

Werk

Titel: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Verlag: Teubner

Jahr: 1919

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN37721857X_0028

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN37721857X_0028

LOG Id: LOG_0022

LOG Titel: Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN37721857X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN37721857X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=37721857X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie.

Bericht von EMMY NOETHER in Göttingen.

Der folgende Bericht ist aus dem Wunsche entstanden, ein verbindendes Glied zwischen den einzelnen Theorien der algebraischen Funktionen zu haben; zugleich kann er als eine Ergänzung zu dem Bericht von Brill-Noether¹⁾ angesehen werden, in dem die Besprechung der arithmetischen Theorie im wesentlichen fehlt.²⁾

An Besprechungen der einzelnen Theorien kommen außer Brill-Noether noch die folgenden Enzyklopädie-Artikel mit der darin angegebenen Literatur in Betracht:

Für die Theorie von Riemann: Wirtinger (II B 2), Nr. 1—19; für die Theorie von Weierstraß: Wirtinger (II B 2), Nr. 23, 32, 33, 34;

für die algebraisch-geometrische Theorie von Brill-Noether: Wirtinger (II B 2), Nr. 21—31; Berzolari (III C 4), Nr. 23—38;

für die arithmetische Theorie von Dedekind-Weber und Hensel-Landsberg: Hensel (II C 5), [zitiert Hensel]³⁾;

allgemeiner für die arithmetische Theorie der algebraischen Größen: Landsberg (I C 5) und für die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von mehr Veränderlichen: Jung (II C 6).

Für die Zahlkörpertheorie vergleiche den „Zahlbericht“ von Hilbert⁴⁾ und die Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet-Dedekind [zitiert Dedekind-Zahlentheorie].⁵⁾

Inhaltsverzeichnis.

1. Grundlagen der verschiedenen Theorien.
2. Parallelismus zwischen algebraischen Zahlen und algebraischen Funktionen (Konjugierte Elemente, Basissätze, Modulbegriff).

1) Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresb. d. D. Math. Verein. Bd. 3 (1894) [zitiert Brill-Noether].

2) Mit Ausnahme einer Besprechung der Kroneckerschen Untersuchung über die Diskriminante. (J. f. M. Bd. 91.)

3) Die auf Dedekind-Weber bezüglichen Teile rühren von A. Ostrowski her.

4) Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresb. d. D. Math. Verein. Bd. 4 (1894/95).

5) Braunschweig, Vieweg, 4. Aufl. 1894.

3. Parallelismus und Verschiedenheiten in der Idealtheorie der algebraischen Zahlen und Funktionen.
4. Zusammenhang der arithmetischen Begründung der Reihenentwicklung mit der Idealtheorie.
5. Vergleich der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen mit der geometrischen Theorie. Verschiedener Invarianzbegriff.
6. Fortsetzung des Vergleichs. Singuläre Punkte.
7. Vergleich zwischen Restsatz und Sätzen der Idealtheorie.
8. Transzendente Fragen bei algebraischen Funktionen und algebraischen Zahlen.

1. Grundlagen der verschiedenen Theorien. Die Theorie von Riemann ist die einzige *rein transzendente*, auf *Existenzsätzen* (Dirichletsches Prinzip, Schwarz-Neumannsche Methoden) beruhende. Die *Integrale* der algebraischen Funktionen sind hier das Primäre, die algebraischen Funktionen selbst das Sekundäre. Die Funktionen sind auf der Riemannschen Fläche durch ihre Null- und Unendlichkeitsstellen charakterisiert, was den Polygonen (bzw. Divisoren) der arithmetischen Theorie entspricht; während Weierstraß auch von den Funktionen selbst mit ihren Null- und Unendlichkeitsstellen spricht. Das Hauptproblem ist außer den Existenzsätzen die Aufstellung aller Funktionen mit gegebenen Unendlichkeitsstellen, was durch die Integrale erster und zweiter Gattung geleistet wird; und weiter die Frage nach der Anzahl der willkürlichen Konstanten, die bei vorgegebenen Unendlichkeitspunkten noch eingehen. Diese letztere Frage wird beantwortet durch den Riemann-Rochschen Satz; ihr entspricht in der arithmetischen Theorie die Frage nach der Dimension einer Polygonklasse (bzw. Divisorenklasse), in der algebraisch-geometrischen Theorie die Frage nach der Dimension einer linearen Vollschar, deren Beantwortung auch hier durch den Riemann-Rochschen Satz geleistet wird. Die wirkliche Bildung der Funktionen geschieht in der arithmetischen Theorie mittels der Basissätze; in der algebraisch-geometrischen Theorie durch den Restsatz. Insbesondere entspricht den Nullstellen der Integranden erster Gattung die Differentialklasse in der arithmetischen Theorie, die Lehre von den Spezialgruppen (d. h. die durch die adjungierten Kurven $(n-3)$. Ordnung, die φ -Kurven, ausgeschnittene Schar von Punktgruppen) in der algebraisch-geometrischen Theorie.

Wie die Riemannsche Theorie historisch den übrigen Theorien voranging, wenn auch der strenge Nachweis der Existenzsätze erst später gelang, so sind auch später mit ihren transzendenten Hilfsmitteln algebraische Fragen erledigt worden, die einer rein algebraischen oder arithmetischen Behandlung bis heute noch nicht zugänglich sind; hier ist vor allem die Hurwitzsche Theorie der singulären Korrespondenzen zu erwähnen.¹⁾

1) A. Hurwitz, Über algebraische Korrespondenzen und das erweiterte Korrespondenzprinzip. Ann. Bd. 28. (Vgl. Brill-Noether, 10. Abschnitt.)

Analogien zu den transzendenten Fragestellungen in der Theorie der algebraischen Zahlkörper werden in der letzten Nummer besprochen.

Für die übrigen Theorien sind die *algebraischen Funktionen* das Primäre, die Integrale das Sekundäre. Dabei beruht die *Weierstraßsche Theorie* auf den transzendenten Grundlagen der Potenzreihenentwicklung und des Residuensatzes; geht aber dann algebraisch weiter, durch explizite Angabe aller in Betracht kommenden Funktionen.

Auch die *arithmetische Theorie* in der Fassung von Hensel-Landsberg benutzt die *transzendenten Grundlagen der Reihenentwicklung*. Indem aber auf dieser Grundlage den einzelnen Punkten Divisoren zugeordnet werden, geht sie dann rein arithmetisch weiter und kann somit als eine Verschmelzung von Weierstraß und Dedekind-Weber betrachtet werden. Im Gegensatz zu letzteren liefert sie zugleich Methoden zur wirklichen Bildung aller in Betracht kommenden Basisfunktionen. Im einzelnen weist sie eine Reihe von Vereinfachungen gegenüber Dedekind-Weber auf; wesentlich durch Einführung der „gebrochenen“ Divisoren. Neuerdings hat Hensel¹⁾ die Theorie der Reihenentwicklung arithmetisch begründet (bis auf eine Majorantenmethode zum Konvergenzbeweis), wodurch die Theorie fast rein arithmetisch geworden ist.

Die *algebraisch-geometrische Theorie* von Brill-Noether setzt nur den Begriff „aufeinanderfolgender Punkte“ eines Zweiges voraus, der auf die Reihenentwicklung in einem *gewöhnlichen* Punkt zurückgeführt wird²⁾ und dem Weierstraßschen Elementbegriff entspricht; sie arbeitet dann mit algebraisch-rationalen Methoden, wesentlich denen der ternären Eliminationstheorie weiter; auch sie dringt bis zu expliziten Darstellungen vor.

Die *ursprüngliche, rein arithmetische Theorie* von Dedekind-Weber³⁾ ist insofern der Riemannschen verwandt, als ihre Sätze wieder den Charakter von Existenzbeweisen tragen; sie wahrt volle Reinheit der Methode.⁴⁾ Die arithmetische Begründung der Theorie, wo die Variablen

1) Mathematische Zeitschrift Bd. 4; die Begründung ist auch seinem Bericht zugrunde gelegt.

2) Für aufeinanderfolgende „singuläre“ Punkte vergleiche Brill-Noether, 6. Abschnitt, insbes. Nr. 10 und 11. Gewöhnliche aufeinanderfolgende Punkte sind etwa die Schnittpunkte der Tangente mit der Kurve oder höhere Berührungspunkte (Verzweigungspunkte).

3) J. f. M. 92 (zitiert D.-W.).

4) Aus diesem Grunde ist sie auch geeigneter zum Vergleich mit den übrigen Theorien als etwa die Theorie von Hensel-Landsberg, die nur gelegentlich bei den folgenden Vergleichen auftreten wird. — Die Theorie der Abelschen Integrale und ihrer Umkehrung ist allerdings, soweit sie Stetigkeit voraussetzt, bei D.-W. und auch in der Weiterentwicklung der algebraischen Theorie (M. Noether, Ann. 37) nicht behandelt.

nur die Rolle von Unbestimmten spielen, läuft der Theorie der algebraischen Zahlen parallel, wie in 2. näher ausgeführt werden wird.¹⁾ Diese Begründung gibt das Mittel, den Punktbegriff arithmetisch einzuführen (vgl. Hensel Nr. 10a) und so den Begriff der absoluten Riemannschen Fläche ohne jede Stetigkeitsbetrachtung aufzustellen. Die Theorie erhält dadurch einen formalen Charakter; es wird z. B. auch der Begriff des Differentials rein formal eingeführt. Auf der durch den Punktbegriff gewonnenen Grundlage läßt sich die nahe Verwandtschaft mit den Methoden und Begriffen der algebraisch-geometrischen Theorie nachweisen, die ja auch, abgesehen vom Elementbegriff, von transzendenten Hilfsmitteln frei ist; dies soll in den folgenden Nummern geschehen.

