Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.[1])

Von HELLMUTH KNESER in Greifswald.

Vorbemerkung. Die Buchstaben E^k, M^k, S^k bezeichnen k-dimensionale Elementarräume, Mannigfaltigkeiten (geschlossen, nicht notwendig zusammenhängend) und Sphären. Verschiedene Exemplare werden durch Fußmarken unterschieden; z. B. bedeute „es gibt E_1^2" nichts anderes als „es gibt einen E^2, er heiße E_1^2". $'E^k$ und $'S^k$ bezeichne das, was manchmal E^k bzw. S^k mit Singularitäten genannt wird, d. h. das stetige Bild von E^k bzw. S^k. Alle Begriffe und Operationen sind im Sinne der kombinatorischen Topologie gemeint; nur der Kürze und Verständlichkeit zuliebe werden sie anschaulich beschrieben statt genau ausgeführt. Demgemäß bestimmt sich der Gültigkeitsbereich der Sätze; sie gelten z. B., wenn man sich durchaus auf ebenflächige Gebilde im Zahlenraum genügend hoher Dimension beschränkt.

1. Untersucht man die möglichen Lagen einer M^2 in einer M^3, so kommt man zwangläufig zu dem folgenden

Hilfssatz. *Liegt M^2 in M^3 und auf M^2 eine $'S^1$, die in M^3, aber nicht in M^2 homotop Null (auf einen Punkt zusammenziehbar) ist, so gibt es in M^3 einen $'E^2$, der mit M^2 genau seinen Rand $'S^1$ gemeinsam hat, der bis auf endlich viele Randpunkte singularitätenfrei ist und dessen Rand $'S^1$ auf M^2 nicht homotop Null ist.*

Betreffs der möglichen Singularitäten ergibt sich, daß sie einfache Selbstschnitte von $'S^1$ auf M^2 sind und die beiden an die beiden sich schneidenden Züge von $'S^1$ angrenzenden Teile von $'E^2$ auf entgegengesetzten Seiten von M^2 liegen. Insbesondere kommen solche Singularitäten überhaupt nicht vor, wenn M^3 durch M^2 in zwei Teile zerlegt wird.

2. Beweis des Hilfssatzes. Die in der Voraussetzung genannte $'S^1$ ist homotop Null, d. h. Rand eines $'E^2$. Dieser hat bereits die letzte der in der Behauptung geforderten Eigenschaften; er soll schrittweise durch andere mit derselben Eigenschaft ersetzt werden, die gegen die übrigen Forderungen der Behauptung immer weniger verstoßen. Zunächst erreicht man durch kleine Verlagerungen von $'E^2$, daß die Selbst-

1) Vortrag, gehalten am 18. September 1928 bei der 90. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg.

schnitte und Schnitte mit M^2 möglichst einfache Gestalten haben. Es sind dies

1. einfache Schnittkurven von $'E^2$ mit sich selbst oder mit M^2, ($x = 0$ und $y = 0$),

2. Endpunkte solcher Kurven auf dem Rande $'S^1$ von $'E^2$($M^2 : z = 0$; $'E^2 : z = xy,\ x \geqq 0$),

3. dreifache Punkte, Schnitt zweier Teile von $'E^2$ mit M^2 ($M^2 : z = 0$; $'E^2 : x = 0$ und $y = 0$),

4. Endpunkt eines Selbstschnittes auf dem Rande von $'E^2$($M^2 : z = 0$; $'E^2 : x = 0,\ z \geqq 0$ und $y = 0,\ z \geqq 0$),

5. erlaubte Singularität, einfacher Selbstschnitt von $'S^1$($M^2 : z = 0$; $'E^2 : x = 0,\ z \geqq 0$ und $y = 0,\ z \leqq 0$),

6. dreifache Punkte von $'E^2$($x = 0,\ y = 0$ und $z = 0$),

7. Windungspunkte von $'E^2$, d. h. Punkte, in denen sich $'E^2$ so verhält wie das räumliche Modell des einfachen Windungspunktes einer Riemannschen Fläche oder wie eine analytische Fläche in einem Zwickpunkt (pinch-point) ($z = \Re\sqrt{x + iy},\ 4z^2 - 4z^2x + y^2 = 0$ oder $x^2 = zy^2$).

Jetzt sollen die Schnittkurven von $'E^2$ mit M^2 beseitigt werden. Sie zeichnen sich auf dem Urbild E^2, dessen stetiges Bild $'E^2$ ist, ab als einfach geschlossene Kurven im Inneren und einfache Bögen von einem Randpunkt zu einem anderen; keine zwei von diesen Kurven schneiden einander. Sie zerlegen E^2 in Teile, von denen mindestens einer ein E^2_1 ist und höchstens einen zusammenhängenden Teil mit dem Rande von E^2 gemeinsam hat. Ist das Bild des Randes von E^2_1 auf M^2 nicht homotop Null, so ist das Bild von E^2_1 ein $'E^2_1$ mit denselben Eigenschaften wie $'E^2$, aber ohne Schnitte mit M^2. Ist es aber homotop Null auf M^2, d. h. Rand eines auf M^2 gelegenen $'E^2_2$, so werde das Bild von E^2_1 als Bestandteil von $'E^2$ durch $'E^2_2$ ersetzt und dieser nach derjenigen Seite[1]) von M^2 abgehoben, auf der die an den Rand von $'E^2_2$ grenzenden weiteren Teile von $'E^2$ liegen. So entsteht ein $'E^2$ mit denselben Eigenschaften wie der vorige, der aber mit M^2 eine Schnittkurve weniger hat. Wiederholung des Verfahrens liefert

