SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
Verlag: Teubner
Jahr: 1967/68
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN37721857X_0069
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN37721857X_0069

LOG Id: LOG_0015
LOG Titel: Knoten.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN37721857X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN37721857X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=37721857X

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Schubert, Horst
Jahresbericht d. DMV
Bd. 69 (1968) S. 184 (*206*)–190 (*212*)

Knoten.

Von HORST SCHUBERT in Kiel*).

1. Das Knotenproblem.

In seiner ursprünglichen Form, auf die wir uns hier beschränken, ist es der einfachste Fall einer Klassifikation von Einbettungen. Es handelt sich dabei um Einbettungen der 1-Sphäre S^1 (Kreislinie) in den 3-dimensionalen euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^3$. Um im Bereich kompakter Räume zu bleiben, empfiehlt es sich, $\boldsymbol{R}^3$ zur 3-Sphäre S^3 zu kompaktifizieren, womit man ein äquivalentes Problem erhält.

Um Aussicht auf einen Zugang zu haben, schränkt man dieses Problem ein auf *zahme* Einbettungen, das sind solche, die bezüglich geeigneter Triangulationen von S^3 und S^1 simplizial sind. Man schließt also *wilde* Einbettungen aus, die in gewissem Sinne unendlich verknotet sind, obgleich auch hier interessante Beispiele bekannt sind. In diesem Zusammenhange sei erwähnt, daß nach dem Satz von Jordan-Schönflies je zwei Einbettungen von S^1 in S^2 topologisch äquivalent sind; dagegen gibt es wilde Einbettungen von S^2 in S^3 (Antoine 1921, Alexander 1924), während je zwei zahme sogar kombinatorisch äquivalent sind (Alexander 1924, Graeub 1950).

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, die *Orientierungen* zu berücksichtigen; wir betrachten also zahme Einbettungen der orientierten S^1 in die orientierte S^3.

Für die *Klassifikation* bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, etwa

1. topologische Abbildungen der S^3,
2. starke Isotopien,
3. stückweis lineare (semilineare) topologische Abbildungen der S^3,
4. elementare kombinatorische Äquivalenz im Sinne von Reidemeister (Knotentheorie 1932).

Die Abbildungen unter 1 und 3 sollen die Orientierung der S^3 erhalten. Starke Isotopien sind solche, welche die identische Abbildung der S^3 deformieren. Bezüglich schwacher Isotopien, die lediglich die einbettende Abbildung deformieren, sind je zwei Einbettungen äquivalent.

*) Hauptvortrag, gehalten auf der Jubiläumstagung zum 75jährigen Bestehen der DMV am 14. IX. 1965 in Freiburg i. Br.

Die genannten Möglichkeiten sind im betrachteten Falle gleichwertig. Bei 1 und 2 ergibt sich dies daraus, daß jede orientierungserhaltende topologische Selbstabbildung der S^3 zur identischen isotop ist (G. M. Fisher 1960). Die Gleichwertigkeit von 3 und 4 hat Graeub 1950 gezeigt, womit der Übergang von elementaren Deformationen zu einer Abbildungsgruppe erreicht wurde. Die Gleichwertigkeit von 1 und 3 beruht darauf, daß 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten triangulierbar sind und daß für sie die sog. Hauptvermutung gilt, wonach je zwei Triangulationen derselben Mannigfaltigkeit isomorphe Unterteilungen besitzen (Moise 1952, 1954, Bing 1959). Noch eine andere Klassifikation liegt nahe: Man betrachte differenzierbare Einbettungen und definiere Äquivalenz bezüglich Diffeomorphismen der S^3. Auch dies erweist sich als gleichwertig mit dem zuvor Genannten.