2. Parallelismus zwischen algebraischen Zahlen und algebraischen Funktionen. (Konjugierte Elemente, Basissätze, Modulbegriff). Ein algebraischer Zahlkörper ist definiert als ein Körper n -ten Grades über dem Körper R der rationalen Zahlen; ein Körper algebraischer Funktionen einer Veränderlichen als ein Körper n -ten Grades über dem Körper $K(z)$ aller rationalen Funktionen einer Unbestimmten z mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Es gelten also für beide Körper alle Sätze gemeinsam, die von der speziellen Natur des Grundkörpers völlig abstrahieren; das sind die Sätze über Basis, Normen, Spuren und Diskriminanten.²⁾ All diese Begriffe werden bei Dedekind-Weber ohne Benutzung konjugierter Elemente eingeführt. Es sei aber bemerkt, daß sich der *Begriff des konjugierten Körpers völlig formal definieren* läßt, wie Steinitz im Anschluß an Kronecker gezeigt hat.³⁾ Ist nämlich K ein beliebiger Körper und $\varphi(x)$ ein in K irreduzibles Polynom von x , so bildet das System der Restklassen modulo $\varphi(x)$ einen Körper. Ordnet man der Restklasse von x ein Element j zu, so entspricht bei isomorpher Zuordnung der durch das Polynom $f(x)$ repräsentierten Restklasse das Element $f(j)$. Da alle durch $\varphi(x)$ teilbaren Polynome die Restklasse Null repräsentieren, wird $\varphi(j)$ der Nullklasse zugeordnet; das Element j kann somit symbolisch als Nullstelle von $\varphi(x) = 0$ betrachtet werden und erzeugt den algebraischen Körper $K(j)$. Die Wiederholung des Verfahrens führt zu den n konjugierten Körpern $K(j)$, $K(j')$, ..., $K(j^{(n-1)})$. Man kann also insbesondere auch bei den algebraischen Funktionen von *konjugierten Elementen* sprechen, *ohne die rein arithmetische Theorie zu verlassen*.

1) Ein Vergleich der Theorie von Hensel-Landsberg mit der Zahlentheorie, insbesondere der Theorie der p -adischen Zahlen, findet sich bei Hensel.

2) D.-W., § 1 und 2; Hensel Nr. 4 (mit Anmerkung 5).

3) Steinitz, Algebraische Theorie der Körper. (J. f. M. 137, § 6 und 8.)

Die beiden Grundkörper R und $K(z)$ haben die Eigenschaft gemein, daß in ihnen das System aller *ganzen* Größen definiert ist, als ganze rationale Zahlen bzw. ganze rationale Funktionen einer Unbestimmten. Diese ganzen Größen haben die charakteristische Eigenschaft, daß je zwei a und b einen *größten gemeinsamen Teiler* d besitzen, der in der Form $ma + nb$ darstellbar ist, wo auch d , m , n ganze Größen aus R bzw. $K(z)$ sind; und zwar ist d die absolut kleinste Zahl bzw. das Polynom niedrigsten Grades, das in dieser Form darstellbar ist. Aus dieser Eigenschaft allein, die die *eindeutige Zerlegbarkeit in Primfaktoren für die ganzen* rationalen Zahlen bzw. Funktionen einer Unbestimmten nach sich zieht, beruhen die Sätze über die ganzen Größen des algebraischen oder Oberkörpers. Die Überlegung, die die Existenz des größten gemeinsamen Teilers nachweist, ergibt auch die Existenz eines *Fundamentalsystems* oder einer *Basis der ganzen Größen* des algebraischen Körpers. Betrachtet man nämlich nur solche Basen des Körpers, die aus *ganzen* Größen bestehen, so wird ihre Diskriminante eine ganze rationale Zahl bzw. ganze rationale Funktion einer Unbestimmten. Jede Basis, die der absolut kleinsten Zahl bzw. Funktion niedrigsten Grades entspricht, bildet ein Fundamentalsystem.

Genaueren Einblick in die Basisfragen, auch für allgemeinere Körper, gibt die Einführung des *Modulbegriffes*, der so gefaßt werden soll, daß er die je nach der Natur der Elemente in der Literatur verschieden auftretenden Definitionen umfaßt. Als *Modul* — *in bezug auf einen Grundintegritätsbereich* $\mathfrak{S}$ — wird ein *System von Elementen* bezeichnet derart, daß die *Differenz zweier Elemente wieder dem System angehört, ebenso das Produkt eines Elements mit einer beliebigen Größe aus* $\mathfrak{S}$. (Besteht $\mathfrak{S}$ aus den ganzen rationalen Zahlen, so ist die zweite Forderung eine Folge der ersten.)¹⁾

Jeder Modul, der eine Basis aus endlich vielen Elementen besitzt, durch die sich jedes Element linear mit Koeffizienten aus $\mathfrak{S}$ darstellen läßt, wird als ein *endlicher* (endlichgliedriger) bezeichnet; insbesondere ist also jeder eingliedrige Modul von der Form $c \cdot \alpha$, wo α das Basis-

1) Der Modulbegriff rührt von Dedekind her, der den Zahlmodul ($\mathfrak{S}$ = ganze rationale Zahlen) zuerst in der 2. Aufl. der Zahlentheorie einführt; auch der Modul aus ganzzahligen Linearformen ist hier implizit enthalten. Bei Dedekind-Weber treten dann die „Funktionenmoduln“ auf, deren Elemente aus algebraischen Funktionen bestehen, während $\mathfrak{S}$ aus allen ganzen rationalen Funktionen einer Unbestimmten besteht. — Der Modul aus homogenen Formen von n Unbestimmten, allgemeiner aus Polynomen, tritt zuerst bei Hilbert (Annalen 36) auf; $\mathfrak{S}$ besteht aus allen Polynomen, und da auch die Elemente Polynome sind, fällt dieser Modul unter unsere Idealdefinition. Die Kroneckerschen „Modulsysteme“ aus Polynomen gehen von der Basis, nicht von der abstrakten Definition aus.

element bedeutet, c alle Größen aus $\mathfrak{S}$ durchläuft. Ein Modul, dessen Elemente selbst $\mathfrak{S}$ angehören, heißt ein Ideal in $\mathfrak{S}$; woraus der Begriff des endlichen Ideals, insbesondere des eingliedrigen (Hauptideals) folgt.

Nun beruhen alle Basissätze für ganze Größen und Ideale auf dem folgenden Satz:

Ist M ein Modul in bezug auf $\mathfrak{S}$, dessen Elemente aus Linearformen von n Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathfrak{S}$ bestehen, und ist jedes Ideal in $\mathfrak{S}$ ein endliches, so ist auch $\mathfrak{S}$ ein endlicher Modul. Ist insbesondere jedes Ideal in $\mathfrak{S}$ ein Hauptideal, so besitzt M eine Basis aus linearunabhängigen Formen.¹⁾

Sind nämlich die Elemente von M gegeben durch $l(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, so durchläuft die Gesamtheit der Koeffizienten a_n ein Ideal in $\mathfrak{S}$, das nach Voraussetzungen von der Form: $b_1 a_n^{(1)} + \dots + b_\varrho a_n^{(\varrho)}$ ist. Die zu M gehörige Linearform $m(x) = l(x) - b_1 l^{(1)}(x) - \dots - b_\varrho l^{(\varrho)}(x)$ hängt also nur von $(n - 1)$ Unbestimmten ab, woraus durch endlich oftmalige Wiederholung die Behauptung folgt. Wird jeweils $\varrho = 1$, so besteht die Basis aus n Formen von bzw. $n, n - 1 \dots 1$ Unbestimmten, was die lineare Unabhängigkeit der nichtverschwindenden Formen ergibt.

