2}) die Darstellung, derart, daß $J_{p+2}(1') = k$ (bezw. $J_{p+2}(1'') = k$) und $J_{p+2}(a) = 0$ für $a \neq 1'$ (bezw. $a \neq 1''$).

KOROLLAR. Jede Darstellung von $\underline{K}_{p,1,1}$ ist eine direkte Summe von Kopien der unzerlegbaren Darstellungen $K_{r,s}$, $1 \leqslant r < s \leqslant p+1$, I_r, $1 \leqslant r \leqslant p+1$, J_r, J'_r, $1 \leqslant r \leqslant p+2$, und $L_{r,s}$, $0 \leqslant r < s \leqslant p+1$.

3.3. KOROLLAR. Jeder Köcher der Klasse $\underline{D}_n$, $n \geqslant 4$, hat bis auf Isomorphie genau $n(n-1)$ unzerlegbare Darstellungen.

3.4. Beweis von Satz 3.1 für $p = 1$. Sei S ein Supplement von $A(1) \cap A(1') \cap A(1'')$ in A. Die Zerlegung $A = S \oplus A(1) \cap A(1') \cap A(1'')$ ist mit der $\Delta_{1,1,1}$-Filtrierung von A verträglich, und $A(1) \cap A(1') \cap A(1'')$ ist eine direkte Summe von eindimensionalen $\Delta_{1,1,1}$-Räumen. Das führt uns auf den Fall $A(1) \cap A(1') \cap A(1'') = 0$ zurück. In diesem Fall sei T ein Supplement von $A(1') \cap A(1'')$ mit der Eigenschaft $T \supset A(1)$. Die Zerlegung $A = T \oplus A(1') \cap A(1'')$ ist wieder mit der $\Delta_{1,1,1}$-Filtrierung von A verträglich. Das führt uns auf den Fall

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& \operatorname{Im} \alpha_p & \\
& \operatorname{Im} \alpha_p \alpha_{p-1} \arrow[u] & \\
& \operatorname{Im} \alpha_p \alpha_{p-1} \cdots \alpha_2 \arrow[u, dash, dotted] & \\
& \operatorname{Im} \alpha_p \cdots \alpha_1 \arrow[u] & \\
\operatorname{Im}(\alpha_p \cdots \alpha_1 \beta^{-1} 0) \arrow[ur] & & \operatorname{Im}(\alpha_p \cdots \alpha_1 \gamma^{-1} 0) \arrow[ul] \\
& \alpha_p(\alpha_{p-1} \cdots \alpha_1 \beta^{-1} 0 \cap \alpha_{p-1} \cdots \alpha_1 \gamma^{-1} 0) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \alpha_p \alpha_{p-1}(\alpha_{p-2} \cdots \alpha_1 \beta^{-1} 0 \cap \alpha_{p-2} \cdots \alpha_1 \gamma^{-1} 0) \arrow[u] & \\
& \alpha_p \cdots \alpha_2(\alpha_1 \beta^{-1} 0 \cap \alpha_1 \gamma^{-1} 0) \arrow[u, dash, dotted] & \\
& \alpha_p \cdots \alpha_2 \alpha_1(\beta^{-1} 0 \cap \gamma^{-1} 0) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

(Wir schreiben kurz α_i, β und γ statt $V(\alpha_i)$, $V(\beta)$ und $V(\gamma)$)

Bild 1.

$A(1') \cap A(1'') = 0$ und mutatis mutandis auf den Fall $A(1) \cap A(1') = A(1') \cap A(1'') = A(1'') \cap A(1) = 0$ zurück. Durch duale Betrachtungen wird man analog auf den Fall $A(1) + A(1') = A(1') + A(1'') = A(1'') + A(1) = A$ zurückgeführt. Es gilt dann $A = A(1') \oplus A(1'')$, und $A(1)$ ist der Graph $\Gamma f = \{(x, fx) \mid x \in A(1')\}$ eines Isomorphismus $f : A(1') \xrightarrow{\sim} A(1'')$. Sei $V = A(1'')$ und $B = V \oplus V$ der $\Delta_{1,1,1}$-Raum mit $B(1') = V \oplus 0$, $B(1'') = 0 \oplus V$ und $B(1) = \{(v,v) \mid v \in V\}$. Die Abbildung $(x,y) \longmapsto (f(x), y)$ liefert einen ${}_k\Delta_{1,1,1}$-Isomorphismus von A auf B. Ferner ist B eine direkte Summe von Kopien von $A_{1,2}$ (3.1).

3.5. Es ist möglich, die Struktur der $\Delta_{p,1,1}$-Räume durch ähnliche Methoden direkt zu ermitteln. Wir bevorzugen jedoch eine andere Methode, weil sie denjenigen von § 2 und § 4 nähersteht. Sei $\lozenge_{2p+2}$ die geordnete Menge mit Hasse-Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & 0' \arrow[dr] & & & & & \\
-p \arrow[r] & -p+1 \ \ldots\ -2 \arrow[r] & -1 \arrow[urr] \arrow[drr] & & & 1 \arrow[r] & 2 \ \ldots\ p-1 \arrow[r] & p \\
 & & & & 0 \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Jede Darstellung V von $\underline{K}_{p,1,1}$ induziert auf $V(p)$ die $\lozenge_{2p+2}$-Filtrierung von Bild 1.

LEMMA. *Der Funktor* $F : {}_k\underline{K}_{p,1,1} \longrightarrow {}_k\lozenge_{2p+2}$, $V \longmapsto V(p)$ *hat folgende Eigenschaften:*

a) *Jeder* $\lozenge_{2p+2}$-*Raum ist isomorph zu einem* $FV = V(p)$, *wobei* V *eine p-treue Darstellung von* $\underline{K}_{p,1,1}$ *ist.*

b) *Es seien* U, V *zwei p-treue Darstellungen von* $\underline{K}_{p,1,1}$. *Die Abbildung* $[U, V] \longrightarrow [FU, FV]$, $\varphi \mapsto F\varphi$ *ist surjektiv. Ferner ist* φ *genau dann invertierbar, wenn* $F\varphi$ *es ist.*

Unser Lemma folgt aus Korollar 3.2. Wir werden diesen Korollar direkt beweisen und benötigen dazu unser Lemma in einem Induktionsschluß. Wir beweisen zunächst das Lemma.

