

Werk

Titel: Elemente der Mathematik

Verlag: Birkhäuser

Jahr: 1969

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN378850199_0024

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN378850199_0024

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN378850199

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN378850199>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

ELEMENTE DER MATHEMATIK

REVUE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

RIVISTA DI MATEMATICA ELEMENTARE

REDAKTION:

E. TROST - P. BUCHNER

24. JAHRGANG

1969

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Abhandlungen</i>	Seite	(Nr.)
BEHZAD, M., and CHARTRAND, G.: Line-Coloring of Signed Graphs	49	(3)
BIERI, H.: Extremale konvexe Rotationshalbkörper im V, F, M -Problem des R_3 . .	121	(6)
BOTTEMA, O.: A Theorem of BOBILLIER on the Tetrahedron	6	(1)
DEBRUNNER, H. E.: Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern	1	(1)
HARBORTH, H.: Diagonalen im regulären n -Eck	104	(5)
HEIGL, F.: Elementare Ableitung der Laplaceschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung	53	(3)
HEIL, E., und KRAUTWALD, W.: Konjugierte Durchmesser und extremale Vierecke konvexer Bereiche	97	(5)
INEICHEN, R.: Anschauliche Behandlung eines Verzweigungsprozesses (branching process)	10	(1)
KREYSZIG, E.: Die Realteil- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen . .	25	(2)
MALL, J.: Allgemeine Gestalt einer geradenerhaltenden Abbildung	57	(3)
SIEBER, H.: Über das invariante Rechtwinkelpaar einer schiefen Affinität und dessen Zusammenhang mit der JAKOBISCHEN Konstruktion der Achsen einer Ellipse . .	31	(2)
TAUBER, S.: On Sc Functions	85	(4)
ZEITLER, H.: Inhaltsmasszahlen für hyperbolische Rotationskörper	73	(4)

Kleine Mitteilungen

ABRAMSON, M.: An Elementary Set Partition Problem	128	(6)
BLANPAIN, M. E.: Sur l'équation diophantienne $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = (z^2 - 1)^2$. . .	134	(6)
BOLLOBÁS, B.: k -Tuples of the First n Natural Numbers.	133	(6)
BRJCHA, J.: Die Wallaceschen Geraden und die Feuerbachschen Kreise in einem Sehnenviereck	111	(5)
CLAY, J. R.: A Note on Integral Domains that are not Right Distributive	40	(2)
DOMIATY, R. Z.: Eine Bemerkung zum Verfahren von Leverrier	35	(2)
FLADT, K.: Zur Möbiusinvolution der Ebene	62	(3)
GOLDBERG, M.: Two More Tetrahedra Equivalent to Cubes by Dissection	130	(6)
GUGGENHEIMER, H.: Bemerkung zur Aufgabe 493	17	(1)
HAVEL, V.: Eine Bemerkung über mehrdimensionale Axonometrien	64	(3)
KANOLD, H.-J.: Über «Super Perfect Numbers»	61	(3)
KANOLD, H.-J.: Ein einfacher Beweis der Stirlingschen Formel	109	(5)
LAJOS, S.: On (m, n) -Ideals in Subcommutative Semigroups	39	(2)
MAKOWSKI, A.: Angles of a Parallelogram with Vertices in Lattice Points	114	(5)
MAKOWSKI, A.: On Hall's Third Definition of Group	115	(5)
SURYANARAYANA, D.: Super Perfect Numbers	16	(1)
WÄSCHE, H.: Eine Bemerkung zur eindeutigen Primfaktorenzerlegung in Halbgruppen	37	(2)

Ungelöste Probleme

Hinter der Nummer des Problems steht die Seitenangabe in Klammer Nr. 6 (126)

Aufgaben

Hinter den Nummern der Probleme steht die Seitenangabe in Klammern

Lösungen zu den Nummern: 564–567 (17); 569–572 (41); 573–576 (65); 577–580 (90); 581–584 (116); 545, 585–588 (136).

21970.3277

Neue Aufgaben

Seite (Nr)

Hinter den Nummern der Aufgaben steht die Seitenangabe in Klammern.

Nummern: 589–592 (20); 593–596 (43); 597–601 (68); 602–605 (93); 606–609 (117); 610–613 (139).

Berichte und Mitteilungen

7. Österreichischer Mathematikerkongress in Linz.	24	(1)
13. Mathematikgeschichtliches Kolloquium im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald)	46	(2)
IMUK-Seminar in Echternach (Luxemburg)	48	(2)
Mitteilung der Redaktion	144	(6)

Literaturüberschau

ARNOLD, B. H.: Elementare Topologie (J. M. Ebersold)	69	(3)
ATHEN, H.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (R. Ineichen)	142	(6)
ALBRECHT, R., LINDBERG, E., and MARA, W.: Computer Methods in Mathematics (E. R. Brändli)	144	(6)
BEHNKE, H., BERTRAM, G., COLLATZ, L., SAUER, R., und UNGER, H.: Grundzüge der Mathematik Band V (R. Ineichen)	142	(6)
BELL, S., BLUM, J. R., LEWIS, J. V., and ROSENBLATT, J.: Introductory Calculus with Algebra and Trigonometry (A. Häusermann)	22	(1)
BELL, S., BLUM, J. R., LEWIS, J. V., and ROSENBLATT, J.: Modern University Calculus (R. Conzelmann)	22	(1)
BOAS, MARY L.: Mathematical Methods in the Physical Sciences (Peter Fuchs)	70	(3)
BERGE, C.: Théorie des graphes et ses applications (S. Piccard)	96	(4)
BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie (M. Jeger)	143	(6)
BURCKHARDT, J. J.: Lesebuch zur Mathematik (Hans Loeffel)	118	(5)
BUSACKER, R. G., und SAATY, T. L.: Endliche Graphen und Netzwerke (E. Trost)	119	(5)
CHINN, W. G., and STEENROD, N. E.: First Concepts of Topology (J. M. Ebersold)	72	(3)
CHUNG, K. L.: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities (H. Bühlmann)	120	(5)
CROWE, M. J.: A History of Vector Analysis (E. Trost)	118	(5)
DEMING, W. E.: Some Theory of Sampling (Hans Loeffel)	141	(6)
FÉLIX, LUCIENNE: Elementarmathematik in moderner Darstellung (M. Jeger)	44	(2)
FÉLIX, LUCIENNE: Géométrie. Terminales C et T (S. Piccard)	142	(6)
FICKEN, F. A.: Linear Transformation and Matrices (W. Holenweg)	140	(6)
FOURGEAUD, C., et FUCHS, A.: Statistique (S. Piccard)	96	(4)
FREUDENTHAL, H.: Educational Studies in Mathematics (E. Trost)	45	(2)
GABRIEL, P., and ZISMAN, M.: Calculus of Fractions and Homotopy Theory (H. Vögele)	20	(1)
GNEDENKO, B. W., BELJAJEW, J. K., und SOLOWJEW, A. D.: Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie (R. Ineichen)	69	(3)
GUGGENHEIMER, H. W.: Plane Geometry and its Groups (M. Jeger)	93	(4)
HADLEY, G.: Introduction to Probability and Statistical Decision Theory (H. Loeffel)	23	(1)
HALBERSTAM, H., and INGRAM, R. E.: The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton (Herbert Gross)	46	(2)
HAMEL, G.: Theoretische Mechanik (J. M. Ebersold)	69	(3)
HARRARY, F., NORMAN, R. Z., et CARTWRIGHT, D.: Introduction à la théorie des graphes orientés (S. Piccard)	143	(6)
HELLER, R.: Manuel de statistique biologique (R. Ineichen)	120	(5)
HERMES, H., und MITTENBECKER, E.: Enzyklopädie der geisteswissenschaftlichen Arbeitsmethoden 3. Lieferung (R. Ineichen)	95	(4)
HILBERT, D., und ACKERMANN, W.: Grundzüge der theoretischen Logik (P. Fuchs)	95	(4)
HILTON, P. J.: Studies in Modern Topology (J. M. Ebersold)	141	(6)