1) Daß dieses „derjenigen" eindeutig bestimmt ist, folgt aus dem Monodromiesatz: „Ist auf einem E^2 eine Ortsfunktion im kleinen eindeutig und unbeschränkt fortsetzbar, so führt diese Fortsetzung zu einer eindeutigen Funktion." Als E^2 tritt hier das Urbild E^2_2 von $'E^2_2$ auf; der Wert der Funktion ist eine der beiden Seiten von M^2 in dem auf $'E^2_2$ und daher auf M^2 gelegenen Bildpunkt. Der Ausgangswert wird in einem auf dem Rande von E^2_2 aber im Inneren von E^2 (Urbild von $'E^2$) gelegenen Punkte bestimmt.

einen $'E^2$ mit denselben Eigenschaften, aber ohne Schnittkurven mit M^2, bei dem daher auch die Singularitäten (2) und (3), von denen Schnittkurven ausgehen, nicht mehr auftreten.

Jetzt sollen die Singularitäten (4) beseitigt werden. Von jedem solchen Punkt geht eine Selbstschnittkurve von $'E^2$ aus. Verfolgt man sie, indem man durch jeden dreifachen Punkt (6) „geradlinig" hindurchgeht, so endigt sie entweder in einem anderen Punkt (4) oder in einem Windungspunkt (7). Wie hier zu verfahren ist, werde zunächst unter der vereinfachenden Annahme angegeben, daß außer den angegebenen keine weiteren Singularitäten vorliegen.

Verbindet die Selbstschnittkurve zwei Punkte (4), P und Q, deren Urbilder auf dem Urbild E^2 von $'E^2$ die Punkte P und P' bzw. Q und Q' seien, so sind die beiden Urbilder der Kurve zwei einfache, einander nicht schneidende Bögen PQ und $P'Q'$. Auf dem Rande von E^2 liegen daher die vier Punkte mit zwei weiteren, R und R', in einer der beiden Reihenfolgen $PRQQ'R'P'$ oder $PRQP'R'Q'$. Die Bögen PQ und $P'Q'$ trennen von E^2 zwei Teil-E^2, I und I' ab; der Rest heiße II. Ist die aus den Bildern der Bögen PRQ und $P'R'Q'$ (deren Endpunkte paarweise zusammenfallen) zusammengesetzte geschlossene Kurve auf M^2 nicht homotop Null, so hat der aus den Bildern von I und I' bestehende E^2 dieselben Eigenschaften wie der ursprüngliche, aber mindestens zwei Singularitäten (4) weniger. Ist sie aber homotop Null, so ist die aus den Bildern der Bögen PRQ, $Q'Q$, $Q'R'P'$, PP' bzw. PRQ, $Q'P$, $P'R'Q'$, QP' in dieser Reihenfolge zusammengesetzte Kurve auf M^2 homotop der ursprünglichen Rand-$'S^1$ von $'E^2$, dem Bilde von $PRQQ'$, $PRQQ'R'P'$ bzw. $PRQP'R'Q'$, da sie aus ihr durch Vertauschung der homotopen Verbindungen PRQ und $P'R'Q'$ hervorgeht. Setzt man daher das Bild von I bzw. I' an die Seite $P'Q'$ von II an statt an PQ bzw. an PQ statt an $P'Q'$, so entsteht wieder ein $'E^2$ mit denselben Eigenschaften. Bei diesem läßt aber eine kleine Verlagerung die beiden Singularitäten verschwinden.

Verbindet die Selbstschnittkurve den Punkt P von der Art (4), dessen Urbilder P' und P'' seien, mit einem Windungspunkt W, dessen Urbild W' ist, so ist ihr Urbild in E^2 ein einfacher Bogen $P'W'P''$ zwischen den Randpunkten P' und P''. Die Bilder der beiden Randbögen $P'P''$ sind geschlossene Kurven auf M^2; von denen mindestens eine, C, nicht homotop Null ist. Das Bild des an diesen Bogen grenzenden, durch $P'W'P''$ von E^2 abgetrennten Teils ist ein $'E^2$ mit C als Rand, da die Bilder der Bögen $P'W'$ und $P''W'$ zusammenfallen. Dieser $'E^2$ hat dieselben Eigenschaften wie der vorige, aber mindestens eine Singularität (4) weniger.