Es ist bemerkenswert, daß diese Gleichwertigkeit nicht besteht, wenn allgemein Einbettungen von S^r in S^n betrachtet werden. Hierbei verlangt man von den zahmen Einbettungen zusätzlich, daß sie lokal flach sind, d. h. daß jeder Punkt der eingebetteten S^r eine Umgebung in S^r besitzt, die durch eine topologische bzw. stückweis lineare Selbstabbildung der S^n eben gemacht werden kann. Bei differenzierbaren Einbettungen ist dies von selbst der Fall, dagegen gibt es kombinatorische Einbettungen von S^2 in S^4, die nicht lokal flach sind. Den einfachsten Fall erhält man aus einer verknoteten S^1 in $\boldsymbol{R}^3 \subset \boldsymbol{R}^4$ durch Bilder eines Doppelkegels (Einhängung) in $\boldsymbol{R}^4$. Der Unterschied zwischen dem kombinatorischen Fall und dem differenzierbaren liegt noch tiefer. Nach Zeeman (1960) sind für $n - r \geqq 3$ je zwei kombinatorische Einbettungen von S^r in S^n äquivalent bezüglich stückweis linearer Abbildungen; dagegen zeigte Haefliger 1962, daß sich die $(4k-1)$-Sphäre differenzierbar verknotet (also nicht äquivalent zu einer Großsphäre) in die $6k$-Sphäre einbetten läßt (bei Standard-Differenzierbarkeitsstruktur der Sphären). Die Klassen differenzierbarer Knoten bilden im kombinatorisch trivialen Bereich $n - r \geqq 3$ eine Gruppe (Haefliger 1962, Levine 1965). Obwohl der hier angeschnittene Fragenkreis in den letzten Jahren mit zahlreichen wichtigen Resultaten lebhaftes Interesse gefunden hat und interessante offene Probleme bietet, wollen wir uns hier wieder auf den ursprünglichen Fall beschränken.

2. Unmittelbare geometrische Betrachtungen.

Wir stellen uns hinfort auf den stückweis linearen Standpunkt, was nach dem oben Gesagten keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Ein Knoten ist jetzt also eine Klasse äquivalenter orientierter,

einfach geschlossener Polygonzüge in der orientierten S^3, wobei eine Triangulation der S^3 mitsamt ihren geradlinigen Unterteilungen zugrunde gelegt ist. Die Klasse, die durch den Rand eines Dreiecks repräsentiert wird, heißt Kreis. Alle anderen sind echt verknotet.

Die einfachste Möglichkeit, einen Knoten darzustellen, ist eine (im $\boldsymbol{R}^3$) ebene Projektion, die regulär ist, d. h. nur einfache Doppelpunkte enthält. Fig. 1 bis 4 zeigen einige Beispiele. Fig. 1 stellt den Kreis dar, Fig. 2 bzw. 3 eine Rechts- bzw. Linkskleeblattschlinge, Fig. 4 den Viererknoten. Als besonders wichtige Invariante hat sich das *Geschlecht* erwiesen (Seifert 1934). Jede Knotenlinie berandet orientierbare (einfach gelochte) Flächen. Das kleinste Geschlecht solcher Flächen ist das Geschlecht des Knotens. Der Kreis ist durch das Geschlecht Null charakterisiert.

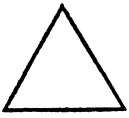

Fig. 1

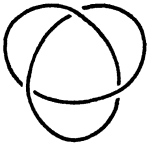

Fig. 2

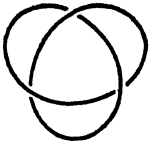

Fig. 3

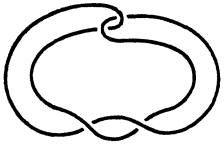

Fig. 4

Bei dem Bestreben, Knoten zu klassifizieren, haben Verfahren Interesse gefunden, Knoten auf „einfachere" zurückzuführen oder umgekehrt aus gegebenen Knoten neue, „kompliziertere" zu bilden. Das älteste solche Verfahren ist das *Produkt* von Knoten, das am einfachsten so zu erklären ist: Man betrachtet im $\boldsymbol{R}^3$ zwei Knotenlinien, die sich auf verschiedenen Seiten einer Wand befinden. Man schiebt sie so zusammen, daß sie mit verschiedener Orientierung in einer Strecke zusammenfallen und lasse diese Strecke weg (Fig. 5). Dieses Produkt ist assoziativ und kommutativ, und der Kreis spielt die Rolle eines Einselementes. Dabei besteht eindeutige Primfaktorzerlegung (Schubert 1949).