Bild 2.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L_{p,\,p+1} \arrow[d] & \\
 & L_{p-1,\,p+1} \arrow[d, phantom, "\vdots"] & \\
 & L_{2,\,p+1} \arrow[d] & \\
 & L_{1,\,p+1} \arrow[d] & \\
 & I_{p+1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
J'_{p+1} \arrow[dr] & & J_{p+1} \arrow[dl] \\
 & K_{p,\,p+1} \arrow[d] & \\
 & K_{p-1,\,p+1} \arrow[d, phantom, "\vdots"] & \\
 & K_{2,\,p+1} \arrow[d] & \\
 & K_{1,\,p+1} \arrow[d] & \\
 & L_{o,\,p+1} &
\end{tikzcd}
$$

Bild 3.

$$
\begin{tikzcd}
J_{p+2} \arrow[d] & & & & & & \\
I_{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_{p+1} \arrow[d] & & & & & \\
I_p \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & K_{p,p+1} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & J_p \arrow[d, phantom, "\vdots"] & & & & \\
I_3 \arrow[r] \arrow[d] & K_{3,\,p+1} \arrow[r] \arrow[d] & K_{3,p} \arrow[d] & \cdots\cdots & J_3 \arrow[d] & & \\
I_2 \arrow[r] \arrow[d] & K_{2,\,p+1} \arrow[r] \arrow[d] & K_{2,p} \arrow[d] & \cdots\cdots & K_{2,3} \arrow[r] \arrow[d] & J_2 \arrow[d] & \\
I_1 \arrow[r] & K_{1,\,p+1} \arrow[r] & K_{1,p} & \cdots\cdots & K_{1,3} \arrow[r] & K_{1,2} \arrow[r] & J_1
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Eine $\lozenge_{2p+2}$-Filtrierung kann als Spezialfall einer $\underline{I}_{2p,2}$-Filtrierung aufgefaßt werden. Infolgedessen ist jeder $\lozenge_{2p+2}$-Raum eine direkte Summe von eindimensionalen $\lozenge_{2p+2}$-Räumen (1.3), und diese bilden $2p+4$ Isomorphieklassen. Für a) genügt es deshalb nachzuweisen, dass F eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer p-treuer Darstellungen von $K_{p,1,1}$ einerseits und unzerlegbarer $\lozenge_{2p+2}$-Räume andererseits induziert. Ferner prüfe man im einzelnen nach, daß die Abbildungen $F(U, V) : [U, V] \longrightarrow [FU, FV]$ surjektiv sind, wenn U und V unzerlegbar sind (man orientiere sich dabei an Bild 2, wo U genau dann "vor" V steht, wenn es einen nichttrivialen Morphismus $U \to V$ gibt; man bemerke nebenbei, daß $[I_{p+1}, K_{p,p+1}]$ die k-Dimension 2 hat, $[FI_{p+1}, FK_{p,p+1}]$ hingegen nur die k-Dimension 1). Folglich ist auch $F(U, V) = \prod_{\alpha} \coprod_{\beta} F(U_\alpha, V_\beta)$ surjektiv, wenn $U = \coprod_{\alpha} U_\alpha$ und $V = \coprod_{\beta} V_\beta$ Zerlegungen von U und V in unzerlegbare Darstellungen sind.

Es bleibt zu zeigen, daß mit $F\varphi$ auch φ invertierbar ist. Wir führen eine "$\lozenge_{2p}$-Filtrierung" von U ein (vergl. Bild 2). Wir bezeichnen mit $U\{-p\}$ die Teilsumme der unzerlegbaren Summanden U_α von U vom Typ $L_{o,\, p+1}$, mit $U\{-p+1\}$ die Summe von $U\{-p\}$ und den $U_\alpha \cong K_{1,\, p+1}$, ..., mit $U\{-1\}$ die Summe von $U\{-2\}$ und den $U_\alpha \cong K_{p-1,\, p+1}$, mit $U\{0\}$ die Summe von $U\{-1\}$ und den $U_\alpha \cong J_{p+1}$, mit $U\{0'\}$ die Summe von $U\{-1\}$ und den $U_\alpha \cong J'_{p+1}$, mit $U\{1\}$ die Summe von $U\{0\}$, $U\{0'\}$ und den $U_\alpha \cong I_{p+1}$, mit $U\{2\}$ die Summe von $U\{1\}$ und den $U_\alpha \cong L_{1,\, p+1}$, ..., mit $U\{p\}$ die Summe von $U\{p-1\}$ und den $U_\alpha \cong L_{p-1,\, p+1}$. Entsprechend wird eine $\lozenge_{2p+2}$-Filtrierung von V definiert. Aus Bild 2 folgt unmittelbar, daß jeder Morphismus $\psi : U \to V$ für jedes $m \in \lozenge_{2p+2}$ einen Morphismus $\psi\{m\} : U\{m\} \to V\{m\}$ induziert, sowie Morphismen $U\{-p\} \to V\{-p\}$, $U\{i+1\}/U\{i\} \to V\{i+1\}/V\{i\}$ für $-p \leqslant i \leqslant -2$ und $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $(U\{0\} \cap U\{0'\})/U\{-1\} \to (V\{0\} \cap V\{0'\})/V\{-1\}$, $U\{0\}/(U\{0\} \cap U\{0'\}) \to V\{0\}/(V\{0\} \cap V\{0'\})$, $U\{0'\}/(U\{0\} \cap U\{0'\}) \to V\{0'\}/(V\{0\} \cap V\{0'\})$, $U\{1\}/(U\{0\} + U\{0'\}) \to V\{1\}/(V\{0\} + V\{0'\})$ und $U/U\{p\} \to V/V\{p\}$. Es genügt offensichtlich zu zeigen, daß diese Morphismen invertierbar sind, falls $F\psi$ es ist. Damit hat man das

Problem auf den Fall zurückgeführt, wo alle unzerlegbaren Summanden U_α, V_β vom selben Typ sind. In dem Fall sind die Abbildungen $F(U_\alpha, V_\beta)$, und folglich auch die Abbildungen $F(U, V)$ und $F(V, U)$ bijektiv. Mit anderen Worten, F ist auf den hier zu betrachtenden vollen Unterkategorien volltreu.

<u>3.6.</u> <u>Beweis von Satz</u> 3.1. Nach 2.6. und 2.7 genügt es Korollar 3.2 zu beweisen. Sei $\underline{L}$ der volle Unterköcher $p-1 \xrightarrow{\alpha_p} p$ von $\underline{K}_{p,1,1}$. Jede Darstellung V von $\underline{K}_{p,1,1}$ ist eine direkte Summe von zwei Darstellungen, wovon die erste $(p-1)$-treu ist, und die zweite an der Stelle $p-1$ verschwindet. Das entsprechende Ergebnis gilt nämlich für die Darstellungen von $\underline{K}_{p-1,1,1}$ (Induktionsvoraussetzung) und von $\underline{L}$, und V wird durch die Einschränkungen $V' = V|\underline{K}_{p-1,1,1}$ und $V'' = V|\underline{L}$ bestimmt. Wir dürfen also annehmen, daß V treu an der Stelle $p-1$ ist. Nach 3.5 gibt V' Anlaß zu einer $\Diamond_{2p}$-Filtrierung von $A = V(p-1) = V'(p-1)$. Anderseits setzen wir $A(w) = \operatorname{Ker} V(\alpha_p)$. Aus 3.5 folgt, daß V durch $A(w)$ und die $\Diamond_{2p}$-Filtrierung von A bis auf Isomorphie bestimmt wird. Mit anderen Worten, sei $\Diamond_{2p+1} = \Diamond_{2p} \cup \{w\}$, wobei w mit keinem $m \in \Diamond_{2p}$ vergleichbar ist. Aus Lemma 3.5 folgt leicht, daß der Funktor $E : {}_k\underline{K}_{p,1,1} \longrightarrow {}_k\Diamond_{2p+1}$, $V \longmapsto V(p-1)$ folgende Eigenschaften besitzt : a) Jeder $\Diamond_{2p+1}$-Raum ist isomorph zu einem $EV = V(p-1)$, wobei V $(p-1)$-treu ist; b) es seien U, V zwei $(p-1)$-treue Darstellungen von $\underline{K}_{p,1,1}$; die Abbildung $[U, V] \longrightarrow [EU, EV]$, $\varphi \longmapsto E\varphi$ ist surjektiv; ferner ist φ genau dann invertierbar, wenn $E\varphi$ es ist.