	Seite	(Nr.)
HOTES, H.: Digitalrechner in technischen Prozessen (E. R. Brändli)	95	(4)
JOHNSTON, J. B., PRICE, G. B., und VAN VLECK, F. S.: Sets, Functions and Probability (R. Ineichen)	46	(2)
KAUFMANN, A.: Introduction à la combinatorique en vue des applications (S. Piccard)	45	(2)
KEMENY, J. G., and KURTZ, T. E.: Basic Programming (E. R. Brändli)	70	(3)
KERTÉSZ, A.: Vorlesungen über Artinsche Ringe (E. Trost)	119	(5)
KLINE, M.: Mathematics in the Modern World (E. Trost)	71	(3)
KREIN, S. G., und USCHAKOWA, V. N.: Vorstufe zur höheren Mathematik (R. Ineichen)	94	(4)
KURATOWSKI, K.: Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie (S. Piccard)	143	(6)
LABOUREUR, M., CHOSSAT, M., et CARDOT, C.: Cours de calcul mathématique moderne (S. Piccard)	119	(5)
LENSE, J.: Analytische projektive Geometrie (G. Aeberli)	71	(3)
MASSERA, J. L.: Linear Differential Equations and Function Spaces (A. Müller) . .	21	(1)
MUNROE, M. E.: Ideas in Mathematics (E. Trost)	45	(2)
PETROVSKI, I. G.: Ordinary Differential Equations (A. Häusermann)	21	(1)
RANDOLPH, J. F.: Calculus – Analysis – Vectors (R. Conzelmann)	22	(1)
RÉVÉSZ, P.: Die Gesetze der grossen Zahlen (R. Ineichen)	144	(6)
SCHUBERT, H.: Topologie (J. M. Ebersold)	141	(6)
SZÁSZ, G., GEHÉR, L., KOVÁCS, I., and PINTÉR, L.: Contests in Higher Mathematics (E. Trost)	72	(3)
TIETZ, H.: Lineare Geometrie (M. Jeger)	43	(2)
YOUSE, B. K.: Algebra and the Elementary Functions (W. Holenweg)	71	(3)
ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (R. Ineichen)	140	(6)

Nachdruck verboten

Druck von Birkhäuser AG, Basel. Printed in Switzerland

Birkhäuser Verlag Basel, 1969

©

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 24

Heft 1

Seiten 1–24

10. Januar 1969

Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern

Herrn HUGO HADWIGER in Dankbarkeit zum 60. Geburtstag gewidmet

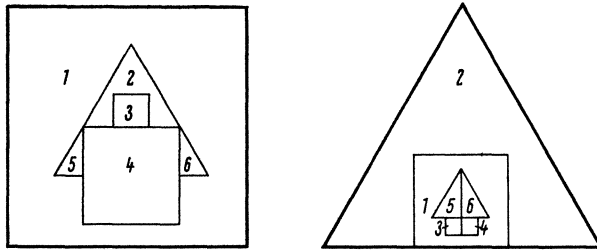
1. Übersicht

Die Zerlegung von Polyedern in polyedrische Teilstücke spielt in der Geometrie seit je eine wichtige Rolle. Aber erst im Zusammenhang mit einer kritischen Begründung der Inhaltslehre ist diese Operation selber Gegenstand mathematischer Überlegungen geworden. So hat auf HILBERTS Anregungen hin DEHN [1] zu Beginn dieses Jahrhunderts Ansätze zu einer Theorie der Polyederzerlegung geliefert, indem er notwendige Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit von Polyedern herleitete und als deren spezielle Anwendung nachwies, dass ein reguläres Tetraeder mit keinem Würfel zerlegungsgleich ist. Diese Bedingungen sind, besonders durch SYDLER [3], erfolgreich weiteruntersucht und als hinreichend für Zerlegungsgleichheit nachgewiesen worden. Die speziellen Gegebenheiten überschreitend, hat HADWIGER eine Anschaulichkeit und Allgemeinheit in besonders glücklicher Weise verbindende Theorie der Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder bezüglich ausgewählter Bewegungsgruppen begründet. Ein m.W. bisher unbeachteter reizvoller Sachverhalt bei der Zerlegung zweier Polyeder in paarweise ähnliche Teilstücke schafft die Gelegenheit, die von HADWIGER entwickelten und in [2], Kap. 1 und 2, dargestellten Methoden soweit vereinfacht anzuwenden, dass unsere Darlegung für dreidimensionale Polyeder in sich abgeschlossen und ohne spezielle Vorkenntnisse verständlich ist, zugleich aber doch wesentliche Züge der Hadwigerschen Zerlegungstheorie zur Entfaltung bringt. Es handelt sich um die folgende, vorerst überraschende Bemerkung:

Satz: *Zwei beliebige Polyeder A bzw. B können stets so im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele Teilpolyeder A_1, \dots, A_n bzw. B_1, \dots, B_n zerlegt werden, dass diese paarweise, je A_i mit B_i für $i = 1, \dots, n$, ähnlich und ähnlich gelegen sind.*

Dieser Sachverhalt gilt für eigentliche Polyeder des k -dimensionalen euklidischen Raumes. Den ebenen Fall $k = 2$ illustriert Figur 1 mit der Zerlegung eines Quadrats und eines parallel gelagerten gleichseitigen Dreiecks in je 6 paarweise ähnliche Stücke. Wir führen den Beweis des Satzes, um nicht weit ausholen zu müssen, nur für dreidimensionale Polyeder, doch überträgt er sich unter Verwendung der in [2], Kap. 1, § 3,

zusammengestellten Eigenschaften k -dimensionaler Polyeder ohne jede wesentliche Änderung auf den Fall von Dimensionen $k \neq 3$.



Figur 1

2. Zerlegungsähnlichkeit

Wir legen vorerst die Bezeichnungen fest und erinnern an einige in der Zerlegungstheorie nützliche Definitionen. Durchwegs betrachten wir Polyeder A, B, \dots des dreidimensionalen euklidischen Raumes R^3 , dessen Punkte wir mit ihren Ortsvektoren p bezüglich eines festgewählten Ursprungs identifizieren. Polyeder sollen als «Körper», nicht als Seitenflächen- und Kantengerüst aufgefasst werden, und sollen «eigentlich» sein, d. h. nur aus nicht entarteten Teilstücken bestehen. Als *Polyeder* bezeichnen wir demgemäss Punktmengen in R^3 , welche sich als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener, nicht entarteter Tetraeder gewinnen lassen. Eine ausgezeichnete Rolle wird in unserm Zusammenhang der *Normwürfel* W spielen, das ist ein festgewählter Würfel von fixierter Kantenlänge und Position. Ist A ein Polyeder und t ein beliebiger Vektor des R^3 , so erhalten wir durch $B = \{t + p \mid p \in A\}$ ein zu A *translationsgleiches* Polyeder. Der elementargeometrischen Zerlegung eines Polyeders in Teilpolyeder entsprechend führen wir eine kommutative und assoziative Summenbildung ein: sind A_1, \dots, A_n Polyeder, deren offene Kerne A_1^0, \dots, A_n^0 paarweise disjunkt sind, so heisst die Vereinigungsmenge der Mengen A_1, \dots, A_n *Summe* der A_i und wird mit $A_1 + \dots + A_n$ bezeichnet; die Nebenbedingung bezüglich der offenen Kerne wird bei Verwendung der $+$ -Schreibweise stets stillschweigend als erfüllt vorausgesetzt. Ist darüber hinaus jedes der Polyeder A_1, \dots, A_n zu einem festen Polyeder A translationsgleich, so schreiben wir auch $n \cdot A$ an Stelle von $A_1 + \dots + A_n$; die genaue räumliche Lage der Teilpolyeder bleibt bei dieser Anschrift als im vorliegenden Zusammenhang belanglos dahingestellt, einzig die Nebenbedingung bezüglich der offenen Kerne wird wiederum als erfüllt vorausgesetzt. Von $n \cdot A$, der n -fachen Auslegung von A , ist die Schreibweise für das mit beliebigem reellen $\alpha > 0$ bildbare *dilatierte* Polyeder $\alpha A = \{\alpha p \mid p \in A\}$ zu unterscheiden.

Wir betrachten nun die Gruppe Γ_0 der Streckungen des Raumes von individuellen Zentren aus, also die Gruppe der Abbildungen $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$, welche durch $\varphi(p) = \alpha p + a$ mit beliebig wählbaren $\alpha > 0$ und $a \in R^3$ gegeben sind. Die Gruppeneigenschaft ist leicht zu verifizieren. Für $\varphi \in \Gamma_0$ bezeichnet $\varphi(A) = \{\varphi(p) \mid p \in A\}$ ein zum Polyeder A *ähnliches und ähnlich gelegenes* Polyeder. Wir nennen zwei Polyeder A und B *zerlegungsähnlich*, geschrieben $A \sim B$, wenn es eine natürliche Zahl n , Polyeder $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und in der Gruppe Γ_0 Abbildungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ so gibt, dass $A = A_1 + \dots + A_n, B = B_1 + \dots + B_n$ und $B_i = \varphi_i(A_i)$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.