Ein anderes Verfahren ist das Bilden von *Schlauchknoten* (auch Parallelknoten genannt). Man verdicke eine Knotenlinie k zu einem Vollring und betrachte auf dessen Rand eine Knotenlinie, die mindestens zweimal umläuft. k stellt den Träger des so entstandenen Schlauchknotens dar. Fig. 2, 3, 6 zeigen Beispiele mit dem Kreis als Träger. Schlauchknoten lassen sich durch Träger und zwei numerische Invarianten (Umlauf- und Verschlingungszahl) klassifizieren (Schubert 1953).

Ein weiteres Verfahren ist das Bilden von *Schlingknoten*. Man verschlingt und verdrillt ein Band und hängt die Enden ineinander, wie

der obere Teil von Fig. 4 zeigt. Der Rand des Bandes bildet dann einen Schlingknoten. Solche Knoten lassen sich klassifizieren durch den Diagonalknoten, der sich aus der Mittellinie des Bandes ergibt, und zwei numerische Invarianten (Seifert 1949).

Die genannten Verfahren führten auf den Begriff des *Begleitknotens*. Bei gegebenem Knoten, der durch eine Knotenlinie k dargestellt wird, wird ein Begleitknoten (falls es überhaupt einen gibt) dargestellt durch einen echt verknoteten Vollring V, der k so im Innern enthält, daß k nicht Seele (anschaulich Mittellinie) von V ist und daß k auch nicht in einer (topologischen) Vollkugel in V liegt.

Diese Betrachtungen nahmen eine entscheidende Wendung durch Haken, der ein finites Verfahren angab (erschienen 1961), das Geschlecht eines Knotens zu bestimmen. Insbesondere ist damit entscheid-

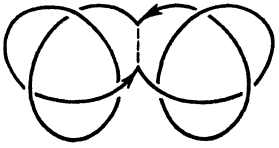

Fig. 5

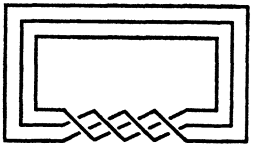

Fig. 6

bar, ob ein vorgelegter Knoten ein Kreis ist. Aus diesem Verfahren ergaben sich endliche (wenn auch wegen ihrer Länge praktisch nicht ausführbare) Verfahren zur Primfaktorzerlegung von Knoten (Schubert 1961), zum Erkennen und zur Invariantenbestimmung von Schlauchknoten (Haken, bisher unveröffentlicht), von Schlingknoten mit Ausnahme des Viererknotens (Soltsien 1965) und zur Aufweisung aller Begleitknoten (Hammer 1963). Für Knoten, die keinen Begleitknoten besitzen, ergibt sich so auch, daß sich die einspannbaren orientierbaren Flächen minimalen Geschlechts auf endlich viele Isotopieklassen verteilen, die aufweisbar sind (Schubert und Soltsien 1964).

Das Verfahren von Haken ergibt auch eine Zerlegung kompakter 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in irreduzible Bestandteile (Haken 1961), und es eröffnet Ausblicke, das Äquivalenzproblem für Knoten durch Zerlegung der Außenräume entscheidbar zu machen (Haken 1962).