Der Satz vom Fundamentalsystem ergibt sich daraus in den verschiedenen Fällen wie folgt:

Entsteht der algebraische Körper durch Adjunktion des ganzen algebraischen Elements δ zum Grundkörper, und bedeutet $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit aller ganzen Größen des Grundkörpers, so läßt jede ganze Größe des Oberkörpers die Darstellung zu (vgl. etwa Zahlbericht § 3):

$$\omega = \frac{a_1 \delta^{n-1} + a_2 \delta^{n-2} + \dots + a_n}{\Delta(\delta)},$$

wo a_i Größen aus $\mathfrak{S}$ und $\Delta(\delta)$ die Diskriminante von δ bedeutet. Durch die Substitution $x_i = \frac{\delta^{n-i}}{\Delta(\delta)}$ geht also der Modul aller ganzen Größen in einen Modul aus Linearformen über; somit ergibt sich die Existenz des Fundamentalsystems in allen Fällen, wo jedes Ideal in $\mathfrak{S}$ ein endliches ist. Die gleiche Überlegung zeigt, daß allgemeiner jedes Ideal im Bereich der ganzen Größen des Oberkörpers ein endliches ist. Nun ist insbesondere für die ganzen rationalen Zahlen bzw. Funktionen einer Unbestimmten, jedes Ideal ein Hauptideal; woraus also folgt, daß die Fundamentalsysteme in algebraischen Zahlkörpern bzw. Körpern von algebraischen Funktionen einer Unbestimmten aus genau n Größen be-

1) Der Satz tritt in der Literatur für die verschiedenen Koeffizientenbereiche $\mathfrak{S}$ gesondert auf. Für ganze rationale Zahlen vgl. etwa Hilbert, Zahlbericht § 3 u. 4; für Polynome von mehreren Unbestimmten: Hilbert, Über die vollen Invariantensysteme: § 2 Schluß (Math. Ann. 42).

stehen, wenn n den Grad angibt. Und da in diesen Körpern nach dem obigen jedes Ideal ein endliches ist, ergibt sich also zugleich das Fundamentalsystem für Relativkörper, das im allgemeinen aus mehr Größen bestehen wird, als der Relativgrad angibt.¹⁾ Da ferner auch, wenn $\mathfrak{S}$ den Bereich aller Polynome von mehreren Unbestimmten bedeutet, in $\mathfrak{S}$ jedes Ideal ein endliches ist²⁾, so ergibt sich die Existenz des Fundamentalsystems auch für algebraische Funktionenkörper von mehreren Unbestimmten, das wieder aus mehr Größen bestehen wird, als der Grad angibt.

3. Parallelismus und Verschiedenheiten in der Idealtheorie der algebraischen Zahlen und Funktionen. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Idealtheorie, daß jedes Ideal sich eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen darstellen läßt, läßt sich für algebraische Zahlen und Funktionen gemeinsam führen; allein auf Grund der Eigenschaft, daß für ganze rationale Zahlen bzw. Funktionen einer Unbestimmten jedes Ideal ein Hauptideal wird.³⁾ Der Hauptpunkt des Beweises liegt in dem Nachweis, daß aus der Teilbarkeit eines Ideals c durch ein Ideal a (d. h. jedes Element von c ist in a enthalten) die Produktdarstellung: $c = a \cdot b$ folgt.⁴⁾ Dieser Nachweis stützt sich bei Hurwitz auf den „erweiterten Gaußschen Satz“, der aussagt, daß eine ganze Größe ω , die in jedem

1) Nach den Untersuchungen von Steinitz über Moduln aus Linearformen, wo $\mathfrak{S}$ aus den ganzen Zahlen eines (endlichen) algebraischen Zahlkörpers besteht, genügen $\nu + 1$ Basiselemente, wenn ν den Relativgrad angibt (Math. Ann. 71, § 4).

2) Nach dem Hilbertschen Theorem von der Modulbasis (Math. Ann. 36). Die hier der Konsequenz halber als Ideale bezeichneten Moduln aus Polynomen werden gewöhnlich als „Formenmoduln“ oder einfach „Moduln“ bezeichnet. Auch der Hilbertsche Satz, daß ein solcher Modul N ein endlicher ist, läßt sich auf den Linearformensatz zurückführen. Sei nämlich f ein in N enthaltenes Polynom n -ten Grades der $\rho + 1$ Unbestimmten $\xi_1 \dots \xi_\rho, \eta$, das den Term η^n enthält (was durch lineare Transformation stets erreichbar), so sind alle Polynome aus N mod. f denjenigen kongruent, die sich in der Form: $a_1(\xi)\eta^{n-1} + \dots a_n(\xi)$ darstellen lassen; also vermöge $\eta^{n-i} = x_i$ einen Modul von Linearformen bilden, für den jedes Ideal im Bereich von ρ Unbestimmten als endlich angenommen werden darf, da dies für eine Unbestimmte der Fall ist.

3) Vgl. eine Bemerkung in der Einleitung von Hurwitz: Über die Theorie der Ideale (Gött. Nachr. 1894). Im Weberschen Lehrbuch der Algebra ist der Beweis im Anschluß an Kronecker vermöge Einführung der Funktionale für beide Körper parallellaufend erbracht. [Den Zusammenhang zwischen der Kroneckerschen Theorie und der Idealtheorie vermittelt der „erweiterte Gaußsche Satz“; Hurwitz a. a. O.]

4) Besonders hervorgehoben bei Dedekind (Zahlentheorie); Supplement XI, Satz VII, § 177; vgl. die Anmerkung S. 554. Der Satz benutzt die Tatsache, daß es sich um algebraische Körper handelt; gilt nicht mehr für Ideale (Moduln) aus Polynomen, wo das kleinste gemeinsame Vielfache an Stelle des Produktes tritt

Koeffizienten des Produktes zweier Polynome φ und ψ aufgeht, auch in dem Produkt aller Koeffizienten von φ und ψ aufgeht, bei Dedekind auf einen diesem Satz äquivalenten Modulsatz.¹⁾

Weitergehend läßt sich gemeinsam der Begriff des komplementären Moduls (Hensel Nr. 12) und daraus das Verzweigungsideal (Grundideal, Different) $\mathfrak{z}$ definieren (dessen Norm die Körperdiskriminante D wird); und es gilt der Fundamentalsatz, daß *das Verzweigungsideal der größte gemeinsame Teiler aller Hauptideale $F'(\delta)$ ist*; wo δ alle ganzen Größen des Körpers durchläuft und $F(\delta) = 0$ jeweils die zugehörige irreduzible Gleichung bedeutet. Hieraus folgt, daß *die Körperdiskriminante alle und nur solche rationale Primzahlen bzw. Linearfaktoren in z enthält, die durch das Quadrat eines Primideals teilbar sind*. Für $F'(\delta)$ selbst ergibt sich die Darstellung: $F'(\delta) = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{z}$, und durch Normbildung $\Delta(\delta) = R^2 \cdot D$; dabei bedeutet $\mathfrak{f}$ den Führer des aus δ abgeleiteten Ringes, (Ordnung, Integritätsbereich), d. h. $\mathfrak{f}$ besteht aus der Gesamtheit der (ganzen) Größen, die mit jeder ganzen Größe multipliziert durch den Modul $[1, \delta, \dots, \delta^{n-1}]$ teilbar sind. $R^2 = \text{Norm } \mathfrak{f}$ stellt das Quadrat der Substitutionsdeterminante dar, die die Basis $1, \delta \dots \delta^{n-1}$ in eine Basis der ganzen Größen überführt.²⁾

Verschiedenheiten in der weiteren Entwicklung werden durch spezielle Eigenschaften der Grundkörper bedingt. So führt die Tatsache, daß im Fall der algebraischen Zahlen die *Elemente des Grundkörpers zugleich Exponenten* sind, dazu, daß das Verzweigungsideal durch eine höhere als die $(e-1)$ te Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$ teilbar sein kann, das in p zur e -ten Potenz aufgeht (wenn nämlich e durch p teilbar ist); und führt dadurch auf die weiteren Begriffe des Trägheits- und Verzweigungskörpers³⁾, die kein Analogon in der Theorie der algebraischen Funktionen besitzen. Vor allem aber fällt, wegen der *Existenz der unendlich vielen Konstanten* im Grundkörper, bei den algebraischen Funktionen die Endlichkeit der Anzahl der Idealklassen fort und damit alle mit der Bestimmung der Klassenanzahl zusammenhängenden Fragestellungen. Indessen läßt sich in gewissem Sinne als transzendentes

1) Zahlentheorie, Suppl. XI; Satz VI, § 173. Auf die Äquivalenz der beiden Sätze weist Dedekind hin (Über die Begründung der Idealtheorie, Göttinger Nachr. 1895).

2) Dedekind, Über die Diskriminante endlicher Körper (Abhandl. der Gött. Ges. d. Wissensch. Bd. 29, 1882). Die dort für algebr. Zahlen gegebenen Definitionen lassen sich direkt auf algebr. Funktionen übertragen; auch die Beweise lassen sich fast genau übertragen. Die Beweisaneinanderordnung bei D.-W. ist davon verschieden; siehe unten. Für die angeführten Sätze vergleiche auch Zahlbericht, § 31 und 32. ($F'(\delta)$ wird dort als „Different“ der ganzen Zahl δ bezeichnet.)

3) Vgl. Zahlbericht, § 39–45.

Analogon zum Klassenkörper der Bereich aller (transzendenten) Primformen¹⁾ ansehen; da hier jeder Punkt durch eine einzige Form, ein Hauptideal, erzeugt wird.