Aus dieser Definition entnimmt man, dass die Zerlegungsähnlichkeit eine mit der Summenbildung verträgliche Äquivalenzrelation ist, so dass also folgendes gilt:

$$A \sim A; \text{ aus } A \sim B \text{ folgt } B \sim A; \text{ aus } A \sim B \text{ und } C \sim B \text{ folgt } A \sim C; \quad (1)$$

$$\text{aus } C_j \sim D_j \text{ für } j = 1, \dots, m \text{ folgt } C_1 + \dots + C_m \sim D_1 + \dots + D_m, \quad (2)$$

und insbesondere

$$\text{aus } C \sim D \text{ folgt } m \cdot C \sim m \cdot D. \quad (2')$$

Die Verifikation dieser nachfolgend ohne spezielle Verweisung verwendeten Beziehungen geht einzig für die Transitivität über die Substitution der Definitionsgleichung und die Berücksichtigung der Gruppeneigenschaft von Γ_0 hinaus: $A \sim B$, $C \sim B$ bedeutet $A = A_1 + \dots + A_n$, $B = B_1 + \dots + B_n = B'_1 + \dots + B'_m$ und $C = C'_1 + \dots + C'_m$ mit $B_i = \varphi_i(A_i)$ und $B_j = \psi_j(C'_j)$; nach eventueller simultaner Weiterunterteilung darf man annehmen, alle beteiligten Stücke A_i , B_i , B'_j und C'_j seien konvex; man bilde nun die Polyeder $B_i \cap B'_j$, soweit sie nichtleer und nichtentartet sind, und setze $A_{ij} = \varphi_i^{-1}(B_i \cap B'_j)$, $C'_{ij} = \psi_j^{-1}(B_i \cap B'_j)$; dann ist A die Summe aller dieser A_{ij} , C die Summe aller dieser C'_{ij} , und es gilt $C'_{ij} = \psi_j^{-1} \varphi_i(A_{ij})$, also $A \sim C$.

Da Γ_0 die Translationsgruppe umfasst, ist die Zerlegungsähnlichkeit eine Abschwächung der von HADWIGER eingehend untersuchten translativen Zerlegungsähnlichkeit \approx , bei welcher an die Stelle von Γ_0 die Translationsgruppe Γ tritt und für welche die Regeln (1) und (2) (mit \approx anstatt \sim) genau gleich herleitbar sind. Wir vermerken diesen Sachverhalt symbolisch durch die Aussage

$$\text{aus } A \approx B \text{ folgt } A \sim B. \quad (3)$$

Andererseits enthält Γ_0 die Dilatationen, so dass

$$\alpha A \sim A \text{ für } \alpha > 0 \quad (4)$$

gilt. Wir formulieren nun drei tieferliegende Eigenschaften der Zerlegungsähnlichkeit:

$$\text{aus } A + C \sim B + D \text{ und } C \sim D \text{ folgt } A \sim B \text{ (Subtraktionseigenschaft);} \quad (5)$$

$$\text{aus } m \cdot A \sim W \text{ folgt } A \sim W \text{ (Divisionseigenschaft);} \quad (6)$$

$$\text{es gilt } A \sim W \text{ für jedes Polyeder } A. \quad (7)$$

Die letzte Eigenschaft (7), in welcher W wie in (6) den Normwürfel bezeichnet, besagt in Verbindung mit der Transitivität, dass je zwei beliebige Polyeder zerlegungsähnlich sind. Die Richtigkeit des eingangs formulierten Satzes wird also mit dem im nächsten Abschnitt geführten Beweis für (5), (6) und (7) bestätigt sein.

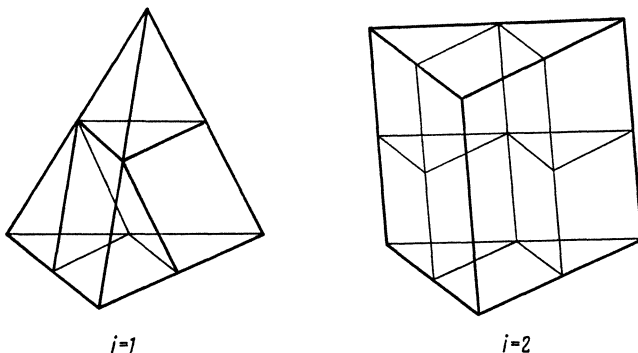
3. Beweisführung

Wir bezeichnen mit \mathfrak{P}_3 die Menge aller Polyeder des R^3 , welche sich als Summe endlich vieler Parallelotope darstellen lassen, mit \mathfrak{P}_2 die Menge aller Polyeder des R^3 , welche sich als Summe endlich vieler Prismen mit dreieckigen Grundflächen darstellen lassen, und mit \mathfrak{P}_1 die Menge aller Polyeder, welche sich als Summe endlich vieler Tetraeder darstellen lassen. Die erwähnten Prismen dürfen schief sein, und zwischen den Grundflächenstellungen der verschiedenen Summanden braucht keine

Beziehung zu bestehen. Weil jedes Parallelotop in Prismen der genannten Art und jedes Prisma gleich wie jedes Polyeder in Tetraeder zerlegbar ist, gilt $\mathfrak{P}_3 \subset \mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}_1$, und \mathfrak{P}_1 ist die Menge aller Polyeder des R^3 . Unserm Beweis liegt nun ein von HADWIGER in seiner Bedeutung erkannter Zusammenhang zwischen Dilatation und Zerlegung zugrunde, nämlich:

$$\begin{aligned} &\text{Ist } m \text{ natürlich, } i \in \{1, 2\} \text{ und } A \in \mathfrak{P}_i, \text{ so gilt} \\ &m A \approx m^i \cdot A + A_0 \text{ für passendes } A_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Die zwei Fälle $i = 1$ und $i = 2$ werden für $m = 2$ durch Figur 2 dargestellt. Da sich jedes $A \in \mathfrak{P}_i$ als Summe von Tetraedern bzw. Prismen mit dreieckiger Basis schreiben lässt, ergibt die analoge Figur für beliebiges natürliches m in Verbindung mit der (2) entsprechenden Relation für die translative Zerlegungsgleichheit den allgemeinen Nachweis für (8).



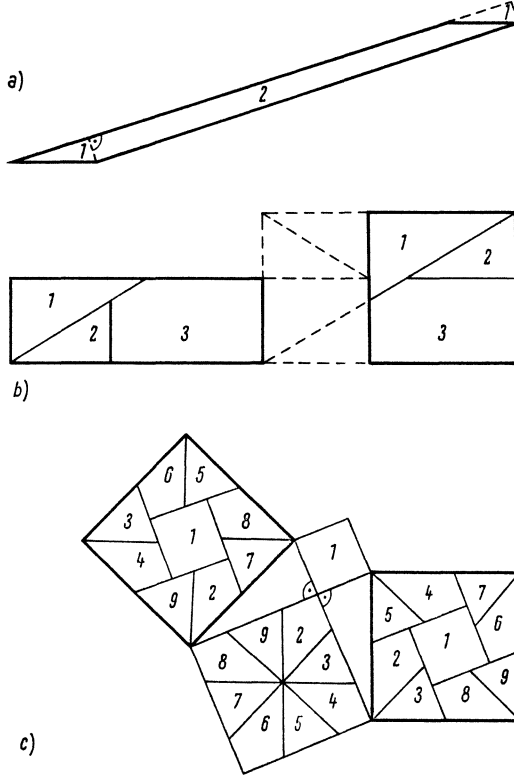
Figur 2

Wir führen nun die Beweise für (5), (6) und (7) durch Induktion nach abnehmendem i für den Fall $A, B \in \mathfrak{P}_i$.