Ist die vereinfachende Annahme nicht erfüllt, so bewirkt eine nicht schwierige, wenn auch nicht ganz selbstverständliche Hilfskonstruktion, daß das Verfahren mit demselben Erfolg angewandt werden kann: man muß nur den $'E^2$ ersetzen durch einen anderen, der ihn im Inneren mehrfach, am Rande aber einfach überlagert und daher dieselben Singularitäten (4) hat. Die hier neu auftretende Möglichkeit, daß die Punktepaare PQ und $P'Q'$ (in früherer Bezeichnung) auf dem Rande von E^2 sich trennen, bringt keine neuen Schwierigkeiten heran. So können auch die Singularitäten (4) Schritt für Schritt beseitigt werden.

Schneidet man nun die einzigen noch auf dem Rande befindlichen Singularitäten, die von der Art (5), durch Abtrennen kleiner Umgebungen aus, so hat $'E$ auf dem Rande überhaupt keine Singularität mehr. Nach dem „Lemma" von Dehn[1]) gibt es einen E^2 (ohne jede Singularität), der am Rande mit $'E^2$ übereinstimmt und sonst beliebig nahe bei $'E^2$ verläuft. Setzt man daher die vorher abgetrennten Umgebungen wieder hinzu, so entstehen keine neuen Singularitäten außer den vorher vorhandenen der Art (5). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

3. M^2 in S^3. Nach J. W. Alexander[2]) wird S^3 durch jede S^2 in zwei E^3 zerlegt. Je zwei S^2 in S^3 sind isotop. Zwei, je aus mehreren getrennten S^2 bestehende M^2 sind isotop, wenn sie aus gleichvielen S^2 bestehen und diese sich beide Male in gleicher Weise trennen.

Ist einer der zusammenhängenden Bestandteile einer M^2 keine S^2, so gibt es auf ihm eine Kurve, die auf M^2 nicht homotop Null ist. Sie ist homotop Null in S^3 [3]); nach dem Hilfssatz gibt es einen E^2_1, der

1) Math. Ann. 69 (1910), S. 147. Der Kenner wird bemerken, daß Dehn mit dem Beweise seines „Lemmas" die wesentliche Schwierigkeit des Hilfssatzes im voraus erledigt hat. Die hier benutzten Mittel sind den einfacheren bei Dehn nahe verwandt. Dort kommen (S. 150f.) ganz neue, viel feinere Überlegungen hinzu.

2) Nat. Ac. of Sc. 10 (1024), S. 6—8. Alexanders Satz und Beweis sind elementargeometrisch formuliert, mit einer, ohne Zweifel der Kürze halber, nicht mangels elementarerer Beweismittel gemachten, Anleihe bei der Potentialtheorie. Man kann sich, bei drei Dimensionen ziemlich leicht, davon überzeugen, daß elementargeometrische und kombinatorische Methoden gleich weit tragen. Einen rein kombinatorischen Beweis des hier genannten Satzes habe ich am 11. 5. 28 im Greifswalder mathematischen Kolloquium vorgetragen. Ich erwähne dies, weil ich trotz bisheriger Mißerfolge die Hoffnung nicht aufgebe, daß sich so der entsprechende Satz in vier, vielleicht auch mehr Dimensionen wird beweisen lassen.

3) Man sieht, daß dieser Beweis für jede einfach zusammenhängende M^3 gilt, ja sogar für jede M^3, deren Wegegruppe (s. u.) keine Untergruppe außer der Identität hat, die der Wegegruppe einer M^2 isomorph ist, z. B. für alle Torus-M^3 (k, l) mit ungeradem $k \geqq 3$, da deren Wegegruppe zyklisch von k-ter Ordnung ist.

mit M^2 genau seinen Rand gemeinsam hat und dessen Rand auf M^2 nicht homotop Null ist. Singularitäten (5) treten nicht auf, weil S^3 von jeder M^2 zerlegt wird.[1]) Dicht neben E_1^2 werde ebenso E_2^2 in eine neben dem Rande S_1^1 von E_1^2 verlaufende Kurve S_2^1 eingehängt. Der Streifen zwischen S_1^1 und S_2^1 wird von M^2 weggenommen und durch E_1^2 und E_2^2 ersetzt. Die Eulersche Charakteristik des betroffenen zusammenhängenden Teils von M^2 sei k; die des daraus entstehenden zusammenhängenden Teils bzw. der beiden entstehenden Teile (je nachdem, ob M^2 durch S_1^1 nicht zerlegt wird oder zerlegt wird) sei k' bzw. k' und k''. Im ersten Falle ist $k' = k + 2$, also $k' > k$. Im zweiten Falle ist $k' + k'' = k + 2$. Nun kann aber keiner der beiden Teile eine S^2 sein, da dann S_1^1 auf M^2 homotop Null sein müßte. Also ist $k' < 2$, $k'' = k + 2 - k' > k$ und ebenso $k' > k$. Das beschriebene Verfahren ersetzt einen zusammenhängenden Teil von M^2 durch einen oder zwei mit größerer Charakteristik. Da die Charakteristiken der Teile den Wert 2 nicht übersteigen, so folgt, daß das Verfahren nach endlich vielen Schritten zu einer M^2 führt, die nur aus einer Anzahl S^2 besteht. Das entgegengesetzte Verfahren führt von dieser zur ursprünglichen M^2 zurück. Dabei ist aber der einzelne Schritt gerade das, was man anschaulich als Anhängen eines Henkels beschreibt.