3. Knoten und Außenraum.

Um den Knotenaußenraum als kompakte (berandete) Mannigfaltigkeit betrachten zu können, sei eine reguläre offene Umgebung einer Knotenlinie aus der S^3 ausgebohrt. Der Knoten selbst wird dann

dargestellt durch eine einmal auf dem Randtorus umlaufende Kurve, die im Außenraum nullhomolog ist (Breitenkreis oder Longitude), während ein dazu konjugierter Rückkehrschnitt auf dem Randtorus nullhomolog auf dem ausgebohrten Vollring ist (Meridian).

Zwei grundlegende Resultate von Papakyriakopoulos sind hier vorweg zu nennen: Der Sphärensatz und der Beweis des Dehnschen Lemmas (1957), das in der Folge zum Schleifensatz verallgemeinert wurde (Shapiro und J. H. C. Whitehead 1958, Stallings 1960). Der *Sphärensatz* besagt: Ist für eine triangulierte 3-Mannigfaltigkeit die zweite Homotopiegruppe nicht-trivial, so gibt es in ihr eine nicht nullhomotope simpliziale 2-Sphäre. Der *Schleifensatz* lautet: Liegt im Rande $\dot{M}$ einer 3-Mannigfaltigkeit M eine Kurve u, die nullhomotop in M, aber nicht in $\dot{M}$ ist, so gibt es in beliebig kleiner Umgebung von u auf $\dot{M}$ eine einfache geschlossene Kurve v, die nicht nullhomotop auf $\dot{M}$ ist und in M eine simpliziale 2-Zelle (Elementarflächenstück) berandet. Beide Sätze besitzen Verfeinerungen.

Aus dem Sphärensatz folgt, daß die zweite Homotopiegruppe eines Knotenaußenraumes verschwindet. Die höheren verschwinden ebenfalls, wie man erkennt, wenn man den Hurewiczschen Isomorphiesatz auf die universelle Überlagerung eines 2-dimensionalen Deformationsretraktes anwendet. Damit verbleibt nur die Fundamentalgruppe, die hier meist *Knotengruppe* genannt wird. Für sie lassen sich Erzeugende und Relationen aus einer Projektion des Knotens ablesen.

Die 1. *Homologiegruppe* trägt zunächst nichts zur Unterscheidung von Knotenaußenräumen bei. Sie ist stets frei zyklisch. Dies gestattet es aber, für alle Knotenaußenräume zugleich zyklische Überlagerungen und deren Homologie zu betrachten, womit man Invarianten erhält, die einfach zu berechnen sind (insbesondere Seifert 1934, Threlfall 1949). Die 1. Homologiegruppe der unendlichen zyklischen Überlagerung ist dabei als Modul über dem Gruppenring der Deckbewegungsgruppe aufzufassen. Aus Erzeugenden und Relationen der Knotengruppe erhält man entsprechende Daten dieses Moduls, dem man dann von Determinanten erzeugte Ideale (Fitting-Ideale) des Koeffizientenringes zuordnen kann (Alexander 1928, Fox 1953, 1954, Crowell 1960, 1961, 1963, Gamst 1967). Alle genannten Homologie-Invarianten sind jedoch sehr schwach. Seifert zeigte 1950, daß jeweils unendlich viele Knoten in diesen Invarianten übereinstimmen.

Wir wenden uns nun Fragen zu, die von den Orientierungen von S^3 und S^1 herrühren. Die Homologiegruppen der endlichblättrigen zyklischen Überlagerungen des Knotenaußenraumes sind Gruppen mit Verschlingung (Seifert 1935). Mit Hilfe zugehöriger Invarianten läßt sich