Dies führt mittels einer Induktion nach p die Darstellungstheorie von $\underline{K}_{p,1,1}$ auf die Strukturtheorie der $\Diamond_{2p+1}$-Räume zurück. Wir behaupten, daß <u>jeder $\Diamond_{2p+1}$-Raum</u> U <u>eine direkte Summe von ein- und zweidimensionalen $\Diamond_{2p+1}$-Räumen ist</u>. <u>Ferner ist jeder unzerlegbare zweidimensionale $\Diamond_{2p+1}$-Raum isomorph zu</u> $C = k^2$ <u>mit</u> $C(i) = 0$ <u>für</u> $i < 0$, $C(i) = k^2$ <u>für</u> $i > 0$, $C(0) = k(1, 0)$, $C(0') = k(0,1)$ <u>und</u> $C(w) = k(1,1)$. Daraus folgt Korollar 3.2 dann leicht. Die Darstellung $K_{p,p+1}$ entspricht zum Beispiel dem $\Diamond_{2p+1}$-Raum C.

Die Struktur der $\Diamond_{2p+1}$-Räume läßt sich wie folgt ermitteln. Sei S ein Supplement von $U(-p+1) \cap U(w)$ im U. Die Zerlegung $U = S \oplus (U(-p+1) \cap U(w))$ ist mit der $\Diamond_{2p+1}$-Filtrierung verträglich. Für die induzierte Filtrierung ist $U(-p+1) \cap U(w)$ eine direkte Summe von eindimensionalen $\Diamond_{2p+1}$-Räumen. Dies führt uns auf den Fall $U(-p+1) \cap U(w) = 0$ zurück. Sei dann T ein Supplement von $U(-p+1)$ in U mit der Eigenschaft $T \supset U(w)$. Die Zerlegung $U = T \oplus U(-p+1)$ ist wiederum mit der $\Diamond_{2p+1}$-Filtrierung verträglich, und $U(-p+1)$ ist eine direkte Summe von eindimensionalen $\Diamond_{2p+1}$-Räumen. Dies führt uns auf die den Fall $U(-p+1) = 0$ zurück. Durch ähnliche Betrachtungen wird man auf die Fälle $U(-p+2) = 0, \ldots, U(-1) = 0$, sowie durch duale Betrachtungen auf die Fälle $U(p-1) = U, \ldots, U(1) = U$ zurückgeführt. Dann wird die Filtrierung nur noch durch $U(0)$, $U(0')$ und $U(w)$ bestimmt, und unsere Behauptung folgt aus 3.4.

<u>3.7.</u> Jede Darstellung V von $\underline{K}_{p,1,1}$ gibt Anlaß zu folgender $\underline{I}_{p+1,\,2}$-Filtrierung von $V(1')$, die im § 4 eine wesentliche Rolle spielt.

$$\begin{tikzcd}
\beta(\operatorname{Ker} \alpha_1) \arrow[r] & \beta(\operatorname{Ker} \alpha_2\alpha_1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \beta(\operatorname{Ker} \alpha_p\cdots\alpha_1) \arrow[r] & \beta\, V(0) \\
\beta(\operatorname{Ker} \gamma \cap \operatorname{Ker} \alpha_1) \arrow[r] \arrow[u] & \beta(\operatorname{Ker} \gamma \cap \operatorname{Ker} \alpha_2\alpha_1) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \beta(\operatorname{Ker} \gamma \cap \operatorname{Ker} \alpha_p\cdots\alpha_1) \arrow[r] \arrow[u] & \beta \operatorname{Ker} \gamma \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dabei schreiben wir kurz α_i, β und γ statt $V(\alpha_i)$, $V(\beta)$ und $V(\gamma)$.

<u>SATZ</u>. <u>Der Funktor</u> $G : V \longmapsto V(1')$ <u>liefert eine Äquivalenz zwischen der vollen Unterkategorie von</u> ${}_k\underline{K}_{p,1,1}$ <u>bestehend aus allen</u> $1'$-<u>treuen Darstellungen und der Kategorie</u> ${}_k\underline{I}_{p+1,\,2}$.

<u>Beweis.</u> Jeder $\underline{I}_{p+1,\,2}$-Raum ist eine direkte Summe von eindimensionalen $\underline{I}_{p+1,\,2}$-Räumen. Wir kennen also bis auf Isomorphie alle $\underline{I}_{p+1,\,2}$-Räume, sowie alle $1'$-treuen Darstellungen (3.2). Es ist folglich leicht nachzuweisen, daß G eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von unzerlegbaren Objekten, und folglich zwischen allen Isomorphieklassen liefert. Es bleibt demnach zu zeigen, daß die Abbildungen $[U, V] \to [GU, GV]$, $\varphi \mapsto G\varphi$ bijektiv sind. Wie im ersten Teil des

Beweises von 3.5 genügt es dies nachzuweisen, falls U und V unzerlegbar sind. Dies aber folgt aus der Bemerkung, daß $[U, V]$ null oder eindimensional ist, und zwar je nach dem, ob U in Bild 3 nach oder vor V steht.

4. Darstellungen von $\underline{K}_{p,2,1}$.

4.1. Sei $\underline{M}$ der volle Unterköcher $2' \xleftarrow{\beta_2} 1'$ von $\underline{K}_{p,2,1}$. Jede Darstellung V von $\underline{K}_{p,2,1}$ ist die direkte Summe einer $1'$-treuen Darstellung und einer Darstellung, die an der Stelle $1'$ verschwindet; denn dies gilt auch für die Darstellungen von $\underline{K}_{p,1,1}$ und von $\underline{M}$, und V wird offensichtlich durch $V' = V|\underline{K}_{p,1,1}$ und $V'' = V|\underline{M}$ bestimmt. Wir dürfen also annehmen, daß V $1'$-treu ist. Nach 3.7 gibt V' Anlaß zu einer $\underline{I}_{p+1,2}$-Filtrierung von $A = V'(1') = V(1')$. Wir setzen anderseits $A(w) = \operatorname{Ker} V(\beta_2)$. Aus 3.7 folgt, daß V durch $A(w)$ und die $\underline{I}_{p+1,2}$-Filtrierung von A bis auf Isomorphie bestimmt wird. Mit anderen Worten, sei $\mathcal{O}_{2p+3} = \underline{I}_{p+1,2} \cup \{w\}$, wobei w mit keinem $m \in \underline{I}_{p+1,2}$ vergleichbar ist. $A(w)$ und V' induzieren eine $\mathcal{O}_{2p+3}$-Filtrierung auf $V(1')$. Ferner gilt der

SATZ. Der Funktor $V \mapsto V(1')$ liefert eine Äquivalenz zwischen der vollen Unterkategorie von $_k\underline{K}_{p,2,1}$, bestehend aus den $1'$-treuen Darstellungen und der Kategorie $_k\mathcal{O}_{2p/3}$.