Jede M^2 in S^3 entsteht aus einer Anzahl fremder S^2 durch Anhängen von Henkeln.

Ist M^2 zusammenhängend, so zeigt eine kleine zusätzliche Überlegung, daß man immer von *einer* S^2 ausgehen kann.

Jede zusammenhängende M^2 in S^3 entsteht aus einer S^2 durch Anhängen von Henkeln.

Die Anzahl der Henkel ist natürlich $p = 1 - \frac{1}{2} k$, das Geschlecht von M^2. Der Satz enthält als Spezialfall $p = 1$ den von Tietze vermuteten, von Alexander bewiesenen Satz:

Eine Ringfläche in S^3 ist ein verknoteter oder unverknoteter Schlauch.

4. S^2 in M^3. Ein Endlichkeitssatz. Schneidet man eine M^3 längs einer in ihr liegenden S^2 auf und setzt man an jede der beiden entstehenden Rand-S^2 einen E^3 mit seinem Rande an, so entsteht eine M_1^3. Diese Verwandlung von M^3 in M_1^3 heiße Reduktion. Wird M^3 durch S^2 in einen E^3 und einen Rest zerlegt, so liefert die Reduktion wieder M^3 und eine S^3 dazu; dies heiße eine triviale Reduktion. Eine M^3, die nur triviale Reduktion zuläßt, d. h. eine M^3, in der jede S^2 Rand eines E^3 ist, heißt irreduzibel. Nach Alexander ist z. B. S^3 irreduzibel.

1) Proc. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam 27 (1924), S. 601—616.

Die Bezeichnung „Reduktion" ist erst gerechtfertigt, wenn es feststeht, daß das Ergebnis M_1^2 in irgendeinem Sinne einfacher ist als M_1^3
M^3. Für die Einfachheit oder Verwicklung einer M^3 hat man aber bisher kein Maß; man kennt keine vernünftige[1]) topologische Invariante, die etwa bei S^3 und nur bei S^3 ihren kleinsten Wert annimmt. Eine gewisse Rechtfertigung leistet immerhin der Satz:

Zu jeder M^3 gehört eine Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: nimmt man mit M^3 nacheinander $k + 1$ Reduktionen vor, so ist mindestens eine davon trivial. Durch k (oder weniger) nicht triviale Reduktionen wird M^3 in eine irreduzible M^3 verwandelt.

Zum Beweise überzeugt man sich zunächst davon, daß die Reduktionen mit derselben Wirkung auch gleichzeitig ausgeführt werden können. Sind nämlich die ersten r Reduktionen gleichzeitig ausgeführt worden, so sind bei ihnen $2r$ getrennte E^3 angesetzt worden. Die S^2 der $(r + 1)$-ten Reduktion kann so verlagert werden, daß sie keinen von diesen trifft. In dieser Lage ist sie das Bild einer S^2 in der ursprünglichen M^3; daher lassen sich auch die ersten $r + 1$ Reduktionen zugleich ausführen.

Hiernach ist das Ergebnis einer Folge von Reduktionen durch eine Anzahl getrennter S^2, etwa $S_1^2, \ldots, S_k^2$, bestimmt. Trivial wird eine der Reduktionen dann und nur dann, wenn einer der Teile, in die M^3 beim Aufschneiden längs $S_1^2, \ldots, S_k^2$ zerfällt, ein Teil einer S^3 ist. Ein von einer Anzahl S^2 berandeter Teil von S^3, der also aus S^3 entsteht durch Abtrennen einer Anzahl getrennter E^3, heiße L^3 (gelochte S^3). Es braucht also nur bewiesen zu werden:

Liegt in einer gegebenen M^3 eine Anzahl k getrennter S^2, so ist bei genügend großem k mindestens einer der durch sie bestimmten Teile von M^3 ein L^3.

M^3 sei in einer Darstellung durch tetraedrische Zellen gegeben. Diese werden im folgenden schlechtweg Zellen genannt, ihre Wände, Kanten und Ecken schlechtweg Wände, Kanten und Ecken. $S_1^2, \ldots, S_k^2$ werden im allgemeinen erst durch die Zellen einer Unterteilung darzustellen sein, doch bleiben die Benennungen wie soeben verabredet. Durch

1) Was hiermit gemeint ist, erläutere das folgende Gegenbeispiel. Man nehme unter allen Zellendarstellungen von M^3 diejenige oder eine derjenigen, bei denen die Gesamtzahl der Zellen aller Dimensionen möglichst klein ist. Diese Gesamtzahl hat bei S^3 den Wert 8, bei jeder anderen M^3 einen größeren. Aber erstens läßt sie sich nicht bei einer gegebenen M^3 mit endlich vielen Schritten berechnen; zweitens, und das ist wichtiger, dürfte sie wohl kaum mit anderen, mehr geometrischen Invarianten in fruchtbare Verbindung zu setzen sein. Ähnlich unvernünftig wäre es, als Maß der Verwicklung einer endlichen Gruppe einzuführen die kleinste Zahl n der Art, daß sich die Gruppe als Permutationsgruppe n-ten Grades darstellen läßt.