Auf der andern Seite führt die *Existenz der unendlich vielen Konstanten* im Grundkörper $K(z)$ bei den algebraischen Funktion zu Sätzen und Fragestellungen, die kein Analogon bei den algebraischen Zahlen besitzen. Vorerst ergibt sich daraus eine gewisse Vereinfachung in der Beweisanordnung; so etwa in dem von D.-W. gegebenen Beweis der eindeutigen Zerlegbarkeit der Ideale in Primideale, wo sich der „erweiterte Gaußsche Satz“ oder ein diesem äquivalenter Satz umgehen läßt durch Benutzung der Tatsache, daß jede Linearform $(z - c)$ unendlich viele Restklassen besitzt, nämlich alle Konstanten (während die Anzahl der Restklassen mod. einer Primzahl endlich ist).²⁾

Zu wirklich neuen Resultaten führt die weitere Tatsache, daß jedes Polynom mit ganzen rationalen Funktionen von z als Koeffizienten, mod. $(z - c)$ in Linearfaktoren zerfällt (was für ein ganzzahliges Polynom mod. p nicht statthat); eine Tatsache, die auch noch gilt, wenn statt aller Konstanten nur alle algebraischen Zahlen genommen werden.³⁾ Hieraus folgt nämlich, daß *jedes Primideal ein Ideal ersten Grades ist*⁴⁾; und daraus weiter, daß die *Körperdiskriminante D der Durchschnitt aller Diskriminanten $\Delta(\delta)$ wird*, wo δ alle ganzen Größen durchläuft⁵⁾; beides im Gegensatz zu den algebraischen Zahlen. Hinterher ergibt sich daraus wieder, daß das Verzweigungsideal der Durchschnitt aller Hauptideale $F'(\delta)$ wird.

Weitere Verschiedenheiten werden dadurch bedingt, daß für die algebraischen Zahlen der Grundkörper R der *rationalen Zahlen* etwas *absolut Ausgezeichnetes* ist, nämlich der im Körper enthaltene *Primkörper*, (d. h. der aus der Einheit abgeleitete Körper); während der Grundkörper $K(z)$ etwas *Relatives* ist. Es läßt sich jede nichtkonstante Funktion ξ als unabhängige *Veränderliche* wählen; der Körper wird dann ein algebraischer Körper über $K(\xi)$. Der Satz, daß jedes Primideal p ein Ideal ersten Grades ist, also jede Funktion mod. p einer Konstanten kongruent ist, verbunden mit der Möglichkeit, eine beliebige Funktion als unabhängige Veränderliche zu nehmen, führt zu dem wichtigsten, über die algebraischen Zahlen hinausgehenden Begriff, zu dem *Punktbegriff* in rein arithmetischer Fassung. (Vgl. Hensel 10a.) *Jeder Punkt ist da-*

1) Klein, Zur Theorie der Abelschen Funktionen (Ann. 36, 1890).

2) D.-W. § 9. Vgl. die Anmerkungen S. 212 u. 213.

3) Daß in diesem Fall die ganze Theorie erhalten bleibt, bemerken D.-W. in der Einleitung.

4) D.-W., § 9, Nr. 7.

5) D.-W., S. 224.

bei repräsentiert durch einen dem Funktionenkörper isomorphen Körper von Konstanten.¹⁾ Die Gesamtheit der so definierten Punkte bildet die „absolute Riemannsche Fläche“. Diese Punktdefinition hängt nur vom Körper ab, nicht von einer speziellen Veränderlichen. Dagegen wird der Existenzbeweis unter Auszeichnung irgendeiner Funktion als unabhängigen Veränderlichen z geführt; ein Punkt P wird durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ erzeugt, indem jeder Funktion ihr konstanter Rest modulo $\mathfrak{p}$ zugeordnet wird; es verschwinden also insbesondere die durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Funktionen in P und umgekehrt. Durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primideale in z , so werden dadurch alle Punkte erhalten, in denen z endlich ist; die übrigen Punkte entstehen durch Einführung der unabhängigen Veränderlichen $\xi = \frac{1}{z}$ und entsprechen den Primidealen, die im Hauptideal ξ aufgehen. Naturgemäß können auch die an den Punktbegriff anschließenden Begriffe kein Analogon bei den algebraischen Zahlen haben; wie der Begriff des Polygons, der Polygonklasse, der Dimension einer Polygonklasse usw.

Es sei noch bemerkt, daß die freie Wahl der unabhängigen Veränderlichen zu einer weiteren Deutung der Zerlegung: $F'(\vartheta) = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g}$ führt. Betrachtet man nämlich ϑ als unabhängige Veränderliche, so ergibt sich entsprechend: $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{a}$, da ja der aus ϑ abgeleitete Ring symmetrisch in bezug auf z und ϑ definiert war; und es wird $\mathfrak{f}$ der größte gemeinsame Teiler der beiden Hauptideale $\frac{\partial F}{\partial z}$ und $\frac{\partial F}{\partial \vartheta}$; der Führer $\mathfrak{f}$ wird zugleich das „Doppelpunktsideal“ in bezug auf ϑ, z .²⁾

4. Zusammenhang der arithmetischen Begründung der Reihenentwicklung mit der Idealtheorie. Bei Hensel-Landsberg tritt das transzendente Hilfsmittel der Reihenentwicklung und der der Funktionentheorie entnommene Punkt-begriff an Stelle der Idealtheorie. Die neuerdings von Hensel gegebene arithmetische Begründung der Reihenentwicklung für algebraische Zahlen und Funktionen³⁾ kann somit als ein Äquivalent der Idealtheorie angesehen werden. Tatsächlich kommt diese arithmetische Begründung darauf hinaus, für jedes Primideal zu einem solchen (transzendenten) Erweiterungskörper überzugehen, wo dies Prim-

1) Zwei Körper heißen bekanntlich „isomorph“, wenn sie derart ein-eindeutig aufeinander bezogen werden können, daß auch Summe, Differenz, Produkt und Quotient sich entsprechen.

2) D.-W. S. 263.

3) Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen (Math. Zeitschr. Bd. 2, 1918) und Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen (Math. Zeitschr. Bd. 4, 1919). Für eine ausführlichere Darlegung vgl. Hensel Nr. 44 ff.

ideal zu einem Hauptideal wird, also die gewöhnlichen Zerlegungssätze gelten; und zwar genügt es, diese Überlegung für alle in einer Primzahl p bzw. Linearfunktion $z - a$ aufgehenden Primideale durchzuführen.

Es handelt sich zuerst um die Einführung eines transzendenten Erweiterungskörpers, der gebildet ist durch alle Reihenentwicklungen nach ganzen Potenzen von $z - a$ bzw. p (p -adischen Zahlen), mit jeweils höchstens endlich vielen negativen Potenzen. In diesem Körper zerfällt die den algebraischen Zahl- bzw. Funktionenkörper definierende irreduzible Gleichung in das Produkt von ϱ irreduziblen Faktoren, was der Zerlegung von p bzw. $z - a$ in das Produkt der ϱ „primären“ Ideale $q_1, \dots, q_\varrho$ entspricht. Der weiteren Darstellung jedes primären Ideals als Potenz eines Primideals: $q_i = \mathfrak{p}_i^{e_i}$, entspricht bei Hensel die Einführung eines weiteren, in bezug auf den transzendenten Erweiterungskörper algebraischen Körpers. Und zwar läßt sich dieser im Fall der algebraischen Funktionen durch eine reine Gleichung definieren; im Fall der algebraischen Zahlen allgemeiner durch eine algebraisch-auflösbare Gleichung. Die Vereinfachung bei den algebraischen Funktionen ist darauf zurückzuführen, daß hier keine Trägheits- und Verzweigungskörper (vgl. Nr. 3) auftreten.

Die bei diesen Untersuchungen auftretende „abbrechende Reihe“ nach einem Primelement π ¹⁾ (die noch keinen transzendenten Konvergenzbeweis verlangt)

$$v = c_0 + c_1 \pi + \dots + c_{\sigma-1} \pi^{\sigma-1} - v_\sigma \pi^\sigma,$$

wo $c_0 \dots c_{\sigma-1}$ Konstante, v_σ ein ganzes Element des Körpers bedeuten, findet sich ganz entsprechend bei D.-W.²⁾ Hier wird sie aus der Idealtheorie abgeleitet und ergibt die Grundlage für die Definition der Ordnung des Verschwindens (bzw. Unendlichwerdens) einer Funktion in einem Punkt.

5. Vergleich der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen mit der geometrischen Theorie. Verschiedener Invarianzbegriff. „Invariant“ ist jeder *allein durch den Körper charakterisierte* Begriff. Diese Invarianz wird in der arithmetischen Theorie im allgemeinen schon in der Definition gegeben, die in bezug auf *alle* Elemente des Körpers, nicht in bezug auf irgendeine Basis oder ausgezeichnete Variable, ausgesprochen wird; ein Beispiel bietet der oben angegebene Punktbegriff. Dagegen gehen die übrigen Theorien von irgendeiner speziellen Variablen oder Basis aus und zeigen nachträglich die Unabhängigkeit des Begriffes von dieser speziellen Wahl; die Invarianz wird hier eine *Invarianz gegenüber birationaler Transformation*.

1) Neue Begründung . . . , Formel (11).

2) D.-W., S. 231 und § 15.

