SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Verlag: Teubner

Jahr: 1930

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN37721857X_0039

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN37721857X_0039|LOG_0027

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

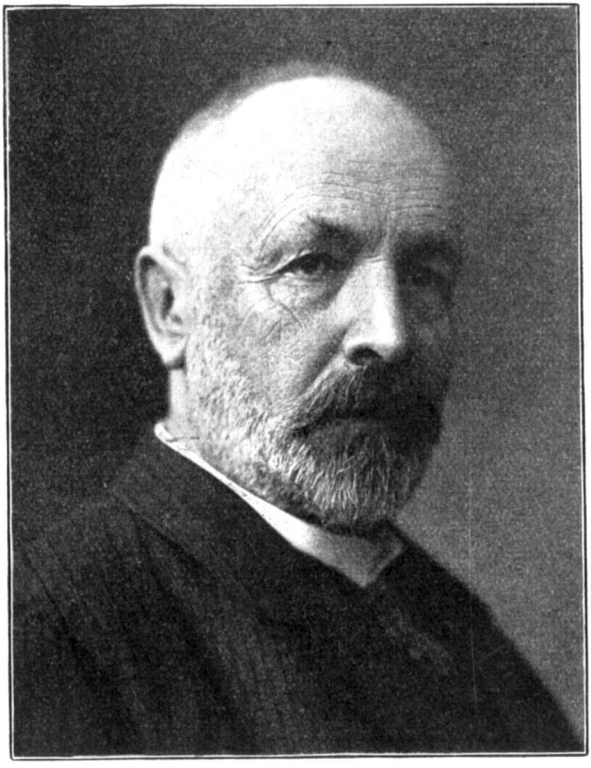
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Georg Cantor.[1])

Von A. FRAENKEL in Kiel, z. Zt. in Jerusalem.

Mit einem Bildnis.

I. Entwicklung und Persönlichkeit.



Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp[2]) Cantor, der Schöpfer der Mengenlehre, wurde am 19. Februar alten Stils (3. März n. St.) 1845 in Petersburg geboren. Sein Vater Georg Woldemar Cantor war aus Kopenhagen gebürtig; er hatte in Petersburg, wohin er in jungen Jahren gekommen war, ein Maklergeschäft inne, das er unter seinem eigenen Namen, zeitweise auch unter der Firma „Cantor & Co." betrieb. Als tüchtiger und erfolgreicher Kaufmann brachte er es zu bedeutendem Wohlstand und hinterließ bei seinem Tode (1863) ein recht beträchtliches Vermögen; er scheint sowohl in Petersburg wie später in Deutschland sich hohen Ansehens erfreut zu haben.

1) Für die Überlassung des recht spärlichen und sehr verstreuten ungedruckten Materials, dessen ich zum *Leben* Cantors (den ich nicht mehr persönlich gekannt

Eines Lungenleidens wegen übersiedelte er mit seiner Familie 1856 nach Deutschland und nahm bald seinen Wohnsitz in Frankfurt a. M., wo er als Rentner lebte. Die Mutter, Maria geb. Böhm, die ihren Gatten um 33 Jahre überlebte, entstammte einer kunstbegabten Familie, deren Einschlag sich offenbar im Phantasiereichtum des Sohnes fühlbar machte. Der Großvater Ludwig Böhm war Kapellmeister, dessen in Wien lebender Bruder[3]) Josef war Lehrer des berühmten Violinvirtuosen Joachim; auch Maria Cantors Bruder war Musiker, ihre Schwester Annette hatte eine Tochter (Olga), die Malerin (besonders Karrikaturistin) und Lehrerin an der Münchener Kunstgewerbeschule war. Bei den Geschwistern Georg Cantors selbst ist die künstlerische Ader gleichfalls merkbar: sein als Dragoner-Rittmeister a. D. gestorbener Bruder Constantin war ein talentvoller Klavierspieler, seine noch in Berlin lebende Schwester Sophie Nobiling geb. Cantor ist zeichnerisch besonders begabt.

Der talentvolle Junge, der in Petersburg die Elementarschule besucht hatte, zeigte schon frühzeitig den brennenden Wunsch, das Studium der Mathematik zu ergreifen. Sein Vater war indes hiermit nicht einverstanden, sondern hielt das Brotstudium des Ingenieurfaches für geeigneter; der Sohn fügte sich zunächst und bezog, nachdem er vorübergehend das Gymnasium in Wiesbaden sowie Privatschulen in Frankfurt a. M. besucht hatte, Ostern 1859 die Großherzoglich Hessische Provinzialrealschule in Darmstadt, an der auch Latein Lehrgegenstand war, um von ihr 1860 in den unteren allgemeinen Kursus der Großherzoglichen Höheren Gewerbeschule (späteren Technischen Hochschule) überzutreten. Lebhaften Eindruck von der Art, in der der Vater die Erziehung leitete, wie auch von den großen Hoffnungen, die er auf den Sohn setzte, gibt ein Brief, den der Vater ihm zu seiner Konfirmation Pfingsten 1860 sandte; es heißt darin:

---

habe) habhaft werden konnte, habe ich neben vielen anderen besonders auch C.s Tochter, Frau Gertrud Vahlen in Halle a. S., zu danken. Angesichts der über die Grenzen der Mathematikgeschichte noch hinausgehenden, innerhalb dieser Grenzen gewiß ganz außerordentlichen Bedeutung C.s wurde das erreichbare Material trotz seiner zeitlichen und sachlichen Ungleichmäßigkeit so vollständig als tunlich verwertet.

Für höchst wertvolle Unterstützung bei der Durcharbeitung des größeren Teiles der *Veröffentlichungen* C.s bin ich Herrn Pleßner-Gießen zu großem Dank verpflichtet.

Die in eckige Klammern gesetzten arabischen und römischen Ziffern verweisen auf das am Schluß stehende Verzeichnis von Publikationen C.s und von Material zu seinem Leben und Schaffen.

2) Zu S. 189. So nach dem Taufschein (in [VII] Louis Philippe).

3) Also ein Onkel, nicht ein Bruder Maria Cantors (wie in [IX], S. 556, angegeben).

„Geliebter George! Möge durch die Güte des Allmächtigen, des Schöpfers des Weltalls und Vaters aller belebten Wesen, dieser Tag von segensreichem Einfluß auf Dein ganzes künftiges Leben werden! Mögest Du immerfort und unablässig vor Augen behalten alle die tugendhaften Vorsätze, die Du Dir heute ohne Zweifel im Stillen zum Gelöbnis gemacht hast! . . . Die künftigen *Lebenswege* und Schicksale des Menschen liegen im tiefsten Dunkel verborgen vor ihm. Und es ist gut, daß es so ist. Niemand weiß vorher, in welche unglaublich schwierigen Lagen und Berufsverhältnisse er zufällig geraten, mit welchen unvorhergesehenen und *unvorherzusehenden* Widerwärtigkeiten und Schwierigkeiten er in den verschiedenen Lagen des Lebens anzukämpfen haben wird.

. . . Wie oft sind nicht schon die allerhoffnungsvollsten Menschen, nachdem sie ins praktische Leben eingetreten, schon in den ersten ernstlichen Kämpfen nach kurzem ohnmächtigem Widerstand erlegen. Mutgebrochen verkümmerten sie hinterher vollständig — im *günstigsten* Fall wird noch aus ihnen ein sogenanntes verkommenes Genie! . . . So enden *wahrlich nicht selten* junge Menschen, die *scheinbar* mit den vielversprechendsten Eigenschaften des Geistes sowohl wie des Körpers ausgestattet und deren Aussichten fürs spätere Leben auch durch Vermögen und Familienverhältnisse in ihrer Jugend die allerrosigsten von der Welt waren!

Doch — ihnen *fehlte* der *feste Kern*, auf den *alles* ankommt! Nun, mein teurer Sohn! — *glaube* es *mir*, Deinem *aufrichtigsten*, *treuesten* und *erfahrensten* Freunde — dieser feste Kern, *der in uns leben muß*, das ist: ein *wahrhaft* religiöses Gemüt! Dies offenbart *sich uns selbst* durch ein *aufrichtiges demütiges Gefühl dankbarster Gottesverehrung*, aus welcher denn auch das *siegreiche*, *unerschütterlich feste Gottesvertrauen erwächst* und uns unser ganzes Leben hindurch in jenem stillen zuversichtlichen Verkehr mit unserem himmlischen Vater erhält!

. . . Um aber auch *allen jenen anderen* Drangsalen und Schwierigkeiten zu begegnen, die im eifrigen Streben nach Erfolg und Glück in unserer *eigentlichen Fach- oder Berufstätigkeit* durch Neid und Verleumdung offener oder geheimer Feinde unausweichlich sich uns entgegentürmen, um *auch diese* mit *Erfolg* zu bekämpfen, dazu gehört in erster Reihe die Erwerbung und Aneignung der größtmöglichen Summe gründlichster, vielseitigster Fachkenntnisse und Fähigkeiten. Diese sind heutzutage eine *unbedingte Notwendigkeit*, wenn der strebsame und ehrgeizige Mann sich nicht von seinen Feinden verdrängt und sich selbst in zweiter oder dritter Linie stehend sehen will.

Zur Erlangung vielfacher gründlicher wissenschaftlicher und praktischer Kenntnisse, zur *vollkommenen* Aneignung fremder Sprachen und Literaturen, zur vielseitigen Bildung des Geistes, auch in manchen humanistischen Wissenschaften — um durch all dieses erst *Dich würdig auszurüsten* zu *jenen Kämpfen* — *dazu* ist nun, dieses mußt Du Dir *immerfort wohl* bewußt bleiben! — *dazu ist* die eben angetretene *zweite Periode* Deines Lebenslaufes, *das Jünglingsalter, bestimmt.* Was der Mensch aber in *dieser Periode* versäumt oder durch *vorzeitige* Vergeudung seiner besten Kräfte, Gesundheit und Zeit, sozusagen *verludert*, das ist unwiederbringlich und *unersetzlich* für *ewig verloren;* — gleich der *einmal* verlorenen Unschuld, die für immer und ewig unrettbar verloren bleibt! . . .

Ich schließe mit den Worten: Dein Vater oder vielmehr Deine Eltern und alle übrigen Familienangehörigen sowohl in Deutschland wie in Rußland und Dänemark haben ihre Augen auf *Dich* als den Ältesten gerichtet und erwarten von Dir nichts *Geringeres* als einen Theodor Schaeffer[1]) und, so Gott will, später vielleicht auch ein *leuchtendes Gestirn* am Horizonte der Ingenieure.

1) [Wie es scheint, Lehrer an dem Internat, in dem C. untergebracht war.]

Gott gebe Dir *Kraft*, Ausdauer, Gesundheit, Charakterfestigkeit und seinen besten Segen! Aber darum wandle *Du* auch nur auf seinen Wegen. Amen!

Dein Vater . . ."

Dieser bemerkenswerte Brief wurde hier in so weiten Teilen angeführt, nicht bloß um die Höhe und Weite der Lebensauffassung des Vaters Cantor und die ganz besonderen Hoffnungen, die auf den ältesten Sohn gesetzt wurden, zu kennzeichnen, sondern auch weil dieser Brief, den C. zeitlebens aufgehoben hat, manches enthält, was in seinem späteren Leben zur Geltung kommen sollte. Der Mahnung, sich aller Gegnerschaft zum Trotz aufrechtzuerhalten und durchzusetzen, hat C. in schweren Stürmen nur zu sehr bedurft; vielleicht ist es z. T. solch väterlicher Erziehung zu danken, wenn der schöpferische Geist nicht vorzeitig gebrochen und die Nachwelt nicht um seine Früchte betrogen worden ist. Für den im obigen Brief besonders stark zum Ausdruck kommenden religiösen Einschlag der Erziehung, den wir gleichfalls noch viel später fortwirkend erkennen werden, ist nicht minder charakteristisch ein Brief, den der Vater am 18. August 1862 von Rigi-Kaltbad aus dem Sohn anläßlich seiner Schlußprüfung an der Gewerbeschule sandte und in dem es heißt: „. . . . Gott schenke Dir Segen und Glück zu dem heute beginnenden Examen. Amen! — In kritischen Lagen des Lebens ein festes, frohes Gottvertrauen und ein *tiefinnig-gefühltes Gebet* zum allmächtigen Geber alles Guten vor Beginn des Tagewerks gibt Festigkeit, Mut und Selbstvertrauen! Und somit Gott befohlen, frisch, froh und heiter ans Werk! . . ."

Der Sohn wurde im evangelisch-lutherischen Glauben erzogen, dem der Vater (mindestens schon 1845) angehörte. Doch wird in der späteren Einstellung und den Interessen C.s neben lebhafter Religiosität überhaupt auch die besondere Beziehung zum Katholizismus bemerkbar, die er durch seine katholische Mutter besaß.

In seinem Abgangszeugnis (September 1860) von der Darmstädter Realschule, das in allen Fächern wie auch in Fleiß und Betragen gute Zensuren enthält, heißt es betr. Mathematik: „Sein Fleiß und Eifer musterhaft; seine Kenntnisse in der Niederen Mathematik inkl. Trigonometrie sind sehr gut; Leistungen lobenswert." Die Zensur in darstellender Geometrie lautet: „Fleiß, Aufmerksamkeit und Leistungen vorzüglich." Für seine Leistungen in der Höheren Gewerbeschule, die er in der unteren und der oberen allgemeinen Abteilung je ein Jahr besuchte, erhielt er im August 1862 das Zeugnis: „Er zeigte sich als sehr begabter und höchst strebsamer Schüler." Weiter unterwarf er sich zwecks Studiums der Naturwissenschaft im Herbst 1862 einer (auch die Sprachen umfassenden) Reifeprüfung, deren — in den

meisten Fächern „sehr gutes" — Ergebnis „als Maturitätszeugnis Nr. 1 für das Studium der Naturwissenschaft anerkannt" wird.

Schließlich blieb die tiefe Neigung zur Mathematik, die C. nach wie vor beseelte, nicht ohne Eindruck und Wirkung auf seinen Vater. Dessen Verehrung gegenüber der Wissenschaft wird namentlich durch einen Brief bezeugt, in dem er am 19. Oktober 1861 seinem Sohne nach Darmstadt schreibt: „. . .Ich freue mich natürlich auch, daß der neu angefangene obere Kursus Dein Interesse für alle Wissenschaften neu auflodern läßt. Hege und pflege die Liebe zu den Wissenschaften, gleich wie das heilige Feuer der Vestalinnen gepflegt wurde, deren brennende Lampe nie ausgehen durfte! Die ewige, nie zu verlöschende und sorgfältig zu pflegende Lampe der Wissenschaft ist aber ein heiligeres und reineres Feuer, als jene es war. Pflegt der Mensch diese Lampe je nach seinen *individuellen* Fähigkeiten, so hat er seine Schuldigkeit getan . . ." Der Sohn konnte sich für die Einwilligung des Vaters zu seinen Plänen durch folgenden Brief an ihn bedanken, der vom 25. Mai 1862 aus Darmstadt datiert ist und der den ältesten erhaltenen Brief C.s darstellt: „Mein lieber Papa! Wie sehr Dein Brief mich freute, kannst Du Dir denken; er bestimmt meine Zukunft. Die letzten Tage vergingen mir im Zweifel und der Unentschiedenheit; ich konnte zu keinem Entschluß kommen. Pflicht und Neigung bewegten sich in stetem Kampfe. Jetzt bin ich glücklich, wenn ich sehe, daß es Dich nicht mehr betrüben wird, wenn ich in meiner Wahl dem Gefühle folge. Ich hoffe, Du wirst noch Freude an mir erleben, teurer Vater, denn meine Seele, mein ganzes Ich lebt in meinem Berufe; was der Mensch will und kann, und wozu ihn eine unbekannte, geheimnisvolle Stimme treibt, *das* führt er durch! . . ."

Im Herbst 1862 nahm C. sein Studium in Zürich auf; aus den dorthin gerichteten Briefen seines Vaters ersehen wir, wie dieser um die musikalische Fortbildung des Sohnes nicht minder besorgt ist als z. B. um die Einrichtung eines strengen Systems und Planes der Tagesbeschäftigungen, worüber er schreibt: „. . . dieses ist für einen künftigen Gelehrten, wie mir *dünkt* — nein ich *weiß*, daß es so ist — eigentlich was Unerläßliches . . ." Nach dem ersten Semester mußte C. infolge des Todes seines Vaters im Frühjahr 1863 Zürich verlassen. Vom Herbst dieses Jahres an studierte er Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, wo das Dreigestirn Kummer, Weierstraß, Kronecker die besten Begabungen anzog und auf den (damals noch recht kleinen) Hörerkreis Anregungen nach den verschiedensten Richtungen ausstrahlte. Nur das Sommersemester 1866 verbrachte er in Göttingen. Den weitaus größten Einfluß auf seine wissenschaftliche

Entwicklung hat Weierstraß ausgeübt. Es ist bemerkenswert und gleicherweise für die Weite des Gesichtskreises von Weierstraß wie für sein vorurteilsfreies und vorausblickendes Urteil bezeichnend, daß er die tiefe Verehrung, die sein Schüler ihm entgegenbrachte und unbeschadet vorübergehender Trübungen zeitlebens bewahrt hat, mit einem frühzeitigen verständnisvollen Eingehen auf dessen neuartige Ideen erwiderte.[1]) Nach Angabe von Lampe[2]) hat C. in seiner Berliner Zeit außer dem Mathematischen Verein noch einem engeren Kreis junger Fachgenossen angehört, die sich allwöchentlich in der Rähmelschen Weinstube trafen; außer gelegentlichen Gästen umfaßte dieser Kreis namentlich noch Henoch (den nachmaligen Herausgeber der „Fortschritte"), Lampe, Mertens, Max Simon, Thomé, unter denen sich der letztgenannte besonders eng an C. anschloß. Ferner gehörte zu seinen Berliner Studiengenossen der um zwei Jahre ältere H. A. Schwarz, der indes entgegen dem Beispiel seines Lehrers Weierstraß den Ideen C.s im weiteren Verlaufe lebhaftes Mißtrauen entgegenbrachte.[3])

Am 14. Dezember 1867 promovierte C. auf Grund tiefergehenden Studiums der *Disquisitiones arithmeticae* sowie der Zahlentheorie Legendres an der Berliner Universität mit der von der Fakultät als „dissertatio docta et ingeniosa" bezeichneten Arbeit [1], die seinen und seiner Geschwister Vormündern Eduard Flersheim und Bernhard Horkheimer gewidmet ist; im mündlichen Examen erhielt er „magna cum laude". Gegen die schon promovierten Kollegen Simon, Henoch und Lampe verteidigte er dabei die Thesen: I. In arithmetica methodi mere arithmeticae analyticis longe praestant. II. Num spatii ac temporis realitas absoluta sit, propter ipsam controversiae naturam dijudicari non potest. III. In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi. Zeugt die zweite These von den schon auf der Universität mit Ernst begonnenen philosophischen Studien, so ist die dritte charakteristisch für die mathematische Zielsetzung C.s. Selbst auf dem Gebiet der Mengenlehre sind ja die von ihm erreichten Resultate vielleicht nicht ganz so wesentlich wie die revolutionären Problemstellungen, die noch so weit über sein eigenes Werk hinaus fortwirken.

---

1) Vgl. auch S. 199 f. Von dem (offenbar sehr losen) Briefwechsel, der 1876—1891 zwischen C. und Weierstraß bestanden hat, ist außer dem von C. selbst in [35] veröffentlichten Schlußbrief mir nichts zugänglich geworden.

2) Vgl. Engel in diesem *Jahresbericht* **20** (1911), S. 265.

3) Persönliche Erinnerung aus dem Berliner Mathematischen Seminar von 1912/13.

Es scheint, daß C. in Berlin kurze Zeit an einer Mädchenschule unterrichtet hat; jedenfalls war er 1868, nach bestandener Staatsprüfung, Mitglied des Schellbachschen Seminars für Lehrer der Mathematik.

Die Habilitationsschrift [5], auf Grund deren sich C. im Frühjahr 1869 als Privatdozent in Halle niederließ, gehört ebenso wie einige kleinere in den Jahren 1868—72 veröffentlichte Noten noch diesem seinem ersten, arithmetischen Arbeitsgebiete an, auf das er später nur mehr vereinzelt zurückgekommen ist. Dennoch ist ihm diese wohl vornehmlich von Kronecker angeregte Beschäftigung mit der Zahlentheorie nicht eine bloß zufällige Angelegenheit gewesen, sondern die besondere Reinheit und Schönheit dieser Disziplin hat sich ihm tief innerlich geoffenbart; dies zeigt außer der erwähnten ersten Doktorthese auch die dritte der bei seiner Habilitation verteidigten Thesen: „Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere."

Heine, der in Halle damals als Ordinarius wirkte, erkannte sogleich, in wie glücklicher Weise C. mit ungewöhnlichem Scharfsinn eine außerordentliche Phantasie verband (siehe [VI]). Es wurde von entscheidender Bedeutung, daß er den jungen Kollegen alsbald nach seiner Niederlassung in Halle anregte, sich mit der Theorie der trigonometrischen Reihen zu beschäftigen (vgl. [6], S. 130, Fußnote). Der Eifer, mit dem sich C. auf diesen Gegenstand stürzte, zeitigte nicht nur an und für sich eine Reihe wesentlicher Erfolge, sondern führte ihn auch den Weg zur Theorie der Punktmengen und gleichzeitig zu den transfiniten Ordnungszahlen, wie die 1872 erschienene Abhandlung [10] zeigt. Diese enthält einerseits die ersten Grundbegriffe der Punktmengenlehre, namentlich den Begriff der Ableitung, aus dem C. schon um 1870 der Gedanke der transfiniten Zahlen erwachsen war (vgl. [16 II], S. 358 Fußnote, sowie die in [V], S. 32 Fußnote, angeführte briefliche Äußerung C.s); andererseits findet sich hier die Leistung, die nächst der Mengenlehre vornehmlich C.s Namen unsterblich gemacht hat: seine Theorie der Irrationalzahlen als Fundamentalreihen.[1]) Auch die Erkenntnis der Notwendigkeit, bei der Begründung der Geometrie ein Axiom von der Art zu verwenden, wie es heute unter dem Namen Cantorsches Axiom bekannt ist, begegnet uns in diesem Aufsatz; gleichzeitig und unabhängig von ihm erschien Dedekinds Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen", mit der sich C. wiederholt und intensiv (auch in der Korrespondenz

1) Die von Heine in seinen *Elementen der Funktionenlehre* (*Journ. f. Math.* 74 [1872], S. 172—188) entwickelte Einführung der Irrationalzahlen geht ganz und gar auf C.s Ideen zurück; vgl. die Einleitung zu Heines Aufsatz, sowie [28 I], S. 90.

mit Dedekind) beschäftigt hat. Übrigens beklagt sich C. schon 1873 in einem Brief an Dedekind über den Gebrauch, den im nächsten Annalenband F. Klein von seinem und Dedekinds verwandtem Axiom „in der etwas schlüpfrigen, unbestimmten Fassung der neueren Geometrie" mache, ohne die beiden Urheber zu nennen.[1])

Zu dieser Zeit, um 1871, beginnt (etwa mit der soeben hervorgehobenen Arbeit) das Leben C.s aus der bisherigen normalen Entwicklung eines begabten Gelehrten herauszutreten; in eine zweite Periode, die die Jahre 1871—1884 umfaßt, fällt die äußerste, von Erfolg gekrönte Kraftanstrengung des genialen Forschers.

Zunächst bringen die Jahre 1872—74 zwei bedeutsame Ereignisse in C.s persönlichem Leben. Auf einer der Reisen nach der Schweiz, die in seinen jüngeren Jahren anscheinend nicht selten gewesen sind, macht er 1872 in Gersau ganz zufällig die Bekanntschaft Dedekinds. Sie führt neben öfteren persönlichen Zusammenkünften, die späterhin meist in Harzburg erfolgten, auch zu einem Briefwechsel [II], von dem uns aus den Jahren 1873—79 sowie aus dem Jahr 1899 zahlreiche Briefe erhalten sind. Obgleich der mathematische Gehalt dieser Briefe beschränkt ist, geben sie einen recht guten Einblick in die Arbeitsweise und Stimmung C.s zu jenen Zeiten und in die Gegensätzlichkeit der beiden Naturen, die gleichwohl durch dauerhafte Freundschaft und gegenseitige Wertschätzung verbunden blieben. Dabei erscheint, um die Ostwaldschen Termini zu benutzen, C. als der „Romantiker" gegenüber dem „Klassiker" Dedekind; dieser Unterschied, den auch das Tempo der (in wissenschaftlichen Sturm- und Drangzeiten sich überstürzenden) Briefe C.s zeigt im Gegensatz zu Dedekind, der mit stets gleichbleibender Pünktlichkeit antwortet, sowie die namentlich im Anfang des Briefwechsels recht fühlbare Altersdifferenz (Dedekind war um 14 Jahre älter) lassen im großen und ganzen C. eher als den Fragenden und Nehmenden in diesem Briefwechsel erscheinen. Wie er in einem der ersten Briefe sein „Bedürfnis, mich über wissenschaftliche Gegenstände mit Ihnen auszusprechen und Ihnen im persönlichen Verkehr näherzutreten" äußert, so sehen wir ihn dauernd eine verehrungsvolle Dankbarkeit bewahren für das, was diese Verbindung ihm gibt, sowie für die „vielfache Anregung und reichliche Belehrung", die er von Dedekinds „klassischen Schriften empfangen"

1) Bei der Schilderung einer so eigenwilligen und temperamentvollen Natur wie C. geht es wohl nicht an, seine öfters cum ira et studio geäußerten Bemerkungen generell zu unterdrücken. Wo solche hier wiedergegeben sind, ist es heute meist nicht mehr schwer, im Licht der historischen Entwicklung das Ephemere und Subjektive von dem sachlich Gerechtfertigten zu scheiden.

habe (Brief vom 31. August 1899). Weit mehr allerdings, als es aus den Briefen ersichtlich wird, zeigen mittelbar die Verschiedenheiten in der Anlage der frühen und späteren mengentheoretischen Veröffentlichungen C.s den tiefgreifenden Einfluß der abstrakteren, logizistischen Art Dedekinds, die nach abgerundeter Systematik drängt, gegenüber dem mehr konstruktiven, zum Einzelstoß vorwärtsstürmenden Stil des jüngeren C. — eine Verschiebung, die in gewissen Zügen den heutzutage so ausgeprägten Tendenzgegensätzen in der Grundlagenforschung entspricht; man wird deshalb in der mathematischen Welt von heute sehr verschieden darüber urteilen, ob diese Entwicklung bei C. als ein Fortschritt oder etwa als eine Minderung des mathematischen Gehaltes anzusehen ist.

Um die nämliche Zeit etwa lernte C. seine künftige Gattin Vally Guttmann kennen, die in Berlin als Waise mit drei Brüdern lebte (von denen zwei Bankiers waren, einer später das Moabiter Krankenhaus in Berlin leitete). Nachdem er 1872 in Halle Extraordinarius geworden war, fand im Frühjahr 1874 die Verlobung, im Sommer die Hochzeit statt; auf der Hochzeitsreise traf das junge Paar in Interlaken mit Dedekind zusammen. Dem Ehepaar wurden vier Töchter und zwei Söhne geboren, wovon drei Töchter und ein Sohn heute noch leben; spezifisch mathematische Begabung ist bei keinem der Kinder hervorgetreten. Seit der Geburt der Kinder verbrachte C. mit seiner Familie die Ferien häufig im Harz, in dessen Wäldern er, ein warmer Naturfreund, gerne wanderte.

Die 70er Jahre schenkten C. verschiedene äußere Erfolge: neben der ihm schon 1869 übertragenen ordentlichen Mitgliedschaft der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle vor allem die Wahl zum korrespondierenden Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1878 — anscheinend der einzigen deutschen Akademie oder Universität außerhalb von Halle, die C.s Verdienst öffentlich geehrt hat —, ferner eine von ihm abgelehnte Berufung an die Akademie in Münster 1878 und die Übertragung des neu errichteten mathematischen Ordinariats in Halle 1879. Dennoch wird schon um jene Zeit manches von dem fühlbar, was in den folgenden Jahrzehnten sein Leben so sichtlich umdüstert hat. Zwar war 1874 im Crelleschen Journal, zu dessen Redaktion auch Kronecker gehörte, die Abhandlung [13] erschienen, in der wir heute die Geburtsstunde der Mengenlehre erblicken dürfen, insofern als hier zum erstenmal unendliche Mengen als nichtäquivalent erwiesen, d. h. zwei transfinite Mächtigkeiten voneinander unterschieden werden; dieses Ergebnis war für C. unerwartet, er hatte sich vorher um eine Abbildung der natürlichen Zahlen auf

das Kontinuum bemüht [IV].[1]) Allein die folgende Arbeit [14], in der er die ihm selbst höchst überraschend gekommene Abbildbarkeit von Kontinuen verschiedener Dimensionen aufeinander nachweist, bleibt bei der Crelle-Redaktion, der sie am 12. Juli 1877 eingereicht war, zunächst etwas über das damals übliche Maß und weit über C.s Ungeduld liegen, obgleich sich nach C.s Angabe [IV] Weierstraß für sie einsetzt. Im November beklagt sich C. gegenüber Dedekind bitter darüber, daß sich der Druck trotz des gegenteiligen Versprechens der Redaktion „in einer für mich auffallenden unerklärlichen Weise" verzögere und zugunsten später eingelaufener Arbeiten aufgeschoben werden solle; der Grund liegt offenbar in der Paradoxie des Resultates für die damalige Zeit (vgl. die Entstehungsgeschichte der Arbeit, unten S. 237). Glücklicherweise gelingt es Dedekind, den Freund unter Hinweis auf eigene Erfahrungen von der überstürzten Absicht, das Manuskript zurückzuziehen und als gesonderte Schrift bei Vieweg zu publizieren, noch zurückzuhalten; auch bei Crelle lösen sich die eingetretenen Schwierigkeiten bald auf und die Arbeit kann rechtzeitig erscheinen. Doch ist dies die letzte Veröffentlichung C.s im Crelleschen Journal; der ganzen Episode scheint, wenn sie auch vielleicht von C. zunächst zu schwer genommen wurde, schon der ablehnende Standpunkt Kroneckers zu C.s Ideen zugrunde zu liegen, aus dem sich dann die Krisis des Jahres 1884 entwickeln sollte (vgl. C.s Brief an Mittag-Leffler vom 25. Januar 1884). Schließlich hat ihn auch die Ernennung zum ordentlichen Professor in Halle nur in beschränktem Maße befriedigt, da er sich nach einem anderen Ort und einem größeren Wirkungskreis sehnte; schon 1874 äußert er sich [II]: „In den Ferien habe ich bis jetzt nie lange hierselbst ausgehalten, denn das einzige, was mich an Halle seit fünf Jahren gewissermaßen bindet, ist der einmal gewählte Universitätsberuf." Seine Annahme, daß die Nichtberufung nach auswärts sich auf eine kritische Beurteilung seiner Arbeiten durch einflußreiche Fachgenossen gründe, wird bei dem Ansehen, das Kronecker damals fast unbestritten genoß, durchaus berechtigt gewesen sein. So ist auch eine Bewerbung C.s beim Minister um eine Stelle in Berlin vom Jahre 1883, mit der er (nach seinem Brief an Mittag-Leffler vom 1. Januar 1884) zunächst weniger unmittelbaren Erfolg erzielen als vielmehr künftigen Gegenschritten seitens Schwarz

1) Vgl. auch einen Brief C.s an Jourdain vom 28. Februar 1906, siehe *Archiv d. Math. u. Phys.* **22** (1914), S. 12. — Der Auffassung von Schoenflies (Mengenbericht von 1900, S. 50 unten), als sei die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums schon in Bolzanos „Paradoxien" (Beginn des § 49) enthalten, kann angesichts der Unklarheit der dort verwendeten Begriffe nicht beigepflichtet werden.

und Kronecker im voraus begegnen wollte, ohne Erfolg geblieben, sie hat vielmehr eine kräftige Gegenwirkung bei Kronecker hervorgerufen.