Wir werden die Struktur der $\mathcal{O}_{2p+3}$-Räume für $p \leqslant 4$ ermitteln, und folglich die Struktur der Darstellungen von $\underline{K}_{p,2,1}$, $p \leqslant 4$, sowie diejenige der $\Delta_{p,2,1}$-Räume, $p \leqslant 4$. In der Klassifizierung der $\Delta_{p,2,1}$-Räume genügt es natürlich, die unzerlegbaren Räume der Dimension $\geqslant p+1$ anzugeben. In einem $\Delta_{p,2,1}$-Raum A der Dimension $\leqslant p$ gilt nämlich entweder $A(1) = 0$, oder $A(i) = A(i+1)$ für ein i, oder $A(p) = A$. Folglich ergibt sich die Struktur von A aus der Struktur der $\Delta_{p-1,2,1}$-Räume.

Ferner kann man jedem $\Delta_{p,2,1}$-Raum A mit den Unterräumen

$$A(1) \subset A(2) \subset \dots \subset A(p), \quad A(1') \subset A(2'), \quad A(1'')$$

den dualen $\Delta_{p,2,1}$-Raum ${}^tA$ mit den Unterräumen

$$A(p)^{\perp} \subset \dots \subset A(2)^{\perp} \subset A(1)^{\perp}, \quad A(2')^{\perp} \subset A(1')^{\perp}, \quad A(1'')^{\perp}$$

zuordnen.

4.2. SATZ. Jede Darstellung eines Köchers der Klasse $\underline{\underline{E}}_6$ ist eine direkte Summe von endlich dimensionalen unzerlegbaren Darstellungen. Jeder Köcher der Klasse $\underline{\underline{E}}_6$ hat bis auf Isomorphie genau 36 *unzerlegbare Darstellungen.*

Jeder $\Delta_{2,2,1}$*-Raum ist eine direkte Summe von unzerlegbaren* $\Delta_{2,2,1}$*-Räumen der Dimension* $\leqslant 3$. *Es gibt bis auf Isomorphie genau* 2 *unzerlegbare* $\Delta_{2,2,1}$*-Räume der Dimension* 3, *nämlich* M *und der duale Raum* ${}^tM$, *wobei*

$$M = k^3,\ M(1) = kx0^2 \subset M(2) = k^2x0,\quad M(1') = 0^2xk \subset M(2') = 0xk^2$$

und $M(1") = k(1,1,1)$.

Beweis. Sei A ein $\square_7$-Raum. Die Filtrierung wird durch Unterräume $A(w)$, $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(1')$, $A(2')$ und $A(3')$, die folgenden Inklusionen unterworfen sind, gegeben :

$$\begin{tikzcd} A(1') \arrow[r] & A(2') \arrow[r] & A(3') \\ A(1) \arrow[r] \arrow[u] & A(2) \arrow[r] \arrow[u] & A(3). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Sei zunächst S ein Supplement von $A(w) \cap A(1)$. Die Zerlegung $A = S \oplus A(w) \cap A(1)$ ist mit der $\square_7$-Filtrierung von A verträglich. Für die induzierte Filtrierung ist $A(w) \cap A(1)$ eine direkte Summe von eindimensionalen $\square_7$-Räumen, und die entsprechenden unzerlegbaren Darstellungen von $\underline{K}_{2,2,1}$ sind isomorph zu $\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 0 & & \\ 0 & k \arrow[l] & k \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$.

Dies führt uns auf den Fall $A(w) \cap A(1) = 0$ zurück. Sei dann T ein Supplement von $A(1)$ mit der Eigenschaft $T \supset A(w)$. Die Zerlegung $A = T \oplus A(1)$ ist wiederum mit der $\square_7$-Filtrierung von A verträglich, $A(1)$ ist eine direkte Summe von eindimensionalen $\square_7$-Räumen, und die entsprechenden Darstellungen von $\underline{K}_{2,2,1}$ sind isomorph zu $\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 0 & & \\ k & k \arrow[l] & k \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$.

Dies führt uns auf den Fall $A(1) = 0$ zurück. Durch duale Betrachtungen wird man auf den Fall $A(3') = A$ zurückgeführt. Dabei werden unzerlegbare Darstellungen von $\underline{K}_{2,2,1}$, die an der Stelle 0 verschwinden, "abgespalten".

Wir nehmen also jetzt an, daß $A(1) = 0$ und $A(3') = A$. Wir vergessen zunächst den Unterraum $A(2')$ und betrachten lediglich die induzierte $\Delta_{2,1,1}$-Filtrierung

$$A(2) \subset A(3) \quad , \quad A(1') \; , \; A(w) \; .$$

Wir zerlegen A in eine direkte Summe von $\Delta_{2,1,1}$-Räumen und bezeichnen mit R die Teilsumme der Summanden U , derart, daß $U(1') + U(2) = U$. Sei Q die komplementäre Teilsumme. Wegen $R = R(1)) + R(2) \subset A(2')$ ist die Zerlegung $A = Q \oplus R$ verträglich mit der $\square_7$-Filtrierung von A , und jeder unzerlegbare $\Delta_{2,1,1}$-Summand U von R ist auch ein $\square_7$-Summand. Man weist leicht nach, daß der entsprechende $\Delta_{2,2,1}$-Raum eine Dimension $\leqslant 2$ hat oder isomorph zu ${}^tM$ ist, falls $\mathrm{Dim}\ U = 2 = \mathrm{Dim}\ U(3)$.

Dies führt uns auf den Fall $R = 0$ zurück. Der Liste der unzerlegbaren $\Delta_{2,1,1}$-Räume (3.1) entnehmen wir jedoch, daß aus $U(2) \neq 0$ die Gleichung $U(1') + U(2) = U$ folgt. Aus $R = 0$ folgt deshalb $A(2) = 0$. In diesem Fall wird die $\square_7$-Filtrierung von A durch $A(1') \subset A(2')$, $A(3)$ und $A(w)$, also wiederum durch eine $\Delta_{2,1,1}$-Filtrierung bestimmt. Wir zerlegen A diesbezüglich in eine direkte Summe von $\Delta_{2,1,1}$-Räumen. Sei U ein unzerlegbarer Summand. Der entsprechende $\Delta_{2,2,1}$-Raum hat eine Dimension $\leqslant 2$ oder ist isomorph zu M, falls $\dim\ U = 2 = \dim U(2')$.

4.3. SATZ. *Jede Darstellung eines Köchers der Klasse $\underline{\underline{E}}_7$ ist eine direkte Summe von endlichdimensionalen unzerlegbaren Darstellungen. Jeder Köcher der Klasse $\underline{\underline{E}}_7$ hat bis auf Isomorphie genau 63 unzerlegbare Darstellungen.*

Jeder $\Delta_{3,2,1}$-Raum ist eine direkte Summe von unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Räumen der Dimension $\leqslant 4$. Es gibt bis auf Isomorphie genau 3 unzerlegbare $\Delta_{3,2,1}$-Räume der Dimension 4, nämlich N_1, ${}^tN_1$ und $N_2 \cong {}^tN_2$, wobei

- $N_1 = k^4$, $N_1(1) = kx0^3 \subset N_1(2) = k^2x0^2 \subset N_1(3) = k^3x0$,
  $N_1(1') = 0^2xk^2 \subset N_1(2') = 0xk^3$ <u>und</u> $N_1(1'') = k(1,1,1,0) \oplus k(0,1,1,1)$.
- $N_2 = k^4$, $N_2(1) = kx0^3 \subset N_2(2) = k^2x0^2 \subset N_2(3) = k^3x0$,
  $N_2(1') = 0^3xk \subset N_2(\dot{2}') = 0xk^3$ <u>und</u> $N_2(1'') = k(1,1,1,0) \oplus k(0,0,1,1)$.