Es möge nämlich der Körper einerseits entstehen durch Adjunktion des algebraischen Elements s zu $K(z)$, andererseits durch Adjunktion von σ zu $K(\xi)$, wobei $f(z, s) = 0$ bzw. $F(\xi, \sigma) = 0$ jeweils die irreduzibeln Gleichungen für s bzw. σ bedeuten; oder noch allgemeiner durch Adjunktion einer endlichen Anzahl von Elementen zu $K(\eta)$, mit den zugehörigen irreduzibeln Gleichungen $g(\eta, \tau_1) = 0; g_2(\eta, \tau_1, \tau_2) = 0 \dots$. Dann lassen sich nach Definition alle Elemente rational ausdrücken durch z und s sowohl wie durch ξ und σ wie auch durch $\eta, \tau_1, \tau_2 \dots$. Insbesondere sind also z und s rational durch ξ und σ ausdrückbar und umgekehrt; ebenso z und s rational durch $\eta, \tau_1, \tau_2 \dots$ und umgekehrt. Die ebene Kurve $f(z, s) = 0$ geht also durch „birationale Transformation“ in die ebene Kurve $F(\xi, \sigma) = 0$ über oder auch in die durch $g_1(\eta, \tau_1) = 0; g_2(\eta, \tau_1, \tau_2) = 0 \dots$ definierte Kurve im Raume der Variablen $\eta, \tau_1, \tau_2 \dots$. Diese Invarianz zeigt sich also so, daß die für eine spezielle Kurve ausgesprochene Definition für alle durch birationale Transformation daraus hervorgehenden Kurven (im Raum von beliebig vielen Dimensionen) erhalten bleibt; für alle Kurven der „Klasse“ nach Riemann. Als „Punkt“ wird hier ein zusammengehöriges Wertsystem $z = a, s = b$ definiert, so daß also $f(a, b) = 0$; dieser Punkt geht durch birationale Transformation im allgemeinen wieder in ein zusammengehöriges Wertsystem α, β von $F(\xi, \sigma) = 0$ über, kann in besonderen Fällen, wenn a, b ein „singulärer“ Punkt war, mehreren „Punkten“ auf $F(\xi, \sigma) = 0$ entsprechen, und es lassen sich immer Kurven angeben, auf denen ein „singulärer“ Punkt von $f(z, s) = 0$ einer endlichen Anzahl einfacher, getrennt oder benachbart liegender Punkte entspricht (Auflösung der Singularitäten).¹⁾ Ebenso geht eine Punktgruppe wieder in eine Punktgruppe über; und zwar ist die Anzahl ihrer Punkte invariant, sobald man einen singulären Punkt als so viel Punkte zählt, wie ihm einfache bei einer geeigneten Transformation entsprechen. Da sich jede Kurve birational in eine solche mit „gewöhnlichen vielfachen“ Punkten transformieren läßt¹⁾, entwickelt die geometrische Theorie ihre Begriffe nur für solche speziellen Kurven und zeigt nachträglich die Invarianz gegenüber jeder birationalen Transformation, auch einer solchen, die zu den allgemeinsten singulären Punkten führt.

Insbesondere läßt sich als ausgezeichnete Kurve der „Klasse“ — den hyperelliptischen Fall ausgenommen — die sogenannte „Normalkurve der φ “ im Raum von $(p - 1)$ Dimensionen einführen, die keine singulären Punkte besitzt; wo die φ die „adjungierten Kurven $(n - 3)$ -ter Ordnung“ für das homogen gemachte $f(z, s) = 0$ sind. Einer birationalen Transformation von $f(z, s) = 0$ in $F(\xi, \sigma) = 0$ entspricht eine lineare

1) Vgl. etwa Brill-Noether, 6. Abschnitt. Genaueres über „singuläre“ Punkte in der nächsten Nummer.

Transformation der φ , so daß es sich hier um Invarianz im projektiven Sinn handelt. Die Darstellung aller Funktionen des Körpers als rationale Funktionen der φ wird als „invariante Darstellung“ in der geometrischen Theorie bezeichnet.¹⁾

Die *lineare Schar* der φ oder auch der von ihnen ausgeschnittenen „Spezialgruppen“ geht also bei jeder birationalen Transformation in sich über, ist somit allein durch den Körper charakterisiert. Sie entspricht der Differentialklasse in der arithmetischen Theorie, bei der sich die Invarianz wieder direkt in der Definition zeigt, die durch Eigenschaften in bezug auf *jede* Funktion des Körpers als unabhängige Veränderliche, gegeben wird.

6. Fortsetzung des Vergleichs. Singuläre Punkte. Mit der verschiedenen Auffassung des Punktbegriffes hängt es zusammen, daß die „singulären Punkte“ der Kurven, die in der algebraisch-geometrischen Theorie besondere Schwierigkeiten bereiten, in der Begründung der arithmetischen Theorie überhaupt nicht auftreten; und daß folglich auch die „adjungierten Funktionen“ nicht zum Aufbau der arithmetischen Theorie erforderlich sind, wie dies in der geometrischen Theorie der Fall ist, sondern speziellen höheren Teilen der Theorie angehören. Andererseits treten in der Grundlegung der geometrischen Theorie die Verzweigungspunkte nicht auf; tatsächlich fallen diese auch bei der Darstellung der Integrale in der Aronholdschen Normalform (Hensel Nr. 27, Formel 80) heraus.

Die in 5. gegebene Definition des singulären Punktes läßt sich so fassen: $f(z, s) = 0$ (bzw. eine Kurve in einem höheren Raum) besitzt in $z = a, s = b$ (bzw. $z = a; s_i = b_i$) *einen singulären Punkt, wenn dies Wertesystem von mehr als einem Punkt der absoluten Riemannschen Fläche (Punkt im arithmetischen Sinn) angenommen wird; oder in einem oder mehreren Punkten in höherer Ordnung angenommen wird.* Im letzteren Fall handelt es sich um einen Punkt des Verzweigungspolygons von z sowohl wie von s ; es entspricht das den „aufeinanderfolgenden Punkten“ der geometrischen Theorie; der Punkt wird ein (höherer) Rückkehrpunkt von $f(z, s) = 0$ (bzw. der Kurve im höheren Raum).

Da sich jede beliebige Funktion η des Körpers nach Voraussetzung rational durch z und s darstellen läßt, entsteht wegen der Isomorphie jeder Punkt der absoluten Riemannschen Fläche, wo $z = a, s = b$ wird, dadurch, daß jeder Funktion η , dargestellt durch z und s , ihr Wert für

1) Vgl. etwa Brill-Noether. 8. Abschnitt. Für algebraische Funktionen von mehr Veränderlichen ist die Frage, ob sich die Invarianz auf eine solche gegenüber linearer Transformation zurückführen läßt, nicht behandelt.

$z = a, s = b$ zugeordnet wird. Damit der Punkt ein *singulärer* ist, muß es also mindestens *eine* Funktion η geben, die für $z = a, s = b$ mehrere Werte oder ein Wertsystem mehrmals annimmt. Und das kann wegen der rationalen Ausdrückbarkeit durch z und s nur dann der Fall sein, wenn in dieser Darstellung für $z = a, s = b$ Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden. Daraus folgt, daß die obige Definition identisch ist mit der üblichen, daß $f, \frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial s}$ für $z = a, s = b$ verschwinden. Denn in diesem Fall ist $\eta = \frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial s}$ eine Funktion der angegebenen Art, die für $z = a, s = b$ mehrwertig ist, während im entgegengesetzten Fall jede Funktion, auch wenn sie ∞ wird, nur einen Wert annimmt.

Bei dem arithmetischen Punktbegriff kann der singuläre Punkt nicht auftreten, da zwei Punkte als verschieden gelten, sobald nur *einer* Funktion verschiedene Wertsysteme zugeordnet sind. Aber auch bei der zur Begründung des arithmetischen Punktbegriffs dienenden Idealtheorie tritt der Begriff des singulären Punktes nicht auf dadurch, daß immer zugleich die *Gesamtheit* aller ganzen Größen des Körpers betrachtet wird. Alle im Endlichen gelegenen singulären Punkte von $F(z, \delta) = 0$, wo δ algebraisch-ganz in bezug auf z ist, werden nämlich (nach der zweiten Definition und Nr. 3 Schluß) durch das „Doppelpunktsideal“ $\mathfrak{f}$ erzeugt. Da nun nach dem Fundamentalsatz das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$ größter gemeinsamer Teiler aller Hauptideale $F'(\delta)$ ist, so läßt sich zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ ein δ angeben, daß das zugehörige $\mathfrak{f}$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar, und folglich, — da $\mathfrak{f}$ größter gemeinsamer Teiler von $F'(\delta)$ und $F'(z)$ — mindestens eines der beiden Hauptideale $F'(\delta)$ und $F'(z)$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Es gibt also *kein Wertsystem, für das gleichzeitig alle $F'(\delta)$ und $F'(z)$ verschwinden*, und folglich wird das Wertsystem $z = a, \delta_i = b_i$ nur in *einem* Punkt der absoluten Riemannschen Fläche angenommen; die *Gesamtheit der ganzen algebraischen Funktionen des Körpers* (die man als Kurve im Raum von unendlich vielen Dimensionen deuten kann) *besitzt keinen singulären Punkt im Endlichen*; nur endliche Werte kommen aber bei der Idealtheorie in Betracht.