Eine überraschende und, da an verstecktem Orte befindlich, kaum bekannt gewordene Bemerkung C.s scheint zu beweisen, daß er schon zu Anfang der 70er Jahre die Tragweite der ihm vorschwebenden Gedanken wie auch den ihnen erwachsenden Widerstand klar vor Augen gehabt hat; also zu einer Zeit, da er eben erst durch die Untersuchungen über trigonometrische Reihen auf das Aktual-Unendliche geführt worden war, und da seine erste im engeren Sinn mengentheoretische Arbeit [13] noch nicht die Öffentlichkeit erreicht hatte. Die Absicht, in der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle einmal einen Vortrag zu halten, dessen Thema naturgemäß allgemeinverständlich sein mußte, lenkte ihn auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit der er sich schon seit einigen Jahren beschäftigt hatte (Brief an Dedekind vom 11. September 1873); im Hinblick auf diesen Plan fragt er Dedekind nach einem Vortrag an, den dieser früher über ein ähnliches Thema gehalten hatte. In seinem am 6. Dezember 1873 gehaltenen Vortrag [12] bemerkt nun C. (S. 36) in bezug auf den Franzosen de Meré (17. Jahrhundert), der gegenüber Blaise Pascal die Autorität des Mathematikers in einer Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestritt: „Der Chevalier de Meré darf, wie ich glaube, allen Widersachern der exakten Forschung, und es gibt deren zu jeder Zeit und überall, als ein warnendes Beispiel hingestellt werden; denn es kann auch diesen leicht begegnen, daß genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödliche Wunde zu geben suchen, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftsreicher als alle früheren, rasch vor ihren Augen aufblüht — wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des Chevalier de Meré." — Dazu sei nur noch vermerkt, daß C. in seinen Briefen an Mittag-Leffler regelmäßig von Kronecker unter dem Spitznamen „Herr von Meré" spricht.

Weierstraß hingegen bewies schon um jene Zeit volles Verständnis für C.s Bestrebungen. Wie er bereits zu C.s Studienzeit, als dieser in seinem Seminar eine Abzählung der rationalen Zahlen durchführte, hierfür Interesse gezeigt hatte, so verstand er es nach kurzem anfänglichem Stutzen auch sehr rasch, den ihm Ende 1873 von C. mitgeteilten Begriff der Abzählbarkeit im allgemeinen zu würdigen, und machte alsbald eine Anwendung von der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen auf eine Frage der reellen Funktionen.[1]) Ebenso war es

1) Siehe den Brief von Weierstraß an P. du Bois-Reymond vom 15. Dezember 1874 (*Acta Mathematica* 39 [1924], S. 206) und den Brief C.s an Jourdain vom 29. März 1905 ([V], S. 48).

eine Anregung von Weierstraß, auf die hin C. selbst zum erstenmal den Begriff der Abzählbarkeit in der Analysis anwandte (siehe unten, Teil III, S. 251), während umgekehrt Weierstraß 1885 durch C.s Inhaltstheorie in [23] zur Beschäftigung mit der Theorie der reellen Funktionen angeregt wurde.[1])

Der Beginn der 80er Jahre bringt das intensivste Schaffen C.s, die gewaltigste, alle scheinbar festgefügten Grenzen überflutende Entfaltung seiner genialen Ideen, aber auch die schwere und bis zum Schluß fortwirkende Krisis in seinem Leben.

Die in den Jahren 1879—1884 in sechs Teilen erschienene Abhandlung [16] gehört zu den Erscheinungen in der Geschichte, wo sich ein durchaus neuer, mit den Anschauungen der Vergangenheit und Gegenwart in völligem Widerspruch stehender Gedanke von epochemachender Bedeutung durchringt und mit wachsender Deutlichkeit herauskristallisiert, in seiner Kühnheit und Neuartigkeit dem Schöpfer selbst immer mehr bewußt werdend. 1870 erfaßt ihn zum erstenmal der Gedanke der transfiniten Zahlen; 1873 erkennt er die Bedeutung der Abzählbarkeit und die zwischen ihr und dem Kontinuum gähnende Kluft; erst jetzt aber entschließt er sich seine Ideen in weitem Rahmen der Mitwelt vorzulegen, und zwar im vollen Bewußtsein ihrer Auswirkungsmöglichkeit.[2]) So gehört diese Abhandlung zum mindesten in ihrem fünften Teile, der auch selbständig erschienen ist (siehe [21]), nicht bloß dem Reiche der Mathematik und Philosophie an, sondern sie ist für die Geschichte der Wissenschaft und des menschlichen Denkens überhaupt bedeutungsvoll; zweifellos wird sie sich noch von so manchem zunächst fernerliegenden Gesichtspunkt aus als aufschlußreich und wertvoll erweisen. Die Redaktion der *Mathematischen Annalen* hat eine kühne Tat vollbracht, sich aber auch ein unvergängliches Verdienst erworben, indem sie die Spalten ihrer Zeitschrift diesen Ideen öffnete, die damals die mathematische und philosophische Welt vor den Kopf stießen und noch über ein Jahrzehnt einen bitteren Kampf um ihre Anerkennung zu führen hatten. Während die Besprechung des Inhaltes im allgemeinen weiter unten (S. 239ff.) folgt, seien aus dem (vom Oktober 1882 datierten) V. Teil hier einige Stellen wörtlich angeführt; sie sind einer-

1) Siehe den Brief von Weierstraß an Sonja Kowalewsky vom 16. Mai 1885 (*Acta Math.* 39 [1924], S. 195f.).

2) So spricht er hier z. B. „von den Gebieten, welche unter der Mannichfaltigkeitslehre stehen oder mit ihr die innigste Berührung haben, wie beispielsweise von der modernen Funktionentheorie einerseits und von der Logik und Erkenntnislehre andererseits" ([16 V], S. 562).

seits von besonderem Interesse weit über den fachwissenschaftlichen Kreis hinaus, lassen andererseits aber vor allem den schweren Kampf ahnen, der sich in jenen Jahren in dem Forscher und Menschen Cantor vollzog und der an der Erschütterung seiner Gesundheit zum mindesten einen erheblichen Anteil hatte:

Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannichfaltigkeitslehre*) ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von niemandem gesucht worden ist.

Die Abhängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlbegriffs versetzt sehe, ist eine so große, daß es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen; möge in diesem Umstande eine Rechtfertigung oder, wenn nötig, eine Entschuldigung dafür gefunden werden, daß ich scheinbar fremdartige Ideen in meinen Betrachtungen einführe. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Überzeugung aussprechen, daß diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, daß ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgröße mich stelle . . .

. . . Die unendlichen realen ganzen Zahlen, welche ich im folgenden definieren will und zu denen ich schon vor einer längeren Reihe von Jahren geführt worden bin, ohne daß es mir zum deutlichen Bewußtsein gekommen war, in ihnen konkrete Zahlen von realer Bedeutung zu besitzen**), haben durchaus nichts gemein mit der ersten von jenen beiden Formen, mit dem Uneigentlich-Unendlichen, dagegen ist ihnen derselbe Charakter der Bestimmtheit eigen, wie wir ihn bei dem unendlich fernen Punkte in der analytischen Funktionentheorie antreffen; sie gehören also zu den Formen und Affektionen des Eigentlich-Unendlichen. — Während aber der Punkt im Unendlichen der komplexen Zahlenebene vereinzelt dasteht gegenüber allen im Endlichen liegenden Punkten, erhalten wir nicht bloß eine einzige unendliche ganze Zahl, sondern eine

*) Mit diesem Worte bezeichne ich einen sehr viel umfassenden Lehrbegriff, den ich bisher nur in der speziellen Gestaltung einer arithmetischen oder geometrischen Mengenlehre auszubilden versucht habe. Unter einer Mannichfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem Platonischen εἶδος oder ἰδέα, wie auch mit dem, was Platon in seinem Dialoge „Philebos oder das höchste Gut" μικτόν nennt. Er setzt dieses dem ἄπειρον, d. h. dem Unbegrenzten, Unbestimmten, welches ich Uneigentlich-Unendliches nenne, so wie dem πέρας, d. h. der Grenze, entgegen und erklärt es als ein geordnetes „Gemisch" der beiden letzteren. Daß diese Begriffe Pythagoreischen Ursprungs sind, deutet Platon selbst an; man vergleiche A. Boeckh, Philolaos des Pythagoreers Lehren, Berlin 1819.

**) Ich nannte sie bisher „bestimmt definierte Unendlichkeitssymbole" . . .

unendliche Folge von solchen, die voneinander wohl unterschieden sind und in gesetzmäßigen zahlentheoretischen Beziehungen zueinander sowohl wie zu den endlichen ganzen Zahlen stehen. Diese Beziehungen sind nicht etwa solche, welche sich im Grunde auf Beziehungen endlicher Zahlen untereinander zurückführen lassen; die letztere Erscheinung tritt allerdings, aber auch nur bei den verschiedenen Stärken und Formen des Uneigentlich-Unendlichen häufig auf . . .

. . . Bekanntlich findet sich im Mittelalter durchgehends bei allen Scholastikern das „infinitum actu non datur" als unumstößlicher, von Aristoteles hergenommener Satz vertreten. Wenn man aber die Gründe betrachtet, welche Aristoteles gegen die reale Existenz des Unendlichen vorführt (m. s. z. B. seine „Metaphysik", Buch XI, Kap. 10), so lassen sie sich der Hauptsache nach auf eine Voraussetzung zurückführen, die eine *petitio principii* involviert, auf die Voraussetzung nämlich, daß es nur endliche Zahlen gäbe, was er daraus schloß, daß ihm nur Zählungen an endlichen Mengen bekannt waren. Ich glaube aber oben bewiesen zu haben, und es wird sich dies im Folgenden dieser Arbeit noch deutlicher zeigen, daß eben so bestimmte Zählungen wie an endlichen auch an unendlichen Mengen vorgenommen werden können, vorausgesetzt, daß man den Mengen ein bestimmtes Gesetz gibt, wonach sie zu *wohlgeordneten* Mengen werden. Daß ohne eine solche gesetzmäßige Sukzession der Elemente einer Menge keine Zählung mit ihr vorgenommen werden kann — dies liegt in der Natur des Begriffes *Zählung;* auch bei endlichen Mengen kann eine Zählung nur bei einer bestimmten Aufeinanderfolge der gezählten Elemente ausgeführt werden, es zeigt sich aber hier als eine besondere Beschaffenheit endlicher Mengen, daß das Resultat der Zählung — die *Anzahl* — unabhängig ist von der jeweiligen Anordnung; während bei unendlichen Mengen, wie wir gesehen haben, eine solche Unabhängigkeit im allgemeinen nicht zutrifft, sondern die Anzahl einer unendlichen Menge eine durch das Gesetz der Zählung *mitbestimmte* unendliche ganze Zahl ist; hierin liegt eben und hierin allein der in der Natur selbst begründete und daher niemals fortzuschaffende wesentliche Unterschied zwischen dem Endlichen und Unendlichen; nimmermehr wird aber um dieses Unterschiedes willen die Existenz des Unendlichen geleugnet, dagegen die des Endlichen aufrechterhalten werden können; läßt man das Eine fallen, so muß man mit dem Andern auch aufräumen; wo würden wir also auf diesem Wege hinkommen? . . .

Zu dem Gedanken, das Unendlichgroße nicht bloß in der Form des unbegrenzt Wachsenden und in der hiermit eng zusammenhängenden Form der im 17. Jahrhundert zuerst eingeführten konvergenten unendlichen Reihe zu betrachten, sondern es auch in der bestimmten Form des Vollendetunendlichen mathematisch durch Zahlen zu fixieren, bin ich fast wider meinen Willen, weil im Gegensatz zu mir wertgewordenen Traditionen, durch den Verlauf vieljähriger wissenschaftlicher Bemühungen und Versuche logisch gezwungen worden, und ich glaube daher auch nicht, daß Gründe sich dagegen werden geltend machen lassen, denen ich nicht zu begegnen wüßte . . .

So verschieden auch die Lehren dieser Schriftsteller [Locke, Descartes, Spinoza, Leibniz] sind, in der Beurteilung des Endlichen und Unendlichen stimmen sie an jenen Stellen im wesentlichen darin überein, daß zu dem Begriffe einer Zahl die Endlichkeit derselben gehöre und daß andererseits das wahre Unendliche oder Absolute, welches in Gott ist, keinerlei Determination gestattet. Was den letzteren Punkt anbetrifft, so stimme ich, wie es nicht anders sein kann, demselben völlig bei, denn der Satz: „omnis determinatio est negatio" steht für mich ganz außer Frage; dagegen sehe ich im ersteren, wie ich schon oben bei Erörterung der Aristotelischen Gründe gegen das „infinitum actu" gesagt habe, eine petitio

principii, welche manche Widersprüche erklärlich macht, die sich bei allen diesen Autoren und namentlich auch bei Spinoza und Leibniz finden. Die Annahme daß es außer dem Absoluten durch keine Determination Erreichbaren und dem Endlichen keine Modifikationen geben sollte, die, obgleich sie nicht endlich, dennoch durch Zahlen bestimmbar und folglich das sind, was ich Eigentlich-Unendliches nenne — diese Annahme finde ich durch nichts gerechtfertigt und sie steht m. E. sogar im Widerspruch zu gewissen von den beiden letzteren Philosophen aufgestellten Sätzen. Was ich behaupte und durch diese Arbeit wie auch durch meine früheren Versuche bewiesen zu haben glaube, ist, daß es nach dem Endlichen ein *Transfinitum* (welches man auch *Suprafinitum* nennen könnte), d. i. eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis gibt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, welche aber ebenso wie das Endliche durch bestimmte, wohldefinierte und voneinander unterscheidbare Zahlen determiniert werden können. Mit den endlichen Größen ist daher meiner Überzeugung nach das Bereich der definierbaren Größen nicht abgeschlossen, und die Grenzen unseres Erkennens lassen sich entsprechend weiter ausdehnen, ohne daß es dabei nötig wäre, unserer Natur irgendwelchen Zwang anzutun. An Stelle des in § 4 besprochenen Aristotelisch-scholastischen Satzes setze ich daher den andern: Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt . . .

Wenn es Schwierigkeiten bereiten sollte *unendlich große, abgeschlossene*, unter sich und mit den endlichen Zahlen vergleichbare, unter sich und mit den endlichen Zahlen durch feste Gesetze verbundene ganze Zahlen aufzufassen, so werden diese Schwierigkeiten mit der Wahrnehmung zusammenhängen, daß die neuen Zahlen zwar in vielen Beziehungen den Charakter der früheren, in viel mehr anderen Rücksichten aber eine durchaus eigenartige Natur haben, die es sogar oft mit sich bringt, daß verschiedene Merkmale an einer und derselben Zahl sich vereinigt finden, die bei den endlichen Zahlen nie zusammen vorkommen, sondern disparat sind. Findet sich doch schon an einer der im vorigen Paragraphen zitierten Stellen die Überlegung, eine unendliche ganze Zahl müßte, falls sie existierte, sowohl eine gerade wie auch eine ungerade Zahl sein und da diese beiden Merkmale nicht vereinigt auftreten können, so existiert deshalb keine solche Zahl.

Man nimmt hier offenbar stillschweigend an, daß Merkmale, welche an den hergebrachten Zahlen disjunkt sind, auch an den neuen Zahlen dieses Verhältnis zueinander haben müßten, und schließt daraus auf die Unmöglichkeit der unendlichen Zahlen. Wem springt hier der Paralogismus nicht in die Augen? Ist denn nicht jede Verallgemeinerung oder Erweiterung von Begriffen mit einem Aufgeben von Besonderheiten verbunden, ja selbst ohne ein solches undenkbar? Hat man nicht erst in neuerer Zeit den für die Entwicklung der Analysis so wichtigen, zu den größten Fortschritten hinleitenden Gedanken gefaßt, die komplexen Größen einzuführen, ohne ein Hindernis darin zu sehen, daß sie weder positiv noch negativ genannt werden können? Und nur ein ähnlicher Schritt ist es, den ich hier wage; es wird vielleicht sogar dem allgemeinen Bewußtsein viel leichter werden mir zu folgen, als es möglich war von den reellen Zahlen zu den komplexen überzugehen; denn die neuen ganzen Zahlen haben, wenn sie sich auch durch intensivere, substantielle Bestimmtheit vor den hergebrachten auszeichnen, dennoch als Anzahlen durchaus die gleichartige Realität mit diesen gemein, wogegen der Einführung der komplexen Größen sich so lange Schwierigkeiten entgegenstellten, bis man ihre geometrische Repräsentation durch Punkte oder Strecken in einer Ebene nach vielen Mühen gefunden hatte . . .

. . . Wegen dieser ausgezeichneten Stellung, die sie [die Mathematik] von allen

anderen Wissenschaften unterscheidet und die eine Erklärung für die verhältnismäßig leichte und zwanglose Art der Beschäftigung mit ihr liefert, verdient sie ganz besonders den Namen der *freien Mathematik*, eine Bezeichnung, welcher ich, wenn ich die Wahl hätte, den Vorzug vor der üblich gewordenen „reinen" Mathematik geben würde.

Die Mathematik ist in ihrer Entwicklung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, daß ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchslos sind als auch in festen, durch Definition geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen.*) Im besonderen ist sie bei der Einführung neuer Zahlen nur verpflichtet, Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und unter Umständen eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, daß sie sich in gegebenen Fällen untereinander bestimmt unterscheiden lassen. Sobald eine Zahl allen diesen Bedingungen genügt, kann und muß sie als existent und real in der Mathematik betrachtet werden. Hierin erblicke ich den in § 4 angedeuteten Grund, warum man die rationalen, irrationalen und die komplexen Zahlen für durchaus ebenso existent anzusehen hat wie die endlichen positiven ganzen Zahlen.

Es ist, wie ich glaube, nicht nötig, in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von vielen geschieht; einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen die Freiheit der Zahlenbildung allein geübt werden kann, derartige, daß sie der Willkür einen äußerst geringen Spielraum lassen; dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nötige Korrektiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmäßig, so zeigt er es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann, wegen mangelnden Erfolgs, fallen gelassen. Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel größere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so größere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.

Würde mir diese Beschaffenheit der Mathematik nicht aus den erwähnten Gründen sich ergeben haben, so müßte mich doch die ganze Entwicklung der Wissenschaft selbst, wie wir sie in unserem Jahrhundert wahrnehmen, genau zu denselben Ansichten hinführen.

Wären Gauß, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstraß, Hermite und Riemann verbunden gewesen, ihre neuen Ideen stets einer metaphysischen Kontrolle zu unterwerfen, wir würden uns fürwahr nicht des großartigen Aufbaues der neueren Funktionentheorie zu erfreuen haben, der, obgleich völlig frei und ohne transiente Zwecke entworfen und errichtet, dennoch schon jetzt in Anwendungen auf Mechanik,

*) Der Vorgang bei der korrekten Bildung von Begriffen ist m. E. überall derselbe; man setzt ein eigenschaftsloses Ding, das zuerst nichts anderes ist als ein Name oder ein Zeichen A, und gibt demselben ordnungsmäßig verschiedene, selbst unendlich viele verständliche Prädikate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideen bekannt ist, und die einander nicht widersprechen dürfen; dadurch werden die Beziehungen von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur Weckung des Begriffes A, welcher in uns geschlummert, vorhanden, und er tritt fertig ins Dasein, versehen mit der intrasubjektiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu konstatieren ist alsdann Sache der Metaphysik.

Astronomie und mathematische Physik seine transiente Bedeutung, wie nicht anders zu erwarten war, offenbart; wir würden nicht den großen Aufschwung in der Theorie der Differentialgleichungen durch Fuchs, Poincaré und viele andere herbeigeführt sehen, wenn diese ausgezeichneten Kräfte durch fremdartige Einflüsse gehemmt und eingeschnürt gewesen wären; und wenn Kummer die folgenreiche Freiheit der Einführung sogenannter „idealer" Zahlen in die Zahlentheorie sich nicht genommen haben würde, wir wären heute nicht in der Lage, die so wichtigen und vorzüglichen algebraischen und arithmetischen Arbeiten Kroneckers und Dedekinds zu bewundern ...

Der Begriff des „Kontinuums" hat in der Entwicklung der Wissenschaften überall nicht nur eine bedeutende Rolle gespielt, sondern auch stets die größten Meinungsverschiedenheiten und sogar heftige Streitigkeiten hervorgerufen. Dies liegt vielleicht daran, daß die ihm zugrunde liegende Idee in ihrer Erscheinung bei den Dissentierenden einen verschiedenen Inhalt aus dem Grunde angenommen hat, weil ihnen die genaue und vollständige Definition des Begriffs nicht überliefert worden war; vielleicht aber auch, und dies ist mir das Wahrscheinlichste, ist die Idee des Kontinuums schon von denjenigen Griechen, welche sie zuerst gefaßt haben mögen, nicht mit der Klarheit und Vollständigkeit gedacht worden, welche erforderlich gewesen wäre, um die Möglichkeit verschiedener Auffassungen seitens der Nachfolger auszuschließen. So sehen wir, daß Leukipp, Democrit und Aristoteles das Kontinuum als ein Compositum betrachten, welches ex partibus sine fine divisibilibus besteht, dagegen Epikur und Lucretius dasselbe aus ihren Atomen als endlichen Dingen zusammensetzen, woraus nachmals ein großer Streit unter den Philosophen entstanden ist, von denen einige dem Aristoteles, andere dem Epikur gefolgt sind; andere wieder statuierten, um diesem Streit fern zu bleiben, mit Thomas von Aquino, daß das Kontinuum weder aus unendlich vielen noch aus einer endlichen Anzahl von Teilen, sondern aus *gar keinen* Teilen bestehe; diese letztere Meinung scheint mir weniger eine Sacherklärung als das stillschweigende Bekenntnis zu enthalten, daß man der Sache nicht auf den Grund gekommen ist und es vorzieht, ihr vornehm aus dem Wege zu gehen. Hier sehen wir den *mittelalterlich-scholastischen Ursprung* einer Ansicht, die wir noch heutigen Tages vertreten finden, wonach das Kontinuum ein unzerlegbarer Begriff oder auch, wie andere sich ausdrücken, eine reine aprioristische Anschauung sei, die kaum einer Bestimmung durch Begriffe zugänglich wäre; jeder arithmetische *Determinationsversuch* dieses *Mysteriums* wird als ein unerlaubter Eingriff angesehen und mit gehörigem Nachdruck zurückgewiesen; schüchterne Naturen empfangen dabei den Eindruck, als ob es sich bei dem „Kontinuum" nicht um einen *mathematisch-logischen Begriff*, sondern viel eher um ein *religiöses Dogma* handle.

Mir liegt es sehr fern, diese Streitfragen wieder heraufzubeschwören, auch würde mir zu einer genaueren Besprechung derselben in diesem engen Rahmen der Raum fehlen; ich sehe mich nur verpflichtet, den Begriff des Kontinuums, so logisch-nüchtern wie ich ihn auffassen muß und in der Mannichfaltigkeitslehre ihn brauche, hier möglichst kurz und auch nur mit Rücksicht auf die *mathematische* Mengenlehre zu entwickeln. Diese Bearbeitung ist mir aus dem Grunde nicht leicht geworden, weil unter den Mathematikern, auf deren Autorität ich mich gern berufe, kein einziger sich mit dem Kontinuum in dem Sinne genauer beschäftigt hat, wie ich es hier nötig habe ...

Zunächst habe ich zu erklären, daß meiner Meinung nach die Heranziehung des *Zeitbegriffs* oder der *Zeitanschauung* bei Erörterung des viel ursprünglicheren und allgemeineren Begriffs des Kontinuums nicht in der Ordnung ist; ...

Ebenso ist es meine Überzeugung, daß man mit der sogenannten *Anschauungsform* des *Raumes* gar nichts anfangen kann, um Aufschluß über das *Kontinuum* zu gewinnen,

da auch der *Raum* und die in ihm gedachten Gebilde nur mit Hilfe eines begrifflich bereits fertigen Kontinuums denjenigen Gehalt erlangen, mit welchem sie Gegenstand nicht bloß ästhetischer Betrachtungen oder philosophischen Scharfsinnes oder ungenauer Vergleiche, sondern nüchtern-exakter mathematischer Untersuchungen werden können.

Somit bleibt mir nichts anderes übrig, als mit Hilfe der in § 9 definierten reellen Zahlbegriffe einen möglichst allgemeinen rein arithmetischen Begriff eines Punktkontinuums zu versuchen . . .

In der ungeheuren geistigen Anspannung, die mit der Konzeption so umwälzender Ideen und deren Behauptung gegenüber dem Widerstreben der zeitgenössischen Forscher verbunden war, treten als besonders verschärfende Momente zwei spezielle Schwierigkeiten hervor: das Ringen mit dem Kontinuumproblem und die Zuspitzung des Gegensatzes zu Kronecker. Über beide sind wir durch die von Schoenflies herausgegebenen Briefe C.s an Mittag-Leffler aus dem Jahre 1884 (siehe [III]), das eine entscheidende Wendung in C.s Leben bedeutet, gut unterrichtet.

Als zu Beginn des Jahres 1884 die grundlegende Abhandlung [16] fertig vorlag, hatte C. die bereits in [13] aufgefundene und in [14] unterstrichene Zweiteilung der unendlichen Punktmengen — in abzählbare und dem Linearkontinuum äquivalente — weitgehend durchgeführt, wobei vor allem die „perfekten" Mengen sich als zur zweiten Kategorie gehörig erwiesen. Auf der anderen Seite hatte er, gleichfalls ausgehend von den Punktmengen, die transfiniten Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse (als Symbole der Vielfachheit der Ableitungen) eingeführt, indem er sie durch analoge Grenzprozesse konstruierte, wie solche als Fundamentalreihen die irrationalen Zahlen hervorbringen. So lag die Vermutung, die er in der Tat am Schluß von [16 VI] behauptet mittels seiner bisherigen Sätze beweisen zu können, außerordentlich nahe, daß die zweite Zahlklasse selbst von der Mächtigkeit des Kontinuums sei; der Beweis dieser Vermutung hätte einen krönenden Abschluß seiner bisherigen Resultate bedeutet. Indes bleiben die Versuche, den Beweis durchzuführen, sowohl damals wie auch im Sommer und Herbst des Jahres 1884, wo er mit immer neuen Methoden an das Problem herangeht, erfolglos ([III], S. 16ff.)[1]; ja im November nimmt er seine Vermutung sogar einmal zurück zugunsten eines vermeintlich gefundenen Beweises dafür, daß dem Kontinuum überhaupt kein Alef als Mächtigkeit zukomme — um dieser Meinung freilich schon tags darauf zu widersprechen. So folgt den

1) Ein gleichfalls aus dem Sommer 1884 stammender Versuch P. Tannerys, die Vermutung C.s zu beweisen, beruht auf einem Fehlschluß (*Bulletin de la Société Math. de France* 12 [1884], S. 90—96).

immer wieder vergeblichen Bemühungen die Abspannung, die Mutlosigkeit, die Resignation; im Herbst 1884, also nach der bald zu erwähnenden gesundheitlichen Krisis, kommt eine Stimmung der Abkehr von der Mathematik überhaupt zum Durchbruch. Er will sich von ihr ganz und gar abwenden und erwägt eine Bitte an das Ministerium, man möge ihn in der Vorlesungstätigkeit von der Mathematik zur Philosophie übergehen lassen.[1]) Vor allem ergibt er sich aber um jene Zeit, offenbar im Zusammenhang mit der gesundheitlichen Störung, mit größter Energie der Aufgabe, nachzuweisen, daß Francis Bacon der Autor der Shakespeareschen Dramen sei[2]); wie er seine Bemühungen auch nach dieser Richtung mit der ihm eigenen Hingabe und Hartnäckigkeit verfolgt, das bezeugen u. a. die Schriften [36] und [37]; nach seinem Brief an Dedekind vom 28. Juli 1899 ist diese Frage, der er in Depressionszeiten sogar in den Vorlesungen und im Seminar nachging, bei ihm nur aus Mangel an Zeit und Geld schließlich zur äußeren Ruhe gekommen, das lebhafteste Interesse dafür aber hat ihn durchs ganze Leben begleitet. Mit aus dieser Stimmung der mathematischen Resignation heraus und wohl nur zum Teil vermöge des wirklichen Sachverhaltes (vgl. unten S. 225 f.) wird es sich erklären, wenn er sich zu jener Zeit gegenüber Mittag-Leffler dahin äußert, er habe „das mühsame und wenig Dank verheißende Geschäft der Untersuchung von Punktmengen" hauptsächlich deshalb unternommen, um die Resultate „auf die Naturlehre der Organismen" anzuwenden, für die die bisherigen mechanischen Prinzipien nicht hinreichend seien, und mit der er sich schon seit 14 Jahren beschäftige.