Für $A, B \in \mathfrak{P}_3$ folgen alle drei Behauptungen aus der Aussage, dass jede Summe endlich vieler Parallelotope zum Normwürfel zerlegungsähnlich ist. An diesen wohl-bekannten Sachverhalt erinnert Figur 3 durch die Darlegung der Methode, a) wie die Grundfläche eines Parallelotops in ihrer Ebene zu einem Rechteck, b) wie ein Rechteck mit Seitenverhältnis $1/4 < \lambda < 4$ mit einer an den Gnomonsatz anknüpfenden Zerlegung zu einem parallel gelagerten Quadrat und c) wie ein Quadrat mit einer an den bekannten Zerlegungsbeweis des pythagoräischen Lehrsatzes anschliessenden Konstruktion zu einem Quadrat vorgeschriebener Basisrichtung translativ zerlegungsgleich erwiesen wird. Durch iterierte Verwendung dieser Zerlegungen für Prismen über den gezeichneten Polygonen lassen sich, wie man sich leicht vollständig überlegt, Parallelotopsummen in Summen von parallel zum Normwürfel gelagerten Würfeln verwandeln, und unter anschliessender Beziehung der Dilatation erweist sich jede solche Summe als mit einem Quader und dieser wiederum mit dem Normwürfel zerlegungsähnlich. Wir vermerken noch den nachfolgend stillschweigend verwendeten Spezialfall $m \cdot W \sim W$.

Nun nehmen wir induktiv an, es sei $i < 3$, für Polyeder $A, B \in \mathfrak{P}_{i+1}$ seien (5), (6) und (7) schon als richtig erwiesen, und gegeben seien jetzt Polyeder $A, B \in \mathfrak{P}_i$, welche die Voraussetzungen von (5), (6) bzw. (7) erfüllen.

Nachweis von (5): Es gilt a) $B \sim 2B \approx 2^i \cdot B + B_0$ für passendes $B_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}$; entfernt man aus B_0 2^i genügend kleine, paarweise disjunkte, zu D ähnliche Polyeder und benennt das Restpolyeder mit Q , so wird dies formelmässig durch b) $B_0 \sim 2^i \cdot D + Q$ beschrieben. Substitution der Beziehung b) in a) gibt unter Berücksichtigung der Voraussetzung und der Induktionsannahme die Schlusskette c) $B \sim 2^i \cdot B + B_0 \sim 2^i \cdot B + 2^i \cdot D + Q \sim 2^i \cdot (B + D) + Q \sim 2^i \cdot (A + C) + Q \sim 2^i \cdot A + 2^i \cdot C + Q \sim 2^i \cdot A + 2^i \cdot D + Q \sim 2^i \cdot A + B_0 \sim 2^i \cdot A + W \sim 2^i \cdot A + A_0 \sim 2A \sim A$, wo $A_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}$ ein Polyeder ist, für welches $2A \approx 2^i \cdot A + A_0$ gilt. Da \sim eine Äquivalenzrelation ist, besagt c) auch $A \sim B$, wie behauptet.



Figur 3

Nachweis für (6): Aus $m \cdot A \sim W$ folgt mit (8) und mit der auf A_0 angewandten Induktionsvoraussetzung $A \sim m A \sim m^i \cdot A + A_0 \sim m^{i-1} \cdot (m \cdot A) + W \sim m^{i-1} \cdot W + W \sim W$, wie behauptet.

Nachweis für (7): Gilt $2A \approx 2^i \cdot A + A_0$ mit $A_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}$ gemäss (8), so folgt mit der Induktionsvoraussetzung die Schlusskette $(2^i - 1) \cdot A + W + A \sim 2^i \cdot A + W \sim 2^i \cdot A + 3 \cdot W \sim 2^i \cdot A + A_0 + 2 \cdot W \sim 2A + 2 \cdot W \sim 2 \cdot W + A$. Mit den schon bewiesenen Eigenschaften (5) und (6) folgt bei Subtraktion von $W + A$ an beiden Enden dieser Kette vorerst $(2^i - 1) \cdot A \sim W$ und daraus $A \sim W$.

Nach zweimaliger Anwendung des Induktionsschrittes erhalten wir die Gültigkeit von (5), (6) und (7) für beliebige $A, B \in \mathfrak{P}_1$, also für beliebige Polyeder, womit die ausstehenden Beweise vollständig erbracht sind. H. E. DEBRUNNER, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. DEHN, *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. 55, 465–478 (1901); *Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke*, Math. Ann. 57, 314–332 (1903).
- [2] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isooperimetrie*, [Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 43], (Springer, Berlin 1957).
- [3] J. P. SYDLER, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Math. Helv. 40, 43–80 (1965).

A Theorem of BOBILLIER on the Tetrahedron

1. Almost one and a half centuries ago BOBILLIER [1] gave the following theorem: *any plane through the midpoints of two opposite edges of a tetrahedron divides it in two parts of equal volume*. This statement may be found in some texts for secondary schools and in books of higher level such as MOLENBROEK [2], HADAMARD [3], HOLZMÜLLER [4], ALTSHILLER-COURT [5] and the *Exercices* of F.G.M. [6]. The last two authors add a generalization on which we will return at the end of this paper.

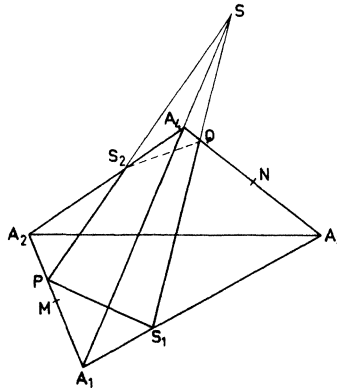


Figure 1

We consider (Fig. 1) an arbitrary transversal PQ of the opposite edges A_1A_2 and A_3A_4 of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ and study the ratio of the volumes of the two parts in which it is divided by a variable plane α through PQ . P is given by the ratio $A_1P:PA_2 = p$ and Q by $A_3Q:QA_4 = q$, so that $p > 0, q > 0$. Two sets of planes α have to be considered, one consisting of planes (such as in Fig. 1) which intersect the edges A_1A_3 and A_2A_4 in S_1 and S_2 respectively; the other set consists of planes having points of intersection S'_1 and S'_2 with A_1A_4 and A_2A_3 . We consider for the time being the first set; a plane of this set is given by the position of S_1 , that is by $A_1S_1:S_1A_3 = x, x \geq 0$.

S_1Q and S_2P have a point of intersection S , lying on the line A_1A_4 . MENELAUS' theorem, applied to the triangle $A_1A_3A_4$ gives us

$$SA_1:SA_4 = qx:1. \quad (1)$$

If $qx > 1$ we have the situation as shown in Fig. 1, S lying on the extension of A_1A_4 ; for $qx = 1$ S is at infinity and for $qx < 1$ S is on the extension of A_4A_1 . In all three cases the following derivation is essentially the same. If we apply MENELAUS to the triangle $A_1A_2A_4$ we obtain

$$A_4S_2:S_2A_2 = p:qx. \quad (2)$$

One of the parts in which α divides the tetrahedron is the polyhedron $A_1PS_1A_4QS_2$, which is the difference between the tetrahedra SA_1PS_1 and SA_4QS_2 having respectively the trihedra A_1 and A_4 in common with $A_1A_2A_3A_4$. If the volume of the latter is unity, the volume J_1 of $A_1PS_1A_4QS_2$ is therefore

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{qx}{qx-1} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{p}{p+1} - \frac{1}{qx-1} \cdot \frac{p}{qx+p} \cdot \frac{1}{q+1} \\ &= \frac{p}{qx-1} \cdot \frac{(q+1)qx^2(qx+p) - (p+1)(x+1)}{(p+1)(q+1)(qx+p)(x+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

As could be expected $qx-1$ is a factor of the numerator and the result is

$$J_1 = p \frac{q(q+1)x^2 + (p+1)(q+1)x + (p+1)}{(p+1)(q+1)(qx+p)(x+1)}. \quad (4)$$

The other part has the volume $J_2 = 1 - J_1$ and we obtain for the required ratio

$$\frac{J_1}{J_2} \equiv f(x, p, q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{q(q+1)x^2 + (p+1)(q+1)x + (p+1)}{(q+1)x^2 + (p+1)(q+1)x + p(p+1)}. \quad (5)$$

So much for the first set of planes α . We denote the planes of the second set by the ratio $A_1S'_1:S'_1A_4 = y$, $y \geq 0$. The two sets have two planes in common: $x = 0$ and $y = 0$, giving the plane A_1A_2Q and $x = \infty$, $y = \infty$ the plane A_3A_4P . It is obvious that we obtain the ratio according to which the planes of the second set divide the tetrahedron if we replace in (5) x by y and q by q^{-1} . Moreover we have to keep in mind that 'the' ratio of two volumes is an ambiguous concept, because it can be interchanged with its inverse. As will be clear from the figure, in order that the ratio for $x = 0$ and $y = 0$ be the same, we must take for the ratio of the second set

$$J'_2/J'_1 \equiv g(y, p, q) = f^{-1}(y, p, q^{-1}). \quad (6)$$

By (5) and (6) for all planes α through PQ the ratio of the volumes is given. We remark that $f(\infty, p, q) = p$, $g(\infty, p, q) = 1/p$, so that there is a discontinuity for the plane through A_3A_4 . That is what we expect: if x goes from ∞ to 0 and then y from 0 to ∞ we have at the end the same plane as at the start, but it has rotated through an angle π .