kleine Verlagerungen von $S_1^2, \ldots, S_k^2$ wird erreicht, daß diese keine Ecke enthalten, keine Kante und keine Wand berühren. Ihre Schnitte mit einer Wand sind dann einfach geschlossene Kurven oder einfache Bögen zwischen je zwei Kantenpunkten. Verbindet ein solcher Bogen zwei Punkte derselben Kante, so werde von den etwa noch zwischen ihm und der Kante gelegenen Bögen derselben Art ein innerster gewählt und die ihn enthaltende S_ν^2 über das Stück der Wand zwischen Bogen und Kante hinweggezogen. Dadurch wird die Zahl der Schnittpunkte der Kanten mit den S_ν^2 um zwei vermindert. Also kommt man nach endlich vielen Schritten zu einer Lage der S_ν^2 ohne Bögen der genannten Art.

Beim weiteren Beweis wird mehrfach die folgende Bemerkung benutzt. Wird S_m^2 durch S^1 in E_1^2 und E_2^2 zerlegt und ist S^1 Rand eines E_3^2, der, abgesehen vom Rande, keine S_ν^2 trifft, ist ferner keiner der m? durch die S_n^2 bestimmten Teile von M^3 ein L^3, so kann S_m^2 entweder durch $E_1^2 + E_3^2$ oder durch $E_2^2 + E_3^2$ ersetzt werden, ohne daß dadurch die letzte Eigenschaft zerstört wird. Zum Beweise unterscheidet man wiederum Fälle. Diejenige Seite von S_m^2, auf der E_3^2 liegt, heiße die Innen-, die andere die Außenseite. Man schneide M^3 längs $S_1^2, \ldots, S_k^2$ und längs E_3^2 auf. Es ist zu unterscheiden, welche von den drei Teilen, die (1) an die Außenseite von S_m^2, (2) und (3) an die Innenseite von E_1^2 bzw. E_2^2 anstoßen, miteinander zusammenhängen. In jedem der vier wesentlich verschiedenen Fälle [(1), (2) und (3) hängen zusammen; (1) hängt mit (2), aber nicht mit (3) zusammen; (2) hängt mit (3), aber nicht mit (1) zusammen; keine zwei von den drei Teilen hängen zusammen] folgt die Behauptung ohne Mühe aus einer der beiden folgenden einfachen Tatsachen: 1. Ein nur von einigen S^2 berandeter Teil eines L^3 ist selbst ein L^3. 2. Identifiziert man Teile zweier verschiedener Randflächen eines L^3, so entsteht ein Nicht-L^3.

Mit Hilfe dieser Bemerkung wird das System $S_1^2, \ldots, S_k^2$ durch ein anderes, $\overline{S}_1^2, \ldots, \overline{S}_k^2$ ersetzt mit den folgenden Eigenschaften. 1. Wenn $S_1^2, \ldots, S_k^2$ in M^3 keinen L^3 bestimmen, so tun es auch $\overline{S}_1^2, \ldots, \overline{S}_k^2$ nicht. 2. $\overline{S}_1^2, \ldots, \overline{S}_k^2$ schneiden die Wände nicht in geschlossenen Kurven und 3. durchziehen jede Zelle nur in einer Anzahl E^2. Die Eigenschaft (1) ist anfangs erfüllt und bleibt auf Grund der Bemerkung erhalten. Ist (2) nicht erfüllt, so wählt man von den geschlossenen Schnittkurven in einer Wand eine innerste. Der von ihr berandete, in der Wand gelegene E^2 spielt die Rolle von E_3^2. Nachdem die in der Bemerkung beschriebene Ersetzung erfolgt ist, kann E_3^2 von der Wand abgehoben werden, und die Zahl der geschlossenen Schnittkurven ist um mindestens eins vermindert. Ist (2) erfüllt,

(3) aber nicht, durchziehen also $S_1^2, \ldots, S_k^2$ die Zellen zum Teil in mehrfach zusammenhängenden Teilen, so werde auf dem Rande einer Zelle unter den Randkurven dieser Teile eine innerste gewählt. Kann man nun in S_m^2 einen E^2 einspannen, der in der Zelle verläuft und außer mit seinem Rande $S_1^2, \ldots, S_k^2$ nicht trifft, so ersetzt man wieder, wie in der Bemerkung vorgeschrieben, und erreicht, daß ein der Eigenschaft (3) widersprechender mehrfach zusammenhängender Flächenteil ganz wegfällt oder daß seine Zusammenhangszahl um eins vermindert wird. Das erwähnte Einspannen ist immer möglich. Die die Zelle etwa durchziehenden E^2-förmigen Teile der S_ν^2 zerlegen nämlich die Zelle in eine Anzahl E^3; man führe den gesuchten E^2 nahe an dem Rande desjenigen von ihnen entlang, dem das betrachtete Flächenstück angehört.