Bei diesem Entschluß zur Abkehr von der Mathematik, den C. freilich schon im Laufe des Jahres 1885 wiederholt durch rein mathematisches Forschen Lügen straft, ist indes noch stärker als der Mißerfolg mit dem Kontinuumproblem wahrscheinlich die Enttäuschung wirksam gewesen, die C. damals hinsichtlich der Aufnahme seines bisherigen Werkes in der mathematischen und philosophischen Welt fühlte. Der im 40. Lebensjahr stehende Forscher, der seit nunmehr

1) In der Tat hat C. gelegentlich Übungen philosophischer Richtung gehalten, so z. B. über Leibniz, um durch Vergleich mit dessen Gedanken seine eigene Theorie des Aktual-Unendlichen zu erläutern. Er betonte dabei gern, daß er als Ordinarius der Philosophischen Fakultät selbst über Sanskrit zu lesen das Recht habe.

2) „Francis Bacon, er und nur er allein kann der Autor dieser Meisterwerke gewesen sein; denn es ist ein und derselbe Feuergeist, der uns in den Dramen einerseits und in den 'Moral essays' sowie den übrigen Werken Bacons andererseits entgegentritt ..." heißt es in C.s Brief an Mittag-Leffler vom 17. Dez. 1884, in dem anscheinend zum erstenmal von diesem Gegenstande die Rede ist.

10 Jahren in der Öffentlichkeit mit seinen neuen Ideen hervorgetreten war, hegte den begreiflichen Wunsch nach Anerkennung seines Werkes durch die Kollegen und nach wissenschaftlichem Einfluß auf die angehenden Forscher. Im ganzen blieb ihm dies versagt. Nur zu einer sehr beschränkten Erfüllung seiner Wünsche verhalf C. die Freundschaft mit Mittag-Leffler, die bis zum Ende fortgedauert hat und so fest gegründet war, daß sie auch gewissen (teils wirklichen, teils nur befürchteten) sachlichen Differenzen der Jahre 1884—85 Trotz bieten konnte. Als Mittag-Leffler, 1881 an die neugeschaffene Stockholmer Universität gekommen, sogleich an die Gründung der *Acta Mathematica* schritt, forderte er C. nicht bloß auf, sich des neuen Journals für seine Veröffentlichungen zu bedienen, sondern er veranlaßte überdies die Übersetzung der Arbeiten [9], [10], [13], [14] und vor allem des größten Teiles von [16I—V] ins Französische und publizierte sie so im 2. Band der *Acta*. Schon an sich bedeutete diese Unterstützung seitens des angesehenen Forschers, der vermöge seiner Beziehungen zu Weierstraß und zu den Pariser Mathematikerkreisen sich eines erheblichen Einflusses erfreute, moralisch viel für C. zu einer Zeit, da ihm das Crellesche Journal verschlossen war und da sich der beherrschende Einfluß der Berliner (anscheinend auch der Göttinger) Mathematiker in offener Gegnerschaft zu ihm betätigte. Nicht minder aber ist auch eine mittelbare wissenschaftliche Auswirkung des Bundes mit Mittag-Leffler unverkennbar; außer den 1883 beginnenden, sozusagen parallel zu C.s Schaffen gerichteten Arbeiten Bendixsons und Phragméns über Punktmengen erschienen in den 1883—84 herauskommenden Bänden der *Acta* eine ganze Reihe gewichtiger *Anwendungen* der mengentheoretischen Begriffe und Ergebnisse C.s auf funktionentheoretische (und geometrische) Probleme, die Mittag-Leffler selbst sowie die eben aufgehenden Sterne Poincaré und Scheeffer zu Verfassern hatten. Poincarés Arbeit, die zur Untersuchung der Struktur des Existenzgebietes automorpher Funktionen die Lehre von den Punktmengen heranzog, hatte C. zunächst ganz übersehen, um sich indes gelegentlich einer Pariser Reise im Frühjahr 1884 zu überzeugen, daß Poincaré seine Arbeiten kannte und würdigte.[1]) Größere Hoffnungen setzte er auf die Wirkung der Mittag-Lefflerschen Abhandlung, die auf einem im Mittelpunkt des damaligen Interesses stehenden Feld der Weierstraßschen Funktionentheorie — der Frage der Erzeugungsmöglichkeit analytischer Funktionen aus geeignet vorgegebenen singu-

1) Nach dem Zeugnis M.-L.s (*Acta Mathematica* 50 [1928], S. 26) hat Poincaré die grundlegenden Abhandlungen [16] für die *Acta* ins Französische übersetzt.

lären Stellen — die Kraft und Bedeutung der Ideen C.s dartat. Um so tiefer ist seine Betrübnis, daß vielmehr gerade umgekehrt die Bezugnahme auf C. der Aufnahme der Arbeit zunächst vielfach zum Schaden gereicht, namentlich auf Grund der auch in Paris stark wirkenden Haltung Kroneckers.

Nicht minder zögernd als die Mathematiker nahmen die Philosophen von C.s Errungenschaften Kenntnis; die erste ausführliche und verständnisvolle Darstellung, in der man auch Hinweise auf die vorangegangenen unzureichenden Berücksichtigungen C.s von philosophischer Seite (Ballauf, Wundt[1]), Laas, H. Cohen) findet, stammt von B. Kerry.[2]) Sie schließt mit der bezeichnenden Mahnung, die Philosophie, die „vordem die Lehre vom Stetigen in seinem Verhältnisse zu einem dasselbe eventuell konstituierenden Diskreten als ihr Eigenstes betrachten durfte", scheine in den Mannigfaltigkeitsuntersuchungen wieder „eine neue Disziplin aus sich herausgeboren zu haben", mit der die Mutterwissenschaft zwar vertraut bleiben solle, der sie aber ihr selbständiges Dasein nicht verkümmern dürfe. Zur gleichen Zeit gab auch der — selbst aktiv mit C.s Ideen beschäftigte — Mathematiker P. Tannery eine für Philosophen bestimmte und an den philosophischen Problemen orientierte Einführung in Gedankengänge der Mengenlehre[3]), von der C. anscheinend keine Notiz genommen hat.

In erster Linie hat freilich der ablehnende Standpunkt nicht etwa der Philosophen, sondern der großen Mehrheit seiner engeren Fachgenossen C. betroffen, und zwar speziell die Haltung Kroneckers. Hier liegt offenbar der Angelpunkt der Krisis von 1884. Bis gegen 1880 scheint das Verhältnis zwischen Kronecker und C. trotz der ablehnenden Haltung, die jener im Gegensatz zu Weierstraß gegenüber den mengentheoretischen Interessen seines vormaligen Schülers von Anfang an einnahm, äußerlich gut gewesen zu sein; so z. B. noch bei einem Besuch C.s bei Kronecker im Herbst 1879. Doch schon zwei bemerkenswerte Stellen aus der 1882 geschriebenen Arbeit [16 V], die sich gegen die alleinseligmachende Rolle der natürlichen Zahl und für die unbevormundete Freiheit der mathematischen Schöpfung einsetzen (die zweite ist oben S. 204f. wiedergegeben), sind in nicht miß-

1) Auf dessen Einwände sowie die der Herbartschen Schule (vgl. *Ztschr. f. exakte Philosophie* 12) kommt auch C. selbst am Schluß von [26] sowie in [28 I] zu sprechen; an der letzteren Stelle (S. 99f. u. 253—256) auch auf die Rezension Ballaufs.

2) „Über Georg Cantors Mannichfaltigkeitsuntersuchungen". *Vierteljahrsschrift f. wiss. Philosophie* 9 (1885), S. 191—232.

3) „Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor." *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger* 20 [1885], S. 385—410.

zuverstehender Weise gegen Kronecker gerichtet. Die ganze Bitterkeit seines Grolls gegen Kronecker, dessen Einfluß weit über Deutschlands Grenzen hinausreichte, sehen wir dann in den Briefen [III] vom Jahre 1884, aus dem allein 52 Briefe C.s an Mittag-Leffler stammen, sich in ungebändigter Heftigkeit entladen. In den Zorn mischt sich auch die Besorgnis, eine zur Veröffentlichung in den *Acta Mathematica* in Aussicht genommene (übrigens dort nicht erschienene) Abhandlung Kroneckers möchte ihm nicht nur in der Öffentlichkeit weiteren Schaden zufügen, sondern auch noch den treu ergebenen Freund entfremden; sollte doch diese Darlegung der wissenschaftlichen Auffassung Kroneckers insbesondere zeigen, „daß die Ergebnisse der modernen Funktionentheorie und Mengenlehre von keiner realen Bedeutung sind". Auf Hermite und, wie es scheint, auch auf Weierstraß, die neben Kronecker damals in der mathematischen Welt führend waren, ist in der Tat zeitweise der Einfluß Kroneckers gegen C. erfolgreich gewesen. Freilich nicht lange; vielmehr sind beide, entgegen den auf Hermite bezüglichen Äußerungen Poincarés auf dem Internationalen Mathematikerkongreß zu Rom 1908, bald warme Freunde C.s und ehrliche Bewunderer seines Werkes geworden.[1]) Indes kommt es zunächst — sicherlich nicht ausschließlich infolge jenes Zwistes, aber zum mindesten durch ihn verschärft und wohl ausgelöst — zu einem geistigen Zusammenbruch bei C. im Frühjahr 1884, einer (vielleicht schon früher im Keim vorhandenen) psychischen Erkrankung (zirkuläres Irresein), deren Erscheinungen sich von nun an bis zu seinem Tode zeitweise wiederholten und ihn mehrmals zwangen, eine Nervenklinik aufzusuchen. Die nächste Folge war eine Depression, die in den eigenen Augen den Wert seiner Arbeiten herabsetzte, den Anteil seiner Schuld an den eingetretenen Verstimmungen erhöhte und ihn zu einem Canossagang zu Kronecker veranlaßte. Diese schriftlich und mündlich durchgeführte Aussöhnungsaktion hat zwar ein äußerlich befriedigendes Verhältnis zwischen beiden Forschern hergestellt, doch weder an der diametralen Verschiedenheit der Auffassungen noch auch an der Beharrlichkeit etwas geändert, mit der Kronecker bis zu seinem Tode aktiv gegen C.s Ideen Stellung nahm.

Sichtlich endet mit dem Jahre 1884 die zweite, wichtigste und fruchtbarste Periode in C.s Schaffen; es beginnt ein weiterer, gleich dem vorigen etwa dreizehnjähriger Abschnitt, während dessen der schöpferische Willen C.s zwar nicht erlahmt, aber unter dem Einfluß

1) Vgl. Briefe C.s an W. H. Young aus dem Jahre 1908 (siehe *Proc. of the London Math. Soc.* (2) **24** [1926], S. 422f.) und an Jourdain aus dem Jahre 1905 ([V], S. 48).

der erwähnten Momente und einer dadurch mitbedingten Veränderung seiner Interessen doch nur mehr Früchte heranreifen läßt, die an Originalität denen der zweiten Periode nachstehen. Auf der anderen Seite fangen C.s Ideen in dieser Zeit an, sich allmählich in der Öffentlichkeit durchzusetzen.

Zu Beginn des Jahres 1885 ist die seelische Krise bei C. im wesentlichen überwunden, sein Vertrauen zur Bedeutung der eigenen Leistung wieder hergestellt. Nunmehr werden seine Ideen in steigendem Maße auch von anderen aufgenommen (1885 zunächst von Harnack, Lerch, Phragmén). Sogar für Zwecke des Schulunterrichts wird der mengentheoretische Gesichtspunkt bereits dargeboten: der Oberlehrer am Stadtgymnasium zu Halle, Fr. Meyer, der mit C. in regem persönlichem Verkehr stand, veröffentlicht 1885 die zweite Auflage seiner „Elemente der Arithmetik und Algebra", die durch C.s Forschungen über das Transfinite entscheidend beeinflußt sind und speziell den Zahlbegriff auf mengentheoretische Art einführen. Ob dieses für den Schulgebrauch geschriebene, wissenschaftlich hochstehende Buch auch zu entsprechender Wirkung gelangt ist, muß freilich bezweifelt werden, obgleich Meyer in praxi nach dem Urteil vieler ein hervorragender Pädagoge gewesen ist. Von C. selbst erscheint in den nächsten Jahren eine Reihe weiterer Arbeiten, wobei die Darlegung und Verteidigung des bisher Gewonnenen, namentlich die Auseinandersetzung auf philosophischem Felde, gegenüber neuen Schöpfungen überwiegt; in mathematischer Hinsicht tritt mehr und mehr C.s Interesse für die Punktmengen zurück hinter dem für die Erweiterung des *Zahlbegriffs* (vgl. [IV] sowie [28I], S. 117). In die nämliche Zeit fällt eine ausgedehnte Korrespondenz mit Mathematikern, Philosophen, Theologen und anderen Gelehrten, in der C. seine Anschauungen über das Aktual-Unendliche genauer darlegt und Mißverständnissen gegenüber in Schutz nimmt. Auch zur Erweiterung seiner schon vorher erstaunlichen Kenntnis der älteren philosophischen und theologischen Literatur zum Problem des Unendlichen findet er in diesen Jahren noch Muße.

Neben anderen Erwägungen hatte ihn vor allem sein Konflikt mit Kronecker zur Überzeugung gebracht, daß es zur Wahrung der Freiheit und wissenschaftlichen Unabhängigkeit des Einzelnen (namentlich des aufstrebenden jungen Forschers) innerhalb der mathematischen Gesamtheit und zum Schutz gegen übermächtige Einflüsse einzelner Gelehrten zweckmäßig sei, einen Zusammenschluß der deutschen Mathematiker herbeizuführen. Diesen Gedanken vertrat er während der 80er Jahre unermüdlich auf schriftlichem und münd-

lichem Wege. So geht auf ihn, nachdem ähnliche Bestrebungen in den 70er Jahren kläglich gescheitert waren, der entscheidende Schritt zur *Begründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* zurück[1]), der er von Anfang an mit Herz und Seele anhängt, deren Notwendigkeit im Namen der wissenschaftlichen Freiheit, um der allseitig ungehemmten Entwicklung unserer Wissenschaft willen er nie müde geworden ist zu betonen. Im „Heidelberger Aufruf" von 1889, der anläßlich der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte den ersten öffentlichen Appell an die Fachgenossen aussandte, wie auch in den nächstjährigen „Bremer Beschlüssen" der mathematisch-astronomischen Abteilung der Naturforscherversammlung, durch welche die Vereinigung konstituiert wurde, finden wir C. in der Reihe der Unterzeichner; von der Gründung an (18. September 1890) war er Vorsitzender, ebenso Mitherausgeber der ersten zwei Bände des „Jahresberichts", und als er im Herbst 1893 aus Gesundheitsrücksichten den Vorsitz niederlegen mußte, wurde in dem Dank der Vereinigung betont, daß er es gewesen ist, der „den ersten Anstoß zur Gründung der Vereinigung gegeben und durch sein lebhaftes und tatkräftiges Eingreifen für diesen Plan die Verwirklichung desselben herbeigeführt hat."[2]) Persönliche Verstimmung zurückstellend, hatte er Kronecker aufgefordert, auf der ersten Tagung der Vereinigung in Halle (Herbst 1891) den Eröffnungsvortrag zu halten[3]); der Brief, den Kronecker, durch den Tod seiner Frau an der Einlösung seiner Zusage verhindert, an C. richtete und in dem er sich namentlich über das Für und Wider eines solchen Zusammenschlusses ausspricht, ist im ersten Band dieses *Jahresberichts* (S. 23ff.) im wesentlichen abgedruckt. Gelegentlich dieser ersten Versammlung unserer Vereinigung hielt C. auch den berühmten Vortrag [30], der elementar die Existenz unendlich vieler transfiniter Mächtigkeiten dartut. — Ist auch C.s umfassenderer Plan eines internationalen Zusammenschlusses der Mathematiker zu einer Weltorganisation nicht zur Verwirklichung gediehen, so hat er doch entschieden und erfolgreich daran gearbeitet, die Einrichtung der Internationalen Mathematikerkongresse ins Leben zu rufen.

1) Vgl. u. a. Verhandl. des 3. Internat. Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), S. 35; ferner W. Lorey, Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts (IMUK-Abh. III 9; Leipzig u. Berlin 1916), S. 215.

2) Dieser *Jahresbericht* 1 (1892), S. 3—7, und 3 (1894), S. 8.

3) Weder diese Aufforderung noch die Art der Anrede in dem sogleich zu erwähnenden Briefe Kroneckers dürfen darüber hinwegtäuschen, daß das Verhältnis zwischen den beiden Männern das alte war; vgl. C.s Brief an Mittag-Leffler vom 5. Sept. 1891 ([III], S. 13).

Die nächsten Jahre bringen den Abschluß der mathematischen Veröffentlichungen C.s mit der 1895—97 erschienenen Doppelabhandlung [32]. Sie stellt den Hauptteil seiner Resultate aus der allgemeinen Mengenlehre in systematischem Zusammenhang dar und ist in einem wesentlich anderen — man mag sagen: klassisch-abgeklärten — Geiste geschrieben als die älteren Arbeiten.[1])

Hiermit schließt der dritte und letzte eigentlich schöpferische Abschnitt im Leben des erst 52jährigen. Mit der folgenden Periode aber, die ohne tieferen Einschnitt bis zu seinem Tode währt, setzt die allgemeine Anerkennung und Bewunderung des Werkes von C. durch die mathematische Welt ein.

In dem nämlichen Jahr 1897, da die letzte Arbeit C.s erschien, fand in Zürich der erste Internationale Mathematikerkongreß statt. Die Anerkennung, die man C. dort entgegenbrachte, war allgemein; neben einer Sektionsmitteilung von Hadamard, die die Begriffe der Mengenlehre schon als bekannte und unentbehrliche Werkzeuge heranzog, wies vor allem der in der ersten Hauptversammlung gehaltene Vortrag von Hurwitz „Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit" darauf hin, wie C.s Ideen (einschließlich der am stärksten umstrittenen transfiniten Zahlen) zu einer neuen Befruchtung der Funktionentheorie geführt haben. Überhaupt waren die drei miteinander befreundeten, schon damals führenden Forscher Hilbert, Hurwitz, Minkowski wohl die ersten in Deutschland, die die Originalität C.s und die Bedeutung seiner Mengenlehre erkannten und zur Geltung zu bringen suchten „zu einer Zeit, als in damals maßgebenden mathematischen Kreisen der Name Cantor geradezu verpönt war und man in C.s transfiniten Zahlen lediglich schädliche Hirngespinste erblickte".[2]) Nicht nur die Bedeutung dieser

1) Nach einer aus dem Jahre 1897 stammenden mündlichen Bemerkung C.s aus [IV] hätte er 1885 den ersten Teil dieser Abhandlung an die *Acta Mathematica* gesandt, wo ihr die Aufnahme verweigert wurde, „weil sie 100 Jahre zu früh gekommen sei". Dem steht zunächst der Brief an M.-L. vom 29. Sept. 1885 ([III], S. 15), vor allem aber die Fußnote in [28I], S. 117, entgegen, wonach es sich um die in [28I], S. 117—125 und 265—270, sowie [28II], S. 240—265, erschienenen Ausführungen gehandelt hat, die hauptsächlich der Lehre von den Ordnungstypen gewidmet sind. Der Widerspruch löst sich wohl damit, daß offenbar [32] die dem ursprünglichen Plan entsprechende weitere Ausführung von [28] darstellt und daher später von C. mit der tatsächlich an die *Acta* gesandten Arbeit [28] verwechselt worden ist; so mag denn auch die angeführte Begründung nicht wörtlich zutreffen, vielmehr der Vorgang C. nur deshalb so schwer berührt haben, weil der erste Bogen des Aufsatzes schon für die *Acta* gesetzt war, als „Opportunitätsrücksichten" die Zurückziehung veranlaßten.

2) Vgl. Hilberts Gedächtnisrede auf Minkowski (*Göttinger Nachrichten* 1909; Minkowskis Gesammelte Abhandlungen, Bd. I), wo man auch eine einschlägige

Männer überhaupt, sondern auch ihre besondere Verbindung mit den sprichwörtlich strengen Schlußmethoden, denen der Zahlentheorie, hat wohl dazu beigetragen, manche Vorurteile gegen C.s Gedankengänge zu zerstreuen.

C., dessen Genugtuung über die ihm in Zürich gewordene Anerkennung groß war, berichtete im nämlichen Jahre einem engeren Kreise deutscher Mathematiker gelegentlich der Braunschweiger Tagung unserer Vereinigung in nichtoffizieller Form über Genesis und Hauptresultate seiner Theorie [IV]. Die ersten von anderer Hand stammenden zusammenhängenden Veröffentlichungen über Mengenlehre[1]) erfolgten in Frankreich: Couturats Thèse „L'infini mathématique" (1896) mit einem ausführlichen, den Ideen C.s gewidmeten Anhang; Baires Thèse „Sur les fonctions des variables réelles" (1899); vor allem aber Borels „Leçons sur la théorie des fonctions"[2]), die zum großen Teil bereits ein Lehrbuch der Mengenlehre darstellten und u. a. einen von C.s Schüler Felix Bernstein gefundenen Beweis, den (ersten einwandfreien) Beweis des Äquivalenzsatzes, zum erstenmal veröffentlichten. Mit diesem vielbenutzten Lehrbuch und dem 1899 im Rahmen dieses *Jahresberichts* erschienenen ersten Schoenfliesschen Bericht über die „Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" ist der Siegeszug der Mengenlehre zu einem gewissen Abschluß gelangt und in die Bahnen der gewöhnlichen Entwickelung einer mathematischen Disziplin eingebogen, die den übrigen gleichberechtigt ist und die sogar rasch zu einer Vorzugsstellung gelangte. Wenn auch das erste wirkliche *Lehrbuch* der Mengenlehre (vom Ehepaar Young, 1906) in England erschien und ein solches in Deutschland bis zu dem (dann allerdings klassischen) Werke Hausdorffs (1914) auf sich warten ließ, so erscheinen dennoch dem rück-

Bemerkung aus einem Vortrag Minkowkis über das Aktralunendliche in der Natur zitiert findet. An beiden Stellen wird der Opposition Kroneckers gegen C.s Ideen gedacht. Siehe ferner [VI], S. 274.

1) Vgl. auch die Notizen zur Geschichte der Mengenlehre von Vivanti in der *Bibliotheca Mathematica*, N. F. 6 (1892), S. 9—25. Die ersten Lehrbücher, die überhaupt mengentheoretische Begriffe in der Analysis verwandten, waren wohl Dinis „Grundlagen für eine Theorie der Functionen usw." (namentlich in der durch Lüroth und Schepp besorgten deutschen Ausgabe 1892) und die 2. Auflage von C. Jordans „Cours d'analyse" (1893).

2) Vgl. auch dessen Aufsätze in der *Revue Philosophique* 1899 und 1900, die in der 2. Auflage des genannten Buches 1914 wieder abgedruckt sind. Wenn in Borels Lehrbuch C.s Person nur flüchtig erwähnt und seine Ergebnisse auf völlig anderem als dem Ursprungsweg begründet werden, so verwahrt sich Borel in der Einleitung zu den genannten Aufsätzen ausdrücklich gegen den Verdacht, als sei darin eine Minderbewertung C.s gelegen.

blickenden Beschauer die bitteren Worte als unberechtigt[1]) oder doch höchstens hinsichtlich äußerer Ehrungen zutreffend, mit denen sich C. 1908 gegenüber W. H. Young (s. o. S. 210) darüber beklagt, daß man in Deutschland, im Gegensatz zu England, ihn nicht kenne. In Wirklichkeit sah z. B. schon mehrere Jahre vor der Jahrhundertwende der Plan der *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vor allem wohl dank dem Weitblick Felix Kleins[2]), einen (1898 erschienenen) Artikel von Schoenflies über Mengenlehre vor, und zwar nicht etwa im Sinne einer geometrischen Sonderdisziplin in Band III, sondern unter den ersten Artikeln des I. Bandes, bei den grundlegenden Gebieten der Arithmetik.

Das Jahr 1899, in dem das Ehepaar Cantor im frohen Kreis der schon durch zwei Schwiegersöhne vermehrten Familie im Harz die Silberne Hochzeit feiert, zeigt uns C. noch einmal mit aller Energie am mathematischen Schaffen; im Briefwechsel mit Dedekind müht er sich geradezu verzweifelt ab, der Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten sowie der Wohlordnung auf den Grund zu kommen, vor allem wieder um des Kontinuumproblems willen. Zu wesentlichen Erfolgen oder einer Veröffentlichung kommt es jedoch nicht. Auch in der Folge hat er nicht etwa bewußt der mathematischen Produktion entsagt. So trägt er 1903 auf der Kasseler Versammlung unserer Vereinigung „Bemerkungen zur Mengenlehre" vor, die nicht veröffentlicht worden sind und sich vor allem wohl mit gewissen Einwänden französischer Philosophen auseinandersetzten[3]); mit Philipp E. B. Jourdain steht er um 1905 in einem höchst regen wissenschaftlichen Briefwechsel; 1908 verspricht er Young sogar, seine nächste Abhandlung der *London Mathematical Society* vorzulegen. Wie sehr ihn namentlich das Kontinuumproblem, das Hilbert in seinem Festvortrag auf dem Pariser Internationalen Mathematikerkongreß (1900) als erstes der

---

1) Immerhin berührt uns heute seltsam, daß im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, das ab 1892 in Vivanti einen sachkundigen Referenten für Mengenlehre gewonnen hatte, die mengentheoretischen Arbeiten bis 1904 — soweit nicht der Geometrie eingeordnet — unter der Rubrik „Philosophie" besprochen wurden, um dann in den darauf folgenden Unterabschnitt, zwischen Philosophie und Pädagogik, überzusiedeln (und erst nach dem Krieg unter der Redaktion Lichtensteins selbständig zu werden).

2) Klein, der in seiner Vorlesung über Fragen der Elementargeometrie vom S.-S. 1894 Begriffe und Beweise der Mengenlehre — wohl zum erstenmal in einer Vorlesung außerhalb von Halle! — entwickelt hatte, stellte 1895 an Lorey für die Staatsprüfungsarbeit das Thema: Über die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Bedeutung für eine strenge Grundlegung der Analysis.

3) Dieser *Jahresbericht* 12 (1903), S. 519, und 20 (1911), S. 251 Fußnote.

„Mathematischen Probleme" hervorgehoben hatte, auch weiterhin beschäftigte, hat Schoenflies ([VIII] und [IX]) anschaulich geschildert. Auf dem Heidelberger Internationalen Kongreß (1904) wurde C. durch das Resultat des Vortrags von Julius König überrascht, wonach die Mächtigkeit des Kontinuums kein Alef wäre; er stand in der Folge unermüdlich und mit überschäumendem Temperament im Kampfe dagegen, bis sich bald die Berechtigung seiner (auf einen benutzten anderweitigen Hilfssatz zielenden) Äußerung zeigte, „er habe kein Mißtrauen gegen den König, sondern nur gegen seinen Minister". In diesen Jahren verspäteter, aber um so entschiedenerer wissenschaftlicher Anerkennung kamen dann auch äußere Ehrungen[1]), mit denen er sich von Herzen freute: die Wahl zum Ehrenmitglied der London Mathematical Society (1901) und der Mathematischen Gesellschaft zu Charkow sowie zum korrespondierenden Mitglied des R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia), die Verleihung des Dr. math. honoris causa durch die Universität Christiania (1902), der Sylvester-Medaille durch die Royal Society (1904), des Ehrendoktors der Universität St. Andrews (1911).

Indes zwangen ihn seine nervösen Zustände in diesen Jahren wiederholt, seine Vorlesungstätigkeit zu unterbrechen; 1905 wurde er von den amtlichen Verpflichtungen entbunden, 1913 entsagte er endgültig dem Lehramt. Zu seinem 70. Geburtstag, der in internationalem Rahmen gefeiert werden sollte, kamen trotz des Krieges wenigstens deutsche Mathematiker von weither nach Halle, um ihm zu huldigen (vgl. den Bericht [VI]); seine Büste in Marmor wurde damals gestiftet, sie steht seit 1928 im Treppenhaus der Universität Halle. Das goldene Doktorjubiläum konnte seines Befindens wegen nicht mehr öffentlich begangen werden; am 6. Januar 1918 ist er in der psychiatrischen Klinik in Halle gestorben.