<u>Beweis.</u> Sei A ein $\mathfrak{a}_9$-Raum mit den Unterräumen $A(w)$ und

$$\begin{array}{ccccccc} A(1') & \to & A(2') & \to & A(3') & \to & A(4') \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A(1) & \to & A(2) & \to & A(3) & \to & A(4) \end{array}$$

Wie in 4.2 führt man die Klassifizierung der $\mathfrak{a}_9$-Räume zunächst auf den Fall $A(1) = 0$ und $A(4') = A$ zurück. Unter dieser Voraussetzung betrachten wir die induzierte $\Delta_{3,1,1}$-Filtrierung

$$A(2) \subset A(3) \subset A(4)\ ,\quad A(1')\ ,\ A(w)$$

von A und zerlegen A diesbezüglich in eine direkte Summe von unzerlegbaren $\Delta_{3,1,1}$-Räumen. Sei R die Teilsumme der Summanden U mit der Eigenschaft $U(1') + U(2) = U$ und S die komplementäre Teilsumme. Wegen $R = R(1') + R(2) \subset A(2')$ ist die Zerlegung $A = R \oplus S$ verträglich mit der $\mathfrak{a}_9$-Filtrierung von A, und jeder unzerlegbare $\Delta_{3,1,1}$-Summand U von R ist auch ein $\mathfrak{a}_9$-Summand. Man weist leicht nach, daß der entsprechende $\Delta_{3,2,1}$-Raum eine Dimension $\leqslant 3$ hat.

Dies führt uns auf den Fall $R = 0$ zurück. Der Liste der unzerlegbaren $\Delta_{3,1,1}$-Räume (3.1) entnehmen wir, daß aus $U(2) \neq 0$ die Gleichung $U(1') + U(2) = U$ folgt. Aus $R = 0$ folgt deshalb $A(2) = 0$.

Durch die folgenden dualen Betrachtungen führen wir den Beweis auf den Fall $A(3') = A$ zurück. Wir betrachten die induzierte $\Delta_{3,1,1}$-Filtrierung

$$A(1') \subset A(2') \subset A(3'),\quad A(4),\ A(w)$$

und zerlegen A diesbezüglich in unzerlegbare Summanden. Sei R' die Teilsumme der Summanden U mit der Eigenschaft $U(3') \cap U(4) = 0$ und S' die komplementäre Teilsumme. Wegen $A(3) \subset A(3') \cap A(4') \subset S'$ ist die Zerlegung $A = R' \oplus S'$ mit der $\mathfrak{a}_9$-Filtrierung von A verträglich. Die $\Delta_{3,2,1}$-Räume, die den unzerlegbaren Summanden von R' entsprechen, haben alle eine Dimension $\leqslant 2$.

Dies führt uns auf den Fall $R' = 0$ zurück. Da aus $U(3') \neq U$ die Bedingung $U(3') \cap U(4) = 0$ folgt, so folgt aus $R' = 0$ auch $A(3') = A$. Im Fall $A(2) = 0$ und $A(3') = A$ wird die $\mathcal{D}_9$-Filtrierung von A durch die $\Delta_{2,2,1}$-Filtrierung

$$A(3) \subset A(4)\ ,\ A(1') \subset A(2')\ ,\ A(w)$$

gegeben. Wir dürfen zusätzlich wegen 4.3 annehmen, daß A ein unzerlegbarer $\Delta_{2,2,1}$-Raum ist. Sei V die entsprechende Darstellung von $\underline{K}_{3,2,1}$ und $V(1)$ der induzierte $\Delta_{3,2,1}$-Raum. Für $\mathrm{Dim}\ A = 1$ gilt $\mathrm{Dim}\ V(1) \leqslant 2$. Für $\mathrm{Dim}\ A = 2$ gilt ebenso $\mathrm{Dim}\ V(1) \leqslant 3$, falls $\mathrm{Dim}\ A(4) = 1$ oder $\mathrm{Dim}\ A(2') = 1$, und $V(1) \cong N_1$ sonst.
Für $A \cong M$ in ${}_k\Delta_{2,2,1}{}'$ gilt $V(1) \cong N_2$, für $A \cong {}^tM$ gilt $V(1) \cong {}^tN_1$.

<u>4.4.</u> <u>SATZ. Jede Darstellung eines Köchers der Klasse $\underline{\underline{E}}_8$ ist eine direkte Summe von endlichdimensionalen unzerlegbaren Darstellungen. Jeder Köcher der Klasse $\underline{\underline{E}}_8$ hat bis auf Isomorphie genau 120 unzerlegbare Darstellungen.</u>

<u>Jeder $\Delta_{4,2,1}$-Raum ist eine direkte Summe von unzerlegbaren $\Delta_{4,2,1}$-Räumen der Dimension $\leqslant 6$. Es gibt bis auf Isomorphie genau 6 unzerlegbare $\Delta_{4,2,1}$-Räume der Dimension 5 P_1, P_2, P_3, ${}^tP_3$, ${}^tP_2$ und ${}^tP_1$, und 5 unzerlegbare $\Delta_{4,2,1}$-Räume der Dimension 6, Q_1, Q_2, $Q_3 \cong {}^tQ_3$, ${}^tQ_2$ und ${}^tQ_1$, wobei</u>

- $P_1 = k^5$, $P_1(1) = kx0^4 \subset P_1(2) = k^2x0^3 \subset P_1(3) = k^3x0^2 \subset P_1(4) = k^4x0$, $P_1(1') = 0^4xk \subset P_1(2') = 0^2xk^3$, $P_1(1'') = k(0,1,0,1,0) + k(1,1,1,0,1)$.
- $P_2 = k^5$, $P_2(1) = kx0^4 \subset P_2(2) = k^2x0^3 \subset P_2(3) = k^3x0^2 \subset P_2(4) = k^4x0$, $P_2(1') = 0^3xk^2 \subset P_2(2') = 0^2xk^3$, $P_2(1'') = k(0,1,0,0,1) + k(1,1,1,1,0)$.
- $P_3 = k^5$, $P_3(1) = kx0^4 \subset P_3(2) = k^2x0^3 \subset P_3(3) = k^3x0^2 \subset P_3(4) = k^4x0$, $P_3(1') = 0^4xk \subset P_3(2') = 0^2xk^3$,
  $P_3(1'') = k(0,1,0,0,1) + k(1,1,1,0,0) + k(1,0,1,1,0)$.