Die k so erhaltenen S^2 zerlegen M^3 in mindestens $k - r$ Teile, wobei r durch M^3 bestimmt ist.[1]) Jede Wand wird durch die in ihr verlaufenden Schnittkurven in Teile zerlegt, die alle bis auf höchstens vier (drei an den Ecken und einer, der Mittelteil, der an alle drei Seiten anstößt) Vierecke sind, deren Seiten abwechselnd Kanten und Schnittkurven sind. Ein Zellenteil, dessen Rand keinen der erstgenannten Wandteile enthält, wird notwendig begrenzt von zwei zu den S_ν^2 gehörigen E^2 und einer zwischen beiden gelegenen Kette von Vierecken. Er ist also ein E^3 und heiße ein Prisma. Von den Teilen, in die M^3 durch die S_ν^2 zerlegt wird, muß jeder, der nicht nur aus Prismen besteht, mindestens eine Ecke oder einen Wandmittelteil enthalten; es gibt ihrer also höchstens $\alpha_0 + \alpha_2$. Ist daher $k > r + \alpha_0 + \alpha_2$, so gibt es mindestens einen nur aus Prismen bestehenden, von einigen S_ν^2 berandeten Teil von M^3. Dieser ist eine zweifach gelochte S^3 oder der einfach gelochte projektive Raum. So oft der zweite Fall eintritt, läßt man die Prismen der Höhe nach zusammenschrumpfen und verwandelt dadurch die betroffene S^2 in eine M^2 vom Typus der projektiven Ebene, die (relativ) einseitig ist. Wendet man auf das so abgeänderte Flächensystem die vorige Überlegung an, so zeigt sich, daß, wenn nur $k > r + \alpha_0 + \alpha_2$ ist, mindestens einer der von $S_1^2, \ldots, S_k^2$ bestimmten Teile von M^3 eine zweifach gelochte S^3 sein muß. Dies gilt zunächst von einem System S^2 mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) Aus jedem System getrennter S^2, das M^3 in Teile zerlegt, von denen keiner ein L^3 ist, ließ sich aber ein ebensolches mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gewinnen; folglich kann die Anzahl der S^2 den Wert $r + \alpha_0 + \alpha_2$ nicht übersteigen, was zu beweisen war.

---

1) r ist die erste Bettische Zahl mod 2.

Geht man etwas genauer ein auf die etwa vorhandenen verschiedenen Möglichkeiten, eine gegebene M^3 durch Reduktion auf irreduzible M^3 bringen, so ist das Ergebnis der folgende Satz, der die topologischen Eigenschaften aller M^3 zurückführt auf die der irreduziblen.

Jede M^3 entsteht auf die folgende Weise: Aus k^3 orientierbaren unsymmetrischen[1])[2]), *l orientierbaren symmetrischen und m nicht orientierbaren M^3 (k, l, $m \geqq 0$), die sämtlich irreduzibel*[3]) *sind, werde je ein E^3 ausgeschnitten, aus einer S^3 ebenso $k + l + m + 2r + 2s$ getrennte E^3 ($r \geqq 0$; $s = 0$, wenn $m > 0$; sonst $s = 0$ oder 1); die Reste der M^3 werden mit ihren Rand-S^2 an $k + l + m$ von den Rand-S^2 der gelochten S^3 angesetzt; die übrigen Rand-S^2 werden paarweise miteinander identifiziert, und zwar r Paare so, daß eine Orientierung von der gelochten S^3 wieder mit sich zur Übereinstimmung kommt, das letzte — wenn $s = 1$ ist — so, daß eine nicht orientierbare M^3 entsteht. Zwei auf diese Weise erzeugte M^3 sind dann und nur dann homöomorph, wenn die Zahlen k, l, m, r, s beide Male dieselben sind, die benutzten M^3 paarweise homöomorph sind und im Falle einer orientierbaren M^3 ($m = s = 0$) die invariant ausgezeichneten Orientierungen der m unsymmetrischen M^3 beide Male auf dieselbe Weise in Zusammenhang gebracht sind.*

5. Die Wegegruppe[4]) und die Zerlegung einer M^3 durch eine S^2. Wird eine zusammenhängende M^3 durch eine S^2 in zwei Teile mit den Wegegruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerlegt, so ist die Wegegruppe von M^3

---

1) Symmetrisch heiße eine M^3, wenn sie sich mit Umkehrung der Orientierung topologisch auf sich abbilden läßt. Das einfachste Beispiel einer unsymmetrischen M ist die Torus-M^3 (3, 1), allgemeiner die Torus-M^3 (k, l), wenn -1 quadratischer Nichtrest mod k ist.

2) Der Buchstabe k hat hier nicht die frühere Bedeutung.

3) Irreduzibel ist z. B. das Produkt $S^1 \cdot S^1 \cdot S^1$, ferner jede M^3 mit endlicher Wegegruppe (s. u.), deren Hauptüberlagerungs-M^3 die S^3 ist. Dazu gehört auch die von Dehn aus der Kleeblattschlinge gewonnene M^3, deren Wegegruppe der binären Ikosaedergruppe isomorph ist. Sie läßt sich nämlich darstellen als Modul-M^3 der aus der binären Gruppe in bekannter Weise erwachsenden fixpunktfreien Drehungsgruppe der (metrischen) S^3, die die Zellen des regelmäßigen 120-Zells transitiv vertauscht. Ob diese M^3 symmetrisch ist, scheint nicht ganz leicht zu entscheiden, weil das sonst so nützliche Hilfsmittel der Homologiebetrachtungen versagt.