Die über vierzigjährige *Lehrtätigkeit* C.s an der Universität Halle war in vorzüglichem Maße durch Strenge und durch Schärfe der Begriffserklärung ausgezeichnet. Sein Vortrag war nach den Berichten seiner Schüler klar und geordnet, lebhaft und anregend (wenigstens in den Zeiten normalen Befindens, deren Unterbrechungen späterhin öfters ein längeres oder kürzeres Aussetzen der Vorlesungen erzwangen). Der Vorbereitung der Vorlesungen hat er nicht viel Zeit gewidmet. So kam es, daß die Darstellung der ihn interessierenden Gebiete, von der gar

1) Schon aus dem Jahre 1896 datiert seine Wahl zum Vorstandsmitglied der Fachsektion für Mathematik und Astronomie der Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Naturforscher-Akademie in Halle, deren Mitglied er seit 1889 gewesen war.

manche Schüler als von einem hohen ästhetischen Genuß berichten, sich merklich auszeichnete vor der Wiedergabe anderer Disziplinen; zu den letzteren gehörte u. a. auch die Funktionentheorie, die in Halle offenbar damals sehr im Hintergrund gestanden hat.[1]) Dagegen hat er z. B. für die Gruppentheorie entschiedenes Interesse gezeigt. Über seine mengentheoretischen Entdeckungen hat er nur gelegentlich vorgetragen. Wenn die Anzahl seiner Schüler vielfach sehr klein war, nicht selten bei einem bis dreien verblieb, so lag das an der geringen mathematischen Frequenz von Halle überhaupt, die erst zu Beginn dieses Jahrhunderts wesentlich anstieg; das macht seinen Wunsch, nach einer anderen Universität überzusiedeln, nur allzu verständlich.[2]) Insgesamt hat er zwar naturgemäß eine große Anzahl von Lehramtskandidaten herangebildet, aber nur sehr wenige Dissertationen veranlaßt[3]), nur selten Forschertalente in unmittelbarem Verkehr angeregt und großgezogen.[4]) Das dürfte z. T. damit zusammenhängen, daß C. seine Ideen in der Regel sofort selbst durchführte und so keinen großen Überschuß an lohnenden Problemen zur Verfügung hatte, wie er denn auch keinen wissenschaftlich wertvollen Nachlaß zurückgelassen hat. Ebenso war die Ausschließlichkeit seiner Hingabe an die Ideen, die ihn jeweils beschäftigten, dem mühsamen Heranziehen junger erst reifender Talente wenig günstig.

Menschlich ist er seinen Schülern ein warmer und treuer Freund gewesen; sein Haus bot ihnen wie auch so manchen Studenten anderer Fächer eine behagliche, von Musik erfüllte Atmosphäre und reizende, jugendlich frische Geselligkeit, woran seine liebenswürdige Gattin wesentlichen Anteil hatte. Um seinen Schülern einen Dienst zu erweisen oder auch nur eine Freude zu bereiten, war ihm selbst noch in

---

1) Die mangelnde Pflege und Vertrautheit mit den ihm fernerliegenden Gebieten hat C. bei den zeitgenössischen Mathematikern zweifellos geschadet.

2) Der Neigung, die Vorlesungen öfters einmal ausfallen zu lassen, hat er nicht selten nachgegeben, und seinen diesbezüglichen Anschlägen gegenüber revanchierten sich einmal zwei keineswegs durchschnittliche Schüler durch einen Anschlag am Schwarzen Brettchen des Auditoriums: „Zu unserm großen Bedauern sind wir heute am Hören verhindert" — ein Streich, der nicht ohne disziplinarische Folgen blieb.

3) Die (nicht wenigen) mathematischen Doktoranden jener Zeit in Halle kamen meistens, namentlich von Berlin, mit der fertigen Dissertation zu ganz kurzem Aufenthalt nach Halle.

4) F. Bernstein, der allerdings in Göttingen (mit einer mengentheoretischen Arbeit) promovierte, ist bereits erwähnt worden. Zu den Studenten, auf die C. gleichmäßig durch seine Persönlichkeit und seine Arbeiten nachhaltigen Einfluß ausübte, gehört der nachmalige Aachener Professor E. Jürgens; vgl. diesen *Jahresbericht* 17 (1908), S. 165.

höherem Alter keine Anstrengung zuviel; besonders auch den jungen Privatdozenten gegenüber war er außerordentlich wohlwollend, und es sprach sich in deren Kreis bald herum, daß ein jeder für seine kleineren oder größeren Anliegen bei C. stets ein williges Ohr und freundlichen Rat finden könne.

Was die *Persönlichkeit* C.s im allgemeinen betrifft, so berichten alle, die ihn kannten, von seinem sprühenden, witzigen, originellen Naturell, das leicht zur Explosion neigte und stets voll heller Freude über die eigenen Einfälle war; von dem niemals ermüdenden Temperament, das die Teilnahme seiner auch äußerlich imponierenden, großen Gestalt an einer Mathematikerversammlung zu einem ihrer lockendsten Reize machte, das bis in die späte Nacht wie auch in früher Morgenstunde seine Gedanken (zu seinen mathematischen und den vielseitigen außermathematischen Interessengebieten) förmlich überquellen ließ; von seinem lauteren Charakter, treu seinen Freunden, hilfreich, wo es nötig war, liebenswürdig im Verkehr; nebenbei auch von einer typischen Gelehrtenzerstreutheit. Im mündlichen wissenschaftlichen Gedankenaustausch war er mehr der Gebende; es lag ihm nicht, unmittelbar vorgetragene fremde Ideen sogleich aufzufassen. All seinen Gedanken war er mit der gleichen Liebe und Intensität hingegeben; in stärkerem Maße vielleicht noch als der aufgewandte Scharfsinn und selbst als die mit begrifflicher Gestaltungskraft gepaarte geniale Intuition ist die ungeheure Energie, mit der er seine Gedanken über alle Hindernisse und Hemmungen hinweg verfolgte und an ihnen festhielt, das Instrument gewesen, dem wir die Entstehung der Mengenlehre zu danken haben. Solch unerschütterliche Zähigkeit entsprang seiner tiefen Überzeugung von der Wahrheit, ja Wirklichkeit seiner Ideen; „mögen *seine* Machwerke", so schreibt er am 26. Januar 1884 an Mittag-Leffler mit Bezug auf den Wunsch Kroneckers, der seine Arbeiten mit derselben Unparteilichkeit in die *Acta Mathematica* aufgenommen wissen wollte wie die C.s, „der *Unparteilichkeit* und großer Nachsicht und Rücksichtnahme bedürfen, für *meine* Arbeiten *beanspruche* ich *Parteilichkeit*, aber nicht Parteilichkeit für meine vergängliche Person, sondern Parteilichkeit für die *Wahrheit*, welche *ewig* ist und mit der souveränen Verachtung auf die Wühler herabsieht, die sich einzubilden wagen, mit ihrem elenden Geschreibsel gegen sie auf die Dauer etwas ausrichten zu können". Und einige Monate später: „... es handelt sich hier *gewissermaßen* um eine *Machtfrage, und die kann niemals durch Überredung entschieden werden;* es wird sich fragen, *welche* Ideen mächtiger, umfassender und fruchtbarer sind, die Kroneckers oder die meinigen; nur der Erfolg wird nach einiger Zeit unseren Kampf

entscheiden!!"[1]) Freilich ist es eben dieselbe zähe und energische Verbissenheit in seine Ideen, die ihn durch die Jahrzehnte an das Baconproblem fesselte, trotz aller Versuche seiner mathematischen Freunde, ihn hiervon abzulenken.

Die Überzeugung von der Größe und Wichtigkeit des eigenen Werkes hat indes C. nicht, wie manchen anderen überragenden Forscher, überheblich oder gar eitel werden lassen. Das zeigen neben der Gestaltung seiner Freundschaftsverhältnisse mit Dedekind und Mittag-Leffler auch viele Einzelzüge. So fügt er noch 1905 seinem Bild, das er auf Wunsch von Mittag-Leffler diesem für die *Acta* einsendet, die Worte bei: „Lieber wäre es mir, wenn Sie mein Bild nicht publizieren, denn ich finde, es wäre eine viel zu große Ehre für mich." Im Vorwort der Sonderausgabe [21] seiner wichtigsten Arbeit reiht er an den Hinweis, wie verschiedene Meinungen über das Unendliche zu allen Zeiten vertreten worden seien, folgenden Satz, der angesichts der Seltenheit dieser Schrift angeführt werde: „Es liegt mir daher sehr fern zu glauben, daß ich in einer so schwierigen, verwickelten und vielumfassenden Materie, wie sie das Unendliche darbietet, das letzte Wort zu sprechen in der Lage sei; da ich aber in diesem Gegenstand durch langjährige Forschung zu bestimmten Überzeugungen gelangt bin, und dieselben im weiteren Verlaufe meiner Studien nicht wankend, sondern nur fester geworden sind, so glaubte ich eine gewisse Verpflichtung zu haben, sie zu ordnen und bekannt zu machen."

Wenn C. den Sinn für Freiheit und Unabhängigkeit unter den Mathematikern lobt und zu fördern bestrebt ist, so geschieht das keineswegs nur pro domo; daß er vielmehr auch an sich selbst die aus seiner Forderung fließenden Ansprüche stellt, zeigt z. B. sein Eintreten für Bendixson, dessen an C. gerichteter Brief vom Mai 1883 auf C.s Veranlassung ausgearbeitet und in Bd. 2 der *Acta* publiziert wird, so daß ihm dann Mittag-Leffler für sein „edles und wahrhaft wissenschaftliches Benehmen gegen Herrn Bendixson" danken kann.[2]) Nicht minder bezeichnend ist C.s Stellungnahme zu seinem größten Vorgänger hinsichtlich der Erfassung des Aktual-Unendlichen, zu Bernard Bolzano: er erkennt das Verdienst des „höchst scharf-

1) Vgl. auch [26], S. 228: „Vielleicht bin ich der zeitlich erste, der diesen Standpunkt [Bejahung des Aktual-Unendlichen in concreto und in abstracto] mit voller Bestimmtheit und in allen seinen Konsequenzen vertritt, doch das weiß ich sicher, daß ich nicht der letzte sein werde, der ihn verteidigt!"

2) Vgl. auch Mittag-Lefflers Fußnote zu Beginn von C.s Arbeit [23] sowie die Art, in der C. in [16VI] Bendixsons Verdienst würdigt.

sinnigen Philosophen und Mathematikers", in dem er „den entschiedensten Verteidiger" des Eigentlich-Unendlichen erblickt, unumwunden an, wenn auch nicht ohne Kritik seiner Schwächen. Die vornehm zurückhaltende, den Angegriffenen in seinem Rechte nicht verkürzende Art der Polemik, wie sie auch sonst in C.s Veröffentlichungen meistens zu finden ist[1]), darf bei dem Maß von Selbstsicherheit, das C. in den 80er Jahren bereits beseelt, keinesfalls als ein Symptom der Ängstlichkeit gedeutet werden, vielmehr als Ausfluß einer wahrhaft lauteren, innerlich bescheidenen Gesinnung. Nur wo sich ihm Einseitigkeit oder Autoritätsglaube der Wahrheit in den Weg zu stellen scheinen, schießt seine Erbitterung ungezügelt empor, gelegentlich dann wohl die sachlichen Grenzen überschreitend.

Gerade bei einem Forscher, der so sehr fast wider Willen sich durch die Kraft seiner Ideen vorwärts getrieben fühlt, ist es bemerkenswert, daß er von den Notwendigkeiten der Darstellung und der Terminologie keineswegs gering denkt. So schreibt er am 31. Januar 1884 an Mittag-Leffler: „... namentlich freue ich mich stets darüber, wenn Sie die Kunst der Stilistik und die Ökonomie der Darstellung loben, denn darauf verwende ich allerdings einige Mühe, und wenn es gut gelingt, so ist dies mein eigenes Werk ...". Und im Brief vom 20. Oktober 1884, der schon im wesentlichen die Arbeit [25] enthält, erwähnt C., daß er sich zuvor mit Scheeffer über die neu einzuführenden Bezeichnungen beraten hat, „mit deren Wahl ich außerordentlich vorsichtig bin, da ich von der Ansicht ausgehe, daß es für die Entwicklung und Ausbreitung einer Theorie gar nicht wenig auf eine glückliche, möglichst zutreffende Namengebung ankommt". An der im großen ganzen[2]) besonders treffenden Wahl der Terminologie sowie an der lebhaften, undogmatischen, jede unnötige Komplizierung vermeidenden Art der Gedankenführung liegt es wesentlich, wenn auch heute noch C.s Originalabhandlungen, die demnächst gesammelt neu erscheinen sollen, dem Anfänger zur Einführung warm zu empfehlen sind — eine in unserer Wissenschaft nicht eben häufige Erscheinung.

Eine nähere Schilderung verdient noch das philosophische Interesse C.s, seine damit zum Teil zusammenhängende allgemein-mathematische Weltanschauung und seine Beziehung zum Religiösen.

---

1) Besonders charakteristisch in dieser Beziehung ist C.s Rezension von Hermann Cohens „Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte" in der *Deutschen Literaturzeitung* 5 (1884), Sp. 266—268.

2) Zu den Ausnahmen gehört der Ausdruck „Menge", der leider nicht eine vox media darstellt, wie „ensemble" oder „set". Das ursprünglich von C. bevorzugte Wort „Mannigfaltigkeit" hat sich begreiflicherweise nicht durchsetzen können.

Namentlich in den aus den 80er Jahren stammenden Aufsätzen [16 V] und [26]—[28] kommt eine ganz erstaunliche Vertrautheit C.s mit der *philosophischen Literatur* zutage, und zwar nicht nur mit weiten Teilen der zeitgenössischen und etwas älteren Schriften, sondern auch mit den philosophischen Klassikern der früheren Jahrhunderte und bemerkenswerterweise speziell mit den wichtigeren philosophisch-theologischen Autoren der Scholastik sowie mit Aristoteles. Ein so tiefes, fast überall auf die Quellen zurückgehendes, aber auch die Literatur zweiter Hand in reichem Maße heranziehendes Studium von Vertretern der älteren griechischen Atomistik und ihren Gegnern, von Plato und Aristoteles, von Augustin und anderen Kirchenvätern, von Boëthius, Thomas von Aquino und vielen anderen Scholastikern, von Nicolaus Cusanus und Giordano Bruno, von Descartes, Spinoza, Locke, Leibniz, Kant und Fries wird bei einem Forscher, dessen Fachgebiet nicht die Philosophie selbst ist, sogar vor einem halben Jahrhundert eine seltene Ausnahme gewesen sein — zu einer Zeit, da die Philosophie noch nicht wie vielfach heute zur Fachwissenschaft in einer von der „Naturwissenschaftlichen" reinlich geschiedenen „Philosophischen" Fakultät verkümmert war. So trat C. auch mit den sich in Halle für Philosophie habilitierenden jüngeren Kollegen Edmund Husserl und Hermann Schwarz in rege wissenschaftliche Verbindung. Dagegen stand er den logistischen Bestrebungen (Schröder, Frege usw.) ablehnend gegenüber. Wie Felix Klein treffend bemerkt hat[1]), ist es kein bloßer Zufall, daß C. gerade auch bei den Scholastikern in die Schule gegangen ist; mehr als in anderen mathematischen Disziplinen, wo das Synthetisch-Konstruktive und vielfach speziell das Rechnerische stärker hervortritt, sind die Gedankengänge wenigstens der abstrakten Mengenlehre ähnlich allgemein, aber auch gleichzeitig ähnlich subtil und analytisch-zergliedernd wie vielfach die scholastische Logik und Theologie; dieser ist die mathematische Lehre vom Aktual-Unendlichen auch manchmal an Kühnheit, um nicht zu sagen Waghalsigkeit, verwandt, wie andererseits der Scholastik gleich der Mathematik ein Ideal der Strenge in den Schlüssen vorschwebt. Überhaupt war für C. die Philosophie nicht

1) Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I (Berlin 1926), S. 52. Folgender Satz sei von dort zitiert: „Entkleidet man die scholastischen Spekulationen dieses [mystisch-metaphysisch gefärbten] Gewandes, das sie dem oberflächlichen Blick als rein theologische Spitzfindigkeiten erscheinen läßt, so erweisen sie sich häufig als die korrektesten Ansätze dessen, was wir heute als ‚Mengenlehre' bezeichnen." Für Bolzanos Beschäftigung mit dem Unendlichen hat offenbar die Scholastik sogar den direkten Ausgangspunkt gebildet.

etwa eine äußere Region, mit der er sich für seine mathematischen Zwecke auseinanderzusetzen hatte, sondern für ihn (wie in etwas anderem Sinn für die damaligen und heutigen Logizisten) bestand eine innerliche „Fusion" zwischen beiden Gebieten. Wie wesentlich ihm auch bei seinen Lesern wenigstens das Vorhandensein wechselseitiger *Kenntnisse* war, zeigt die Bemerkung im Vorwort zur Schrift [21], er habe sie wesentlich für zwei Leserkreise geschrieben: „für Philosophen, welche der Entwicklung der Mathematik bis in die neueste Zeit gefolgt, und für Mathematiker, die mit den wichtigsten älteren und neueren Erscheinungen der Philosophie vertraut sind". Eine Generation später hätte sich ein so beschaffener Leserkreis betrüblich dünngesät präsentiert!

An Einzelheiten von philosophischer Bedeutung sei etwa die Bemerkung über *Begriffsbildung* von [16V], S. 589—90, erwähnt; hier liegt im Gegensatz zur „substantiellen" Auffassung des Aristoteles ein funktionaler Prozeß vor in dem Sinn, wie er in der modernen Lehre von der Begriffsbildung durch Rickert, Cassirer u. a. eingebürgert worden ist. — C.s Ablehnung der (auch heute wieder aktuellen) Ansicht, daß die Zahl sich auf den Zeitbegriff gründe, wird in Teil III noch hervorzuheben sein; hier sei nur die Stelle [16V], S. 573, erwähnt, wo er sich gegen Kants Lehre von der Zeit wendet.

Was C.s *Auffassung von der Mathematik überhaupt* betrifft, so steht hier im Mittelpunkt der Begriff der *Realität* wissenschaftlicher Ideen (z. B. der ganzen — endlichen wie auch unendlichen — Zahlen), der ihm in zwiefacher Bedeutung erscheint: als intrasubjektive oder immanente Realität, gesichert durch Definitionen, welche dem betreffenden Begriff im menschlichen Denken einen wohlbestimmten und von anderen Begriffen unterschiedenen Platz anweisen, womit der Begriff „die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modifiziert" ([16V], S. 562); dann als transsubjektive oder transiente Realität, indem der Begriff als „Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt" erscheint. Während C.s Überzeugung allgemein dahin geht, daß jedem im ersten Sinne realen Begriff vermöge der Einheit des uns selbst mitumfassenden Alls auch eine transiente Realität zukomme, die festzustellen die oft höchst schwierige Aufgabe der Metaphysik bilde, erblickt er den charakteristischen Vorzug der Mathematik darin, daß sie „bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials *einzig* und *allein* auf die *immanente* Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher *keinerlei* Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer *transienten* Realität zu prüfen" (ebenda

S. 563).[1]) Auf diese Charakterisierung, die ihm „die verhältnismäßig leichte und zwanglose Art der Beschäftigung" mit der Mathematik zu erklären scheint, gründet er sein Eintreten für den Ausdruck „Freie Mathematik", dessen Berechtigung in der oben (S. 204) angeführten Stelle eingehend veranschaulicht wird.

Wenn C. hier Eigenart und Bedeutung der Mathematik (und damit, darf man wohl hinzufügen, auch der theoretischen Logik) rein verstandesmäßig zeichnet, nämlich kurz: als *die* nicht-metaphysische Wissenschaft, so ist doch sein Standpunkt hierzu keineswegs einseitig gewesen. Wie er die Mathematik vielmehr seit seiner Jugend auch in ästhetischer und in ethischer Hinsicht wertet, zeigen schon die beiden ersten Thesen seiner Habilitationsschrift [5]: „Eodem modo literis atque arte animos delectari posse" (vgl. auch z. B. [16V], S. 562 oben) und „Jure Spinoza mathesi eam vim tribuit, ut hominibus norma et regula veri in omnibus rebus indagandi sit".

Wie es schon die oben angeführte dritte Doktorthese andeutet, hat C. besonders hohe Anforderungen an die aufzuwerfenden Probleme gestellt. Überspitzte Fragestellungen lagen ihm sehr ferne, und innerhalb wie außerhalb der Mengenlehre war er sehr leicht bei der Hand mit der Frage, was diese oder jene Untersuchung denn für ein Interesse habe. Die Natürlichkeit von Begriffsbildung und Fragestellung war in ihm fest eingewurzelt.

Im engsten Zusammenhang mit der These C.s, daß den mathematischen Begriffen neben der den Mathematiker allein angehenden immanenten Realität von selbst auch eine transsubjektive Realität zukomme, steht offenbar seine Auffassung, die sich zugespitzt so ausdrücken läßt: der Mathematiker *erfindet* nicht die Gegenstände seiner Wissenschaft, sondern er *entdeckt* sie. Schon in der (auf S. 195 erwähnten) dritten These seiner Habilitationsschrift zum Ausdruck kommend, findet sich diese Anschauung am Schlusse seines Schaffens wieder betont, wenn er der abschließenden Darstellung [32] die Mottosätze voranstellt: „Hypotheses non fingo" und „Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus". Während es im allgemeinen für das Werk des schaffenden Mathematikers gleichgültig sein wird, ob er seine Begriffe als Platonische Ideen, als willkürliche Schöpfungen des Verstandes oder

1) Es fragt sich, ob C. hiermit etwa bewußt oder unbewußt an H. Hankel anknüpft, der in seiner schon 1867 erschienenen „Theorie der komplexen Zahlensysteme" (S. 10) als Gegenstand der Mathematik „intellektuelle Objekte" bezeichnet, „denen aktuelle Objekte oder Relationen solcher entsprechen *können*, aber nicht *müssen*".

vermittelnd (mit Hessenberg[1]) als selbsttätige Schöpfungen der Vernunft ansieht, so werden solche Verschiedenheiten der Weltanschauung merkwürdigerweise gerade für die das Überabzählbare betreffenden Problemstellungen der Mengenlehre zuweilen von erheblicher Bedeutung.[2]) Gerade der Umstand, daß die Begriffe der Mathematik für C. (wie ausgesprochenermaßen auch z. B. für Bolzano) eine Existenz besitzen, die von ihrer Entdeckung und von unserem Denken überhaupt unabhängig ist und ihm gewissermaßen vorangeht[3]), ist von offensichtlicher Bedeutung für die Art gewesen, in der C. an die Probleme (auch z. B. an das Kontinuumproblem) heranging; die gegenwärtige Generation, in der die entgegengesetzte Überzeugung — besonders unter dem Einfluß Poincarés — starke Anhängerschaft gefunden hat, darf dies bei der Betrachtung des Cantorschen Schaffens nicht außer acht lassen. Auch für die Hartnäckigkeit, mit der C. zwei Jahrzehnte hindurch als beinahe Vereinsamter zu seinen Ideen stand, ist jene Überzeugung Stütze und Stimulus gewesen, wie auch heute alle, die sie teilen, dadurch gegen die Anfechtungen durch den Intuitionismus gewappnet sind. So ist es denn nicht nur Bescheidenheit, sondern vornehmlich der Ausfluß der erwähnten metaphysischen Auffassung, wenn C. in einem Brief an Mittag-Leffler von Anfang 1884 schreibt: „... was das übrige [nämlich außer Stil und Ökonomie der Darstellung] betrifft, so ist dies nicht mein Verdienst, ich bin in bezug auf den Inhalt meiner Arbeiten nur Berichterstatter und Beamter."[4]) Indes läßt sich kaum verkennen, daß bei C. eine gewisse Unausgeglichenheit besteht zwischen den Thesen von der „Freiheit" der Mathematik einerseits und von der Gegebenheit der mathematischen Objekte andererseits; nur aus der letzteren Einstellung läßt sich sein entschiedener Kampf gegen das Unendlichkleine, d. h. gegen die nicht-archimedischen Größensysteme, verstehen, der mit der ersten These schwer vereinbar ist. Speziell in seiner Auffassung vom Zahlbegriff dürfte eine gewisse Ent-

1) Dieser *Jahresbericht* 17 (1908), S. 145—162, bes. S. 158.

2) Vgl. meine „Einleitung in die Mengenlehre" (3. Aufl., Berlin 1928), S. 325—332.

3) Vgl. auch [16V], S. 590 oben.

4) Vgl. auch die bekannte Stelle aus [26], S. 226: „... während die unendlichen Zahlen doch andererseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist." Ähnlich in [28I], S. 125: „Denn es handelt sich bei unseren *transfiniten* Zahlen um ein *neues Zahlengeschlecht*, dessen Beschaffenheit man zu erforschen, nicht aber nach dem Rezept von Vorurteilen eigenwillig zu präparieren hat."

wicklung feststellbar sein, nämlich im Sinne einer immer schärferen Abkehr vom formalen Standpunkt.

Von den Anschauungen und Interessen C.s hinsichtlich der Naturwissenschaften, namentlich der *Physik*, haben wir keine so genaue Kenntnis. Im Gegensatz zur „freien Mathematik" betrachtet er die mathematische Physik als eine „metaphysische Wissenschaft"[1]), für die er gerade solche Fesseln, wie er sie für die Mathematik entschieden ablehnt, als berechtigt und notwendig erkennt im Hinblick auf die für die Naturwissenschaft zu fordernde transiente Realität. In einem wohl nicht ganz zwingenden Zusammenhang hiermit wendet er sich ([16V], S. 564) gegen die Auffassung eines „berühmten Physikers" (offenbar Kirchhoffs, dessen „Mechanik" 1874 erschienen war) von der Physik als einer „Naturbeschreibung", eine Auffassung, „welcher der frische Hauch des freien mathematischen Gedankens ebensowohl wie die Macht der *Erklärung* und *Ergründung* von Naturerscheinungen fehlen muß".[2]) Erwähnenswert von C.s Ideen zur Naturwissenschaft ist auch die am Schluß von [25] geäußerte, einer uns heute schon ganz fernliegenden Atomistik entsprechende Auffassung[3]), daß die materiellen Atome in der ersten, die Ätheratome in der zweiten Mächtigkeit vorhanden seien[4]), sowie seine Beschäftigung mit der „Naturlehre der Organismen . . ., auf welche sich die bisherigen mechanischen Prinzipien nicht anwenden lassen . . ." und zu deren Bewältigung er neue, insbesondere mengentheoretische Hilfsmittel geschaffen wissen will (Brief an Mittag-Leffler vom 22. September 1884; vgl. auch [16V], S. 558). Wenn auch die ihm hierbei vorschwebenden Methoden und Ziele schwerlich ganz zu klären sind, so darf doch angenommen werden,

1) Das Wort „Metaphysik" hat übrigens für C. (ähnlich wie für Gauß) oft nicht die heute übliche Bedeutung, sondern in Anlehnung an den französischen Sprachgebrauch etwa den Sinn „philosophische Kritik" (einer Wissenschaft); so z. B. am Schluß von [12].

2) Als eine ähnliche Auffassung in unserer Zeit sei etwa die von Weyl vertretene genannt (vgl. z. B. *Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, 6 [1928], S. 87f.).

3) Vgl. auch die auf Mitteilungen C.s zurückgehenden Angaben in der *Ztschr. f. Phil. u. philos. Kritik*, N. F., **88** (1886), S. 192f.; ferner ebenda S. 229. Zu diesen physikalischen Anschauungen vgl. man neben Cauchy, auf den C. in [26] und [28] sich beruft, auch die Naturerklärung in R. Graßmanns Buch: „Die Lebenslehre oder Biologie" (Stettin 1882—83).

4) Die a. a. O. Cantor vorschwebenden und ihm offenbar sehr am Herzen liegenden Anwendungen der Punktmengentheorie auf die mathematsiche Physik sind zwar mit der Weiterentwicklung der Physik gegenstandslos geworden; physikalische Anwendungen anderer Art sind aber in der Tat erfolgt. Seine Gegnerschaft gegen die gewöhnliche Atomistik betont C. schon in [16V], S. 560.

daß die (bis heute kaum in Angriff genommene) Theorie der mehrfach geordneten Mengen (vgl. S. 255) eine Hauptrolle dabei spielen sollte. Schließlich verdient noch Hervorhebung die in [16III] (S. 120f.) sich findende Erörterung der Beziehungen zwischen dem arithmetischen Raum und dem von uns den Erscheinungen der realen Welt zugrunde gelegten Raum, zwei Begriffen, deren gewöhnlich postulierte Korrespondenz „an sich willkürlich" und nur durch die Forderung der Abbildbarkeit, also nicht etwa schon durch die der stetigen Bewegung gewährleistet sei (vgl. S. 242).