Aber auch die Basisfunktionen $\omega_1 \dots \omega_n$ aller ganzen Größen besitzen keine singulären Punkte im Endlichen. Nach dem Obigen ist nämlich durch ein allen *ganzen* Funktionen isomorph zugeordnetes Konstantensystem schon jeder Punkt im arithmetischen Sinn *eindeutig* bestimmt. Besitzt somit eine durch irgendwelche *ganze* Funktionen s_i definierte „Raumkurve“ für $s_i = \alpha_i$ einen singulären Punkt im Endlichen, so muß es mindestens *eine ganze* Funktion η geben, die für $s_i = \alpha_i$ mehrere Wertsysteme annimmt. Bedeutet nun $\omega_1 \dots \omega_n$ eine

Basis aller ganzen Größen, so entspricht wegen $\delta = a_1 \omega_1 \dots + a_n \omega_n$ mit ganzen rationalen a_i , jedem Wertsystem der ω nur ein Wertsystem der δ ; folglich kann die durch $\omega_1 \dots \omega_n$ definierte Raumkurve keinen singulären Punkt im Endlichen besitzen; und jeder Punkt der absoluten Riemannschen Fläche, in dem z endlich ist, ist schon eindeutig definiert durch ein den ω isomorph zugeordnetes Konstantensystem. Die Basisfunktionen sind gerade die Funktionen η , die für $s_i = \alpha_i$ mehrwertig werden. Durch die Einführung der Basis der ganzen Größen, etwa an Stelle einer Basis $1, \delta \dots \delta^{n-1}$, wird also die Schwierigkeit der singulären Punkte umgangen.

In der geometrischen Theorie wird die Aufgabe, alle Punkte der absoluten Riemannschen Fläche eindeutig zu erzeugen — allgemeiner alle Funktionen zu bilden, die in gegebenen Punkten unendlich werden — vermöge der adjungierten Formen und ihrer Quotienten, geleistet. Eine Form ψ heißt dabei adjungiert, wenn $\psi = 0$ in jedem i -fachen Punkt der Grundkurve $f(z, s) = 0$ mindestens einen $(i - 1)$ -fachen Punkt besitzt; ein höherer singulärer Punkt ist dabei erst in gewöhnliche vielfache Punkte aufzulösen. Daß für die allgemeinste Funktion $\eta = \frac{\psi}{z}$ in einem singulären Punkt von $f(z, s) = 0$ Zähler und Nenner überhaupt verschwinden müssen, wurde oben gezeigt; daß sie adjungiert sein müssen, zeigt die Betrachtung der überall endlichen Differentiale. Daß umgekehrt die Bedingungen des Adjungiertseins zur Bildung der allgemeinsten Funktion auch hinreichend ist, zeigt der „Restsatz“, auf den noch näher eingegangen werden wird. Die adjungierten Funktionen vertreten also die Stelle der Basisfunktionen der arithmetischen Theorie.

Arithmetisch entspricht einer adjungierten Form der Zähler einer durch das „Doppelpunktsideal“ $\mathfrak{f}$ teilbaren Funktion des Körpers, sobald man die singulären Punkte — was durch Transformation immer erreichbar — alle im Endlichen gelegen annimmt. Daraus zeigt sich formal die Darstellung der Basisgrößen $\omega_1 \dots \omega_n$ als Quotienten adjungierter Formen, und daraus der Zusammenhang der verschiedenen Darstellungsweisen wie folgt:

Bedeutet $R(z)$ die Substitutionsdeterminante einer Basis $1, \delta \dots \delta^{n-1}$ in eine Basis $\omega_1 \dots \omega_n$, so drückt sich umgekehrt jedes ω als Quotient einer ganzen Funktion von z und δ durch $R(z)$ aus; $\omega_i = \frac{G_i(z, \delta)}{R(z)}$. Da also $R(z) \omega_i$ dem aus δ abgeleiteten Ringe angehört, so ist nach der Definition des Führers $R(z)$ durch $\mathfrak{f}$ teilbar [aus $(R(z))^2 = \text{Norm } \mathfrak{f}$ folgt diese Teilbarkeit nur für $(R(z))^2$]. Da nun ω_i als ganze Funktion für alle endlichen z endlich bleibt, muß auch die Zählerfunktion $G_i(z, \delta)$ durch $\mathfrak{f}$ teilbar sein; Zähler und Nenner aller ω_i sind also adjungiert.

Aus dieser Darstellung der ω folgt aber die Darstellung aller Funktionen des Körpers durch Quotienten adjungierter.

Nach dem Vorangehenden läßt sich die *geometrische Theorie* charakterisieren als die *Theorie des aus einer Größe δ abgeleiteten Ringes* (Ordnung), im Gegensatz zu der *alle* ganzen Größen gleichzeitig betrachtenden arithmetischen Theorie. So ist es klar, daß der Führer des Ringes — die singulären Punkte — eine entscheidende Rolle spielt. Es lassen sich noch weitere Analogien zwischen der arithmetischen Theorie der Ringe (Ordnungen) und der geometrischen Theorie angeben. So zählt die geometrische Theorie die bei dem Schnitt mit adjungierten Kurven in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkte nirgends mit, sondern betrachtet nur die davon verschiedenen Punktgruppen. Dem entspricht, daß Dedekind¹⁾ nur solche Ringideale betrachtet, die zu dem Führerideal $\mathfrak{f}$ teilerfremd sind, und für diesen Bereich von Idealen alle Teilbarkeitsgesetze, einschließlich der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primideale, aufstellt.

Auch der der geometrischen Theorie zugrunde liegende „Fundamentalsatz der algebraischen Funktionen“²⁾, oder wenigstens eine unmittelbare Folge davon, findet in gewissem Sinn ein Analogon in der arithmetischen Theorie der Ringe. Dieser Satz gibt die Bedingungen an für eine Darstellbarkeit:

$$\psi(z, s) = A(z, s) f(z, s) + B(z, s) \varphi(z, s),$$

wo alle auftretenden Größen ganz rational in s, z sind (allgemeiner ganz und homogen in $x_1 x_2 x_3$). Aus diesen Bedingungen folgt³⁾, daß vermöge $f(z, s) = 0$ der Quotient $\frac{\psi}{\varphi}$ stets dann gleich einer ganzen rationalen Funktion $B(z, s)$ wird, wenn er zu f adjungiert ist. Dem entspricht der Satz aus Nr. 3, der all diesen Vergleichen zugrunde liegt, daß der Führer $\mathfrak{f}$ eines aus δ abgeleiteten Ringes gleich dem Doppelpunktsideal von $f(z, \delta) = 0$ ist. Denn nach der Definition des Führers gehört jede durch $\mathfrak{f}$ teilbare algebraische ganze Größe dem Ring an, ist also ganz und rational durch z und δ darstellbar; während der erwähnte Satz aussagt daß eine solche Größe eine adjungierte Funktion ist.⁴⁾

1) Über die Anzahl der Idealklassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers. (Festschrift Braunschweig 1877); § 3–5. (Die in diesen Paragraphen für algebraische Zahlen ausgesprochenen Sätze gelten wörtlich für algebraische Funktionen einer Veränderlichen.)

2) M. Noether, Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen. Math. Ann. Bd. 6 (1873).

3) Brill-Noether, Nr. 55.

4) Es ist hier im Anschluß an Dedekind stets die Voraussetzung gemacht daß δ eine ganze algebraische Größe (was durch Transformation stets erreichbar). Den

7. Vergleich zwischen Restsatz und Sätzen der Idealtheorie. Die eben erwähnte Folgerung des „Fundamentalsatzes der algebraischen Funktionen“ führt in der geometrischen Theorie direkt zum „Restsatz“, und damit zu der Grundlage, auf der die ganze geometrische Theorie sich aufbaut. In gewisser Hinsicht hat aber der Restsatz wieder elementarerer Charakter als die übrigen Grundlagen, insofern als er sich arithmetisch als direkte Folgerung der eindeutigen Zerlegbarkeit der Ideale in Primideale oder vielmehr der diesem Zerlegungssatz zugrunde liegenden Tatsachen, aussprechen läßt, also nicht auf der höheren Theorie der Ringe beruht. Zu dieser arithmetischen Fassung wird man so geführt:

Die Grundkurve $f(z, \delta) = 0$ sei so angenommen — was durch linear-gebrochene Transformation der Variablen stets erreichbar — daß die singulären Punkte sowohl wie die endlich vielen, in Betracht kommenden Punktgruppen im Endlichen gelegen sind; und daß ferner δ algebraisch von z abhängt, was durch eine nachträgliche, in den Variablen ganze lineare Transformation, stets erreichbar ist. Dann entspricht einem Primideal $\mathfrak{p}$, das einen Punkt P der absoluten Riemannschen Fläche erzeugt, wo $z = a$, $\delta = b$ wird, der Punkt $z = a$, $\delta = b$ von $f(z, \delta) = 0$; allgemeiner erzeugt ein Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_\sigma^{e_\sigma}$ die Punktgruppe, die aus den Punkten $z = a_i$, $\delta = b_i$ in der entsprechenden Vielfachheit besteht; und alle im Endlichen gelegenen Punkte von $f(z, \delta) = 0$ werden so erzeugt. Da in einem Punkt P alle durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Funktionen $g_1, g_2 \dots$ verschwinden, und da umgekehrt diese Gesamtheit von Funktionen g das Ideal $\mathfrak{p}$ erzeugt, so wird der entsprechende Punkt auf f der Schnitt von $g_1(z, \delta) = 0$, $g_2(z, \delta) = 0 \dots$ mit $f = 0$; das gleiche gilt für die einem Ideal $\mathfrak{a}$ entsprechende Punktgruppe; und zwar genügen nach dem Satz, daß jedes Ideal größter gemeinsamer Teiler von zwei Hauptidealen ist, stets zwei solcher Kurven zum Ausschneiden einer Punktgruppe. Insbesondere wird die einem Hauptideal entsprechende Punktgruppe durch eine Kurve $g(z, \delta) = 0$ ausgeschnitten und umgekehrt; das Hauptideal entspricht dem vollständigen Schnitt.