- $Q_1 = k^6$, $Q_1(1) = kx0^5 \subset Q_1(2) = k^2x0^4 \subset Q_1(3) = k^3x0^3 \subset Q_1(4) = k^4x0^2$,
  $Q_1(1') = 0^4xk^2 \subset Q_1(2') = 0^2xk^4$,
  $Q_1(1'') = k(0,1,0,0,1,0) + k(0,0,0,1,0,1,) + k(1,1,1,1,0,0)$.
- $Q_2 = k^6$, $Q_2(1) = kx0^5 \subset Q_2(2) = k^2x0^4 \subset Q_2(3) = k^3x0^3 \subset Q_2(4) = k^5x0$,
  $Q_2(1') = 0^4xk^2 \subset Q_2(2') = 0^2xk^4$,
  $Q_2(1'') = k(0,1,0,0,0,1) + k(1,0,1,1,0,0) + k(1,1,1,0,1,0)$.
- $Q_3 = k^6$, $Q_3(1) = kx0^5 \subset Q_3(2) = k^2x0^4 \subset Q_3(3) = k^4x0^2 \subset Q_3(4) = k^5x0$,
  $Q_3(1') = 0^4xk^2 \subset Q_3(2') = 0^2xk^4$,
  $Q_3(1'') = k(0,1,0,0,0,1) + k(1,0,1,0,1,0) + k(1,1,1,1,0,0)$.

<u>Beweis.</u> a) Sei A ein $\square_{11}$-Raum mit den Unterräumen $A(w)$ und

$$\begin{array}{ccccccccc}
A(1') & \rightarrow & A(2') & \rightarrow & A(3') & \rightarrow & A(4') & \rightarrow & A(5') \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A(1) & \rightarrow & A(2) & \rightarrow & A(3) & \rightarrow & A(4) & \rightarrow & A(5)
\end{array}$$

Wie in 4.3 und 4.2 führt man zunächst die Klassifizierung der $\square_{11}$-Räume auf den Fall $A(1) = A(2) = 0$ und $A(4') = A(5') = A$ zurück. Dabei werden direkte Summanden der Dimension $\leqslant 2$ von A "abgespalten". Die Dimensionen der entsprechenden $\Delta_{4,2,1}$-Räume sind $\leqslant 4$. Wir nehmen von jetzt ab an, daß $A(1) = A(2) = 0$ und $A(4') = A(5') = A$.

b) Wir betrachten die induzierte $\Delta_{3,2,1}$-Filtrierung

$$A(1') \subset A(2') \subset A(3'),\quad A(4) \subset A(5)\ ,\quad A(w)$$

von A. Die unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Summanden U von A mit der Eigenschaft $U(3') \cap U(4) = 0$ sind auch $\square_{11}$-Summanden von A. Die Dimension der entsprechenden unzerlegbaren $\Delta_{4,2,1}$-Räume B ist in folgenden Fällen $\geqslant 5$: für $U \cong {}^tN_1$ (4.3) gilt $B \cong P_1$, für $U \cong N_2$ gilt $B \cong Q_1$.

Wir nehmen von jetzt ab an, daß für jeden unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Summanden U von A die Bedingung $U(3') \cap U(4) \neq 0$ erfüllt ist.

Der Liste der unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Räume (4.3) entnimmt man leicht, daß $U(3') \cap U(4)$ dann die Dimension 1 hat. Für $U \cong N_1$ gilt jedoch $U(3') \neq U$. Aus unserer Voraussetzung folgt also diesmal leider nicht, daß $A(3') = A$. Unser Beweis wird deshalb etwas länger als in 4.2 und 4.4 sein. Wir gehen von einer Zerlegung von A in unzerlegbare $\Delta_{3,2,1}$-Räume aus und spalten zunächst die "unbequemen" Summanden ab:

c) Sei R_1 die Teilsumme der unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Summanden U_1, derart, daß $\operatorname{Dim} U_1 = 1$, $U_1 = U_1(3') = U_1(4)$ und $U_1(2') = U_1(w) = 0$. Sei S_1 die komplementäre Teilsumme und C ein beliebiger $\Delta_{3,2,1}$-Raum. Offensichtlich wird jede lineare Abbildung $U_1 = U_1(3') \cap U_1(4) \to B(3') \cap B(4)$ durch einen Morphismus $U_1 \to B$ von ${}_k\Delta_{3,2,1}$ induziert. Sei g ein linearer Endomorphismus von $R_1 \oplus (S_1(3') \cap S_1(4))$ mit Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$, derart, daß $g(R_1)$ ein Supplement von $A(3) \cap S_1$ in $A(3)$ enthält. g wird von einem $\Delta_{3,2,1}$-Automorphismus g' von $R_1 \oplus S_1$ mit Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f' & 1 \end{pmatrix}$ induziert. Sei $R'_1 = g'(R_1)$. Die $\Delta_{3,2,1}$-Zerlegung $A = R'_1 \oplus S_1$ besitzt die zusätzliche Eigenschaft $A(3) = (R'_1 \cap A(3)) \oplus (S_1 \cap A(3))$ und liefert folglich eine $\mathfrak{a}_{11}$-Zerlegung von A. Dabei ist R'_1 offensichtlich eine direkte Summe von eindimensionalen $\mathfrak{a}_{11}$-Räumen. Wir dürfen folglich von jetzt ab zusätzlich annehmen, daß $R_1 = 0$.

d) In diesem Fall, sei R_2 die Teilsumme der unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Summanden U_2 von A von folgendem Typ: $U_2 = k^2 = U_2(3')$, $U_2(1') = 0$, $U_2(2') = 0 \times k$, $U_2(4) = U_2(5) = k \times 0$ und $U_2(w) = k(1,1)$.

Sei S_2 die komplementäre Teilsumme. Wegen

$$A(3) \subset (R_2(3') \cap R_2(4)) \oplus (S_2(3') \cap S_2(4'))$$

gibt es einen linearen Automorphismus g dieser letzten Summe mit Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$, derart, daß $g(R_2(3') \cap R_2(4))$ ein Supplement von $S_2 \cap A(3)$ in $A(3)$ enthält. Dabei wird f von einem Morphismus $f' : R_2 \to S_2$ aus ${}_k\Delta_{3,2,1}$ induziert, weil für beliebige unzerlegbare $\Delta_{3,2,1}$-Summanden U von A jede lineare Abbildung $U_2(3') \cap U_2(4) \to U(3') \cap U(4)$ von einem Morphismus $U_2 \to U$ induziert wird (beachte, daß $U \not\cong U_1$, $U(3') \cap U(4) \neq 0$ ..., und benütze die in 4.3 gegebene Liste der unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Räume). Sei R_2' das Bild von R_2 unter dem Automorphismus $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f' & 1 \end{pmatrix}$ von $R_2 \oplus S_2 = A$. Die Zerlegung $A = R_2' \oplus S_2$ ist mit der gesamten $\mathfrak{a}_{11}$-Filtrierung verträglich. Wir untersuchen zunächst den $\mathfrak{a}_{11}$-Summanden R_2' und gehen von einer Zerlegung von R_2' in unzerlegbare $\Delta_{3,2,1}$-Räume aus. Diese induziert eine Zerlegung von $R_2'(3') \cap R_2'(4)$ in eindimensionale Vektorräume. Es gibt infolgedessen einen linearen Automorphismus g von $R_2'(3) \cap R_2'(4)$, der eine Teilsumme dieser Zerlegung auf $R_2'(3)$ abbildet. Dieses g wird von einem $\Delta_{3,2,1}$-Automorphismus g' von R_2' induziert (der Funktor $W \mapsto W(3') \cap W(4)$ ist volltreu auf den direkten Summen von Kopien von U_2). Das Bild der gegebenen Zerlegung von R_2' unter g' ist mit der $\mathfrak{a}_{11}$-Filtrierung von R_2' verträglich. Die Summanden sind von den folgenden 2 Typen $U_2^{\,o}$ und $U_2^{\,1}$:

$$U_2^{\,o}(i) = U_2^{\,1}(i) = U_2(i) \quad \text{für} \quad i = 1',\ 2',\ 3',\ 4,\ 5,\ w,\ U_2^{\,o}(3) = 0$$

$$\text{und} \quad U_2^{\,1}(3) = U_2^{\,1}(4) = kx0.$$

Die Dimensionen der entsprechenden $\Delta_{4,2,1}$-Räume ist $\leqslant 4$. Deshalb dürfen wir von jetzt ab zusätzlich annehmen, daß $R_2 = 0$.