in speziellen Fällen zeigen, daß ein Knoten von seinem Spiegelbild verschieden ist. Die hierfür früher benutzten Klassen quadratischer Formen und ihre Minkowski-Invarianten sind durch die Verschlingungsinvarianten der zweiblättrigen Überlagerung bestimmt (Kneser und Puppe 1953). Alle Torusknoten (Schlauchknoten, deren Träger der Kreis ist) sind von ihrem Spiegelbild verschieden. Dies konnte durch Betrachtung der Automorphismengruppen der zugehörigen Knotengruppen gezeigt werden (Dehn 1914, Schreier 1924). Fig. 2 und 3 stellen also verschiedene Knoten dar. Alle Torusknoten und Schlingknoten gehen in sich über, wenn sie umorientiert werden. Der Nachweis, daß gewisse Knoten bei Umorientierung nicht in sich übergehen, gelang schließlich 1964 Trotter, wobei er eine Klasse solcher Knoten angab. Das dabei benutzte Hilfsmittel war die *periphere Struktur der Knotengruppe*, die 1952 von Fox eingeführt wurde. Es handelt sich dabei um eine Klasse konjugierter Untergruppen mit ausgezeichneten Erzeugenden, die von Breitenkreis und Meridian herrühren. Mit ihrer Hilfe lassen sich auch manche Knoten von ihren Spiegelbildern bzw. umorientierten Spiegelbildern unterscheiden und Knotenaußenräume mit isomorphen Fundamentalgruppen als nicht homöomorph erkennen (Fox 1952).

Es wurde soeben gesagt, daß die Fundamentalgruppe den Homöomorphietyp des Knotenaußenraumes im allgemeinen nicht bestimmt. Es ist jedoch richtig beim Kreis, was aus dem Dehnschen Lemma folgt. Hierfür hatte Dehn das Lemma 1910 formuliert. Es ist ferner richtig für Torusknoten. Dies sind zugleich die einzigen Knoten, deren Gruppe ein Zentrum besitzt. Diese Vermutung von Neuwirth wurde 1965 mehrfach gleichzeitig bewiesen (Burde und Zieschang, Waldhausen, Noga). Von Fox stammt die bisher unbewiesene Vermutung, daß Gruppe und periphere Untergruppen den Außenraum charakterisieren.

Hier schließt die Frage an, ob der orientierte Außenraum den Knoten bis auf Orientierung bestimmt. Es wird vermutet, daß dies richtig ist. Jedoch ist das bisher nur bekannt für den Kreis, die Torusknoten und neuerdings für Produktknoten (Noga 1967). Eine entsprechende Aussage für Verkettungen (Einbettungen einer disjunkten Summe von 1-Sphären) ist falsch (J. H. C. Whitehead 1937).

In den letzten Jahren hat, insbesondere durch Neuwirth, die Kommutatorgruppe der Knotengruppe Interesse gefunden (Bericht Ann. Math. Studies 56, Princeton 1965). Mit Hilfe des Schleifensatzes ergab sich, daß sie genau dann endlich erzeugt ist, wenn sie frei ist; und dies ist gleichwertig damit, daß der Knotenaußenraum eine Stallings-

faserung (Stallings 1961) besitzt. Hierbei ist die Faser eine orientierbare Fläche minimalen Geschlechts, die vom Knoten berandet wird, und die Basis eine Kreislinie. Der Viererknoten und alle Torusknoten sind Beispiele. Hiermit gelang die oben erwähnte Charakterisierung der Gruppen und Außenräume von Torusknoten, wobei die Stallingsfaserung zu einer Seifertschen Faserung mit Ausnahmefasern (Seifert 1933) führt. Mit den Hakenschen Methoden läßt sich entscheiden, ob ein gegebener Knoten neuwirthsch ist, d. h. seine Gruppe eine freie Kommutatorgruppe besitzt.

Abschließend sei ausdrücklich gesagt, daß bei einem Bericht in diesem Rahmen keine Vollständigkeit angestrebt werden konnte. Die Auswahl ist durch persönliche Vorlieben bedingt. Wir verweisen noch auf: Crowell, R. H. and Fox, R. H.: *Introduction to Knot Theory*, Boston 1963, und auf den dort gegebenen *Guide to the Literature*.

(Eingegangen am 16. 2. 1967)

Math. Seminar
der Universität Kiel