4) Wenn man im allgemeinen von einer eingeführten Benennung nicht ohne besonderen Grund abgehen soll, so glaube ich Grund genug zu haben, für die seit Poincaré so genannte Fundamentalgruppe diese Bezeichnung vorzuschlagen. Sie ist kürzer, sagt mehr und läßt sich leicht in andere Sprachen übertragen. Mehr oder weniger fundamental sind auch die Homologiegruppen; unter „Wegegruppe" kann man kaum etwas anderes verstehen, als das Wort bedeuten soll.

das freie Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.[1]) Von diesem Satz gilt überraschenderweise die folgende Umkehrung.

Ist die Wegegruppe einer zusammenhängenden M^3 das freie Produkt zweier Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so wird M^3 durch eine S^2 in zwei Teile zerlegt, deren Wegegruppen den Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph sind.

Dadurch ist eine hinreichende (und, wenn die bekannte Vermutung, S^3 sei die einzige einfach zusammenhängende M^3, richtig sein sollte, auch notwendige) Bedingung der Reduzibilität gegeben.

Zum Beweise ist es nötig, die Wegegruppe in eine möglichst enge geometrische Beziehung zum zellenmäßigen Aufbau der M^3 zu bringen. Dies geschieht durch die Konstruktion, die der von Poincaré und Tietze angegebenen Aufstellung der Wegegruppe dual gegenübersteht. Das Resultat ist das folgende. Jeder Flächenzelle einer bestimmten Zellendarstellung von M^3 wird im Hinblick auf eine bestimmte Überschreitungsrichtung ein Element der Wegegruppe, im Hinblick auf die entgegengesetzte Überschreitung das reziproke Gruppenelement zugeordnet; jeder Weg wird dargestellt als eine Kette von Übergängen: von einer festgelegten Ausgangsraumzelle über eine Flächenzelle zur angrenzenden Raumzelle, von dieser ebenso zu einer weiteren Raumzelle usf. bis zur Ausgangszelle zurück. Das Gruppenelement, das einem solchen Wege (von der festgelegten Ausgangszelle zu dieser zurück) zukommt, bestimmt sich einfach als das Produkt der den überschrittenen Flächenzellen im Sinne der Überschreitung zugeordneten Elemente, gebildet in der Reihenfolge der Überschreitungen. Die Umkreisung einer Kante des Zellengebäudes liefert einen Ausdruck, der der Einheit gleich ist, d. h. eine Relation zwischen den Gruppenelementen. Die den Flächenzellen zugeordneten Elemente erzeugen die ganze Wegegruppe, die Relationen definieren ihre Struktur. Die Gesamtheit derjenigen Flächenzellen, denen von der Einheit verschiedene Elemente zugeordnet sind, heißt der *Gruppenkomplex.*

Der Gruppenkomplex zusammen mit der Angabe der zugeordneten Elemente liefert ein vollständiges Bild der Wegegruppe, auch wenn eine andere Ausgangszelle gewählt wird: die Wegegruppe erfährt höchstens einen inneren Isomorphismus.

Der Gruppenkomplex kann noch mannigfach abgeändert werden. Man wählt eine Raumzelle Z und ein Gruppenelement T und ordnet

---

1) Der Kenner wird diesen Satz leicht beweisen können. Er gilt auch in der weiteren Fassung: Bilden zwei zusammenhängende Komplexe A und B mit einfach zusammenhängendem Durchschnitt zusammen den Komplex C, so ist die Wegegruppe von C das freie Produkt der Wegegruppen von A und B.

jeder Randzelle von Z beim Austritt aus Z statt des ihr vorher zugeordneten Elements S das Element TS, beim Eintritt in Z statt S^{-1} das Element $S^{-1} T^{-1}$ zu. Dies Verfahren, wiederholt und im Wechsel mit Umteilungen des Zellengerüstes angewandt, liefert alle möglichen Gruppenkomplexe.

Ist nun die Wegegruppe das freie Produkt zweier Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so ist jedes Element eindeutig darstellbar als Produkt von Faktoren, die von der Einheit verschieden sind und abwechselnd aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ stammen. Jede Zelle des Gruppenkomplexes werde durch ebensoviele nebeneinander verlaufende Zellen mit demselben Rand ersetzt, wie ihr Element Faktoren hat, und diese Faktoren in der richtigen Reihenfolge den Ersatzzellen zugeordnet. So ergibt sich ein Gruppenkomplex, bei dem zu jeder Zelle ein Element aus $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ gehört. Die Zellen, deren Elemente zu $\mathfrak{A}$ gehören, bilden den Teil A des Gruppenkomplexes, die übrigen den Teil B. Stoßen in einer Kante Zellen von A mit Zellen von B zusammen, so muß ihr Produkt 1 sein. Wegen der freien Produktbildung muß in der zyklischen Folge der Faktoren mindestens eine vollständige, d. h. beiderseits von Faktoren aus $\mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{A}$) flankierte Folge von Faktoren aus $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) schon das Produkt 1 ergeben. Durch die oben geschilderten Abänderungen des Gruppenkomplexes läßt sich dann erreichen, daß die diesen Faktoren entsprechenden Zellen des Gruppenkomplexes nicht mehr in der betrachteten Kante zusammenstoßen, sondern in einer daneben verlaufenden mit denselben Endpunkten. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erreicht man, daß A und B nur noch in Ecken miteinander zusammenhängen, und auch dieser Zusammenhang läßt sich aufheben, so daß schließlich der Gruppenkomplex in zwei getrennte Teile A und B zerfällt.