Das *religiöse Interesse* C.s tritt vielfach in den Abhandlungen philosophischen Einschlags (wie auch in der Vorrede zu Bacons *Confessio fidei*) hervor; die Arbeit [26] ist ja charakteristischerweise auch in der Zeitschrift „Natur und Offenbarung" erschienen. Von Vaters Seite her jüdischer Abstammung, selbst im evangelischen Glauben erzogen, durch die Mutter und deren Familie einer katholischen Atmosphäre nahestehend, teilte er nicht das Geschick vieler, für die solche Überschneidungen sich zu weitgehender Gleichgültigkeit in der religiösen Sphäre auswirken; vielmehr hat die schon zu Anfang erwähnte religiöse Komponente seiner Erziehung offenbar nachhaltig fortgewirkt. Wenn er sich besonders eingehend mit der Stellung der Kirchenväter und der scholastischen Philosophie zum Aktual-Unendlichen[1]) wie überhaupt mit dessen Beziehung zum Gottesbegriff beschäftigt und auseinandersetzt, so ist dabei neben dem Wunsch nach Verteidigung gegen die Einwände, die mit Argumenten solcher Herkunft gegen seine Begriffsbildungen erhoben wurden, offenbar auch ein eigener innerer Antrieb mit im Spiel. Für seine religiöse Einstellung sind charakteristisch zunächst die in [28I], S. 105ff., abgedruckten Briefe (deren

1) Man vgl. zu diesen Beziehungen zwischen Theologie und Aktual-Unendlichem an neuerer Literatur etwa A. Dempfs Schrift: „Das Unendliche in der mittelalterlichen Metaphysik und in der Kantischen Dialektik" (Münster i. W. 1926) und einen Aufsatz von J. Ternus S. J. „Zur Philosophie der Mathematik" (*Philos. Jahrb. der Görres-Gesellschaft* 39 [1926], S. 217—231). Hervorgehoben seien noch die ernstlichen Bemühungen des Scholastikers Grégoire de Rimini um das Unendliche (vgl. P. Duhem, Études sur Léonard de Vinci, 2me Série [Paris 1909], S. 385—399; dort findet man auch Material über die Stellung anderer älterer Gelehrten, besonders Lionardo da Vincis, zum Unendlichen: S. 1—54, 368—384, 399—407). Ferner ist zu bemerken, daß die Argumente des Aristoteles und verschiedener Neuaristoteliker gegen das Aktual-Unendliche bereits in dem 1410 erschienenen Hauptwerk des jüdisch-spanischen Philosophen Chasdai Crescas sehr ausführlich zerpflückt werden; von diesen Argumenten des Crescas ist die positivere Stellung Spinozas zum Unendlichen offensichtlich entscheidend beeinflußt. (Vgl. H. A. Wolfson, Crescas' critique of Aristotle [Cambridge Mass. 1929], Kapitel II nebst den zugehörigen Textstellen und Noten, sowie S. 36f.)

ungenannter Adressat der Kardinal Franzelin war, siehe unten), in denen er die Existenz eines aktualen „Infinitum creatum" geradezu vom Gottesbegriff her beweisen will; ferner etwa folgende Stelle aus einem Brief C.s an G. Eneström, die sich auf die bekannte Bemerkung von Gauß zu Schumacher[1]) bezieht und freilich Gauß schwerlich gerecht wird: „Wenn aber aus einer berechtigten Abneigung gegen solches *illegitime* A(ktual)-U(nendliche) sich in breiten Schichten der Wissenschaft, unter dem Einflusse der modernen epikureisch-materialistischen Zeitrichtung, ein gewisser *Horror Infiniti* ausgebildet hat, der in dem erwähnten Schreiben von Gauß seinen klassischen Ausdruck und Rückhalt gefunden, so scheint mir die damit verbundene unkritische Ablehnung des *legitimen* A.-U. kein geringeres Vergehen wider die Natur der Dinge zu sein, die man zu nehmen hat, wie sie sind, und es läßt sich dieses Verhalten auch als eine Art *Kurzsichtigkeit* auffassen, welche die Möglichkeit raubt, das A.-U. zu sehen, obwohl es in seinem höchsten, absoluten Träger uns geschaffen hat und erhält und in seinen sekundären, transfiniten Formen uns allüberall umgibt und sogar unserem Geiste selbst innewohnt." ([26], S. 230.) An einer anderen Stelle sagt C. nach Äußerung seiner Genugtuung darüber, daß Thomas von Aquino bei seinen Gottesbeweisen den Satz von der Unmöglichkeit der aktual-unendlichen Zahlen nicht verwendet: „So hoch ich Cauchy als Mathematiker und Physiker schätze, so sympathisch mir seine Frömmigkeit ist, und so sehr mir im besonderen auch jene *Sept leçons de physique générale*, abgesehen von dem in Rede stehenden Irrtum, gefallen, muß ich doch entschieden gegen seine Autorität protestieren, da, wo er gefehlt hat." ([26], S. 225.)

Im Verfolg seines Interesses für die theologische Behandlung des Problems des Unendlichen korrespondierte C. mit mehreren Jesuiten[2]), so u. a. mit dem verbannten P. Tilman Pesch, dem Verfasser der von C. hochgeschätzten „Institutiones philosophiae naturalis", den er persönlich in Blyenbeck (Holland) aufsuchte, sowie mit dem Kardinal Franzelin, der im Anschluß an die Lehre Augustins die aktual-unendliche Mannigfaltigkeit verteidigte und von dem sich ein längerer Brief in [281] (S. 91ff.) findet; ganz besonders aber mit C. Gutberlet, Professor für Philosophie und Mathematik am Priesterseminar in Fulda und jahrzehntelangem Herausgeber des *Philosophischen Jahr-*

1) Briefwechsel Gauß-Schumacher Bd. 2 (1860), S. 269; Gauß' Werke Bd. VIII, S. 216.

2) Wie Ternus (a. a. O. S. 221) berichtet, bewahrt die Bibliothek der niederdeutschen Jesuitenprovinz noch manche „Hommages respectueux de l'auteur George Cantor" aus den 80er Jahren.

buchs der Görres-Gesellschaft. Dieser hatte 1878 eine Schrift, „Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet", veröffentlicht, die die in Theologie und Philosophie herkömmlichen Ansichten von der Unmöglichkeit einer unendlichen Größe bekämpfte, um allerdings nicht wie C. die *Existenz*, aber doch die *Möglichkeit* des Aktual-Unendlichen zu behaupten. C. erblickte daher in Gutberlet, dem seine Schrift viel Widerspruch und selbst Spott einbrachte, einen Bundesgenossen; er besuchte ihn in Fulda und verwies dabei für das von ihm bezeigte Interesse neben den sachlichen Gründen auch auf seine Beziehungen zum Katholizismus von der Mutterseite her.[1]) Mit Unterstützung Gutberlets hat C. den tiefgehenden Einblick in die Auffassungen der mittelalterlichen Denker von dem Unendlichen gewonnen, von dem seine Arbeiten zeugen, wie auch umgekehrt Gutberlet einen weiteren Kreis philosophisch Interessierter mit den Gedankengängen der Mengenlehre C.s vertraut gemacht und diese u. a. gegen die Einwände der Herbartschen Schule verteidigt hat.[2])

Daß C. gleichwohl theologischen Vorurteilen auch ohne Umschweife und sogar mit einer gewissen Ironie entgegentreten konnte, wenn es darauf ankam, ersieht man beispielsweise aus den oben (S. 205) angeführten Bemerkungen zum Wesen des Kontinuums.

II. Veröffentlichungen nicht-mengentheoretischen Inhalts.

Von den beiden Hauptgebieten, denen die nicht der Mengenlehre zugehörigen Arbeiten C.s entstammen, ist das eine, und zwar das ältere, die *Zahlentheorie.* In seiner Dissertation [1] handelt es sich um die Auflösung der einer ternären quadratischen Form entsprechenden Gleichung $ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 = 0$ in ganzen Zahlen. Um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit zu finden, hatte Legendre eine Reduktionsmethode von Lagrange benutzt, die C. im Vorwort seiner Arbeit erwähnt und die man in einer durch Dedekind vereinfachten Form in Dirichlet-Dedekinds Vorlesungen über Zahlentheorie (3. Aufl. [1879], S. 428ff.) findet. Setzt man, wie zulässig, voraus, daß a, a', a'' paarweise teilerfremd sind und keinen quadratischen Teiler enthalten, so läßt sich das Kriterium für die Lösbarkeit so aussprechen: 1. a, a', a'' dürfen nicht alle dasselbe Vorzeichen haben; 2. es müssen $-a'a'', -a''a, -aa'$ beziehent-

1) Vgl. *Philos. Jahrb. der Görres-Gesellschaft* 32 (1919), S. 366, und 41 (1928), S. 262.

2) „Das Problem des Unendlichen". *Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik,* N. F., 88 (1886), S. 179—223, Teil I. Vgl. auch Cantor, ebenda, S. 232, und die Fußnote in [28I], S. 94, nach der Gutberlet in diesen Aufsatz Stellen aus einem Manuskript C.s (auf dessen Wunsch) eingefügt hat, sowie C.s Einwände in [28I], S. 101—104.

lich quadratische Reste von a, a', a'' sein. — Eine andere Methode stammt von Gauß, der die Auflösung mit der Transformation in die Form $4D(zz'' - z'^2)$, wo $D = aa'a''$, in Zusammenhang bringt. Gauß hatte auch gezeigt, wie man unter obigen Bedingungen alle eigentlichen ganzzahligen Lösungen finden kann; nämlich in der Form

$$x = \tfrac{1}{t}\varphi(p, q); \quad x' = \tfrac{1}{t}\varphi'(p, q); \quad x'' = \tfrac{1}{t}\varphi''(p, q),$$

wo $\varphi, \varphi', \varphi''$ binäre Formen der beiden relativ prim einzusetzenden Variabeln p, q bedeuten, und t der nach Einsetzung von p, q sich ergebende größte gemeinsame Teiler von $\varphi(p, q), \varphi'(p, q), \varphi''(p, q)$ ist.

An diese Gaußschen Formeln knüpft C. an mit der Bemerkung, daß sie die Gesamtheit der eigentlichen Lösungen nicht vollständig liefern, insofern als die Abhängigkeit der Zahl t von p, q nicht bekannt ist und somit t für jedes Paar p, q durch eine besondere Rechnung gefunden werden muß. Die Aufstellung der Abhängigkeit zwischen t und p, q bildet den Gegenstand der recht komplizierten Dissertation C.s. Eine andere Lösung dieses Problems hat später Dedekind gegeben (a. a. O., S. 418ff.); vgl. auch die Darstellung bei Bachmann, Die Arithmetik der quadratischen Formen, I. Abt. (1898), 8. Kapitel.

In [2] geht C. von der Dissertation Göpels (Berlin 1835) aus, die im *Journ. f. Math.* 45 (1853), S. 1—13, wieder abgedruckt ist (vgl. den Bericht Jacobis, *J. f. Math.* 35 [1847], S. 314ff.; Werke II, S. 148ff.). Göpel hatte gezeigt, wie man für $P = p$ oder $P = 2p$, wo p eine Primzahl von der Form $4n + 3$ bedeutet, aus der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{P}$ die Darstellbarkeit von P durch die Form $x^2 \pm 2y^2$ erhalten kann. C. beweist nun ohne Benutzung der Kettenbrüche zwei entsprechende Sätze für die Fälle $p = 8n + 3$ bzw. $p = 8n + 7$, die die Resultate von Göpel enthalten und sie von gewissen beschränkenden Voraussetzungen befreien.

Die Arbeit [3] bezieht sich auf das Eulersche Problem, die Anzahl C_n der Darstellungen einer natürlichen Zahl n durch ein gegebenes System $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in der Form

$$n = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots$$

zu bestimmen, wo λ_i die Werte $0, 1, 2, \ldots \alpha_i$ (α_i evtl. auch $= \infty$) durchlaufen soll. Euler hatte das Problem auf die analytische Form gebracht, ein gewisses unendliches Produkt in eine Potenzreihe zu verwandeln, in der die C_n als Koeffizienten auftreten. C. kehrt die Fragestellung um, indem er diejenigen Zahlensysteme zu bestimmen sucht, bei denen die Darstellung der Zahl n eindeutig ist, also alle

$C_n = 1$ sind. Diese „einfachen" Zahlensysteme enthalten als spezielle Beispiele das dekadische sowie die entsprechenden nach einer anderen Grundzahl; allgemein ergeben sie sich als

$$a_0 = 1, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_1 b_2, \quad a_3 = b_1 b_2 b_3, \quad \ldots \quad (b_\varkappa > 1),$$

wobei $\alpha_\varkappa = b_{\varkappa+1} - 1$. Durch Erweiterung des Problems auf die Darstellung rationaler Zahlen erhält C. die nach ihm benannten Reihen

$$A_0 + \frac{\lambda_1}{b_1} + \frac{\lambda_2}{b_1 b_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} + \cdots,$$

die zur Darstellung der reellen Zahlen dienen können. Indem er dann nacheinander zwei einschränkende Annahmen über die $b_\varkappa$ macht, gibt er die entsprechenden Kriterien dafür, ob eine durch die letzte Reihe dargestellte Zahl rational oder irrational ist. (Vgl. die Darstellung bei Perron, Irrationalzahlen [1921], S. 111—116.)

In [4] gewinnt C., anknüpfend an eine Produktentwicklung Eulers, eine Darstellung jeder reellen Zahl $A > 1$ in der Form eines unendlichen Produktes

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\ldots,$$

wo $b \geqq a^2, c \geqq b^2, \ldots$ Jedes reelle $A > 1$ ist eindeutig in ein solches konvergentes Produkt entwickelbar; das Kriterium der Rationalität ist, daß in den letzten Ungleichungen von einer gewissen Stelle an das Gleichheitszeichen gelte. (Vgl. Perron, ebenda, S. 122—127.)

Die Habilitationsschrift [5] stellt sich die Aufgabe, alle Transformationen zu bestimmen, durch die eine ternäre quadratische Form $F(x, y, z)$ in eine andere ebensolche übergeht, oder — was auf dasselbe hinausläuft — die eine ternäre quadratische Form in sich überführen. Hermite hatte schon vorher (*J. f. Math.* 47 [1854], S. 307ff.) den allgemeinen Ausdruck für diese Transformationen auf anderem Wege gefunden.[1]) Die Methode C.s besteht darin, daß er die Form $F(x, y, z)$ durch lineare Transformation in die Form $4D(\xi\zeta - \eta^2)$, wo D die Determinante der Form $F(x, y, z)$ ist, überführt und dann die Transformationen der neuen Form in sich selbst bestimmt, um schließlich mittels der Transformation in die Zwischenform auch die Transformationsformeln für die ursprüngliche Form ausdrücklich aufzustellen. Man vergleiche die Darstellung in Bachmanns Arithmetik der quadratischen Formen, I. Abt. (1898), S. 18—38 (bes. 20—25).

---

1) Nach Bachmann (*J. f. Math.* 76 [1873], S. 331ff.) enthalten die Untersuchungen Hermites eine von Bachmann sowie später von Hermite selbst ausgefüllte Lücke; vgl. Hermite, ebenda 78 (1874), S. 325ff.

Während die Bemerkung [11] ohne nennenswerte Bedeutung ist[1]), sei im Anschluß an diese arithmetischen Arbeiten, die sämtlich aus C.s drittem Lebensjahrzehnt stammen, noch eine spätere [19] erwähnt, die wenigstens dem Gegenstand nach gleichfalls der Zahlentheorie zugehört. C. steht damals (1880) bereits mitten in der mengentheoretischen Produktion; doch unter dem Eindruck einer soeben in den Pariser *Comptes Rendus* (vom 8. Dezember 1879) erschienenen Arbeit von Lipschitz greift er zurück auf Untersuchungen, die er schon vor längerer Zeit im Anschluß an die Primzahlenarbeit Riemanns von 1859 ausgeführt hatte. Der Gegenstand betrifft den Zusammenhang verschiedener zahlentheoretischer Funktionen $T(n)$ mit der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$, und zwar einen Zusammenhang der Form $\sum_n \frac{T(n)}{n^s} = L(s)$, wo $L(s)$ durch $\zeta(s)$ auszudrücken ist. Neben den auch von Lipschitz gefundenen Formeln, in denen $L(s)$ nacheinander gleich

$$(\zeta(s))^2, \quad \zeta(s)\,\zeta(s-1), \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

ist, während $T(n)$ beziehentlich die Anzahl der Teiler von n, deren Summe, die Eulersche Funktion $\varphi(n)$ darstellt, gibt C. eine Reihe neuer Formeln, in denen $L(s)$ gleich

$$(\zeta(s))^{\varrho+1}, \quad \frac{(\zeta(s))^{\varrho+1}}{\zeta((\varrho+1)s)}, \quad \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)\,\zeta(3s)}{\zeta(6s)}, \quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \quad \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)}{\zeta(3s)}$$

ist, und entwickelt Beziehungen zwischen den entsprechenden Funktionen $T(n)$. Außerdem verallgemeinert er die bekannte Formel $\sum_{d/n} \varphi(d) = n$ zu

$$\sum_{d_1, \ldots, d_\varrho} d_1^{\varrho-1} d_2^{\varrho-2} \ldots d_{\varrho-1}^{1} \varphi(d_1)\,\varphi(d_2) \ldots \varphi(d_\varrho) = n^\varrho,$$

worin die Summation auf alle verschiedenen Lösungssysteme der Gleichung $n = d_1 d_2 \ldots d_\varrho d_{\varrho+1}$ zu erstrecken ist. Schließlich gibt C. mittels Dirichlets Transformationsmethode aus der Theorie der Dirichletschen Reihen einen analytischen Ausdruck für $T(6n)$ in Abhängigkeit von $L(s)$. Hierbei wird die Fundamentalbeziehung verwendet, die heute meist unter dem Namen der Mellinschen Reziprozitätsformeln auftritt, und die C. mit Riemann aus dem (allerdings damals noch nicht streng bewiesenen) Fourierschen Integraltheorem ableitet. Zum Schluß bemerkt C., die Formeln für $T(n)$ könnten auch dazu

1) Beweis des fast selbstverständlichen Satzes: Sind $w_1, w_2, \ldots, w_n$ voneinander verschieden, so assen sich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ganzzahlig so wählen, daß die $n!$ Permutationen (in w_i) des Ausdrucks $x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n$ verschieden ausfallen.

dienen, einen asymptotischen Ausdruck für $T(n)$ zu liefern; seine Absicht, bei einer späteren Gelegenheit darauf zurückzukommen, hat er indes nicht verwirklicht.

An zahlentheoretischen Interessen C.s ist weiter noch zweierlei zu erwähnen: der 1884 bestehende Plan einer zur Veröffentlichung in den *Acta Mathematica* bestimmten Arbeit über quadratische Formen (vgl. [III], S. 20), der nicht zur Ausführung gelangt ist, und die Tabelle zur empirischen Verifikation des Goldbachschen Theorems bis zur Zahl 1000, die C. um das Jahr 1884 herstellen ließ und später in [31] zur Veröffentlichung brachte. Diese Tabelle, die auch jedesmal die Anzahl der möglichen Zerlegungen angibt, um deren durchschnittliches Anwachsen hervortreten zu lassen, ist indes durch eine große Anzahl von Fehlern (Druckfehlern und anderen) stark beeinträchtigt.

Schließlich seien hier noch die drei Gelegenheitsschriften [12], [24], [35] erwähnt, von denen die letztere einen von C. eingeleiteten und disponierten Brief von Weierstraß an C. über das Dreikörperproblem wiedergibt und der Nekrolog [24] die besondere Bedeutung Scheeffers auf Grund seiner Arbeiten aus der reellen Funktionenlehre und der Variationsrechnung treffend hervorhebt. Der Vortrag [12], der mit dem Hinweis auf die Fruchtbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Naturwissenschaft anhebt, gibt Geschichtliches zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Fermat und Pascal bis Gauß. Bemerkenswert sind namentlich auch die Schlußsätze über die philosophische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die ihm gleich jeder auf die Wirklichkeit anzuwendenden Wissenschaft eine philosophische Kritik zu erfordern scheint.

Nicht allein für die Wissenschaft, sondern vor allem auch für C.s eigene Entwicklung sind wichtiger als seine arithmetischen Aufsätze die Bemühungen und Arbeiten geworden, die er der Theorie der *trigonometrischen Reihen* gewidmet hat. Kam die äußere Anregung zu diesem Arbeitsgebiet von Heine sowie von dem 1870[1]) erschienenen Aufsatz von Hankel[2]), der wesentlich an Riemanns Ideen anknüpft, so ist doch C. in seiner Einstellung zunächst wesentlich Schüler von Weierstraß, aus dessen Vorlesungen er das Interesse für die sorg-

1) Im Gratulationsprogramm der Tübinger Universität; wieder abgedruckt *Math. Ann.* **20** (1882), S. 63—112.

2) Für die in diesen und anderen Arbeiten (besonders von Harnack und P. du Bois-Reymond) ruhende Vorgeschichte der Mengenlehre vgl. (außer [V]) vor allem Jourdains ausführliche und sehr sorgfältige Darstellung im *Archiv d. Math. u. Physik* (3) **10** (1905), S. 254—281, und **14** (1909), S. 289—311 (hinsichtlich C.s selbst fortgesetzt in den Bänden 16 und 22).

fältigste Begründung und Behandlung analytischer Probleme in sich aufgenommen hatte.

Riemann hatte die Behauptung ausgesprochen, daß, wenn $\lim a_n$ und $\lim b_n$ nicht beide $= 0$ sind, das allgemeine Glied

$$A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

einer trigonometrischen Reihe nur für besondere Werte von x gegen 0 konvergieren kann. In [6] präzisiert C. diese Aussage, indem er beweist, daß, wenn für alle x eines Intervalls

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} A_n(x) = 0$$

gilt, die Beziehungen $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ erfüllt sind. Die Arbeit [9] gibt einen einfacheren Beweis für diesen Satz. In [17] wendet sich C. gegen einen Versuch von Appell (*Archiv d. Math. u. Physik* 64 [1879], S. 95f.), diesen Satz einfacher zu beweisen; er hebt hervor, daß Appell dabei eine unzulässige Annahme macht, die auf eine Verwechslung der gewöhnlichen Konvergenz von (*) mit der gleichmäßigen Konvergenz desselben Ausdrucks hinausläuft. In [18] begründet er dies näher an Hand eines Gegenbeispiels zu dem von Appell implicite angewandten Satz und kommt dann auf die Unterschiede zwischen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Konvergenz zu sprechen, wobei er auf die historische Entwicklung eingeht (Cauchy, Abel, Seidel). Er konstruiert weiter ein Gegenbeispiel zu einem Satze von Stolz, indem er die Existenz einer (nicht gleichmäßig) konvergenten Reihe stetiger Funktionen nachweist, deren Summe wiederum eine stetige Funktion ist; erst nachträglich wird ihm bekannt, daß schon du Bois-Reymond und Darboux Beispiele solcher Reihen gegeben hatten.

Das von C. in [6] und [9] ausgesprochene Resultat wurde später verallgemeinert; einerseits von Lebesgue, der zeigte, daß für (*) eine Ausnahmemenge vom Maße Null zulässig ist, andererseits durch Harnack (*Math. Ann.* 19 [1882], S. 235ff.) und W. H. Young (*Messenger of Math.* (2) 38 [1908], S. 44ff.), aus deren Untersuchungen hervorgeht, daß auch Mengen von der ersten Kategorie (Baire) als Ausnahmemengen für (*) zulässig sind. Weiter ist zu nennen als Verallgemeinerung des Ergebnisses von Lebesgue der Satz von Steinhaus (*Wiad. Mat.* 24 [1920], S. 197ff.; vgl. Fortschr. d. Math. 47, S. 260f.), wonach mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0

$$\overline{\lim}\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \overline{\lim}\,\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

gilt. Rajchmann (*Fundam. Math.* 3 [1922], S. 287ff., und 4 [1923], S. 366f.) hat das letztere Ergebnis noch erheblich verschärft.

Ein zweites Problem aus der Theorie der trigonometrischen Reihen behandelt C. zunächst mit der Arbeit [7]. Sie enthält den Beweis des Satzes, daß zwei trigonometrische Reihen, die überall konvergieren und dieselbe Funktion darstellen, identisch sind; Riemann hatte dieses Ergebnis an einigen Stellen seiner Habilitationsschrift schon ausgesprochen, doch ohne Beweis und auch nicht ganz explizit. [8] bringt dazu die Bemerkung Kroneckers, daß man zum Beweis des Eindeutigkeitssatzes vom Cantorschen Koeffizientensatz absehen kann. Seltsamerweise hat Kronecker späterhin keine Notiz von diesem Ergebnis C.s genommen, so z. B. in den „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale" (1894), wo die Eindeutigkeitsfrage als noch offen hingestellt wird (S. 94f.)!

In [10] erweitert C. seinen Eindeutigkeitssatz, indem er — über ein einschlägiges schon in [8] enthaltenes Ergebnis hinausgehend — zeigt, daß man über das Verhalten der Reihen in gewissen Ausnahmemengen nichts vorauszusetzen braucht, nämlich in Punktmengen P, für die ein endliches ν existiert, so daß die Ableitung $P^{(\nu)}$ leer ist. Am Ende von [23] erklärt C. sogar, es sei ihm gelungen zu zeigen, daß als Ausnahmemengen noch die Mengen zulässig sind, deren Ableitung abzählbar ist (also ν endlich oder aus der zweiten Zahlklasse), und sogar gewisse Mengen, deren erste Ableitung nicht mehr abzählbar ist; indes ist er darauf nicht mehr zurückgekommen. Als eine Art Fortsetzung seiner Bemühungen betrachtete C. mit Recht Scheeffers Arbeit über den Fundamentalsatz der Integralrechnung, die weitgehende Resultate über die Ausnahmemengen enthält.

Die an diese Fragestellung anknüpfenden Arbeiten — wobei von einer durch Ascoli und du Bois-Reymond aufgeworfenen, eng damit zusammenhängenden Frage abgesehen werde — verfolgen in erster Linie das Ziel, den Eindeutigkeitssatz unter Voraussetzung allgemeinerer Ausnahmemengen zu beweisen. So zeigen F. Bernstein (*Leipziger Ber.* 60 [1908], S. 325ff.) und W. H. Young (*Messenger of Math.* (2) 38 [1908], S. 44ff.), daß beliebige abzählbare Mengen als Ausnahmemengen zulässig sind. Auch die Ergebnisse de la Vallée Poussins (*Cours d'analyse* I) gehen nicht darüber hinaus. Dagegen haben neuerdings Rajchmann (*Fund. Math.* 3 [1922], S. 287ff.; *Math. Ann.* 95 [1926], S. 389ff.) und Frl. N. Bary (*Fund. Math.* 9 [1927], S. 62ff.) gezeigt, daß auch gewisse nicht abzählbare Mengen als Ausnahmemengen zulässig sind (doch nicht etwa *beliebige* Mengen vom Maße 0). Damit ist indes die Beschaffenheit der allgemeinsten

als Ausnahmemengen zulässigen Mengen im metrischen Sinne noch nicht bekannt. Weitere einschlägige Untersuchungen sind von M. Riesz, W. H. Young, Rajchmann, Zygmund angestellt worden. (Vgl. zum ganzen Gegenstand auch Plancherel, *L'Enseignement Math.* **24** [1925], S. 21ff. und 48ff.) — In anderer Richtung knüpfen an C. die Arbeiten Carl Neumanns an (*Leipziger Ber.* **33** [1881], S. 1—25, und **35** [1883], S. 18—34); auf Mängel der ersteren Arbeit hat C. selbst 1882 Neumann brieflich hingewiesen (vgl. ebenda **35**, S. 33).

III. Veröffentlichungen zur Mengenlehre.[1])

Zunächst ist hier C.s Theorie der *Irrationalzahlen* zu erwähnen, die nicht allein sachlich in engem Zusammenhang mit seinen mengentheoretischen Begriffsbildungen steht, sondern in noch höherem Maße subjektiv auf Grund C.s eigener Entwicklung und Einstellung damit verknüpft war.

Die Einführung der Irrationalzahlen stammt aus [10]. Zu der im Schlußparagraphen von [10] enthaltenen Erweiterung des Resultates von [7], von der oben die Rede war, benötigt C. wenigstens andeutungsweise die Entwicklung von Ideen, „welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrößen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind"; nämlich die Einführung der Grenzpunkte und Ableitungen (endlicher Ordnung) von Punktmengen.[2]) Diesem Zweck dient einerseits die Theorie der Irrationalzahlen als Fundamentalreihen: einer Folge rationaler Zahlen a_i, für die bei geeignetem $n_1(\varepsilon)$ für $n \geqq n_1$ und alle m stets $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ ist, wird definitorisch eine „Grenze" b zugeordnet und die Vergleichung sowie die Rechenoperationen mit solchen Fundamentalreihen erklärt.[3]) Andererseits wird der Übergang zur Geometrie durch die Aufstellung eines besonderen Axioms (*Axiom von Cantor*)

1) Von den beiden Möglichkeiten der Behandlung, entweder nur wenige hervorstechende Punkte herauszugreifen und eingehend zu analysieren oder ein halbwegs gleichmäßiges Referat über den Hauptinhalt der einzelnen Arbeiten zu geben, wurde in Anbetracht der besonderen historischen Bedeutung Cantors im wesentlichen die zweitgenannte gewählt.

2) Während diese Untersuchungen C. schon 1870—71 den Begriff der transfiniten Ordnungszahl aufdrängten, ist ihm der Begriff der Abzählbarkeit damals noch nicht erwachsen, sondern erst 1873 mit dem Resultat von [13]; vgl. die in [V], S. 32, wiedergegebene Briefstelle.

3) Eine eingehende historische Darstellung von C.s Theorie der Irrationalzahlen im Vergleich zu den anderen zeitgenössischen Theorien (auch in philosophischer Hinsicht) gibt Jourdain im *Archiv d. Math. u. Phys.* (3) **16** (1910), S. 23—43.

vollzogen, wonach jeder reellen Zahl ein bestimmter Punkt der Zahlengeraden zugehört.

Besonders bemerkenswert ist bei der Einführung der Irrationalzahlen, daß C. den von den rationalen Zahlen ausgehenden Erweiterungsprozeß auch nach der ersten Erweiterung wiederholt; er betont, daß die so erhaltenen Bereiche zwar gewissermaßen zusammenfallen, daß es aber wesentlich ist, die begriffliche Unterscheidung aufrechtzuerhalten. Durch endlich-oftmalige Wiederholung des Prozesses erhält er auf diese Weise reelle Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda$-ter Art und knüpft daran die Bemerkung, daß die Resultate der Analysis sich auf die Form einer Gleichsetzung reeller Zahlen verschiedener Art zurückführen lassen. Dies erinnert sehr an die Russellsche Stufentheorie mit dem Reduzibilitätsaxiom.

Ausführlicher kommt C. auf die Theorie der Irrationalzahlen, die ihm zunächst durchaus nicht Selbstzweck, sondern Instrument ist, ein Jahrzehnt später in [16V] zurück; er gibt dort auch eine durchsichtige und unparteiische Vergleichung seiner Theorie mit den von Dedekind und Weierstraß aufgestellten, die auch heute noch in den meisten Punkten Anklang finden dürfte, und wendet sich gegen die Unklarheiten und Zirkelauffassungen, die bei der Einführung der reellen Zahlen zu finden sind. Auch hier betont C. die Möglichkeit und Notwendigkeit, reelle Zahlen λ-ter Art —sogar für jede Ordnungszahl λ der zweiten Zahlklasse — begrifflich zu unterscheiden. Er verwahrt sich hierbei (wie auch schon in einem Brief an Dedekind von 1878, anläßlich des Erscheinens von Dinis „Fondamenti") gegen den Einwand von Dedekind, als ob er damit jedesmal neue Zahlen einführen wollte; die Unterscheidung der verschiedenen Ordnungen solle nur die begriffliche Form des Gegebenseins wiedergeben, ohne eine Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen zu bezwecken, und zugleich erreiche man dadurch eine Sprache, die es gestatte, die komplizierten Bildungen der Analysis in einfacher Weise zu beschreiben. Wenn C. dann behauptet, es könne keine Fundamentalreihen λ-ter Art für λ aus der dritten oder einer höheren Zahlklasse geben, und dafür einen strengen Beweis verspricht, so scheint es fast, als ob er auch hier wieder die Kontinuumshypothese im Auge habe (?).