2. We discuss now our results (5) and (6).

For $p = q = 1$ we see that f and g are independent of x and y , and each equal to one. That is BOBILLIER's theorem.

If P does not coincide with the midpoint M of $A_1 A_2$, neither Q with the midpoint N of $A_3 A_4$, then we may without any loss of generality suppose $p > 1$, $q < 1$, because this can always be arrived at by interchanging A_1 and A_2 , or A_3 and A_4 if necessary. The derivative of f reads, if $N(x)$ stands for the denominator of (5):

$$\frac{df(p, q, x)}{dx} = \frac{p}{q} \cdot N^{-2}(x) (p+1)(q+1)\{(q+1)x + (p+1)\}\{(q-1)x + (p-1)\} \quad (7)$$

and its sign is therefore that of the last factor.

Hence, putting

$$x_0 = (p-1)/(1-q), \quad (8)$$

x_0 being a positive number, we have

$$\frac{df}{dx} > 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq x < x_0, \quad \frac{df(x_0)}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dx} < 0 \quad \text{for} \quad x > x_0.$$

The function f is therefore increasing from the value $f(0) = 1/q$ to its maximum

$$\begin{aligned} m = f(x_0) &= \frac{p}{q} \cdot \frac{pq + p - 3q + 1}{-pq + 3p - q - 1} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{2(p-1) + 2(1-q) - (p-1)(1-q)}{2(p-1) + 2(1-q) + (p-1)(1-q)} \end{aligned} \quad (9)$$

and then decreasing to $f(\infty) = p$. The minimum value of $f(x)$ being the smaller of the numbers $1/q$ and p , each more than one, there is among the planes of the first set no one which bisects the tetrahedron.

The derivative of $f(y, p, q^{-1})$ is obtained by replacing in (7) q by q^{-1} and is therefore always positive; that means that $f(y, p, q^{-1})$ increases if y goes from zero to infinity. The conclusion is that $g(y, p, q)$ is a decreasing function of y , starting with the value q^{-1} and ending with p^{-1} . Hence there is one value of y , the positive root of the quadratic equation $g(y, p, q) = 1$ for which the corresponding plane divides the tetrahedron in two equal parts. We remark that

$$\frac{df(0)}{dx} = \frac{(q+1)(p-1)}{pq}, \quad \frac{dg(0)}{dy} = \frac{(q+1)(p-1)}{pq^2};$$

hence the derivation of our ratio is discontinuous for α coincident with $A_1 A_2 Q$.

Summing up we have the following statements. *If in the tetrahedron $A_1 A_2 A_3 A_4$ we consider the pencil of planes α through the transversal PQ (P on $A_1 A_2$, $A_1 P : P A_2 = p > 1$, Q on $A_3 A_4$, $A_3 Q : Q A_4 = q < 1$), starting with the plane $A_3 A_4 Q$, rotating it around PQ through the angle π and ending therefore at the initial position, then the ratio of the volumes of the parts of the tetrahedron (taken in a certain order) starts with the value p , increases to the value m given by (9) and then decreases to the value p^{-1} .*

There is always one and only one plane through PQ which bisects the tetrahedron.

Independently of the order of the two parts the maximum of the ratio equals m and the minimum is m^{-1} .

The border cases $p = 1$ or $q = 1$ are easily dealt with. For $p = q = 1$ we have $m = 1$.

3. An attractive generalization of BOBILLIER's theorem given by LEVY [7] has been reproduced several times in the course of the years, inter alia by F.G.M. and by ALTSHILLER-COURT. It reads as follows: if a transversal PQ divides $A_1 A_2$ and $A_3 A_4$

in the same ratio, then each plane through PQ divides the tetrahedron in the same ratio. That would mean that $f(x)$, given by (5) would be independent of x if $p = q$. This is immediately seen not to be the case, f being a constant only if $p = q = 1$. Therefore the generalization can not be correct. If we check the proof given by the authors just mentioned we see that they consider the two parts of the tetrahedron (Fig. 1) as the sum of $A_1 \cdot PS_1QS_2$ and $A_1A_4QS_2$ and that of $A_2 \cdot PS_1QS_2$ and $A_2A_3QS_1$. The first terms have the ratio $A_1P : PA_2 = p$. The second terms are tetrahedra which have respectively the trihedra A_4 and A_3 in common with $A_1A_2A_3A_4$; hence their ratio is

$$\frac{A_4S_2}{A_4A_2} \cdot \frac{A_4Q}{A_4A_3} : \frac{A_3S_1}{A_3A_1} \cdot \frac{A_3Q}{A_3A_4}$$

that is for $p = q$ equal to

$$\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{p+1} : \frac{1}{1+x} \cdot \frac{p}{p+1} = 1:p.$$

The second terms have therefore the same ratio as the first but unfortunately in the wrong order, so that the conclusion is not valid. The generalization is obviously too good to be true.

4. We consider in five-dimensional affine space a simplex $A_1A_2 \dots A_6$ and the midpoints P_1, P_3, P_5 of three mutually skew edges A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 . If we introduce barycentric coordinates $x_i (i = 1, \dots, 6)$, then $P_1 = (110000)$, etc. Hence the equation of any four-dimensional space V through P_1, P_3 and P_5 reads

$$\lambda_1(x_1 - x_2) + \lambda_2(x_3 - x_4) + \lambda_3(x_5 - x_6) = 0. \quad (10)$$

The point of intersection of V and the line A_iA_j will be denoted by S_{ij} . Without loss of generality we may suppose $\lambda_i > 0$. Hence A_1, A_3, A_5 are on one side of V and A_2, A_4, A_6 on the opposite side. A point S_{ij} is on an edge if i and j have different parity. One of the two parts in which the simplex is divided by V is the polyhedron $A_1A_3A_5S_{ij}, i \neq j \pmod{1}$, which is the sum of the three simplices

$$A_1S_{12}S_{14}S_{16}S_{13}S_{15}, \quad A_3S_{34}S_{36}S_{32}S_{35}S_{31}, \quad A_5S_{56}S_{52}S_{54}S_{51}S_{53}. \quad (11)$$

From (10) it follows that $S_{14} = (\lambda_2 0 0 \lambda_1 0 0)$ and thus $A_1S_{14} : A_1A_4 = \lambda_1 : (\lambda_1 + \lambda_2)$; furthermore $S_{13} = (-\lambda_2 0 0 \lambda_1 0 0)$ and therefore $A_1S_{13} : A_1A_3 = \lambda_1 : (\lambda_1 - \lambda_2)$. If the volume of the simplex A_i is unity then that of the first simplex of (11) is

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_1^4}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}$$

and as

$$\frac{\lambda_1^4}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} + \frac{\lambda_2^4}{(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_3^4}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} = 1 \quad (12)$$

the sum of the three simplices (11) is seen to be $1/2$. The argument can be applied to any space with an odd number of dimensions. Hence we have proved the following generalization of BOBILLIER's theorem: *If in a space of $(2n - 1)$ -dimensions a simplex $A_1A_2 \dots A_{2n}$ is given, $P_i (i = 1, 3, \dots, 2n - 1)$ being the midpoints of a set of n mutually skew edges such as $A_{2k-1}A_{2k} (k = 1, \dots, n)$, then all (∞^{n-1}) $(2n - 2)$ -dimensional spaces through P_i divide the simplex in two parts of equal volume.*

O. BOTTEMA, Technische Hogeschool, Delft

REFERENCES

- [1] BOBILLIER, *Tout plan qui passe par la droite que déterminent les milieux des arêtes opposés d'un tétraèdre, le divise en deux parties équivalentes; Correspondance mathématique et physique*, Bd 3, (1827), S. 181–182.
- [2] MOLENBROEK, *Leerboek der stereometrie* (Groningen 1941), S. 174–175.
- [3] HADAMARD, *Leçons de géométrie élémentaire* Bd. 2, (Paris 1932), S. 112.
- [4] HOLZMÜLLER, *Elemente der Stereometrie* Bd. 2 (Leipzig 1900), S. 244.
- [5] ALTSHILLER-COURT, *Modern Pure Solid Geometry* (New York 1935), S. 89.
- [6] F.G.M., *Exercices de géométrie* (Tours, Paris 1907), S. 871–872.
- [7] LEVY, *Correspondance mathématique et physique*, Bd. 4 (1828), S. 3.