Zwei Punktgruppen A und B werden in der geometrischen Theorie *korresidual* genannt, wenn sie sich mit derselben Punktgruppe R zu einem vollen Schnitt ergänzen. Werden diese Punktgruppen bzw. durch die Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}$ erzeugt, so besteht also zwischen diesen Idealen die Beziehung: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r} = (\alpha)$, $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r} = (\beta)$, die zeigt, daß die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ *äquivalent* sind. Umgekehrt folgt aus der Äquivalenz zweier Ideale: $\mathfrak{a} = \eta \mathfrak{b}$, stets diese Beziehung auf Grund des Satzes, daß jedes Ideal sich

der Geometrie genauer entsprechenden Fall $f(z, s) = 0$, wo s auch algebraisch gebrochen von z abhängen kann, behandeln Hensel-Landsberg; vgl. Hensel Nr. 26 u 29.

durch Multiplikation mit einem andern in ein Hauptideal verwandeln läßt¹⁾; *äquivalente Ideale und korresiduale Punktgruppen sind also identische Begriffe.*

Der Restsatz sagt nun aus: *Sind A und B korresidual, so lassen sie sich durch adjungierte Kurven mit gleichem Rest (außerhalb der singulären Punkte) ausschneiden.* Da die Null- und Unendlichkeitspunkte einer Funktion immer korresidual sind, ist damit zugleich bewiesen, daß die allgemeinsten Funktionen des Körpers als Quotienten adjungierter Formen darstellbar sind. In der Sprache der Idealtheorie kommt der Restsatz einfach daraus hinaus, daß neben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{f}$ äquivalent sind; wo $\mathfrak{f}$ das Doppelpunktsideal bedeutet. Denn dann existiert nach dem obigen stets ein Ideal $\mathfrak{m}$, so daß $\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{m} = (\alpha)$, $\mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{m} = (\beta)$ Hauptideale werden; $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sind die adjungierten Kurven, die die Punktgruppen A und B bzw. deren von den singulären Punkten verschiedenen Teilgruppen A' und B' ausschneiden.²⁾ Der Beweis des Restsatzes liegt also arithmetisch in der Möglichkeit, den Primidealen Punkte zuzuordnen, und in dem Nachweis, daß äquivalente Ideale sich durch Multiplikation mit ein und demselben Ideal in ein Hauptideal verwandeln lassen.

Korresiduale Punktgruppen brauchen nicht aus der gleichen Anzahl von Punkten zu bestehen; ebenso wie äquivalente Ideale nicht gleichen Grades zu sein brauchen. So sind etwa alle Hauptideale äquivalent, alle durch vollen Schnitt erzeugten Punktgruppen korresidual. Dieser Unterschied gegenüber äquivalenten Polygonen (Divisoren)³⁾ erklärt sich daraus, daß diejenigen Punkte, in denen z unendlich wird, nicht durch Primideale in z erzeugt werden. In der Darstellung einer Funktion als Idealbruch; $\eta = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, die die Äquivalenz von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ausagt, treten also die Null- oder Unendlichkeitsstellen von η , wo z unendlich wird, nicht in Erscheinung. So wird etwa das Hauptideal (α)

1) Vgl. Dedekind, Zahlentheorie § 181; ist nämlich $\mathfrak{r}$ so gewählt, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ gleich einem Hauptideal (α) wird, so kommt $\mathfrak{b}\mathfrak{r} = \eta \cdot (\alpha)$; und da $\mathfrak{b}\mathfrak{r}$ nur ganze Größen enthält, gilt dies auch für $\eta \cdot (\alpha)$, das also auch ein Hauptideal (β) wird.

2) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$, wo $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{f}_1$ teilerfremd; so werden schon $\mathfrak{a}_1\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{f}_1$ Hauptideale; wo $\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd. Denn jedes Ideal läßt sich in ein Hauptideal verwandeln durch Multiplikation mit einem Ideal, das zu einem gegebenen teilerfremd ist (D.-W. S. 214; oder Zahlentheorie, § 178, Satz XI.)

3) Ein Polygon A besteht aus endlich vielen Punkten der absoluten Riemannschen Fläche; zwei Polygone A und B heißen äquivalent, wenn sie die Null- und Unendlichkeitspunkte einer Funktion η sind; η läßt dann die Darstellung durch Polygonquotienten $\eta = \frac{A}{B}$ zu. (D.-W. § 17 u. 18.)

das Produkt der Primideale, die den *Nullstellen* der ganzen Funktion α entsprechen; die Unendlichkeitsstellen von α treten nicht auf, da α nur in Punkten unendlich wird, wo z unendlich wird. Insofern ist die Idealtheorie das genaue Analogon zur *Formentheorie* in der geometrischen Theorie, bei der es auch nur Nullstellen und keine Unendlichkeitsstellen gibt.

Der Übergang von den Formen zu den Funktionen geschieht im geometrischen durch Quotientenbildung von Formen gleicher Ordnung; dem entspricht im arithmetischen der Übergang von den Idealklassen zu den invariant definierten Polygon-(Divisoren)-Klassen. Denn da hier keine Veränderliche mehr ausgezeichnet ist, gibt die Darstellung einer Funktion durch Polygonquotienten *alle* Null- und Unendlichkeitsstellen an. Das Verhältnis von Idealklasse (Klasse korresidualer Punktgruppen) zur Polygonklasse ist das folgende: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die durch die Ideale a und b erzeugten Polygone; $\mathfrak{N}$ das Polygon der Punkte, wo z unendlich wird (das Nennerpolygon von z und der ganzen Funktionen von z), so folgt aus der Äquivalenz von a und b die von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dann und nur dann, wenn a und b gleichen Grades sind; allgemein folgt daraus nur die Äquivalenz von $\mathfrak{A}\mathfrak{N}^\rho$ mit $\mathfrak{B}\mathfrak{N}^\sigma$ ($\rho \neq \sigma$). Die Einteilung der Ideale (bzw. der korresidualen Punktgruppen) in Klassen ist also eine Zusammenfassung von unendlich vielen Polygonklassen zu einer Klasse, läßt sich auch auffassen als eine Einteilung der Polygone in Klassen modulo einer Potenz von $\mathfrak{N}$.¹⁾

Der Restsatz für den Fall korresidualer Punktgruppen, die aus verschieden vielen Punkten bestehen, tritt nur in rein geometrischen Fragen auf. Bei der Anwendung auf die algebraischen Funktionen tritt tatsächlich nur der den Polygonklassen entsprechende Fall von korresidualen Punkten gleicher Anzahl auf. Die durch eine Punktgruppe erzeugte „lineare Vollschar“, d. h. die Gesamtheit der dieser Punktgruppe korresidualen Punktgruppen von gleicher Anzahl von Punkten, entspricht genau der durch das entsprechende Polygon erzeugten Polygonklasse; auch die Begriffe „Summe zweier Vollscharen“ und „Produkt zweier Polygonklassen“ decken sich. Daß eine solche Vollschar nur endlich viele linear-unabhängige Punktgruppen enthält, ist eine direkte Folge des Restsatzes, der die Dimension der Schar (die Anzahl der linear-unabhängigen Punktgruppen) auf die Dimension aller adjungierten

1) Hensel-Landsberg, 25. Vorlesung, S. 438. — Stellt man die beiden Variablen z und s durch Polygonquotienten dar, so läßt sich das auffassen als binäres Homogenisieren jeder dieser Variablen; wählt man insbesondere z und s so, daß sie dasselbe Nennerpolygon besitzen, so entsteht das in der Geometrie übliche ternäre Homogenisieren.

Kurven einer beliebigen, aber festen Ordnung, die durch die Restgruppe gehen, zurückführt. Um zu der wirklichen Bestimmung dieser Dimension, dem Riemann-Rochschen Satz, zu gelangen, folgert die geometrische Theorie aus dem Restsatz erst den „Reduktionssatz“ (Satz über die festen Punkte)¹⁾; und daraus den Riemann-Rochschen Satz.