Schließlich gehört hierher noch die Note [29], in der sich C. gegen den mißverständlichen Einwand von Illigens wendet, als seien die Cantorschen (und Weierstraßschen) Irrationalzahlen deshalb für die gewöhnliche Zahlen- und Größenlehre nicht brauchbar, weil sie nicht „konkrete Größen" von der „Bedeutung einer anschaulichen Vielheit" oder Quantität darstellten.

Die 1874 erschienene Abhandlung [13], neben dem Mittelstück von [10] überhaupt die erste in die *Mengenlehre* einschlägige Veröffentlichung C.s, tut gleich den entscheidenden Schritt klarer Abgrenzungen im Transfiniten, und zwar hinsichtlich des Mächtigkeitsbegriffs: Während beim naiven Unendlich alle Unterschiede verschwimmen und auch C. selbst zuerst noch das Kontinuum als abzählbar vermutet hatte [IV], folgt hier auf den in § 1 der Arbeit abgeleiteten Satz, wonach die Menge der (reellen) algebraischen Zahlen abzählbar ist, in § 2 der — dem Abzählbarkeitsbegriff erst Wert verleihende — Beweis, daß für die Menge aller reellen Zahlen dies nicht mehr gilt; zu diesem Behufe wird zu jeder Folge reeller Zahlen eine darin nicht enthaltene Zahl mittels der Methode des Schachtelungsprinzips konstruiert. Aus der Gegenüberstellung beider Resultate folgt, wie C. in der Einleitung bemerkt, ein Existenzbeweis für unendlich viele reelle transzendente Zahlen in jedem Intervall — ein Verfahren, das übrigens, entgegen einer weitverbreiteten Auffassung, grundsätzlich konstruktiv und nicht bloß existential ist. Wie C.s Zeitgenossen hat offenbar auch er selbst zunächst den Nachdruck auf den § 1 gelegt, der für die heutige Denkweise nicht nur grundsätzlich hinter den § 2 ganz zurücktritt, sondern auch an und für sich elementar erscheint.

Der Versuch lag nahe, über die so gefundenen beiden transfiniten Mächtigkeiten zu höheren dadurch aufzusteigen, daß man vom eindimensionalen zu mehrdimensionalen Kontinuen übergeht. Dieser Gedanke beschäftigte C. schon im Sommer 1874, wie seine Korrespondenz mit Dedekind zeigt. Welch neue Einstellung es erforderte, hier überhaupt ein Problem zu sehen, verdeutliche eine briefliche Bemerkung C.s, wonach ihm in Berlin von einem Freunde die Idee einer Abbildbarkeit des linearen Kontinuums auf das ebene „gewissermaßen als absurd" erklärt wurde, „da es sich von selbst verstünde, daß zwei unabhängige Veränderliche sich nicht auf eine zurückführen lassen"; einen ähnlichen Bescheid erhielt er später bei einem Besuch in Göttingen gelegentlich des Gauß-Jubiläums 1877. In einem Brief vom 20. Juni 1877 aber teilt C. nach jahrelangen Bemühungen einen Versuch der Abbildung eines eindimensionalen Kontinuums auf ein n-dimensionales an Dedekind mit, indem er den Freund um Prüfung des Beweises bittet; das Resultat kam ihm selbst höchst überraschend („je le vois, mais je ne le crois pas") und schien ihm den Dimensionsbegriff bzw. die Charakterisierbarkeit der Dimension durch die Anzahl der unabhängigen Koordinaten zu erschüttern. Die Antwort Dedekinds weist auf eine (später von J. König durch einen einfachen Kunstgriff beseitigte) Lücke im Beweis hin, was C. veranlaßt, von den

zuerst benutzten Dezimalbruchentwicklungen zu Kettenbruchdarstellungen überzugehen; weiter hebt Dedekind hinsichtlich des von ihm verteidigten Dimensionsbegriffs die Bedeutung hervor, die dem Moment der *Stetigkeit* der Zuordnung zukomme.

Im wesentlichen der darauf brieflich an Dedekind mitgeteilte verbesserte Beweis ist es, mit dem C., zunächst von den irrationalen Koordinaten ausgehend, in [14] die Unabhängigkeit der Mächtigkeit eines Kontinuums von seiner Dimensionenzahl nachweist. Er knüpft dabei an die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz an, bei denen der Begriff einer n-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit eine besondere Rolle spielt, und streift auch die Frage, wie die Verhältnisse liegen, wenn die vielfach stillschweigend gemachte Voraussetzung der Stetigkeit[1]) der Korrespondenz hinzugefügt wird (vgl. [15], s. u.). Nach Erwähnung der Schwierigkeit, die entsteht, wenn man statt der Kettenbrüche Dezimalbrüche heranzieht, weist C. noch darauf hin, daß man das Ergebnis auf den Fall abzählbar unendlich vieler Dimensionen ausdehnen könne. Zum Schluß bemerkt er, daß ein (nicht näher angegebenes) Induktionsverfahren den Satz nahebringe, wonach die beiden Mächtigkeiten des Abzählbaren und des Kontinuums schon alle für unendliche Teilmengen des Kontinuums möglichen Mächtigkeiten erschöpfen (Kontinuumshypothese).

Im Eingang dieser Arbeit führt C. den Äquivalenzbegriff ein und erklärt darauf gestützt den Begriff der Mächtigkeit in einer konkreteren Art als später in der systematischen Darstellung [32]. Es ist bezeichnend, daß C. gleich darauf die Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten behauptet; offenbar sah er damals diese Eigenschaft noch als selbstverständlich, nämlich als eine unmittelbare Folge seines ursprünglichen Mengenbegriffs an. Ferner hebt hier C. den Gegensatz zwischen endlichen und unendlichen Mengen hinsichtlich der Mächtigkeiten der Teilmengen hervor und wiederholt einige schon früher erwähnte Eigenschaften der kleinsten Mächtigkeit, der der abzählbaren Mengen.

In engem Zusammenhang mit dieser Arbeit steht, gewissermaßen als ihr Gegenstück, der Versuch [15] eines Beweises des folgenden Satzes: Wenn zwei Gebiete G_m und G_n von den Dimensionen m und n stetig aufeinander bezogen sind, so daß jedem Punkt von G_m mindestens ein Punkt von G_n, jedem Punkte von G_n höchstens ein Punkt von G_m entspricht, so ist $n \geqq m$. Dieser Satz würde in sich den allgemeinen Satz von der Invarianz der Dimensionenzahl schließen. Er

1) Zwar nicht in [14] selbst, wohl aber in der von C. durchgesehenen französischen Übersetzung (von 1883) findet sich die Bemerkung, daß die Voraussetzung der Stetigkeit sehr oft in den Arbeiten von Riemann und Helmholtz fallen gelassen sei.

war für die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ soeben von Lüroth[1]) bewiesen worden, der seinerseits die Anregung durch die vorher besprochene Arbeit C.s erhalten hatte; auf Lüroths Note sowie auch auf die einschlägigen Versuche von Thomae und Netto weist C. in seiner Arbeit hin, deren Beendigung wiederum eine Korrespondenz mit Dedekind vorausgegangen war. Für eine Kritik des Cantorschen Beweises vergleiche man Jürgens in diesem *Jahresbericht* 7 (1899), S. 50—55. Bekanntlich ist erst durch Brouwer ein einwandfreier Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl gegeben worden (*Math. Ann.* 70 [1911], S. 161—165, und weitere Arbeiten).

Noch zu Ende der siebziger Jahre beginnt die überaus wichtige Aufsatzfolge [16] zu erscheinen, auf die in erster Linie die *Theorie der Punktmengen* zurückgeht, so namentlich die Theorie der Ableitungen, die Untersuchung der Struktur der Punktmengen, die Inhaltstheorie. Vorangegangen war nur die Einführung einiger weniger einschlägiger Begriffe in [10], wo sich deutlich zeigt, wie die Betrachtung allgemeiner Punktmengen aus den Untersuchungen über den Eindeutigkeitssatz der trigonometrischen Reihen erwachsen waren, d. h. namentlich aus dem Bestreben, jenen Satz unter Zulassung gewisser Ausnahmepunkte zu erweitern. Ein noch geplant gewesener siebenter Artikel in dieser Folge ist (jedenfalls infolge der Erkrankung C.s) nicht mehr zustande gekommen.

In [16I] unterzieht C. unter Bezugnahme auf das Resultat von [14] die linearen (auf einer Geraden gelegenen) Mengen oder „Mannichfaltigkeiten" einer genauen Analyse, indem er sie nach gewissen Prinzipien klassifiziert. Er hebt hervor, daß der Begriff der Ableitung, auf dessen Entwicklung durch Dini hingewiesen wird, sich auch auf mehrere Dimensionen ausdehnen läßt, und teilt die Mengen nach drei Gesichtspunkten ein:

a) Nach ihrem Verhalten beim fortgesetzten Ableitungsprozeß; sind P', P'', $P^{(3)}$, ... die Ableitungen der Menge P, und ist $P^{(\nu)}$ für ein endliches ν leer, so heißt die Menge P von der ersten Gattung, und zwar von der n-ten Art, wenn $P^{(n+1)}$, nicht aber $P^{(n)}$ leer ist. Ist keines der $P^{(\nu)}$ leer, so heißt P von der zweiten Gattung.

b) Nach dem Verhalten zu einem gegebenen Intervall; die im Intervall überall dichten Mengen werden von den darin nicht überall dichten unterschieden. (Vgl. auch du Bois-Reymonds unabhängige[2]) Ver-

1) *Sitzungsber. der Erlanger physikalisch-mediz. Gesellschaft* 10 (1878), S. 190—195; vgl. auch ebenda 31 (1899), S. 87—91, sowie *Math. Ann.* 63 (1907), S. 222ff.

2) Für das Verhältnis du Bois' zu C. vgl. man etwa den Anfang des III. Kapitels der „Allgemeinen Functionentheorie" von du Bois, ferner Schoenflies im Mengenbericht von 1900, S. 54, und Jourdain im *Archiv der Math. u. Physik* (3) 22 (1914), S. 9.

wendung desselben Begriffs im gleichen *Annalen*band, S. 287, sowie Bd. 16, S. 128, wonach du Bois schon einige Jahre vorher sich zu C. über derartige Verhältnisse geäußert hat.)

c) Nach der Mächtigkeit; C. stellt einstweilen die Frage zurück, ob die abzählbaren und die kontinuierlichen bereits alle unendlichen Punktmengen erschöpfen, und zeigt die Verschiedenheit dieser beiden Klassen auf etwas anderem Wege als in [13] (vgl. die formale Vereinfachung bei Poincaré, Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und math. Physik [1910], 5. Vortrag).

In [16II] beginnt C. mit der Einführung einer Reihe von Bezeichnungen, die zum Teil schon in der folgenden Arbeit modifiziert werden, u. a. für die Vereinigungsmenge paarweise fremder und für diejenige nichtfremder Mengen sowie für den Durchschnitt von Mengen; er beweist dann den (für das Rechnen mit Mächtigkeiten grundlegenden) Satz, wonach äquivalente Mengen von paarweise fremden und beziehentlich äquivalenten Mengen auch äquivalente Vereinigungsmengen liefern. Mit Hilfe des Durchschnittsbegriffs wird der Ableitungsprozeß für die Mengen zweiter Gattung fortgeführt, indem gesetzt wird

$$P^{(\infty)} = \mathfrak{D}(P', P'', \ldots, P^{(\nu)}, \ldots), \quad P^{(\infty+1)} = (P^{(\infty)})',$$
$$P^{(\infty+n)} = (P^{(\infty+n-1)})', \ldots, P^{(2\infty)} = (P^{(\infty)})^{(\infty)} \text{ usw.}$$

In dieser Form verwendet C. zum erstenmal in der Öffentlichkeit die Zahlen der zweiten Zahlklasse, auf deren Notwendigkeit mit Rücksicht auf eben diese Fortführung des Ableitungsprozesses er schon vor 10 Jahren gestoßen war. Die Mengen erster Gattung sind demgemäß durch $P^{(\infty)} = 0$ charakterisiert. C. bemerkt, daß man immer Mengen konstruieren kann, für die $P^{(\infty)}$ oder allgemeiner $P^{(\infty+n)}$, $P^{(2\infty)}$ usw. aus einem Punkte besteht; solche Mengen sind in keinem Intervall überall dicht und sind ferner abzählbar.

Zu Anfang von [16III] findet sich eine Stelle, wo von den linearen Punktmengen als von *gesetzmäßig* gegebenen Mannigfaltigkeiten gesprochen wird.[1]) Vielleicht sollte man dieser Äußerung C.s mehr Gewicht beilegen als üblich. Auch später hebt er ja besonders hervor,

1) Vgl. auch [16V], S. 587 (dort auch die in anderer Hinsicht bemerkenswerte Erklärung der Menge als „jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt"). Ebenso äußert sich C. in dem aus viel späterer Zeit stammenden Vortrag [IV] über die Ausnahmestellen der trigonometrischen Reihen, von denen seine Untersuchungen ihren Ausgang nahmen: „Diese [die Ausnahmestellen] müssen durch ein Gesetz gegeben sein, d. h. man muß entscheiden können, ob eine Stelle dazu gehört oder nicht"; das „das heißt" in dieser Äußerung ist, falls sie wörtlich wiedergegeben sein sollte, höchst aufschlußreich.

daß eine Menge, wenn der Mächtigkeitsbegriff auf sie anwendbar sein soll, *wohldefiniert* sein müsse[1]); er erklärt dies — nicht hinreichend scharf und unzweideutig — dahin, daß vermöge der Definition der Menge und des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es *intern* bestimmt sein müsse, ob ein Gegenstand unter die Menge fällt oder nicht, und ob zwei der Menge angehörige Objekte trotz des formalen Unterschieds ihres Gegebenseins übereinstimmen oder nicht. Der internen wird die aktuelle (externe) Determination gegenübergestellt, die nur selten gelinge (noch nicht z. B. für die Transzendenz von π; der Transzendenzbeweis von Lindemann steht in demselben *Annalen*-band). C. erwähnt, daß er den Ausdruck „Mächtigkeit" Steiner entlehnt hat, der ihn nur bei einer projektivischen Zuordnung, also in einem speziellen Sinn, gebraucht; demgegenüber betont C. den *allgemeinen* Charakter des Mächtigkeitsbegriffs, der daher in allen Gebieten der Mathematik, und zwar in gleicher Weise auf Unstetiges und Stetiges, Anwendung finden könne. Er überträgt in dieser Arbeit ferner die vorher für lineare Mengen entwickelten Begriffe auf die n-dimensionalen, so insbesondere die Begriffe des Grenzpunktes, der Ableitung und der Dichtigkeit. Zum Beweise des Satzes, daß im n-dimensionalen Raum eine unendliche Menge von n-dimensionalen stetigen, voneinander getrennten und höchstens an den Begrenzungen zusammenstoßenden Teilgebieten stets abzählbar ist, ordnet C. jedem Teilgebiet (nach Transformation des n-dimensionalen Raumes in die n-dimensionale Einheitskugel) einen bestimmten Rauminhalt zu.[2]) Er spezialisiert den Satz auf die Fälle $n = 1$ und $n = 2$, für welch letzteren er dem Satz Bedeutung für die komplexe Funktionentheorie zuschreibt; eine darauf folgende Bemerkung klingt wie eine Vorahnung der Tatsache, daß die zu einer festen Stelle gehörigen Funktionselemente einer analytischen Funktion eine höchstens abzählbare Menge bilden. — Zu Ende von [16III] erörtert C. eine merkwürdige

1) Vgl. auch (neben den „inkonsistenten Systemen", siehe S. 261) C.s Besprechung von Freges „Grundlagen der Arithmetik" in der *Deutschen Literaturzeitung* 6 (1885), Sp. 728—29, wo C. die Heranziehung der Begriffsumfänge als im allgemeinen unbestimmter Mengen rügt. In dieser Besprechung ist noch erwähnenswert der Nachdruck, mit dem C. (im Einklang mit Frege) die Fernhaltung räumlicher, zeitlicher und psychologischer Momente von der Begründung der Arithmetik fordert; mit seinen terminologischen Bemerkungen dagegen wird er offenbar Frege nicht gerecht.

2) Da C. auch die Begrenzung zu den Teilgebieten rechnet, ist eine solche Rauminhaltsbestimmung nicht immer möglich. Diese Beweismethode, die eine gewisse Analogie mit dem einen der Poincaréschen Beweise für die Konvergenz der Thetareihen der automorphen Funktionen aufweist (*Acta Math.* 1), ist auch im übrigen für den vorliegenden Zweck wenig geeignet.

Eigenschaft gewisser abzählbarer Mengen: wird aus dem Raum R_n ($n \geqq 2$) oder einem stetigen Teilgebiet davon eine überall dichte abzählbare Menge entfernt, so hängt der entstehende Rest R' noch stetig zusammen in dem Sinne, daß je zwei Punkte aus R' sich durch eine stetige Kurve aus R' verbinden lassen. Hieran knüpft C. gewisse Erwägungen über die mögliche Beschaffenheit der realen Welt (vgl. oben S. 226); fordert man für den Raum nur die Möglichkeit der stetigen Bewegung, so würde auch der in solchem Sinne unstetige Raum R' noch brauchbar sein. Da also aus der Möglichkeit einer stetigen Bewegung noch nicht die Stetigkeit des Raumes folgt, schlägt C. zwecks Untersuchung der Art der Stetigkeit des Raumes vor, eine modifizierte Mechanik in Erwägung zu ziehen.

In [16IV] beweist C., nach Einführung des Begriffs der isolierten (n-dimensionalen) Punktmenge und nach Angabe einiger Tatsachen über sie, mehrere Sätze über die Abzählbarkeit von Punktmengen; so namentlich die Sätze, wonach jede Menge erster Gattung wie auch jede Menge P zweiter Gattung, für welche $P^{(\infty)}$ abzählbar ist, ihrerseits abzählbar ist. Die letztere Behauptung erweitert C. dahin, daß statt $P^{(\infty)}$ auch ein $P^{(\alpha)}$ auftreten darf, wo α eine beliebige Zahl der zweiten Zahlklasse bedeutet; für den Beweis wird die transfinite Induktion herangezogen. Unter Bezugnahme auf Arbeiten von du Bois-Reymond und Harnack über Integralrechnung, insbesondere über solche Punktmengen, die sich in endlich viele Intervalle von beliebig kleiner Summe einschließen lassen (also vom Cantorschen oder Peano-Jordanschen Inhalt 0), beweist C. dann folgenden, in engerem Umfang schon von den genannten Autoren abgeleiteten Satz: Ist für eine beschränkte lineare Punktmenge P die Ableitung abzählbar, so läßt sich P in endlich viele Intervalle mit beliebig kleiner Summe einschließen.

Die nächste Fortsetzung [16V], die sicherlich die interessanteste und vielseitigste aller Arbeiten C.s darstellt, doch durch ihren Mangel an Disposition im einzelnen auch den Aufruhr in C.s Innern erkennen läßt[1]), beginnt (s. o. S. 201) mit dem Bekenntnis, daß ohne eine Erweiterung der Zahlenreihe in das Transfinite eine gedeihliche Fortführung seiner Untersuchungen nicht möglich sei; eine solche Erweiterung werde sich aber, so anstößig sie der mathematischen Welt auch zunächst erscheinen möge, zweifellos schließlich durchsetzen. Er betont

1) Besonders aus dieser Arbeit ist gar manche charakteristische Einzelheit schon in Teil I hervorgehoben worden. Wenn C. sie schon vor ihrem Erscheinen in den *Math. Ann.* als separate Schrift [21] zu publizieren sich entschloß, so erhellt daraus, wie klar er ihre Bedeutung eingeschätzt hat.

den Unterschied zwischen dem uneigentlich (potentiell) und dem eigentlich (aktual) Unendlichen; als Beispiel des letzteren nennt er — in einer wohl anfechtbaren Auffassung — den unendlich fernen Punkt der Funktionentheorie, dem die neu einzuführenden unendlichen Zahlen hinsichtlich der Bestimmtheit ihres Unendlichkeitscharakters an die Seite gestellt werden; indes treten sie in unendlicher Mannigfaltigkeit auf, voneinander wohl unterschieden und zueinander in gesetzmäßigen Beziehungen stehend. C. unterstreicht hier besonders, daß diese Beziehungen nicht etwa von solcher Art sind, daß sie sich auf Beziehungen zwischen endlichen Zahlen zurückführen ließen; dies steht in einem nur schwer hebbaren Gegensatz zu Hilberts neuerer Auffassung (vgl. bes. *Math. Ann.* 95, S. 165 ff. und 190). C. kündigt dann die beiden (in § 11 näher erörterten) Erzeugungsprinzipien an, die zur Definition der neuen Zahlen dienen, sowie das ihnen gegenüberstehende Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip. Während das erste Erzeugungsprinzip dem Fortschritt von ξ zu $\xi + 1$ entspricht, bedeutet das zweite nicht nur den Übergang von $\xi + \nu$ zu $\xi + \omega$, sondern es erzeugt allgemeiner zu jeder Menge von schon definierten Ordnungszahlen eine neue nächstgrößere Ordnungszahl. Über das Hemmungsprinzip drückt sich C. verhältnismäßig am klarsten auf S. 589 aus (es bestehe „in der Forderung, nur dann mit Hilfe eines der beiden anderen Prinzipe die Schöpfung einer neuen ganzen Zahl vorzunehmen, wenn die Gesamtheit aller voraufgegangenen Zahlen die Mächtigkeit einer ihrem ganzen Umfange nach bereits vorhandenen definierten Zahlenklasse hat").

In § 2 folgt die Unterscheidung zwischen Mächtigkeit (Kardinalzahl) und Anzahl[1]) (im Sinne von Ordnungszahl verstanden), die bei unendlichen Mengen einander nicht mehr entsprechen. Eine Anzahl wird nur den wohlgeordneten Mengen beigelegt, die zwar unabhängig definiert werden, ihre Einführung hier aber doch den primär gewonnenen Ordnungszahlen verdanken. An die Definition der Ähnlichkeit wohlgeordneter Mengen schließen sich Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen Mächtigkeit und Ordnungszahl sowie der Hinweis auf das „grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz", wonach man jede Menge in die Form einer wohlgeordneten bringen könne; er will darauf später noch zurückkommen. Hier werden zunächst (in § 3) die Rechenoperationen definiert, die grundlegenden Rechengesetze angegeben und anschließend der Beweis der Kontinuumshypothese mittels der Theorie

1) Vgl. auch die a. S. 241 erwähnte Rezension (Frege).

der Wohlordnung angekündigt. Die Betrachtungen aus der abstrakten Mengenlehre unterbricht dann C. durch den Satz, wonach für die Abzählbarkeit der Ableitung einer Punktmenge notwendig und hinreichend das Verschwinden eines $P^{(\alpha)}$ ist, wo α eine Zahl der zweiten Zahlklasse bedeutet, und durch die Ankündigung eines Beweises dieses Satzes in den *Acta Mathematica* sowie einer funktionentheoretischen Anwendung des Satzes durch Mittag-Leffler.

In der Folge geht C. zu allgemeineren, insbesondere philosophischen Darlegungen über. Er beginnt in § 4, wie er es schon vorher in [16III] (S. 121 Fußnote) getan hatte, mit einer Ablehnung des Aktual-Unendlichkleinen[1]) und bekämpft dann die finitistische Auffassung Kroneckers, der er zwar gewisse methodische Vorzüge zuerkennt, die er aber grundsätzlich sowohl für unfruchtbar hinsichtlich des Fortschrittes der Wissenschaft wie auch für irrig (und überdies für gar nicht befolgbar) hält. Er verweist auf Ansichten von Aristoteles, die in dieselbe Richtung weisen, und bekämpft sie als petitiones principii bzw. als Halbwahrheiten; freilich sei er selbst zu seinen entgegengesetzten Anschauungen auch nur unter einem förmlichen Zwang der Forschung und fast wider Willen gelangt. Weiter setzt er sich in § 5 mit Locke, Descartes sowie namentlich mit Spinoza und Leibniz auseinander; dem aristotelisch-scholastischen Satz „Infinitum actu non datur" stellt er den folgenden gegenüber: „Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt" und beschäftigt sich namentlich auch mit dem Argument der Endlichkeit des menschlichen Verstandes. Die Hauptschwierigkeiten in den Systemen von Spinoza und Leibniz hofft C. auf dem von ihm eingeschlagenen Wege auflösen zu können, insbesondere auch dadurch, daß vermöge seiner Methoden eine mathematisch strenge *organische* Naturerklärung der mechanischen zur Seite treten könne, deren Einseitigkeit und Unzulänglichkeit von Kant aufgedeckt worden sei (vgl. o. S. 225). Im übrigen reiht C. später (§ 7) den gegen das Unendliche gerichteten Stellen bei Leibniz auch entgegengesetzte Ansichten desselben Denkers an sowie namentlich die positive Auffassung Bolzanos, der nur daran gescheitert sei, daß ihm ein hinreichend allgemeiner, klarer und bestimmter Mächtigkeits- und An-

1) Vgl. auch [28I], S. 112ff., ferner [32I], S. 501, [33] und [34] sowie die oben S. 220, Fußn. 1, erwähnte Rezension. Schon 1878 hatte er in einem Brief an Dedekind derselben Auffassung scharfen Ausdruck gegeben (gegenüber der Fußnote auf S. 9 von Thomaes Abriß einer Theorie der kompl. Funktionen usw., 2. Aufl.); man findet diese Einwände (auch gegenüber Paul du Bois-Reymonds infinitären Pantachien) in [33] näher ausgeführt.

zahl- (d. h. Ordinalzahl-)begriff gefehlt habe.[1]) In der dazugehörigen Note gelangt die Stellungnahme zeitgenössischer philosophischer Autoren, namentlich Dührings, gegen das Eigentlich-Unendliche zur Erörterung.[2])

In § 6 hebt C. den wichtigen (auch bei Bolzano noch nicht genügend zur Geltung kommenden) Gedanken hervor, daß die Tatsache, wonach die neueinzuführenden unendlichen Zahlen (Ordnungszahlen) nicht alle Eigenschaften der endlichen Zahl oder sogar gewisse mit der endlichen Zahl unvereinbare Eigenschaften besitzen, keinen Grund darstellen könne, um diese Zahlen abzulehnen; denn jede Erweiterung eines Grundbereiches (er verweist auf das Beispiel der komplexen Zahlen als Erweiterung der reellen) bringe den Verlust gewisser Merkmale mit sich. C. hebt in diesem Zusammenhang die unmittelbarere Realität der unendlichen Ordnungszahlen im Vergleich zu den komplexen Zahlen hervor, die noch ausgesprochener in der ganz unter C.s Einfluß stehenden 2. Auflage von Fr. Meyers „Elementarer Arithmetik und Algebra" (Halle 1885) zum Ausdruck kommt (vgl. oben S. 211). Der folgende § 8 enthält die philosophischen Überzeugungen C.s über das Wesen der Mathematik (s. o. S. 204) und die Zurückweisung der Besorgnis, als könne der Mathematik, deren Wesen in ihrer Freiheit liege, eben diese Freiheit zu ernstlichem Schaden gereichen. In dieser Richtung ist zu bemerken, daß C. gefühlsmäßig keineswegs die Mathematik als ein Spiel mit dem alleinigen Kriterium der Widerspruchsfreiheit ansah (vgl. auch das a. a. O. über die transiente Realität Bemerkte); ist er doch zu den transfiniten Ordnungszahlen nicht etwa auf dem „freien" Weg von [16V], sondern gewissermaßen gezwungen durch die Iteration des Ableitungsprozesses (dessen allgemeine Symbolisierung bezweckend) gelangt. Auch seine übertrieben scharfe Ablehnung des Unendlichkleinen ist zweifellos aus dem Gefühl des transienten — von den „gegebenen" Mengen[3]) sich herleitenden —

---

1) Ob auch hier, wie z. B. hinsichtlich des Beispiels einer stetigen nirgends differentiierbaren Funktion, im Nachlaß Bolzanos etwa noch ungehobene Schätze ruhen und ob namentlich der Herausgeber der (erst nach dem Tod Bolzanos veröffentlichten) „Paradoxien des Unendlichen" sich wirklich wesentliche, vermeintlich bessernde Übergriffe gegenüber dem Original erlaubt hat, wird die Fortführung der von Jašek begonnenen Untersuchung und die in Prag in Vorbereitung befindliche Gesamtausgabe Bolzanos lehren.

2) Die Stellung Kants zum Transfiniten wird nicht durchweg so beurteilt, wie C. es tut; man vergleiche etwa Natorps „Logische Grundlagen der exakten Wissenschaften" (Leipzig 1910), S. 167 ff.

3) Vgl. z. B. die unten (S. 255) angeführte Stelle aus [28I].

Vorzugs zu erklären, der den transfiniten Zahlen im Vergleich zu allgemeinen nichtarchimedischen Größensystemen zukommt.