e) In diesem Fall betrachten wir die $\Delta_{3,2,1}$-Summanden U_3 von A von folgendem Typ.

$$U_3 = k^3 = U_3(3'),\ U_3(1') = 0^2xk \subset U_3(2') = 0xk^2,$$

$$U_3(4) = kx0^2 \subset U_3(5) = k^2x0,\ U_3(w) = k(1,1,1).$$

Sei U ein beliebiger unzerlegbarer $\Delta_{3,2,1}$-Summand von A. Der in 4.3 gegebenen Liste entnehmen wir, daß jede lineare Abbildung $U_3(3') \cap U_3(4) \to U(3') \cap U(4)$ von einem $\Delta_{3,2,1}$-Morphismus $U_3 \to U$ induziert wird. Wie in c) und d) folgt daraus die Existenz einer $\mathfrak{a}_{11}$-Zerlegung $A = R_3' \oplus S_3$ von A mit der Eigenschaft, daß der unterliegende $\Delta_{3,2,1}$-Raum von R_3' eine direkte Summe von Kopien von U_3 ist, während S_3 keinen solchen Summanden enthält. Ferner zeigt man wie in d), daß R_3' eine direkte Summe von unzerlegbaren $\mathfrak{a}_{11}$-Räumen von den folgenden zwei Typen ist:

- U_3^{o} hat U_3 als unterliegenden $\Delta_{3,2,1}$-Raum und $U_3^{o}(3) = 0$.
- U_3^{1} hat U_3 als unterliegenden $\Delta_{3,2,1}$-Raum und $U_3^{1}(3) = U_3^{1}(3') \cap U_3^{1}(4) = kx0^2$.

Der zu U_3^{o} assoziierte $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist isomorph zu P_2. Im Fall U_3^{1} hat $V(0)$ die Dimension 4.

Wir nehmen von jetzt ab zusätzlich an, daß kein unzerlegbarer $\Delta_{3,2,1}$-Summand von A zu U_3 isomorph ist.

f) In diesem Fall betrachten wir die zu N_1 isomorphen $\Delta_{3,2,1}$-Summanden U_4 von A. Sei U ein beliebiger unzerlegbarer $\Delta_{3,2,1}$-Summand von A. Der in 4.3 gegebenen Liste entnehmen wir, daß jede lineare Abbildung $U_4(3') \cap U_4(4) \to U(3') \cap U(4)$ von einem $\Delta_{3,2,1}$-Morphismus $U_4 \to U$ induziert wird. Wie in c), d) und e) folgt daraus die Existenz einer $\mathfrak{a}_{11}$-Zerlegung $A = R_4' \oplus S_4$ mit der Eigenschaft, daß der unterliegende $\Delta_{3,2,1}$-Raum von R_4' eine direkte Summe von Kopien von N_1 ist, während S_4 keinen solchen Summanden enthält. Ferner zeigt man wie in d) und e), daß R_4' eine direkte Summe von unzerlegbaren $\mathfrak{a}_{11}$-Räumen von den zwei folgenden Typen ist:

- U_4^{o} hat U_4 als unterliegenden $\Delta_{3,2,1}$-Raum und $U_4^{o}(3) = 0$.

Der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist Q_2.

- U_4^{1} hat U_4 als unterliegenden $\Delta_{3,2,1}$-Raum und $U_4^{1}(3) = U_4^{1}(3') \cap U_4^{1}(4)$.

Der entsprechende $\Delta_{4.2.1}$-Raum $V(0)$ ist P_3.

g) Wir nehmen von jetzt ab an, daß $R_4' = 0$, also insbesondere, daß A keinen "unbequemen" $\Delta_{3,2,1}$-Summanden vom Typ N_1 enthält. Der Liste der unzerlegbaren $\Delta_{3,2,1}$-Räume entnehmen wir jedoch, daß ein unzerlegbarer $\Delta_{3,2,1}$-Raum $U \not\cong N_1$ mit der Eigenschaft $U(3') \cap U(4) \neq 0$ auch die Eigenschaft $U(3') = U$ hat. Folglich gilt unter unseren Voraussetzungen $A(3') = A$, und wir können nun den Beweis wie in 4.2 und 4.3 beenden. Es gilt $A(1) = A(2) = 0$ und $A(3') = A(4') = A(5') = 0$. Die $\mathfrak{a}_{11}$-Filtrierung von A wird also durch die Unterräume

$$A(3) \subset A(4) \subset A(5)\ ,\ A(1') \subset A(2')\ ,\ A(w)$$

bestimmt, und wir dürfen nach 4.3 annehmen, daß A für diese neue $\Delta_{3,2,1}$-Filtrierung unzerlegbar ist. Wir geben hier nur die verschiedenen Fälle an, wo der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ eine Dimension $\geqslant 5$ hat:

- $A = k^3$, $A(3) = 0$, $A(4) = kx0^2 \subset A(5) = k^2x0$, $A(1') = 0^2xk \subset A(2') = 0xk^2$, $A(w) = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$.

  Der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist ${}^tP_3$.
- $A = k^3 = A(5)$, $A(3) = kx0^2 \subset A(4) = k^2x0$, $A(1') = 0^2xk \subset A(2')=0xk^2$, $A(w) = k(1,1,1)$.

  Der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist ${}^tP_2$.
- A, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$, $A(1')$, $A(2')$ wie im vorigen Fall, $A(w) = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$.

  Der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist ${}^tP_1$.
- $A \cong N_1$. Der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist ${}^tQ_1$.
- $A \cong N_2$. Der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist ${}^tQ_2$.
- $A \cong {}^tN_1$. Der entsprechende $\Delta_{4,2,1}$-Raum $V(0)$ ist Q_3.

5. Beweis von Satz 1.2.

Wir dürfen offensichtlich die Zusammenhangskomponenten von $\underline{K}$ einzeln betrachten. Wir nehmen deshalb an, daß $\underline{K}$ zusammenhängend, und folglich nicht leer ist. Es bleibt zu zeigen, daß die Bedingung von 1.2 notwendig ist. Wir nehmen deshalb zusätzlich an, daß $\underline{K}$ nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer endlich dimensionaler k-linearen Darstellungen besitzt. Wir bezeichnen mit X eine Unbestimmte, mit $\underline{\mathrm{Mod}}_{k[X]}$ die Kategorie der $k[X]$-Moduln, mit M einen $k[X]$-Modul und mit f den k-linearen Endomorphismus $m \mapsto Xm$ von M (vergl. [2], [3]).