Ganz entsprechend zeigt die arithmetische Theorie, daß jede Klasse von Polygonen von endlicher Dimension ist, und bestimmt deren Dimension durch eine spezielle Basis der ganzen Größen, eine normale Basis, die vermöge des komplementären Moduls definiert ist; erhält so den Riemann-Rochschen Satz als Folgerung des Zusammenhangs des komplementären Moduls mit dem Verzweigungspolygon. Dabei tritt in der Darstellung von D.-W. auch der Reduktionssatz auf²⁾, allerdings nicht als Grundlage wie in der geometrischen Theorie. Infolge des in Nr. 6 erwähnten Entsprechens von Basis und adjungierten Funktionen läßt sich also auch hier ein gewisses Entsprechen der Hilfsmittel bei den Theorien konstatieren. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Begriffsbildungen in den beiden Theorien sich im wesentlichen decken, wenn sie auch, abgesehen von der Formulierung, in der Anordnung abweichen. Entstanden sind die beiden Theorien unabhängig voneinander, die geometrische um ein Jahrzehnt früher. Es sei noch bemerkt, daß der Riemann-Rochsche Satz ursprünglich, bei Riemann und Roch und auch bei Weierstraß, als Rangsatz auftritt; es handelt sich um den Rang der Matrix $(\varphi_i(x_p))$, wo die φ die p adjungierten Kurven $n-3$ ter Ordnung durchlaufen; die x die Punkte der Restgruppe.

8. Transzendente Fragen bei algebraischen Funktionen und algebraischen Zahlen. Auf Analogien zwischen transzendenten Fragestellungen bei algebraischen Funktionen und algebraischen Zahlen hat besonders Hilbert hingewiesen³⁾; es handelt sich wesentlich um Existenzfragen. So entspricht der Riemannschen Fragestellung nach der Existenz einer algebraischen Funktion bei gegebener Riemannschen Fläche (also auch bei gegebenen Verzweigungspunkten) die Frage nach der Existenz algebraischer Zahlkörper mit vorgeschriebener Gruppe und Diskriminante.⁴⁾ Während aber im Fall der algebraischen Funktionen

1) Brill-Noether, Nr. 58. 2) D.-W., § 30, Nr. 2.

3) Mathematische Probleme, Problem 12. (Göttinger Nachrichten 1900).

4) Die dadurch nahegelegte Behandlung der algebraischen Funktionen von der Gruppe aus hat R. König als Spezialfall von allgemeineren Fragestellungen durchgeführt; vgl. besonders: Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme in der Ebene (J. f. M. Bd. 148) und Math. Ann. 78, 79. An Stelle des algebraischen Körpers tritt bei König ein spezieller endlicher Modul in bezug auf $K(z)$; es besteht nur „Klasseneigenschaft“.

der Existenzbeweis sich allgemein führen läßt, ist er im Bereich der algebraischen Zahlkörper nur für spezielle Grundkörper (rationale Zahlen, quadratische Zahlkörper) und nur für Abelsche Gruppen gelungen.¹⁾ Es handelt sich um den Kroneckerschen Satz, daß jeder Abelsche Zahlkörper im Bereich der rationalen Zahlen sich aus Körpern von Einheitswurzeln zusammensetzen läßt, und um die entsprechenden Sätze von Fuëter²⁾ und Hecke³⁾ für relativ Abelsche Zahlkörper. Die gesuchten Zahlkörper werden also durch ein transzendentes Mittel, Exponentialfunktion, Modulfunktionen, wirklich geliefert; im Gegensatz zu dem reinen Existenzbeweis bei den algebraischen Funktionen.

Dem Existenzbeweis der algebraischen Funktionen geht die Existenz der überall endlichen Integrale voraus. Ein Analogon dazu ist die Existenz der in bezug auf eine Primzahl l definierten „singulären Primärzahlen“ eines algebraischen Zahlkörpers, deren l -te Wurzeln relativ unverzweigt sind und die ersten Bausteine zum Klassenkörper liefern.⁴⁾ Dieser Existenzbeweis wird mit wesentlicher Hilfe des Satzes geführt, daß es im Zahlkörper stets Primideale mit vorgeschriebenen Restcharakteren gibt; dieser Satz kann also als Analogon zum Randwertproblem gelten, auf dem die Existenz der überall endlichen Integrale beruht.

Die überall endlichen Integrale liefern ein transzendentes Kriterium zur Bestimmung, ob zwei Polygone derselben Klasse angehören (zwei Punktgruppen von gleicher Anzahl korresidual sind), und zwar durch das Abelsche Theorem, das aussagt, daß die Integrale erster Gattung, erstreckt über „korresiduale Wege“, verschwinden; oder das entsprechende Differentialtheorem mit seiner Umkehrung.⁵⁾

Als Analogon des Abelschen Theorems für algebraische Zahlkörper hat das „Reziprozitätsgesetz für l -te Potenzreste“ zu gelten, das für den Körper selbst oder wenigstens für einen geeigneten Oberkörper ein

1) Nur der einfache Fall der bei den Gleichungen dritten und vierten Grades auftretenden Gruppen und einiger ganz spezieller Gruppen bei Gleichungen 8. Grades läßt sich für beliebige Grundkörper erledigen: G. Bucht, Über einige algebraische Körper 8. Grades (Arkiv f. Math., Astron. och Physik, Bd. 6. Nr. 30.) Vgl. auch E. Noether, Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe und die dort zitierte Diss. Seidelmann. (Math. Ann. 78).

2) Math. Ann. 75.

3) Math. Ann. 76.

4) Furtwängler, Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. Math. Ann. 67 und 72.

5) Vgl. etwa die Fassung bei M. Noether (Ann. 37). Da der Restsatz historisch aus dem Abelschen Theorem erwachsen ist, spricht die geometrische Theorie von der „Summe“ von Punktgruppen und linearen Scharen, in Anlehnung an die Integralsummen; im Gegensatz zu dem „Produkt“ der Klassen in der arithmetischen Theorie.

Kriterium gibt, daß zwei Ideale zu derselben Klasse gehören. Sein Inhalt läßt sich auch so fassen, daß in diesem Oberkörper die singulären Primärzahlen in bezug auf alle Ideale derselben Klasse denselben Restcharakter haben. Diese letztere Tatsache gilt auch im Körper selbst, deckt sich aber dort nicht mit dem Reziprozitätsgesetz.¹⁾

Schließlich liefert die Henselsche Theorie der p -adischen Zahlen das Analogon zur Potenzreihenentwicklung der algebraischen Funktionen, wofür auf den Henselschen Bericht verwiesen sei.

Intuitionistische Mengenlehre.

Von L. E. J. BROUWER in Amsterdam.

Seit 1907 habe ich in mehreren mengentheoretischen und philosophischen Schriften²⁾ die beiden folgenden Thesen verteidigt:

1. daß das *Komprehensionsaxiom*, auf Grund dessen alle Dinge, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen, zu einer Menge vereinigt werden, (auch in der ihm später von Zermelo gegebenen beschränkteren Form³⁾) zur Begründung der Mengenlehre unzulässig bzw. unbrauchbar sei und der Mathematik notwendig eine *konstruktive* Mengendefinition zugrunde gelegt werden müsse;

2. daß das von Hilbert 1900 formulierte *Axiom von der Lösbarkeit jedes Problems*⁴⁾ mit dem *logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*

1) Furtwängler, a. a. O. Annalen 67, (vgl. die Einleitung).

2) Vgl. „Over de grondslagen der wiskunde“, Inauguraldissertation Amsterdam 1907, besonders auch die beigefügten Thesen; „De onbetrouwbaarheid der logische principes“, Tijdschrift voor wijsbegeerte 2 (1908), S. 152—158; „Over de grondslagen der wiskunde“, N. Archief v. Wisk. (2) 8 (1908), S. 326—328; Besprechung von Mannoury, „Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik“, N. Archief v. Wisk. (2) 9 (1910), S. 199—201; „Intuitionisme en formalisme“, Antrittsrede Amsterdam 1912; „Intuitionism and formalism“, Amer. Bull. 20 (1913), S. 81—96; Besprechung von Schoenflies-Hahn, „Die Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen“, Jahresbericht d. D. M.-V. 23 (1914), S. 78—83; „Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde“, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 25 (1917), S. 1418—1423, abgedruckt in N. Archief v. Wisk. (2) 12 (1918), S. 439—445.

3) Vgl. Math. Ann. 65, S. 263.

4) Vgl. z. B. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 1, S. 52. Nach der hier geäußerten Ansicht Hilberts entspricht das Axiom einer von jedem Mathematiker geteilten Überzeugung. In seinem neulich in Math. Ann. 78 abgedruckten Vortrag „Axiomatisches Denken“ stellt er jedoch auf S. 412 die Frage nach der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems als ein noch zu lösendes Problem. Seine an diese Problemstellung anschließenden Bemerkungen über die Endlichkeit des vollen algebraischen Invariantensystems wären in meiner Terminologie so zu formulieren,