Auf die schon oben erwähnte vergleichende Betrachtung der arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen folgt in § 10 eine Erörterung des Begriffs des Kontinuums (s. o. S. 205). Nach einer Skizze der Anschauungen griechischer und scholastischer Denker über diesen Begriff erklärt C., ohne Eingehen auf die metaphysische Seite nur logisch-nüchtern die mathematische Analyse geben zu wollen. Er will weder (wie Kant) den Zeitbegriff[1]) noch die „Anschauungsform des Raumes" zur Erfassung des Kontinuums herangezogen wissen, da man vielmehr umgekehrt zur begrifflichen Erfassung von Raum- und Zeitanschauung einer mathematisch exakten Definition des Kontinuums bedürfe. Um diese Aufgabe, deren Behandlung durch Bolzano er später gleichfalls kritisiert, zu lösen, geht C., gestützt auf den arithmetischen Begriff der reellen Zahl, vom arithmetischen Raum $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus $(-\infty < x_n < +\infty)$, wobei er sich in Anbetracht dessen, daß diese Räume für alle Werte von n gleichmächtig sind, auf $n = 1$ beschränken will; der hier abermals erwähnten Kontinuumshypothese fügt C. die Bemerkung bei, daß auch die Menge aller stetigen Funktionen und ähnliche Mengen (vermeintlich auch die der integrierbaren Funktionen) die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen; auch glaubt er in Verallgemeinerung der Kontinuumshypothese ebenso für die weiteren Potenzmengenbildungen (Menge aller Funktionen) an ein Schritthalten mit der Zahlklassenbildung. Ein innerhalb G_n gelegenes Kontinuum definiert er nun als eine perfekte und zusammenhängende Menge, wobei eine Punktmenge T zusammenhängend genannt wird, wenn es zu je zwei Punkten t und t' von T bei beliebigem $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl von Punkten $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ gibt, so daß die Entfernungen $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \ldots, \overline{t_\nu t'}$ sämtlich $< \varepsilon$ sind.[2]) Bei Gelegenheit der Definition der perfekten Mengen gibt C. nebenbei eine additive Zerlegung gewisser Punktmengen an, die unzutreffend ist (vgl. u. S. 248), sowie das bekannte Beispiel einer perfekten, nirgends überall dichten Punktmenge, das (in anderer Form) schon 1875 von H. J. St. Smith[3]) veröffentlicht worden war,

1) Vgl. auch C.s Polemik gegen die verbreitete Auffassung, daß der Größenbegriff die Zeit voraussetze, in der auf S. 220 erwähnten Rezension.

2) Diese Definition, die gegenüber topologischen Abbildungen nicht invariant ist, erscheint für allgemeine Mengen nicht zweckmäßig; sie ist inzwischen zugunsten der Hausdorffschen in den Hintergrund getreten.

3) *Proc. London Math. Soc.* (1) **6**, S. 147f. In den Jahren 1881/82 wurden auch von anderer Seite verschiedentlich solche Beispiele gegeben.

aber offenbar C. nicht bekannt geworden ist. In der interessanten zugehörigen Note 12 hebt C. schließlich die Unabhängigkeit seiner Definition des Kontinuums von der Dimension hervor, führt den Begriff „Semikontinuum" ein und macht sich anheischig, durch die von ihm eingeführten Begriffe „die sämtlichen Gebilde der algebraischen sowohl wie der transzendenten Geometrie nach allen ihren Möglichkeiten zu erforschen, wobei die Allgemeinheit und Schärfe der Resultate von keiner anderen Methode übertroffen werden dürften".

Die letzten Paragraphen geben auf Grund der Erzeugungs- (und Hemmungs-)prinzipien einen Abriß der Theorie der Zahlen der zweiten Zahlklasse einschließlich des Nachweises, daß die Gesamtheit dieser Zahlen die nächsthöhere Mächtigkeit besitzt (Benutzung der ersten Zahl der dritten Zahlklasse!), sowie ein näheres Studium der Rechenoperationen mit jenen Zahlen, wobei auch die „Primzahlen" unter ihnen charakterisiert und klassifiziert werden. Von Einzelheiten ist namentlich bemerkenswert, daß C. (S. 582 u.) den Äquivalenzsatz für Mengen von der Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse beweist mit dem Hinzufügen, daß dieser Satz allgemeine Gültigkeit besitze[1]), worauf er im Zusammenhang mit dem eigentümlichen Interesse des Satzes noch zurückzukommen verspricht; bekanntlich fehlt sogar in der Gesamtdarstellung [32] noch der Beweis, der erst kurz darauf von F. Bernstein erbracht wird.

Die an mathematischem Gehalt besonders reiche Abhandlung [16 VI], die für einige Behauptungen der vorangehenden Arbeit die Beweise nachträgt, beginnt mit einer allgemeinen Fassung der Intervallschachtelungsmethode, die in bezug auf die distributive Eigenschaft im wesentlichen mit der übereinstimmt, welche bei Zermelo (*J. f. Math.* 158 [1927], S. 155) als Satz von Peano auftritt; die Formulierung von Peano ist nur etwas allgemeiner und zweckmäßiger.[2]) Interesse verdient hier der Begriff der *gesetzmäßigen* Wahl der Teilgebiete, wovon C. bei den sukzessiven Teilungen des Ausgangsgebietes spricht; je nachdem dies im Sinne einer festen Regel gedeutet wird oder nicht, könnte man C.s Stellung zum Auswahlprinzip interpretieren. Er bemerkt, daß die von ihm entwickelte Methode ihrem Kerne nach sehr alt sei und in neuerer Zeit von Lagrange, Legendre, Dirichlet und Cauchy sowie in einigen Abhandlungen von Bolzano und Weierstraß gebraucht werde, also nicht ausschließlich auf Bolzano

1) Diese Vermutung findet sich auch in einem Briefe Mittag-Lefflers an C. vom 5. April 1883 ausgesprochen.

2) Vgl. dazu F. Levi im *Journ. f. Math.* 161 (1929/30), S. 101 ff.

zurückzuführen sei; gewisse Einwände (Kroneckers) gegen diese Beweismethode vergleicht C. mit den Paralogismen des Zeno. Auf einige Bemerkungen über abzählbare Mengen folgen dann unter Heranziehung der Ordnungszahlen Beweise der Sätze:

A. Eine perfekte Menge ist nicht abzählbar. Beweis mit einander ausschließenden n-dimensionalen Kugeln.

B. Ist $P^{(\alpha)}$ leer, wo α der ersten oder zweiten Zahlklasse angehört, so sind P und P' abzählbar. Beweis mittels der Formel

$$P' = \sum_{\gamma<\alpha} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}).$$

C. Ist P' abzählbar, so gibt es ein α von der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß $P^{(\alpha)}$ leer ist. Beweis indirekt vermöge

$$P' = \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}.$$

D. $P^{(\Omega)}$ (der Durchschnitt aller $P^{(\alpha)}$) ist perfekt, wenn P' nicht abzählbar ist.

E. Ist P' nicht abzählbar, also nach D. $P^{(\Omega)}$ perfekt, so ist $R = P' - P^{(\Omega)}$ abzählbar, und es gilt die Zerlegung $P' = R + P^{(\Omega)}$, wo R abzählbar ist.

F. Es gibt ein α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß $P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)}$ ist.

G. Ist R die in E. bezeichnete Menge, so gibt es eine Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß der Durchschnitt $\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)})$ leer ist. Dieser Satz stammt von Bendixson und ist die Korrektur des vorhin erwähnten Irrtums in [16V].

Nach Einführung der Begriffe „abgeschlossen", „in sich dicht", „separiert" zeigt C., daß jede abgeschlossene Menge als die Ableitung einer Menge darstellbar ist; er weist ferner ausdrücklich auf die Verschiedenheit der Begriffe „in sich dicht" und „überall dicht" hin, wobei die Ausführungen von S. 472f. heute nur mehr bedingt Geltung haben. (Relativbegriffe!)

Von diesen Resultaten gibt die vorher erschienene Arbeit [22] einen Teil wieder, nämlich den Beweis der Theoreme A., B. und C., während [25] eine Verallgemeinerung auf *nicht* abgeschlossene Mengen (und im Schlußabschnitt die in Teil I, S. 225, erwähnten Bemerkungen über Atome usw.) enthält.

Der § 18 der Arbeit [16VI] — deren Paragraphennumerierung an die von [16V] anschließt — sowie ein kleiner Abschnitt der Arbeit [23] behandeln die Theorie des *Inhalts*, der sogleich für eine n-dimensionale Punktmenge P definiert wird. Beschreibt man um jeden Punkt der abgeschlossenen Hülle von P, also der Menge $P + P'$, eine n-dimensionale

Kugel mit dem Radius ϱ, so wird der Inhalt des dadurch bedeckten Raumes P_ϱ, der aus endlich vielen Stücken besteht, durch das Integral $F(\varrho) = \int_{P_\varrho} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ ausgedrückt und der Inhalt von P als $\lim_{\varrho \to 0} F(\varrho)$ definiert. C. beweist wesentlich nur den Satz, daß der Inhalt einer Punktmenge P mit dem Inhalt der Ableitung P' übereinstimmt, also auf Grund transfiniter Induktion auch mit dem Inhalt jeder Punktmenge $P^{(\gamma)}$, wo γ der ersten oder zweiten Zahlklasse angehört; damit ist die allgemeine Inhaltsbestimmung auf die der perfekten Mengen zurückgeführt, welche C. später ausführlich zu behandeln verspricht. Er macht auch auf die Existenz perfekter Mengen vom Inhalt Null aufmerksam, die dann nirgends dicht sind, während umgekehrt eine nirgends dichte perfekte Menge sehr wohl einen positiven Inhalt haben kann.

Bemerkenswert ist hier erstens, daß C. am Schluß des § 18 die Definition des Inhalts verallgemeinert, indem er das obige Integral durch das folgende

$$F(\varrho) = \int_{P_\varrho} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

ersetzt, wo $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine absolut integrierbare Funktion bedeutet; das entspricht durchaus der späteren Entwicklung (Übergang zu einer beliebigen Belegungsfunktion φ, allgemeiner noch bei Verwendung der Stieltjesschen Integrale). C. weist dieser Verallgemeinerung eine wesentliche Rolle in den physikalischen Anwendungen der Mengenlehre zu, worüber er Veröffentlichungen in Aussicht stellt. In der Tat kommen solche Begriffsbildungen in der statistischen Mechanik (bzw. Quantentheorie) vor.

Zweitens ist eine Bemerkung C.s in [23], S. 390, hervorzuheben, wonach er seine Theorie des Inhalts für Untersuchungen über die Dimensionen der stetigen Mannigfaltigkeiten benötigt, deren Behandlung in den *Acta Math.* er ankündigt. Eine Dimensionstheorie auf dieser Grundlage ist neuerdings von Hausdorff (*Math. Ann.* 79 [1919], S. 157ff.) entwickelt worden; vgl. auch z. B. Bouligand, *Bull. des Sciences Math.* (2) **52** (1928), S. 320—344 und S. 361—376 (potentialtheoretische Anwendungen). So scheint es, daß C. noch über ein großes Programm verfügte, das nur infolge seiner Erkrankung und deren Nachwirkungen sowie des Überspringens seines Hauptinteresses zu den *Zahlen* (an Stelle der Mengen) nicht zur Ausführung kam.

Der Cantorschen Inhaltsdefinition voran gehen Bemerkungen über Hankel und über die Literatur, die an einen Irrtum Hankels an-

knüpft; vgl. auch Rosenthals Enzyklopädieartikel, S. 962ff. Gleichzeitig mit C. ist die Arbeit von Stolz (*Math. Ann.* 23 [1884]) erschienen, wo sich eine mit C. übereinstimmende Inhaltsdefinition (für lineare Mengen) findet.

Was das Verhältnis C.s zur späteren Literatur über den Inhalt von Punktmengen betrifft[1]), so ist zwar durch die Arbeiten von Peano und Jordan, die den Cantorschen Inhalt nur zu einem äußeren Inhalt stempeln und eine Meßbarkeitsbedingung hinzufügen, in bezug auf die Additivität des Inhalts ein Fortschritt erzielt worden; dabei wird aber z. B. den allgemeinsten abgeschlossenen Mengen kein Inhalt zugeordnet, während sie bei C. einen solchen besitzen und diesen (mit demselben Wert) auch in der Theorie Lebesgues beibehalten. Daher ist die Auffassung, die Peano-Jordansche Theorie umfasse die Cantorsche, nicht ganz präzise. Der wesentliche Mangel der Theorie C.s dürfte vielmehr daran liegen, daß nach C.s Meinung die abgeschlossenen Mengen für die allgemeine Betrachtung ausreichen sollten (siehe auch die Definition des Zusammenhanges in [16V]); die Definitionen sind daher auf den Fall der abgeschlossenen Mengen zugeschnitten (vgl. den Übergang zur abgeschlossenen Hülle). Ohne dieses „Vorurteil" wäre C. wohl mindestens zum äußeren Lebesgueschen Maße gelangt. Jedenfalls stimmen seine Definitionen im Falle der abgeschlossenen Mengen mit den heutigen überein. — Auch seine Ansätze zum Kontinuumproblem sind wesentlich durch jene Überschätzung der abgeschlossenen Mengen bedingt; als Bernsteins Dissertation die Bedeutung dieser Mengen entscheidend reduzierte, war C. sehr überrascht und brach gewisse Mächtigkeitsuntersuchungen, die ihn damals beschäftigten, alsbald ab.

Der § 19 von [16VI] sowie der Anfang von [23] sind der Bestimmung der Mächtigkeit der perfekten Mengen gewidmet.[2]) Zu diesem Zweck konstruiert C., ohne den Äquivalenzsatz heranzuziehen, direkt die Abbildung der perfekten Menge auf das Kontinuum[3]); das dabei verwendete Konstruktionsverfahren bei den linearen nirgends dichten Mengen hat eine besondere Bedeutung für die Theorie der reellen Funktionen einer Veränderlichen (vgl. z. B. Denjoy, *Journal de Math.* (7) 1 [1915]). Eine wichtige Anwendung macht C. selbst in [23], indem er eine stetige monotone Funktion konstruiert, deren Ableitung

1) Bemerkungen von Pleßner.

2) Unabhängig von C. hatte auch Bendixson dieses Problem gelöst; vgl. die Note zu Beginn von [23].

3) Eine hierbei in [16VI] verbliebene Lücke füllt C., auf anderem Weg als in [23], auch in einem Briefe an Mittag-Leffler aus; siehe [III], S. 22f.

außerhalb der perfekten nirgends dichten Menge P überall verschwindet. Besonders interessant ist der Fall, daß P den Cantorschen Inhalt o oder — was dasselbe bedeutet — das Lebesguesche Maß o besitzt; man erhält dann die heute „singulär" genannten Funktionen, die fast überall die Derivierte Null haben. Die Existenz solcher Funktionen steht, wie Scheeffer bemerkt hat, im Widerspruch mit einem (irrigen) Satze von Harnack. Hier liegt auch der Ursprung der im nächsten Band der *Acta* folgenden bedeutenden Publikationen von Scheeffer über den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Derivierten.

Am Schlusse von [16VI] kommt C. abermals auf das Kontinuumproblem zurück mit der Behauptung, daß aus dem Satz über die Mächtigkeit der perfekten Mengen im Verein mit den früheren Sätzen die Mächtigkeit des Kontinuums als die zweite transfinite zu bestimmen sei; wie wir aus dem Brief an Mittag-Leffler vom 26. August 1884 wissen (vgl. [III], S. 16), dachte sich C. als Ausgangspunkt des Beweises eine abgeschlossene Menge von der Mächtigkeit $\aleph_1$ — deren Konstruktion ihm begreiflicherweise nicht gelang.

Eine Anwendung elementarster mengentheoretischer Erkenntnisse auf ein Problem der Analysis gibt C. auf Anregung von Weierstraß in der Abhandlung [20], die sich zeitlich in die Aufsatzfolge [16] einschiebt. Er beschäftigt sich hier mit dem zuerst von Hankel behandelten Problem, aus einer Funktion $\varphi(x)$, die an einer gewissen Stelle irgendeine Singularität aufweist, Funktionen herzustellen, die Singularitäten derselben Art in einer unendlichen, insbesondere auch überall dichten Menge besitzen. C. weist darauf hin, wie er es auch schon vorher in einer Rezension der Hankelschen Arbeit getan hatte[1]), daß Hankels Methode der Bildung der Reihen $f(x) = \sum_n a_n \varphi(\sin n\pi x)$ drei Mängel besitze: erstens weisen an einer rationalen Stelle x unendlich viele Glieder der Reihe die fragliche Singularität auf, so daß die Möglichkeit einer Kompensation vorhanden ist (übrigens auch wirklich vorkommt); zweitens wird durch Einführung des Sinus der Verlauf der Funktion in einer Weise beeinflußt und kompliziert, die mit der Problemstellung nichts zu tun hat; drittens ist die Methode beschränkt auf Punkte, die zueinander in rationalem Verhältnis stehen. Demgegenüber benutzt C. auf Anregung von Weierstraß die Reihen $\sum_n a_n \varphi(x - \xi_n)$, wo $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ eine beliebige abzählbare, namentlich

1) Ohne Angabe des Rezensenten erschienen im *Literar. Zentralblatt für Deutschland*, Jahrgang 1871, Sp. 150f. Vgl. (zu Hankels Abhandlung und namentlich) zu C.s kritischen Bemerkungen Jourdain im *Archiv d. Math. u. Phys.* (3) 10 (1906), S. 279f.

auch dichte Menge sein kann, und hat damit ein Verfahren, das die genannten Nachteile nicht aufweist. Er gibt dazu zwei ihm von Weierstraß mitgeteilte Beispiele. Eine allgemeine Untersuchung über die Methode findet sich in der deutschen Ausgabe (1892) von Dinis „Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe".

Auf C.s Krisenjahr 1884 folgen zunächst (außer [25]) die Arbeiten [26]—[28], die sich vornehmlich an einen philosophischen Leserkreis wenden. In der ersteren gibt C. einen Auszug aus einem eingehenden Schreiben an Eneström vom 4. November 1885.[1]) Er erwidert darin auf einen von E. ihm gemachten Hinweis auf eine Schrift des Abbé Moigno, die das aktuale Unendliche aus Gründen der Glaubenslehre bekämpft, äußert sich über ähnliche Tendenzen anderer Autoren (besonders Cauchys), die er, sich dabei auch auf Pascal berufend, als zirkelhaft zurückweist, und unterscheidet als Formen des aktualen Unendlichen —neben dem Absolut-Göttlichen — das „in concreto seu in natura naturata" vorkommende Transfinitum von den in der menschlichen Erkenntnis auffaßbaren transfiniten Zahlen und Ordnungstypen. Je nachdem jede dieser beiden Formen anerkannt oder abgelehnt wird, ergeben sich vier Möglichkeiten der Stellung zum Transfiniten (bei Hinzunahme des Absoluten sogar acht), die C. sämtlich vertreten findet und unter denen er selbst den zweifach bzw. dreifach bejahenden Standpunkt einnimmt (vgl. [28I], S. 82). Die Stellungnahme zur ersten Form (in concreto) ist für C. wichtig wegen seiner Anschauungen über die Konstitution der Materie (vgl. oben S. 225). Er wendet sich weiter gegen die häufig vorgekommenen Verwechselungen des aktualen Unendlichen nicht bloß mit dem potentiellen Unendlichen, sondern auch mit dem Absoluten (und darum Unvermehrbaren) und richtet in dieser Beziehung heftige Vorwürfe gegen die Antinomienlehre Kants. Den Schluß des Aufsatzes bilden Erwiderungen auf Einwände, die von der Herbartschen Schule und von W. Wundt gegen seine Theorie des Transfiniten erhoben worden waren (vgl. auch [28I], S. 98f.).

Die umfangreiche Abhandlung [28], die ursprünglich noch wesentlich weiter fortgesetzt werden sollte[2]), läßt sich in drei recht verschiedene Abschnitte gliedern. Der erste (Bd. 91, S. 81—90 und 252f.)

1) Vgl. auch die kurze (schwedische) Erwiderung Enestroms in *Öfversigt af Kongl. Vet.-Ak. Förhandl.* **42** (Stockholm 1885/86), No. 10, S. 69f.

2) Vgl. die Fußnote Bd. 91, S. 117, ferner Bd. 92, S. 240, sowie den Untertitel „Erste Abteilung" der Separatausgabe von [26] und [28].

gibt eine mit polemischen Bemerkungen verbundene Einleitung zum Inhalt der folgenden Abschnitte. C. führt hier (in Verfolg einer von ihm seit etwa vier Jahren vertretenen und in seinen Vorlesungen vielfach ausgebildeten Auffassung) die Ordnungstypen (-zahlen) bzw. die Mächtigkeiten als Ergebnisse einfacher bzw. doppelter Abstraktionsakte an Mengen ein, wobei er auf den *Organismus*charakter der Vereinigung von lauter Einsen zu einem Typus besonderes Gewicht legt (im Gegensatz zur Trennung der Elemente in einer Menge wie auch andererseits zu der zeichenhaften Art der „Ordinalzahlwörter"); auch schon bei Euklid sei die Zahl „ihrem wahren Ursprung gemäß" auf die Menge bezogen und nicht etwa als bloßes Zeichen der Zählung eingeführt, bei Nicomachus u. a. sogar schon das Moment des Organisch-Einheitlichen angedeutet, wie auch besonders an einer Stelle bei Leibniz. Er kritisiert demgemäß die Einführung des Zahlbegriffs durch Helmholtz und Kronecker[1]), nach denen die Zahlen Zeichen für die beim Zählprozeß gezählten Dinge (in C.s Terminologie Ordinalzahlwörter oder notae ordinales) darstellen; diesen Autoren stellt er die antiken Skeptiker sowie den Aufklärungsphilosophen Louis Bertrand zur Seite.[2]) Den Schluß dieser Erörterung, in der er sich wiederum gegen die Heranziehung des Zeitbegriffs zur Begründung der Zahl (Kant, Hamilton) wendet, bildet eine Polemik gegen den sogar den Irrationalzahlen gegenüber geübten Finitismus Kroneckers, von dessen Aufsatz er auch den Beweis der Invarianz der Ordnungszahl einer endlichen Menge als zirkelhaft angreift.

Ein zweiter Teil des Aufsatzes (Bd. 91, S. 91—117 und 253—265) gibt sieben Briefe[3]) C.s an verschiedene Gelehrte wieder, in der Hauptsache unverändert, aber mit einleitenden Bemerkungen und angefügten Zusätzen. Der erste, an Kurd Laßwitz gerichtete Brief, dessen Inhalt C. im wesentlichen schon 1883 in der mathematischen Sektion der Naturforscherversammlung in Freiburg vorgetragen hatte, rekapituliert zunächst die mengentheoretischen Grundbegriffe, woraus der gegen [16] veränderte Gebrauch hinsichtlich Multiplikand und Multiplikator in Produkten von Ordnungszahlen erwähnt sei; unter verschiedenen polemischen Bemerkungen betont er weiterhin den bestimmten, vollendeten, also nicht veränderlichen oder potentiellen

1) Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem 50jährigen Doktorjubiläum gewidmet. Leipzig 1887.

2) Im selben Jahr, da C. so gegen eine psychologistische Auffassung des Zahlbegriffs kämpft, habilitiert sich in Halle Husserl mit einer Schrift: „Über den Begriff der Zahl"!

3) Aus wiederholten Irrtümern der Numerierung in der Einleitung scheint hervorzugehen, daß ursprünglich unter den ersten Briefen ein weiterer eingeschoben war.

Charakter der transfiniten Zahlen, die in gewissem Sinne neue Irrationalitäten seien und mit den gewöhnlichen Irrationalzahlen stünden oder fielen. Der zweite Brief, an Gutberlet (s. o. S. 227f.) gerichtet, greift dessen Beweisführung an, wonach das aktuale Unendliche zwar als Mögliches, nicht aber als „existens seu in concreto" zu bejahen sei; wie entschieden sich C. für letzteres, sogar in Form der Annahme unendlich vieler geschaffener Einzelwesen (hierin mit Leibniz einig!), einsetzt und selbst theologische Beweise dafür heranzieht, zeigen die folgenden Briefe, von denen sich der dritte und vierte „an einen großen Theologen" (den Kardinal Franzelin) wenden und eine ausführliche freundliche Antwort von dessen Seite finden. In einem weiteren Brief an den Mediziner Prof. Eulenburg-Berlin ist (außer dem zugehörigen Exkurs über Augustins und Origines' Auffassungen und weiteren Angaben [neu]scholastischer Literatur) nur bemerkenswert die Herausarbeitung des Unterschieds, der zwischen den Limeszeichen etwa in $\lim \frac{n-1}{n} = 1$ und $\lim n = \omega$ besteht; der Brief schließt mit einem Hinweis auf dieTransfiniten Fontenelles und die mit Recht daran geübte Kritik (vgl. auch [33], S. 108). Der sechste, an Goldscheider und Weierstraß gerichtete Brief will die kurze Bemerkung in [16V] über das Unendlichkleine zu einem Beweise für die Unmöglichkeit aktual-unendlichkleiner „linearer Zahlgrößen" ausgestalten, und zwar unter Verwendung der transfiniten Ordnungszahlen als Beweishilfsmittel; doch ist der (nicht ausgeführte) Beweis schwerlich schlüssig. Aus dem letzten Brief (an Vivanti) ist von Interesse C.s Hinweis, es müsse neben der transfiniten Mengenlehre, die namentlich die Gebiete der Variabilität veränderlicher Größen zu untersuchen habe, ebensowohl eine transfinite Zahlenlehre ausgebildet werden, wie in [16V] begonnen.

Bei dieser Gelegenheit sei eine andere briefliche Äußerung C.s an Vivanti aus der nämlichen Zeit erwähnt, worin er V. auf die Tatsache hinweist (und zu deren Beweis anregt), daß eine mehrdeutige analytische Funktion an einer gegebenen Stelle höchstens *abzählbar unendlich* vieler verschiedener Werte fähig ist; Beweise dafür haben gleichzeitig (1888) Poincaré, Vivanti, Volterra gegeben (*Palermo Rendiconti* **2**, S. 197ff. und 150f.; *Atti Lincei* (4) 4 II, S. 355ff.).

Der dritte Abschnitt (Bd. 91, S. 117—125 und 265—270; Bd. 92, S. 240—265) will die Grundlagen einer Theorie der Ordnungstypen liefern, um darauf dann — wie freilich hier nicht mehr durchgeführt — die Theorie der Ordnungszahlen und deren Anwendung auf die Kardinalzahlenlehre zu gründen; dieser Teil ist bereits um 1884 verfaßt und

sollte, wie C. bemerkt, damals „in ein andres Journal" (nämlich die *Acta Math.*) aufgenommen werden (vgl. oben S. 213, Fußnote 1). In Bd. 91 wird einleitend ein kurzer Überblick über die Theorie der Mächtigkeiten gegeben (vgl. auch [32 I]); C. führt hier die Mächtigkeit nicht mehr wie in [16] auf die Äquivalenz zurück („Definition durch Abstraktion" in der Terminologie Weyls), sondern leitet sie schlechthin aus der Menge ab, als den Allgemeinbegriff (universale, unum versus alia im Sinne der thomistischen Philosophie), der aus ihr durch die zweifache Abstraktion von der Beschaffenheit der Elemente und von der Ordnung ihres Gegebenseins hervorgeht. Diese Entwicklung mag der Mathematiker eher als einen Rückschritt zu werten geneigt sein. Daß äquivalenten Mengen die nämliche Mächtigkeit zukommt, wird bei der nunmehrigen Auffassung zu einem beweisbaren Satz. Die Vergleichbarkeit behauptet C. wiederum ohne Beweis. Mit einer Bekämpfung des zur Regel gewordenen Brauches, den Satz totum parte maius von den „Entitäten" (Mengen) auf deren Zahlen zu übertragen, und einer kurzen Theorie der endlichen Mengen und ihrer Kardinalzahlen schließt diese Einleitung; dabei wird die endliche Menge induktiv bzw. rekursiv definiert, die einzelnen Kardinalzahlen aber aus den Mengen, also unabhängig voneinander, gewonnen, während mittels vollständiger Induktion bewiesen wird, daß eine endliche Menge keinem Teil äquivalent sein kann. Als charakteristisch für den konkreten Mengenbegriff, der C. auch noch in dieser letzten Schaffensperiode vorschwebt, sei die folgende Stelle (S. 123) angeführt: „Steht uns nicht erstere [die Menge] als Objekt *gegenüber*, wogegen letztere [die zugehörige Kardinalzahl] ein abstraktes Bild davon in *unserm* Geiste ist?"

In [28 II] führt C. den Begriff der n-fach geordneten Menge (n endlich) ein und gründet darauf mittels Abstraktion von der Natur der Elemente den Begriff des n-fachen Ordnungstypus (Idealzahl, *ἀριθμὸς νοητός* oder *εἰδητικός*), so daß nach Definition der Ähnlichkeit n-fach geordneter Mengen wiederum die Gleichheit der Typen ähnlicher Mengen zum Lehrsatz wird; neben den „reinen" werden hier auch „gemischte" Ordnungstypen betrachtet, in denen an Stelle von Einsen andere Kardinalzahlen auftreten können. Es folgen die Definitionen der Addition und Multiplikation zweier n-facher Ordnungstypen und die Betrachtung der Typen, die aus einem einfachen Typus durch Vertauschung der Rangbeziehungen zweier bestimmter „Richtungen" oder durch Inversion für eine bestimmte Richtung hervorgehen. Den Hauptteil dieser Betrachtungen bildet eine — zum Schluß kurz auf die n-fachen Typen übertragene — eingehende Durchmuste-

rung der zweifachen Ordnungstypen von endlicher Kardinalzahl m, zu deren Kennzeichnung rechteckige Matrizen von nicht-negativen ganzen Zahlen als „Charakteristiken" der Typen eingeführt werden; im Anschluß an eine Veranschaulichung durch Tafeln für $m = 1, 2, 3$, welche auch die Addition und Multiplikation derartiger Typen deutlich machen, gelingt die recht komplizierte Bestimmung der Anzahlen $\Phi(m)$ bzw. $\Psi(m)$ der reinen bzw. reinen und gemischten zweifachen Typen, die mit m rasch anwachsen (für $m = 6$ schon 24976 bzw. 37277 betragen). An diese Untersuchungen knüpfen einige Arbeiten der nächstfolgenden Zeit an; namentlich die durch eine Vorlesung C.s aus dem Jahre 1887 angeregte Hallenser Inauguraldissertation des nachmaligen Philosophen Hermann Schwarz „Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen" (1888), die die bezüglichen Überlegungen C.s vereinfacht und verallgemeinernd fortführt sowie einschlägige Betrachtungen Wieners wiedergibt, ferner eine einheitliche Darstellung der Theorie der endlichen Ordnungstypen durch Vivanti (*Annali di Math.* (2) 17 [1889], S. 1—35).