5.1. $\underline{K}$ enthält keinen Zyklus, d.h. keinen Unterköcher $\underline{Z}$ der Form

$$\begin{tikzcd}
 & n \arrow[r, "\alpha_1"] & 1 \arrow[dr, dash, "\alpha_2"] & \\
n-1 \arrow[ur, dash, "\alpha_n"] \arrow[dr, dash, "\alpha_{n-1}"'] & & & 2 \arrow[dl, dash, "\alpha_3"] \\
 & n-2 \;\ldots\ldots & 3 &
\end{tikzcd} \qquad , n > 1.$$

Sonst betrachte man nämlich den Funktor $\underline{\mathrm{Mod}}_{k[X]} \longrightarrow {}_k\underline{Z}$, $(M, f) \mapsto V$ mit $V(i) = M$, $1 \leq i \leq n$, $V(\alpha_i) = \mathrm{id}$ für $i \neq 1$, und $V(\alpha_1) = f$. Der induzierte Funktor $\underline{\mathrm{Mod}}_{k[X]} \to {}_k\underline{K}$, $(M, f) \mapsto V^{\underline{K}}$ (2.1) ist additiv und volltreu. Folglich hat mit $\mathrm{Mod}_{k[X]}$ auch ${}_k\underline{K}$ undendlich viele unzerlegbare endlichdimensionale Objekte.

<u>5.2.</u> $\underline{K}$ enthält keinen Doppelpfeil, d.h. keinen Unterköcher $\underline{D}$ der Form $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$. Sonst betrachte man nämlich den Funktor $\underline{\mathrm{Mod}}_{k[X]} \to {}_k\underline{D}$, $(M, f) \mapsto V$ mit $V(1) = V(2) = M$, $V(\alpha) = \mathrm{id}$ und $V(\beta) = f$. Der induzierte Funktor $(M, f) \mapsto V^{\underline{K}}$ ist additiv und volltreu...

<u>5.3.</u> $\underline{K}$ enthält keinen Unterköcher $\underline{L}$ der Form

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
a \arrow[dr, dash, "\alpha"] & & & & & & & c \\
 & 1 \arrow[r, dash, "\varphi_1"] & 2 \;\ldots\ldots & n \arrow[r, dash, "\varphi_n"] & n+1 \arrow[urrr, dash, "\gamma"] \arrow[drrr, dash, "\delta"'] & & & \\
b \arrow[ur, dash, "\beta"] & & & & & & & d
\end{tikzcd} \qquad , n > 0.$$

Wir nehmen zum Beispiel an, daß $\underline{s}_{\underline{L}}(\alpha) = \underline{s}_{\underline{L}}(\beta) = 1$ und $\underline{s}_{\underline{L}}(\gamma) = \underline{s}_{\underline{L}}(\delta) = n+1$ (sonst ist der Beweis analog, vergl. 2.8). Der Funktor $(M, f) \mapsto V$ mit $V(1) = V(2) = \ldots = V(n+1) = M \oplus M$, $V(a) = M \oplus 0$, $V(b) = 0 \oplus M$, $V(c) = \{(m, m) \mid m \in M\}$, $V(d) = \{(m, fm) \mid m \in M\}$, $V(\varphi_i) = \mathrm{id}$, $1 \leq i \leq n$, $V(\alpha) =$ Inklusion ... induziert einen additiven volltreuen Funktor $(M, f) \mapsto V^{\underline{K}}$ .....

<u>5.4.</u> Aus 5.1, 5.2 und 5.3 folgt leicht, daß $\underline{K}$ entweder zur Klasse $\underline{\underline{A}}_n$ gehört oder die Form von 2.6 hat. Nach 2.8 können wir also annehmen, daß $\underline{K} = \underline{K}_{p,q,r}$, $p \geq q \geq r$. Wir zeigen zunächst, daß $r = 1$. Dafür genügt es zu zeigen, daß $\underline{K}_{2,2,2}$ nicht zugelassen ist.

Wir betrachten den Funktor $\underline{\mathrm{Mod}}_{k[X]} \to {}_k\Delta_{2,2,2}$, $(M, f) \mapsto A$ mit

$A = M \oplus M \oplus M$, $A(2) = 0 \oplus M \oplus M \supset A(1) = \{(0, m, m) \mid m \in M\}$,

$A(2') = M \oplus 0 \oplus M \supset A(1') = \{(m, 0, m) \mid m \in M\}$,

$A(2'') = M \oplus M \oplus 0 \supset A(1'') = \{(m, fm, 0) \mid m \in M\}$.

Der Funktor $(M, f) \mapsto A$ ist additiv und volltreu, und unsere Behauptung folgt aus 2.7.

<u>5.5.</u> Wir zeigen jetzt, daß $q \leqslant 2$. Es genügt zu zeigen, daß $\underline{K}_{3,3,1}$ nicht zugelassen ist. Wir betrachten den Funktor

${}_k\Delta_{2,2,2} \to {}_k\Delta_{3,3,1}$, $A \mapsto B$ mit

$B = A \oplus (A(2'')/A(1''))$, $B(1'') = \{(a, a + A(1'')) \mid a \in A(2'')\}$,

$B(1) = A(1) \oplus 0 \subset B(2) = A(2) \oplus 0 \subset B(3) = A \oplus 0$,

$B(1') = 0 \oplus (A(2'')/A(1'')) \subset B(2') =$
$A(1') \oplus (A(2'')/A(1'')) \subset B(3') =$
$A(2') \oplus (A(2'')/A(1''))$

Dieser Funktor ist additiv und volltreu. Unsere Behauptung folgt demnach aus 2.7..

<u>5.6.</u> Wir zeigen schließlich, daß $p \leqslant 4$, falls $q = 2$. Es genügt zu zeigen, daß $\underline{K}_{5,2,1}$ nicht zugelassen ist. Wir betrachten den Funktor ${}_k\Delta_{3,3,1} \to {}_k\mathfrak{a}_{13}$, $A \mapsto B$ mit $B = A$, wobei die Unterräume $B(w)$ und

$$\begin{array}{cccccccccccc}
B(1') & \to & B(2') & \to & B(3') & \to & B(4') & \to & B(5') & \to & B(6') \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
B(1) & \to & B(2) & \to & B(3) & \to & B(4) & \to & B(5) & \to & B(6)
\end{array}$$

von B folgendermaßen definiert sind: $B(i) = 0$ und $B(i+3) = A(i)$ für $i = 1,2,3$, $B(j') = A(j')$ und $B((j+3)') = A$ für $j = 1,2,3$, $B(w) = A(1'')$.

Dieser Funktor ist additiv und volltreu. Unsere Behauptung folgt demnach aus 4.1.

[1] CHAPTAL N.: Objets indécomposables dans certaines catégories de foncteurs, C.R. Acad. Sc. Paris, 268, 934-936 (1969).

[2] JANS J.P.: On the indecomposable Representations of Algebras, Ann. of Math., 66, p. 418-429 (1957).

[3] YOSHII T.: On Algebras of Bounded Representation Type, Osaka Math.J., 8, 51-105 (1956).

Peter Gabriel

Sonderforschungsbereich
"Theoretische Mathematik"

Mathematisches Institut
Universität Bonn

53 B o n n
Wegelerstraße 10

(Eingegangen am 11. Oktober 1971)