Anschauliche Behandlung eines Verzweigungsprozesses (branching process)

Verzweigungsprozesse (branching processes) geben eine mathematische Darstellung der Entwicklung einer «Bevölkerung» (population), bestehend aus irgendwelchen Elementen, die sich nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen fortpflanzen und nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen sterben. Sowohl die Elemente dieser Gesamtheit als auch die Art des Fortpflanzungsvorganges können in sehr verschiedener Art gewählt werden; indessen dürfen sich die Glieder gegenseitig weder hemmen noch fördern. T. E. HARRIS hat in den letzten Jahren in [2] eine zusammenfassende Theorie dieser Prozesse gegeben. – In den folgenden Zeilen soll für einen besonders einfachen Verzweigungsprozess, den Galton-Watson-Prozess, zunächst ein Urnenschema entwickelt werden; aus diesem sollen in anschaulicher Weise einige Folgerungen gezogen werden, die nachher vor allem auf das Problem des Aussterbens der Geschlechter angewendet werden.

1. Ein Urnenschema

Wir denken uns eine mit Kugeln gefüllte Urne. Jede Kugel trage eine nichtnegative ganze Zahl z als Nummer; im übrigen seien alle Kugeln gleich und $0 \leq z \leq \omega$. Die Wahrscheinlichkeit, aus der gut durchmischten Urne eine Kugel mit der Zahl z als Nummer zu ziehen, sei p_z . Es ist dann $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$, und es sei $p_0 \neq 0$ und $p_0 \neq 1$. Nun werde folgendes Spiel gespielt:

1. *Akt*: Es wird eine Kugel gezogen und ihre Nummer $z = z_1$ notiert. Dann wird sie zurückgelegt, und die Urne wird wieder gut durchmischt.

2. *Akt*: Nun werden nacheinander z_1 Kugeln gezogen. Dabei legen wir jede Kugel, nachdem wir ihre Nummer notiert haben, wieder zurück und mischen, bevor die nächste Kugel gezogen wird («Ziehen mit Zurücklegen»). Wir bilden die Summe z_2 der in diesem Akt notierten Nummern.

3. *Akt*: In analoger Weise ziehen wir jetzt z_2 Kugeln, wieder mit Zurücklegen, und bilden die Summe z_3 ihrer Nummern, usw.

Sobald eine der Summen $z_i = 0$ ist, brechen wir das Spiel ab; wir setzen in nahe-
liegender Weise in diesem Falle $z_{i+k} = 0$ für $k = 1, 2, 3, \dots$

Wir stellen jetzt die Frage: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit q_n , dass $z_n = 0$ ist? q_n ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unser Spiel spätestens mit dem n -ten Akt abbricht.

es ist

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_{n-1}) \quad \text{oder} \quad q = f(q).$$

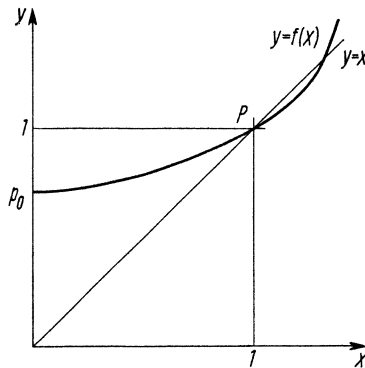
Die Wahrscheinlichkeit q , dass unser Spiel im Laufe der Zeit abbricht, ist somit gegeben als eine Lösung der Gleichung

$$x = f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots + p_\omega x^\omega. \quad (4)$$

3. Die Berechnung von q

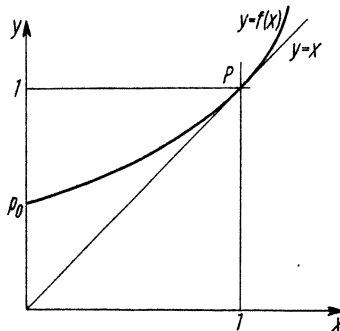
Gleichung (4) hat als eine Wurzel sicher 1, da nach der Definition unseres Spieles $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$ ist. Hat sie im Intervall $0 \leq x \leq 1$ noch weitere Wurzeln? Diese Frage kann – in Weiterführung eines Gedankens, der sich bei A. LOTKA in [4] und W. FELLER in [1] findet – wie folgt anschaulich behandelt werden: Wir betrachten die Graphen der beiden Gleichungen $y = x$ und $y = f(x)$, wobei f die bisherige Bedeutung habe. Wegen $1 = f(1)$ schneiden sich die beiden Graphen im Punkte $(1/1)$, und wir haben zu untersuchen, ob sich im Intervall $0 \leq x \leq 1$ noch weitere Schnittpunkte befinden; solche würden uns weitere Lösungen von Gleichung (4) ergeben. Für $x \geq 0$ ist nun der Graph von f konvex, und somit sind nur die drei Fälle denkbar:

a) *Zweiter Schnittpunkt ausserhalb $0 \leq x \leq 1$:*



Figur 1

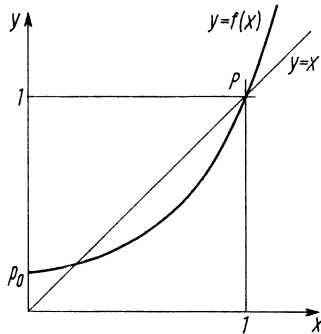
b) *Berührung im Punkte $(1/1)$:*



Figur 2

In diesen beiden Fällen ist also 1 die einzige uns interessierende Wurzel von Gleichung (4), und die Wahrscheinlichkeit q , dass unser Spiel im Laufe der Zeit abbricht, ist in diesen Fällen $q = 1$; das Spiel bricht sicher ab, wenn es lange genug gespielt wird.

c) *Zweiter Schnittpunkt innerhalb* $0 \leq x \leq 1$:



Figur 3

Nur in diesem Falle hat Gleichung (4) eine von 1 verschiedene Wurzel ξ im uns interessierenden Intervall; es ist – wie aus der Figur sofort ersichtlich – $q_1 = p_0 < \xi < 1$. Daraus folgt nun aber sofort $f(q_1) = q_2 < f(\xi) = \xi$ usw., also auch $f(q_{n-1}) = q_n < f(\xi) = \xi$. In diesem Falle hat also die Folge der q_n dieses $\xi < 1$ zum Grenzwert. Er stellt die Wahrscheinlichkeit q dafür dar, dass das Spiel im Laufe der Zeit abbricht; $1 - q > 0$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel niemals abbricht.

Nun wollen wir beachten, dass die ersten beiden Fälle, a und b, durch $f'(1) \leq 1$ und der dritte Fall, c, durch $f'(1) > 1$ charakterisiert sind.

Was bedeutet $f'(1) = 1$ $p_1 + 2 p_2 + 3 p_3 + \dots + \omega p_\omega$? Wir betrachten eine zufällige Variable Z , die die Werte $0, 1, 2, 3, \dots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$, beziehungsweise p_ω annimmt; Z ist also gegeben durch die Nummern der Kugel, die bei einem Zug aus unserer Urne erscheinen können. Dann ist $f'(1)$ gerade der Erwartungswert $E(Z)$ dieser zufälligen Variablen Z , und wir haben das Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit q , dass das Spiel im Laufe der Zeit abbricht, ist genau dann < 1 , wenn $E(Z) > 1$.