Den Schluß der Abhandlungen C.s zur Mengenlehre machen wieder zwei rein mathematische Arbeiten.

In dem Vortrag [30] zeigt C. in wesentlicher Vereinfachung des in [13] enthaltenen Beweises die Nichtabzählbarkeit der Menge aller (formal verschiedenen) Dualbrüche mittels des Diagonalverfahrens und hebt hervor, daß sich mittels Verallgemeinerung dieses Verfahrens zu jeder Menge eine andere mit größerer Mächtigkeit bilden läßt. So tritt dem schon in [16V] mittels der Zahlklassen geführten Beweise dafür, daß es unendlich viele Mächtigkeiten gibt, hier eine weit einfachere Ableitung zur Seite, die überdies den Umweg über die Ordnungszahlen vermeidet. In dem als Beispiel für den allgemeinen Satz herangezogenen Nachweis, daß die Menge aller eindeutigen Funktionen einer reellen Variabeln eine größere Mächtigkeit hat als das Kontinuum, benutzt C. die Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten, obgleich sie (direkt oder auf Grund des — damals allerdings noch nicht bewiesenen — Äquivalenzsatzes) leicht vermeidbar ist; anscheinend sind ihm damals die mit der Vergleichbarkeit verbundenen Schwierigkeiten immer noch nicht so bewußt wie bei seiner nächsten Publikation.

Die große Doppelabhandlung [32] schließlich ist die letzte eigene Arbeit, die C. veröffentlicht hat. Sie stellt offenbar die für ein mathematisches Publikum bestimmte, von kritischem und philosophischem Beiwerk entlastete Ausführung von [28] dar; dabei kommt die dort noch fehlende Theorie der wohlgeordneten Mengen und der

Ordnungszahlen zu einer sogar sehr ausführlichen Darstellung, während begreiflicherweise die geplante Anwendung auf die Lehre von den Kardinalzahlen unterbleiben muß, wie ja auch seither trotz Hinzunahme von Wohlordnungs- und Vergleichbarkeitssatz die Verknüpfung beider Theorien nur teilweise gelungen ist. Von den „klassischen" Sätzen der abstrakten Mengenlehre fehlt in [32] nur mehr der Äquivalenzsatz, der zu eben jener Zeit die ersten Beweise findet (vgl. S. 262).

Vergleicht man [32], die eine der zwei ganz großen und unsterblichen Arbeiten C.s, mit der anderen [16], so sieht man einmal den Schwerpunkt sich merklich von der Betrachtung der Mengen auf die der Zahlen verlagern, ferner einen Fortschritt in Richtung der Abklärung und Systematisierung, der diese Abhandlung auch heute noch didaktisch sehr brauchbar macht. Bei dieser Entwicklung ist ein — ungewollter und wohl auch beiderseits unbewußter — Einfluß Dedekindscher Denkungsart fühlbar, vielleicht auch ein solcher von Seiten Husserls, der seit 1887 in Halle lehrte. Doch bleibt auch bei dieser späten Arbeit ein merklicher Abstand von den Auffassungen Dedekinds und Freges (sowie der Schule Russells) unverkennbar, sowohl was den Mengenbegriff anlangt, der als Komprehension — nicht etwa als Extension einer Aussagefunktion — erscheint[1]), wie auch in der Art des sukzessiven Aufsteigens von den endlichen Mengen aus und in der (sachlich nicht notwendigen) weitgehenden Beschränkung auf die zweite Zahlklasse.

[32 I] beginnt mit der bekannten, von der früheren merklich unterschiedenen Mengendefinition („Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten . . . zu einem Ganzen"; vgl. auch schon [28 I], S. 93 und 117), um dann die Mächtigkeit im Sinne von [28] einzuführen; auf die zweckmäßig modifizierte Definition der Größenordnung von Mächtigkeiten folgt nunmehr die ausdrückliche Bemerkung, daß die Vergleichbarkeit sich weder von selbst verstehe noch an dieser Stelle des Aufbaus beweisbar sein dürfte; er kündigt den Beweis für später an, „wenn wir einen Überblick über die aufsteigende Folge der transfiniten Kardinalzahlen und eine Einsicht in ihren Zusammenhang gewonnen haben werden", und stellt den Äquivalenzsatz als Folgerung aus dem Vergleichbarkeitssatz in Aussicht. Die Summe zweier Mächtigkeiten erscheint in der alten Form, das Produkt nunmehr auch auf Grund der Verbindungsmenge, die Potenz auf Grund der Belegungsmenge; mit dieser letzteren führt C. wohl zum erstenmal den Funktionsbegriff in so allgemeiner Form (Allgemeinheit der un-

1) Vgl. auch die auf S. 241, Fußnote 1, erwähnte Rezension.

abhängigen Variabeln) in die Mathematik ein, wie dies später, nach gelegentlicher Verwendung von anderer Seite, vor allem durch E. H. Moores „general analysis" geschehen und in der Analysis angewandt worden ist. Nach Anführung der formalen Rechengesetze, auf die näher erst Whitehead 1902 (*Amer. Journ. of Math.* 24) zurückgekommen ist, kann C. mit berechtigter Genugtuung darauf hinweisen, daß nunmehr mittels $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ und einer ganz kurzen „rein algebraischen" Rechnung der Inhalt von [14] ableitbar wird. An eine im Sinn von [28] gehaltene Behandlung der endlichen Kardinalzahlen, die auch die Existenz einer kleinsten Zahl in jeder Menge von endlichen Kardinalzahlen dartut, und an die Erklärung der transfiniten Mengen und Kardinalzahlen als nicht-endlicher schließt sich eine Theorie der abzählbaren Mengen an, wobei sich dann endliche bzw. transfinite Mengen auch als nicht-äquivalent bzw. äquivalent mit Teilen charakterisieren lassen; beim Beweis des Satzes, daß jede transfinite Menge eine abzählbar-unendliche Teilmenge enthält, benutzt C. naturgemäß (stillschweigend) das Auswahlprinzip. Auffallenderweise sieht er davon ab, seinen Beweis [30] heranzuziehen oder auch nur zu erwähnen; er verweist vielmehr hinsichtlich der Folge der Kardinalzahlen einstweilen nur auf die (freilich weitergehenden) Resultate von [16V]. Auch bei der Potenzlehre unterbleibt sowohl die naheliegende Anknüpfung an [30], die C. später in einem Brief an Dedekind nachholt, wie auch die Anwendung auf endliche Mengen; nur so konnte es C. entgehen, wie zweckmäßig, ja naturnotwendig die Einführung der (in der Algebra der Logik schon früher verwendeten) Nullmenge ist, die erst Zermelo in der Mengenlehre zur Geltung gebracht hat.

Die darauf folgende Betrachtung der Ordnungstypen beschränkt sich diesmal auf einfache Ordnung. Den schon in [28] eingeführten Grundbegriffen fügt C. noch den Begriff der zu einer Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ gehörigen Typenklasse $T(\mathfrak{m})$ hinzu, deren Mächtigkeit er als $\mathfrak{m}$ übersteigend nachzuweisen verspricht.[1]) Im Zusammenhang mit der Gleichheitsbedingung für Ordnungstypen wendet er sich hier sowie auch in [34] entschieden, doch wohl nicht ganz zutreffend, gegen Veroneses „Grundzüge der Geometrie", deren Irrtümer er namentlich auf einen Zirkel in der Definition der Gleichheit von Zahlen zurückführt. Neu gegenüber [28] (und größtenteils auch gegenüber [16]) sind die §§ 9—11, deren erster den Ordnungstypus η als durch die Eigenschaften (abzählbar-unendlich, unbegrenzt, dicht) vollständig festgelegt nachweist.

1) In Wirklichkeit ist C. bis zu dem Resultat $\overline{\overline{T(\aleph_0)}} \geq \mathfrak{c}$ gelangt, das dann Bernstein zur Gleichheit verschärfte (für beides siehe F. Bernsteins Göttinger Dissertation 1901, wieder abgedruckt Math. Ann. 61). Bekanntlich gilt allgemein $\overline{\overline{T(\aleph_\nu)}} = 2^{\aleph_\nu}$.

Als Vorbereitung für die nächste Aufgabe führt er dann die in einer geordneten transfiniten Menge enthaltenen Fundamentalreihen „erster Ordnung" ein (d. h. von den Typen ω oder $^*\omega$; solche höherer Ordnung stellt er für spätere Untersuchungen in Aussicht) und definiert mit ihrer Hilfe die Begriffe „in sich dicht", „abgeschlossen" und „perfekt"; darauf gestützt kann er zu Ende von [32 I] höchst einfach das Linearkontinuum seinem Ordnungstypus nach vollständig charakterisieren als eine perfekte Menge, in der eine abzählbare Teilmenge dicht gelegen ist.

Von der Fortsetzung [32 II], die den wohlgeordneten Mengen gewidmet ist und vieles schon in [16 V] Enthaltene in neuem, systematisiertem Gewande wiedergibt, beschäftigt sich nur der Anfang (§§ 12—14) mit der allgemeinen Theorie. Die wohlgeordnete Menge definiert C. auch hier wie in [16 V] als eine Menge mit Anfangselement, in der zu jeder nicht konfinalen Teilmenge ein nächstfolgendes Element vorkommt; daß dies gleichwertig ist mit dem Vorkommen eines ersten Elementes in jeder Teilmenge, erscheint dann (neben anderen elementaren Theoremen) als Lehrsatz. Die Einführung und Anordnung der Abschnitte einer wohlgeordneten Menge leitet zu einer Kette von Sätzen über die Ähnlichkeit zwischen wohlgeordneten Mengen bzw. ihren Abschnitten über, wobei die Unmöglichkeit einer ähnlichen Abbildung zwischen einer Menge und einem ihrer Abschnitte auf die für diese Theorie charakteristische indirekte Weise nachgewiesen wird; von Zermelo ist später diese Eigenschaft auf eine allgemeinere zurückgeführt worden.[1]) Aus dieser Satzfolge sei hervorgehoben das — durch Herstellung der Abbildung direkt bewiesene — Theorem, wonach zwei wohlgeordnete Mengen ähnlich sind, sobald zu jedem Abschnitt der einen ein ähnlicher der anderen existiert und umgekehrt. So ergibt sich auf dem Wege der Disjunktion in übersichtlicher Weise die (seither auch auf verschiedene andere Arten bewiesene) Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen und die der Ordnungszahlen, welche hier als Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen eingeführt werden. Nach Angabe einiger Gleichungen und Ungleichungen für das Rechnen mit (je zwei) Ordnungszahlen lehrt C. nunmehr auch die Addition unendlichvieler Ordnungszahlen und die Bildung von $\lim \alpha_\nu$ für eine Fundamentalreihe (α_ν) von Ordnungszahlen; er schließt diesen Teil mit einem vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der Wohlordnung geführten Beweise dafür, daß zu jeder endlichen Kardinalzahl eine einzige Ordnungszahl gehört.

1) Vgl. die Vorrede zu Hessenbergs Grundbegriffen der Mengenlehre (1906).

Von § 15 an ist die Arbeit der zweiten Zahlklasse gewidmet, als deren Anfangszahl ω erwiesen wird; auf Grund der beiden (über die zweite Zahlklasse nicht hinausführenden) Operationen des Übergangs von α zu $\alpha + 1$ bzw. von einer aufsteigenden Fundamentalreihe zu ihrem Limes ergibt sich die Unterscheidung zweier Erzeugungsprinzipien, je nachdem die zu erzeugende Zahl einen unmittelbaren Vorgänger besitzt oder nicht. Nach einem Beweis dafür, daß die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse gleich dem zweiten Alef $\aleph_1$ ist, geht C. des näheren auf die Darstellung der Zahlen der zweiten Zahlklasse ein: zunächst für den Spezialfall der Zahlen endlichen „Grades", dann allgemein wird die eindeutige Darstellbarkeit in der Normalform

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \varkappa_0 + \omega^{\alpha_1} \varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau} \varkappa_\tau$$

nachgewiesen, wobei $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\tau$ abnehmende Zahlen der zweiten oder ersten (die endlichen Zahlen umfassenden) Zahlklasse, dagegen $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_\tau$ von Null verschiedene endliche Zahlen bedeuten und auch τ endlich ist. C. lehrt den Übergang von der Normalform der Summanden bzw. Faktoren zur Normalform der Summe bzw. des Produkts und gibt neben anderen Anwendungen eine eindeutige multiplikative Zerlegung; zu den Bedingungen für $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ und $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ist E. Jacobsthals Aufsatz in *Math. Ann.* 64 zu vergleichen, zum ganzen Gegenstand Jacobsthal ebenda 66 und 67. Ermöglicht wird die allgemeine Normalform durch die Einführung der Potenz innerhalb der zweiten Zahlklasse; während Addition und Multiplikation der Ordnungszahlen auf die entsprechenden Verknüpfungen zwischen Mengen gegründet sind, definiert C. die Potenz mittels vollständiger Induktion (wie diese dann von Jacobsthal zur einheitlichen Einführung sämtlicher Rechnungsoperationen herangezogen wird). Den Abschluß bildet die Einführung und nähere Betrachtung der Epsilonzahlen ξ der zweiten Zahlklasse ($\omega^\xi = \xi$), deren geordnete Gesamtheit als ähnlich zur Zahlklasse selbst erwiesen wird; die Verallgemeinerung der ε-Zahlen auf andere definierende Funktionen als $f(\xi) = \omega^\xi$ („Hauptzahlen", „kritische Zahlen") stammt von Hessenberg, Jacobsthal und Hausdorff.

Sind hiermit die Publikationen C.s zu Ende[1]), so doch nicht seine Beschäftigung mit der Mengenlehre. Zwar schenkte er den Anwendungen in der reellen Funktionentheorie wenig Aufmerksamkeit, da er vielmehr ein wesentliches Eingreifen der Mengenlehre in der klassischen Analysis und in der Zahlentheorie erwartete. Dagegen stand auch fernerhin im Vordergrund seiner Aufmerksamkeit das *Kontinuum-*

1) Über [33] und [34] siehe oben S. 244 Fußnote.

problem. Über seine Bemühungen um dieses liegt neben der aufregenden Episode vom Jahre 1904 (s. o. S. 216) noch unveröffentlichtes Material aus dem Sommer 1899 im Briefwechsel mit Dedekind vor. Diese letzten uns erhaltenen Stücke aus diesem Briefwechsel, die von den vorangehenden durch einen fast zwanzigjährigen Abstand getrennt sind, beginnen mit der Behauptung C.s, er besitze seit 1897 den Beweis, daß alle Mächtigkeiten Alefs seien. Damit hat es folgende Bewandtnis:

Spätestens 1895, also zwei Jahre vor Burali-Fortis Veröffentlichungen, war C. selbst auf die sogenannte Burali-Fortische Antinomie von der Menge aller Ordnungszahlen gestoßen (siehe Bernstein in *Math. Ann.* 60 [1905], S. 187) und hatte sie u. a. 1896 an Hilbert mitgeteilt. Er spricht nunmehr (1899) zu Dedekind auch von anderen widerspruchsvollen Systemen, z. B. der Gesamtheit aller Mächtigkeiten oder alles Denkbaren, und nennt sie „inkonsistente" (auch „absolut unendliche") Systeme[1]; der Gegenfall, in dem das System als Menge betrachtet werden darf, liege vor, „wenn die Gesamtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als ‚zusammenseiend' gedacht werden kann".[2]) Die (hier von C. entwickelte) Antinomie der Menge aller Ordnungszahlen z. B. zeige gerade, daß es „bestimmte Vielheiten gibt, die nicht zugleich Einheiten sind". Auf diese freilich alles eher als scharfen Begriffe gestützt, entwickelt er weiterhin, daß äquivalente Vielheiten gleichzeitig entweder Mengen oder inkonsistent sind, und daß eine Teilvielheit einer Menge wiederum eine Menge ist. Von hier aus schließt er in folgender Art: Ist W das System aller Ordnungszahlen, V eine Vielheit, die kein Alef als Mächtigkeit besitzt, so erkenne man leicht, daß „das ganze System W in die Vielheit V hineinprojizierbar ist", d. h. daß V eine zu W äquivalente Teilvielheit umfassen muß; hat also V überhaupt eine bestimmte Mächtigkeit, so muß diese ein Alef sein. Wie wenig dieser „Beweis" ihn selbst befriedigt, zeigt seine kurz darnach an Dedekind ausgesprochene Bitte, er möge mittels seiner Kettentheorie einen „direkten" Beweis der Vergleichbarkeit geben. Übrigens ist später auch von anderer Seite versucht worden,

1) Auf diesen (in C.s Publikationen nicht vorkommenden) Begriff bezieht sich auch Hilbert mehrfach (so in diesem *Jahresbericht* 8 [1900], S. 184; ebenso im Anfang des Hilbertschen Vortrags auf dem III. Intern. Math.-Kongreß). Der Ausdruck bürgert sich später auch sonst ein.

2) Den Gebrauch des Wortes „Vielheit" in diesem Zusammenhang präzisiert C. bald darauf dahin, daß er „Vielheiten *unverbundener Dinge* im Auge habe, d. h. solche Vielheiten, bei denen die Entfernung irgendeines oder mehrerer Elemente von keinem Einfluß auf das Bestehenbleiben der übrigen Elemente ist". Es scheint fast, als schwebten ihm hier solche Verkettungen vor, wie sie später von Poincaré und Russell unter der Bezeichnung „nicht-prädikativ" kritisiert worden sind.

durch verwandte Gedankengänge den Wohlordnungssatz abzuleiten.[1]) Jedenfalls hat auf C. von 1884 bis zu seinem Ende das Offenbleiben des Kontinuumproblems nachhaltigst eingewirkt und in ihm sogar zeitweise Zweifel entstehen lassen, ob die Mengenlehre in ihrer jetzigen Gestalt als wissenschaftliches Gebäude haltbar sei.

Auch sonst findet sich in diesen sich überstürzenden Briefen aus einer gesteigerten Tätigkeitsperiode C.s noch einiges Erwähnenswerte. So teilt Dedekind am 29. August dem Freund einen sehr eleganten, auf seine Kettentheorie gegründeten Beweis des Äquivalenzsatzes mit, auf dessen Möglichkeit er schon Pfingsten 1897 Bernstein aufmerksam gemacht habe.[2]) C. formuliert ferner an Dedekind die bekannte, mannigfach vorbildlich gewordene zwiefache Disjunktion hinsichtlich der möglichen Äquivalenzrelationen zwischen zwei Mengen (vgl. auch die Mitteilung hierüber in [VIII], S. 101f.) und erklärt, die Existenz von Mengen (d. h. konsistenten Vielheiten) mit den Kardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \aleph_0, \aleph_1, \ldots \aleph_\omega, \ldots$ als *Axiome* der elementaren bzw. erweiterten Arithmetik; dies offenbar durchaus im Sinne der späteren Lehre Russells von den „individuals".

Einen der großen Bahnbrecher der Wissenschaft hat die mathematische Welt, und zu unserem Stolz speziell auch unsere Deutsche Mathematikervereinigung, in Georg Cantor besessen. Die allgemeine Verbreitung der Erkenntnis, daß sein Werk der Analysis neue Bahnen gewiesen und ganz neuartige Problemstellungen eröffnet hat, hat er noch selbst zum großen Teile erlebt. Daß seine Ideen aber auch der Geometrie einen geradezu revolutionären Fortschritt auf Bahnen von unantastbarer Strenge ermöglicht haben, wird so recht erst in der Gegenwart, besonders dank den Arbeiten der von Brouwer ausgehenden jüngeren topologischen Schule, mehr und mehr deutlich und anerkannt. Ja selbst für physikalische Anwendungen haben sich die feinsten Ideen der Punktmengenlehre als höchst nützlich erwiesen. Hinsichtlich des — jene Theorien in gewissem Sinne überspannenden — Gebäudes der abstrakten Mengenlehre, wozu neben den allgemeinen Theorien der Äquivalenz und der Ähnlichkeit namentlich auch das Reich der transfiniten Ordnungszahlen sowie der philosophische Aspekt der Mengenlehre zu rechnen ist, sind freilich die Geister heute erneut

1) Besonders von Jourdain (*Philosophical Magazine* (6) 7 [1904], S. 61—75). Vgl. auch die Bemerkungen Zermelos in *Math. Ann.* 65 (1908), S. 118ff.

2) Der fehlerhafte Schrödersche Beweis wurde im Herbst 1896 auf der Frankfurter Naturforscherversammlung vorgetragen, während Bernstein den seinen im Winter 1896—97 fand und 1897 in einem Seminar C.s bekannt machte.

in Unruhe und teilweise in Unsicherheit verstrickt. Doch auch hier wird sich im Laufe der Entwicklung früher oder später Hilberts Wort erfüllen von dem Paradiese, das Cantor uns geschaffen habe und aus dem uns niemand solle vertreiben können. Mögen da auch manche grundsätzlich neue Gedanken erforderlich sein und in Richtungen weisen, die uns heute noch fremd sind: die Eroberung des Aktual-Unendlichen für die Wissenschaft überhaupt ist eine historische Tatsache, und auf ihrem Boden, auf Cantors Ideen aufbauend, wird sich die Weiterentwicklung vollziehen im Sinne der Zuversicht, die Cantor seiner abschließenden Darstellung [32] als letztes Mottowort vorangestellt hat: „Veniet tempus, quo ista, quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

Veröffentlichungen Cantors.[1])

1. De aequationibus secundi gradus indeterminatis. (Inauguraldissertation.) Berlin 1867. (26 S.)
2. Zwei Sätze aus der Theorie der binären und quadratischen Formen. *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 13 (1868), S. 259—261.
3. Über die einfachen Zahlensysteme. Ebenda 14 (1869), S. 121—128.
4. Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte. Ebenda, S. 152—158.
5. De transformatione formarum ternariarum quadraticarum. (Habilitationsschrift.) Halis Saxonum o. J. [1869]. (13 S.)
6. Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* 72 (1870), S. 130—138.
7. Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt. Ebenda, S. 139—142.
8. Notiz zu dem Aufsatze: Beweis usw. (siehe [7]). Ebenda 73 (1871), S. 294—296.
9. Über trigonometrische Reihen. *Math. Ann.* 4 (1871), S. 139—143.[2])
10. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Ebenda 5 (1872), S. 123—132.[2])
11. Algebraische Notiz. Ebenda, S. 133—134.
12. Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle im Jahre 1873* (erschienen in den *Abhandl. d. Nat. Ges. zu Halle* 13, 1877), S. 34—42. (Auch separat erschienen, 8 S.)
13. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journ. f. Math.* 77 (1874), S. 258—262.[2])
14. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Ebenda 84 (1878), S. 242—258.[2])
15. Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. *Nachr. v. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, Jahrg. 1879, S. 127—135.

1) Die Angaben in [VII] und besonders in [VIII] sind hiernach zu berichtigen.

2) Die Abhandlungen [9], [10], [13], [14], [16I—IV] sowie der größere Teil von [16V] sind in französischer Übersetzung in den *Acta Mathematica* 2 (1883) erschienen.

16. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. I. *Math. Ann.* **15** (1879), S. 1—7; II. ebenda **17** (1880), S. 355—358; III. ebenda **20** (1882), S. 113—121; IV. ebenda **21** (1883), S. 51—58; V. ebenda S. 545—591; VI. ebenda **23** (1884), S. 453—488.
17. Bemerkung über trigonometrische Reihen. Ebenda **16** (1880), S. 113—114.[1])
18. Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen. Ebenda, S. 267—269.
19. Zur Theorie der zahlentheoretischen Funktionen. *Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. u. d. Georg-Augusts-Univ. zu Göttingen*, Jahrg. 1880, S. 161—169.[2])
20. Über ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Funktionen. *Math. Ann.* **19** (1882), S. 588—594.
21. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig 1883. (Eine mit Vorwort [1 S.] versehene Separatausgabe von [16V]. 47 S.)
22. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. Première communication. Extrait d'une lettre adressée a l'éditeur. *Acta Math.* **2** (1883), S. 409—414.
23. De la puissance des ensembles parfaits de points. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur. Ebenda **4** (1884), S. 381—392.
24. Ludwig Scheeffer (1859—1885). *Bibliotheca Mathematica*, Jahrgang 1885, Sp. 197—199.
25. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mitteilung. (Fortsetzung von [22].) *Acta Math.* **7** (1885), S. 105—124.
26. Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuale Unendliche. *Zeitschr. f. Philosophie u. philos. Kritik*, N. F., **88** (1886), S. 224—233.[3])
27. Über die verschiedenen Ansichten in bezug auf die aktualunendlichen Zahlen. *Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar* **11** (1887), Nr. 19, S. 1—10. (Zum größeren Teil schon in [26] erschienen; der kleinere Rest ist in [28I] wieder abgedruckt.)
28. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. I. *Zeitschr. f. Philosophie u. phil. Kritik*, N. F., **91** (1887), S. 81—125 und 252—270; II. ebenda **92** (1888), S. 240—265.[4])

---

1) Auch erschienen (ohne die Fußnote) im *Archiv f. Math. u. Phys.* **64** (1879), S. 434—435.

2) Auch abgedruckt in den *Math. Ann.* **16** (1880), S. 583—588.

3) Mit Auslassung der Schlußpartie, sonst nur unwesentlichen Abweichungen, auch in *Natur und Offenbarung* **32** (1886), S. 46—49, erschienen; die Schlußpartien sind nebst dreien der in [28I] veröffentlichten Briefe mit unwesentlichen Änderungen u. d. T. „Zum Problem des aktualen Unendlichen" auch in *Natur und Offenbarung*, ebenda, S. 226—233 abgedruckt.

4) [26] und [28] zusammen sind auch separat u. d. T. „Zur Lehre vom Transfiniten, Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Erste Abteilung", Halle 1890 (93 S.) erschienen, und zwar ohne nennenswerte Änderung; nur stehen am Schluß einige unwesentliche Berichtigungen, ferner ist der auf S. 252—270 von Bd. 91 erschienene Teil in Form von Fußnoten an die betreffenden Stellen des ersten Aufsatzes von Bd. 91 gestellt. (Daß auch eine — offenbar nicht im Buchhandel erschienene — Ausgabe dieser Schrift, bei der die ersten 10 Seiten (d. i. [26]) fehlen, gedruckt worden ist, beweist die zunächst unverständliche Seitenangabe (51) in [28I], S. 267, Z. 3 v. u.

29. Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen in Math. Ann. Bd. XXXIII, p. 154. *Math. Ann.* 33 (1889), S. 476.

30. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresber. d. Deutschen Mathematikervereinigung* 1 (1892), S. 75—78.[1])

31. Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach. *Assoc. Française pour l'Avancement des Sciences, C. R. de la 23me Session (Caen 1894)*, Seconde Partie, S. 117—134. 1895.

32. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I. *Math. Ann.* 46 (1895), S. 481—512; II. ebenda 49 (1897), S. 207—246.[2])

33. Sui numeri transfiniti. Estratto d'una lettera di Georg Cantor a G. Vivanti, 13. Dez. 1893. *Rivista di Matematica* 5 (1895), S. 104—108. (Deutsch.)

34. Lettera di Georg Cantor a G. Peano. Ebenda, S. 108—109. (Deutsch.)

35. Brief von Carl Weierstraß über das Dreikörperproblem. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo* 19 (1905), S. 305—308.

Außerdem einige Bücherrezensionen, namentlich in den ersten Bänden der *Deutschen Literaturzeitung*. Ferner die „Zweite Beilage" zur Reklam-Ausgabe der „Prolegomena" von Kant, herausgeg. 1888 von Karl Schurz-Halle (Erläuterung zu der von sphärischen Dreiecken handelnden Stelle in § 13 der Prolegomena).

---

36. Resurrectio Divi Quirini Francisci Baconi Baronis de Verulam Vicecomitis Sancti Albani CCLXX annis post obitum eius IX die aprilis anni MDCXXVI. (Pro manuscripto.) Cura et impensis G[eorgii] C[antoris]. Halis Saxonum MDCCCXCVI. (Mit englischer Vorrede von „Dr. phil. George Cantor, Mathematicus".)

37. Confessio fidei Francisci Baconi Baronis de Verulam ... cum versione Latina a G. Rawley ..., nunc denuo typis excusa cura et impensis G. C. Halis Saxonum MDCCCXCVI. (Mit lateinischer Vorrede [5 S.] von G. C.)

Vorstehend häufiger angeführtes oder sonst wichtiges Material über Cantor.

I. Aufzeichnungen und Briefabschriften aus dem Besitz der Familie Cantor.

II. Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind (36 Stücke), im Besitz der Bibliothek der Technischen Hochschule zu Braunschweig.

III. A. Schoenflies, Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen. *Acta Mathematica* 50 (1928), S. 1—23. (Enthält vieles aus den Briefen Cantors an Mittag-Leffler, vornehmlich aus dem Jahre 1884.[3]) Vgl. auch Mittag-Leffler, ebenda, S. 25f.

IV. Eine von P. Stäckel herrührende Nachschrift eines Vortrags, den Cantor über seine mengentheoretischen Untersuchungen am 24. September 1897 in

---

1) In italienischer Übersetzung (von Vivanti) erschienen in der *Rivista di Mat.* 2 (1892), S. 165—167.

2) In französischer Übersetzung (von Marotte) erschienen in den *Mémoires de la Soc. des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux* (5) 3 (1899), S. 343—437; Teil I auch in italienischer Übersetzung (von Gerbaldi) in der *Rivista di Mat.* 5 (1895), S. 129—162 Englische Ausgabe siehe [V].

3) In die weitere Korrespondenz zwischen Cantor und Mittag-Leffler Einsicht zu erhalten ist mir leider versagt geblieben.