Jetzt trennt man A und B durch eine M^2, indem man z. B. um A eine Art Parallelfläche beschreibt. Besteht diese nicht aus lauter S^2, so liefert der Hilfssatz einen E^2, der mit M^2 genau seinen Rand gemeinsam hat und dessen Rand auf M^2 nicht homotop Null ist. Da nämlich M^2 den Gruppenkomplex nicht trifft, ist jede in M^2 liegende Kurve homotop Null in M^3. Wegen des einfachen Zusammenhanges von E^2 kann man den Gruppenkomplex in der Nähe von E^2 so abändern, daß er E^2 nicht mehr schneidet und seine früheren Eigenschaften behält. Dann wird M^2 mit Hilfe von E^2 so reduziert, wie es in Abschnitt 3 geschah. Dies Verfahren bewirkt nach endlich vielen Schritten, daß A und B durch eine Anzahl S^2 getrennt werden.

Können nun in einem der Teile, in die M^3 durch diese S^2 zerlegt wird, zwei verschiedene Rand-S^2 durch einen Weg verbunden werden, der nach Maßgabe des Gruppenkomplexes das Einheitselement liefert[1]), so kann der Gruppenkomplex so abgeändert werden, daß er den Weg nicht trifft und die bisher festgestellten Eigenschaften behält, und man verbindet die beiden S^2 durch einen Schlauch längs dieses Weges zu einer einzigen. Ist dies getan, so oft es möglich ist, so seien $U_1, \ldots, U_m$ bzw. $V_1, \ldots, V_n$ diejenigen durch die S^2 bestimmten Teile von M^3, in denen Teile von A bzw. B enthalten sind. Jedes U_ν grenzt mit einigen S^2 an einige V_ν, jedes V_ν an einige U_μ. Legt man die Ausgangszelle nach U_1, so kann jedes Gruppenelement aus $\mathfrak{A}$ durch einen Weg in U_1 verwirklicht werden. Man zerlege nämlich einen Weg mit dem Gruppenelement a aus $\mathfrak{A}$ in die Teile, die in den verschiedenen U_μ und V_ν verlaufen. Liefert einer dieser Teile außer dem ersten und letzten mit Hilfe des Gruppenkomplexes den Faktor 1 zum Gruppenelement, so beginnt und endigt er auf Grund der letzten Reduktion auf derselben S^2. Schließt man ihn durch eine Verbindung seiner Anfangs- und Endzelle längs dieser S^2, so entsteht ein zusammenziehbarer geschlossener Weg. Der Teilweg kann daher durch die Verbindung längs der S^2 ersetzt werden, und diese verlegt man dann durch die S^2 hindurch in den Teil U_μ oder V_ν, in dem der vorhergehende und der nachfolgende Teilweg liegen. Das vermindert die Anzahl der Teilwege um zwei. Ist das nicht mehr möglich und ist noch mehr als ein Teilweg vorhanden, so ist in dem Ausdruck $a_1 b_1 a_2, \ldots, b_{r-1} a_r$ mindestens ein Faktor b von 1 verschieden. Dies tritt aber nicht ein, da ja das Gruppenelement zu $\mathfrak{A}$ gehören sollte. Also ist in U_1 und ebenso in jedem Teil U_μ ein geschlossener Weg vorhanden, der zur Klasse eines beliebig gegebenen Elementes a aus $\mathfrak{A}$ gehört. Dasselbe gilt bezüglich V und $\mathfrak{B}$. Kann aber ein Weg, der in einem von einigen S^2 begrenzten Teil einer M^3 liegt, stetig aus diesem Teil ganz herausgezogen werden, so ist er homotop Null. Abgesehen von dem trivialen Fall, daß $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nur aus dem Einheitselement besteht (und dann übrigens erst recht), ist nach den vorgenommenen Reduktionen $m = n = 1$, und U_1 bzw. V_1 hat die Wegegruppe $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Wäre nun die Anzahl der S^2, die U_1 und V_1 trennen, größer als 1, so würde schon die berandete Mannigfaltigkeit, die beim Ansetzen von U_1 an V_1 längs *einer* der S^2 entsteht, eine Wegegruppe haben, die dem freien Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph ist, und die Wegegruppe von M^3 würde aus dieser durch freie Multiplikation mit einer Anzahl unendlicher zyklischer Gruppen entstehen. Dadurch würde aber der Rang der Gruppe — d. h. die größte Anzahl unabhängiger Elemente in der Faktorgruppe

1) Auch ungeschlossene Wege geben ein Gruppenelement; nur ändert sich dieses beliebig bei Abänderungen des Gruppenkomplexes.