4. Beispiele

4.1 Wir denken uns einen männlichen Neugeborenen als Stammvater eines Geschlechtes; er repräsentiere die 0. Generation. Die Zahl seiner männlichen Nachkommen, die als Stammhalter für den Fortbestand des Geschlechtes sorgen, wollen wir als Wert einer zufälligen Variablen Z auffassen; für die Werte z von Z gelte $0 \leq z \leq \omega$. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten seien p_z ; $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$. Diese männlichen Nachkommen bilden die 1. Generation. Unabhängig von Einflüssen der Vererbung, der Zeit oder der Umwelt bestehe nun für jeden männlichen Neugeborenen der 1. Generation wieder die Wahrscheinlichkeit p_z , im Laufe seines Lebens genau z männliche Nachkommen zu haben. Diese männlichen Nachkommen der 1. Generation bilden die

2. Generation. Wiederum bestehe für jeden von diesen – unabhängig von den genannten Einflüssen – die Wahrscheinlichkeit p_z , im Laufe seines Lebens genau z männliche Nachkommen zu erhalten, usw. Offensichtlich lässt sich die Entwicklung dieses Geschlechtes durch unser obiges Urnenschema darstellen. Das Ergebnis des zweiten Abschnittes gibt uns jetzt die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass in einer Generation 0 männliche Nachkommen sein werden, mit andern Worten, *die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, dass das Geschlecht ausstirbt*. Diese Wahrscheinlichkeit ist gerade durch unser q gegeben. Der oben eingeführte Erwartungswert $E(Z)$ erhält nun ebenfalls eine sehr anschauliche Bedeutung: $E(Z)$ stellt den Erwartungswert der direkten (männlichen) Nachkommen für ein Element irgendeiner Generation dar, also etwa die *«mittlere Anzahl von direkten (männlichen) Nachkommen» eines Elementes irgendeiner Generation*. Und das Ergebnis unserer Untersuchung besagt: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Geschlecht im Laufe der Zeit ausstirbt, ist genau dann kleiner als 1, wenn die *«mittlere Anzahl von direkten (männlichen) Nachkommen»* eines Elementes grösser als 1 ist. Genau in diesem Falle besteht also eine von 0 verschiedene Wahrscheinlichkeit dafür, dass das vom Stammvater hoffnungsvoll begründete Geschlecht weiterblüht ...

Es ist vielleicht angebracht, nochmals auf die wesentlichsten unserer vereinfachenden Annahmen für die Entwicklung eines Geschlechtes hinzuweisen: Wir haben die p_z als zeitlich konstant vorausgesetzt; die Statistiker weisen indessen darauf hin, dass zunächst infolge des Rückganges der Sterblichkeit immer mehr Neugeborene das heiratsfähige Alter erreichen und dass ferner eine säkulare Zunahme der Heiratsfähigkeit festgestellt werden kann. (Man vergleiche darüber z. B. A. MOSER [5].) Wir haben weiter auch vorausgesetzt, dass die p_z nicht davon abhängen, ob das Element, das Nachkommen erzeugt, etwa aus einer Familie mit viel oder wenig Nachkommen stammt.

In diesem Zusammenhange mögen Schätzwerte für die p_z und für $E(Z)$ interessieren. Soviel uns bekannt ist, lassen sich solche Schätzwerte nicht ohne weiteres aus bereits vorhandenen statistischen Unterlagen gewinnen. Wir sind dieser Frage in [3] nachgegangen. Eine Untersuchung in Luzern (durchgeführt für Korporationsbürger) ergab nach Ausgleichung die folgenden Schätzwerte:

$$p_0 \approx 0,605; \quad p_z \approx 0,654 \cdot e^{-0.977z} \quad \text{für } z \geq 1; \quad E(Z) \approx 0,635.$$

In Deutschland sind vor einem Jahrzehnt Erhebungen über die *«ideale Familiengrösse»* durchgeführt worden; es ist dabei auch auf die gute Übereinstimmung zwischen der *«idealen»*, d. h. der gewünschten, und der tatsächlichen Kinderzahl hingewiesen worden. Für Geschlechter, die sich nach diesem *«Idealfall»* entwickeln, lassen sich ebenfalls Schätzwerte für die p_z errechnen, wenn noch einige naheliegende weitere Annahmen gemacht werden:

$$p_0 \approx 0,43; \quad p_1 \approx 0,30; \quad p_2 \approx 0,21; \quad p_3 \approx 0,053; \quad p_4 \approx 0,005; \quad p_5 \approx 0,002; \quad E(Z) \approx 0,91.$$

Für alle Einzelheiten und weitere Schätzwerte sei auf die bereits genannte Arbeit [3] verwiesen. In den beiden genannten Fällen ist also $E(Z)$ geschätzt kleiner als 1; Familien, die sich so entwickeln, sterben mit Sicherheit aus. – A. LOTKA gibt in [4] entsprechende Schätzwerte, die auf der amerikanischen Bevölkerungsstatistik des Jahres 1920, die weisse Rasse betreffend, basieren; hier ergab sich für $E(Z) \approx 1,260$ und eine Wahrscheinlichkeit von etwa 82% für das Aussterben einer solchen Linie.

4.2 Unser Urnenschema ist aber nicht nur für dieses Problem aus der Familienstatistik anwendbar. So hat E. SCHRÖDINGER in [6] derartige Betrachtungen an *Kettenreaktionen* angestellt: Durch ein Neutron der geeigneten Energie (0. Generation) wird mit der Wahrscheinlichkeit p ein schwerer Kern gespalten, dabei mögen m Neutronen entstehen. Diese bilden die 1. Generation. Nun denken wir uns den Prozess fortgesetzt, wobei für jedes dieser Neutronen wieder die Wahrscheinlichkeit p bestehe, neue Kerne zu spalten usw. Hier ist also $p_0 = 1 - p$ und $p_m = p$; für $z \neq 0$, m ist $p_z = 0$. In gewissen einfachen Fällen könnte unser Schema ferner auf *Warteschlangen* angewendet werden: An einem Arbeitsplatz, an welchem immer nur ein Stück repariert werden kann, befindet sich ein Stück in Reparatur (0. Generation). Alle Stücke, die während der Zeit eintreffen, da dieses Stück repariert wird, gelten als seine «Nachkommen» und bilden die 1. Generation. p_z ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während der Zeit, da das Stück der 0. Generation instand gestellt wird, genau z weitere Stücke eintreffen und warten müssen. Alle Stücke, die eintreffen, während ein Stück der 1. Generation wiederhergestellt wird, bilden die 2. Generation usw. Sobald eine Generation 0 Stücke umfasst, werde die Arbeit eingestellt. – Hinweise auf analoge Problemstellungen bei gewissen *chemischen Kettenreaktionen* oder bei Fragen der *Genetik* finden sich z. B. bei T. E. HARRIS in [2].

5. Der Galton-Watson-Prozess

Unser Urnenschema stellt, wie in der Einleitung erwähnt, einen sogenannten *Galton-Watson-Prozess*¹⁾ dar, den wir im Anschluss an T. E. HARRIS [2] wie folgt definieren können:

a) Wir denken uns Objekte, die weitere Objekte *derselben* Art, ihre Nachkommen, erzeugen können.

b) Die am Anfang gegebene Menge solcher Objekte nennen wir die 0. Generation, ihre Nachkommen bilden die 1. Generation, deren Nachkommen die 2. Generation usw.

c) Die Anzahl der Objekte in der i -ten Generation ist ein Wert einer zufälligen Variablen Y_i , $i = 0, 1, 2, \dots$. Wir setzen stets $Y_0 = 1$; die Wahrscheinlichkeit, dass $Y_1 = z$, mit $z = 0, 1, 2, \dots, \omega$, bezeichnen wir mit p_z :

$$P(Y_1 = z) = p_z, \quad \sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1.$$

d) Für jedes Objekt in irgendeiner Generation sei nun die Wahrscheinlichkeit, im Laufe seines ganzen Lebens z Nachkommen zu haben ($z = 0, 1, 2, \dots, \omega$) wieder durch diese p_z gegeben.

Die Y_i bilden dann offenbar eine (einfache, homogene) *Markoffsche Kette*: Die Wahrscheinlichkeit, dass in der $(n+1)$ -ten Generation k Objekte vorkommen, hängt nur davon ab, wie gross die Zahl der Objekte in der n -ten Generation ist:

$$P(Y_{n+1} = k | Y_n = j) = w_{jk}; \quad j, k, n = 0, 1, 2, \dots; \quad Y_0 = 1.$$

¹⁾ Nach dem Botaniker F. GALTON, der sich ebenfalls mit dem Prozess des Aussterbens der Geschlechter befasst hat, und H. W. WATSON, der eine erste mathematische (unvollständige) Lösung dieses Problems gegeben hat (1874). Watson hat die mögliche Existenz einer Wurzel $\xi = q < 1$ übersehen.

(Diese *Übergangswahrscheinlichkeiten* $w_{j,k}$ sind als bedingte Wahrscheinlichkeiten nicht definiert für jene j , für die $P(Y_n = j) = 0$ ist.)

Diesen Galton-Watson-Prozess, der also eine spezielle Markoffsche Kette darstellt, haben wir in unseren obigen Betrachtungen daraufhin untersucht, dass er spätestens in der n -ten Generation abbricht, wofür wir die Wahrscheinlichkeit

$$q_n = P(Y_n = 0)$$

durch (1) angegeben haben. Ist aber $Y_n = 0$, so folgt aus der Definition des Prozesses

$$P(Y_{n+1} = 0 | Y_n = 0) = w_{00} = 1.$$

Das heisst aber, dass mit der n -ten auch alle spätern Generationen 0 Objekte haben: Die Linie erlischt, das Geschlecht stirbt aus. Der Zustand $Y_n = 0$ stellt einen *absorbierenden* Zustand dar; er kann nicht mehr verlassen werden. – Mit $q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ haben wir weiter die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die Linie im Laufe der Zeit erlischt.

Soll unser Prozess in anderer Richtung untersucht werden, indem wir z.B. nach der Wahrscheinlichkeit fragen, in einer bestimmten Generation eine gewisse Anzahl von Objekten vorzufinden, so bieten sich als geeignete mathematische Hilfsmittel erzeugende Funktionen an; es sei dafür auf [1], [3] oder [4] verwiesen.

ROBERT INEICHEN, Luzern/Fribourg

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2. Aufl. (New York, London 1957).
- [2] T. E. HARRIS, *The Theory of Branching Processes*, (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 119), (1963).
- [3] R. INEICHEN, *Vom Aussterben der Geschlechter*, Mitt. naturf. Ges. Luzern, 21 (1967).
- [4] A. LOTKA, *Théorie analytique des associations biologiques*, II^e partie (Paris 1939).
- [5] A. MOSER, *Familienstatistik und Bevölkerungsvermehrung*, Mitt. des statist. Büros des Kantons Bern, Nr. 45 (1962).
- [6] E. SCHRÖDINGER, *Probability Problems in Nuclear Chemistry*, Proc. R. Ir. Acad. 51 (1945–48).

Kleine Mitteilungen

Super Perfect Numbers

A positive integer n is called a super perfect number if $\sigma(\sigma(n)) = 2n$, where $\sigma(n)$ is the sum of all the divisors of n . The problem of finding super perfect numbers is similar to that of finding perfect numbers.

In this note we prove the following theorem concerning even super perfect numbers and pose the existence of odd super perfect numbers as a problem:

Theorem. An even integer n is super perfect if and only if n is of the form 2^r , where $2^{r+1} - 1$ is a prime.

Proof. Firstly, let $n = 2^r$, where $2^{r+1} - 1$ is a prime. Then $\sigma(\sigma(n)) = \sigma(2^{r+1} - 1) = 2^{r+1} = 2n$, so that n is a super perfect number.

Secondly, let n be any even super perfect number. Then we can write $n = 2^r q$, where q is odd. Since n is super perfect, we have

$$2^{r+1} q = 2n = \sigma(\sigma(n)) = \sigma((2^{r+1} - 1) \sigma(q)). \quad (1)$$

If $q > 1$, then $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$, $\sigma(q)$, $(2^{r+1} - 1)$ and 1 are distinct divisors of $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$, so that from (1), we have

$$2^{r+1} q \geq (2^{r+1} - 1) \sigma(q) + \sigma(q) + (2^{r+1} - 1) + 1 = 2^{r+1} (\sigma(q) + 1) > 2^{r+1} q,$$

a contradiction. Therefore $q = 1$, so that from (1), we have $2^{r+1} = \sigma(2^{r+1} - 1)$, which implies that $2^{r+1} - 1$ is a prime. Hence $n = 2^r$, where $2^{r+1} - 1$ is a prime. Thus the theorem is proved.

Problem. Are there odd super perfect numbers?

D. SURYANARAYANA, Waltair, India

Bemerkung zur Aufgabe 493

In den Anwendungen der Aufgabe [1] wurde gezeigt, dass die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Schwerpunkt einem Vierecksatz genügt.

Es sei nun P ein innerer Punkt eines Ovals K . Die polare Reziproke von K bezüglich des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt P sei K^P . Wenn F den Flächeninhalt bezeichnet, so ist $F(K) F(K^P)$ eine affine Invariante [2]. Die Bestimmung des Minimums dieses Ausdrucks, d. h.

$$\min_K \min_{P \in K} F(K) F(K^P)$$

ist eine ungelöste Frage. Das Minimum ist allgemein $\geq 27/4$ (angenommen für ein Dreieck bezüglich seines Schwerpunkts) und ≥ 8 für ein symmetrisches Oval¹⁾. Die Stützfunktion von K , gemessen von P , sei $h(\theta)$. Hier ist θ der Stützwinkel. Dann ist $h^{-1}(\theta)$ der Radiusvektor von K^P als Funktion des Polarwinkels θ . SANTALÓ [2] hat bewiesen, dass $F(K) F(K^P)$ ein einziges Minimum in K hat und dass der entsprechende Punkt P durch

$$\int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \sin \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \cos \theta \, d\theta = 0$$

charakterisiert ist. Man überzeugt sich leicht, dass dies bedeutet, dass P der Schwerpunkt von K^P ist. Die letztere Bedingung definiert also einen einzigen Punkt in K .

Wenn K einen stetigen euklidischen Krümmungsradius $R(\theta)$ besitzt, so ist die unimodular zentro-affine Krümmung gleich $k(\theta) = (R h^3)^{-1} = h^{-3}/R$. Aus Aufgabe 493 folgt sofort: *Die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Minimalpunkt von $F(K) F(K^P)$ genügt einem Vierecksatz.*

(Research partially supported by NSF Grant GP-5760.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aufgabe 493, *El. Math.* 21, 17–18 (1966).
- [2] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*. *Matematicae Notae* 8, 103–111; L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para los cuerpos convexas del espacio de n dimensiones*, *Portugaliae Math.* 8, 155–161 (1949).

¹⁾ K. MAHLER, Ein Minimalproblem für konvexe Polygone, *Mathematica (Zutphen)* B. 7, 118–127 (1938/39). Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Dr. E. Heil, Darmstadt.

Aufgaben

Aufgabe 564. Ein Glücksspiel wird nach folgender Regel gespielt: In einer Urne befinden sich n Kugeln, die die Nummern 1, 2, ..., n tragen. Ein Spieler darf nach Entziehung eines Einsatzes diese Kugeln einzeln nacheinander aus der Urne ziehen, und wenn darunter r Kugeln sind, die beim s ten Zug die Nummer s trugen, erhält er den r -fachen Betrag seines Einsatzes zurück.

Man beurteile die Gewinnchance des Spielers unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ausfälle gleich wahrscheinlich sind.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Lösung: Der Erwartungswert des Gewinnes des Spielers ist gleich seinem Einsatz, den wir als 1 annehmen. Zum Beweis bedeute $f(s)$ die Anzahl derjenigen Permutationen von s Zahlen, bei denen keine einzige Zahl ihren ursprünglichen Platz beibehält. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler beim Ziehen der n Kugeln genau r mal die «richtige» Kugel genommen hat, ist offenbar

$$w(r) = \frac{1}{n!} \binom{n}{r} f(n-r). \quad (1)$$

Der Erwartungswert des Gewinnes ist

$$E = \sum_{r=0}^n r w(r) = \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} f(n-r). \quad (2)$$

Durch Abzählen aller Permutationen von $n-1$ Zahlen erhält man die Beziehung

$$(n-1)! = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} f(i)$$

oder

$$f(n-1) = (n-1)! - \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{n-1-i} f(i). \quad (3)$$

Setzt man (3) im ersten Summanden der Summe in (2) ein, so folgt wegen

$$\binom{n-1}{n-1-i} = \frac{n-i}{n} \binom{n}{n-i}$$

sofort $E = 1$.

H. MEILI, Winterthur

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig) und P. HOHLER (Dietikon).

Aufgabe 565. Man zeige, dass in einem orthonormierten Koordinatensystem die Gleichung

$$(x_1^2 - x_2 x_3)^2 + (x_2^2 - x_3 x_1)^2 + (x_3^2 - x_1 x_2)^2 = c^4$$

eine Drehfläche darstellt. Man bestimme die Drehachse und eine Meridiankurve.

L. KIEFFER, Luxemburg

1. *Lösung:* Die gemeinsamen Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ der gegebenen Fläche

$$F: \Sigma (x_i^2 - x_{i+1} x_{i+2})^2 = c^4$$

und einer zur Geraden $g: x_1 = x_2 = x_3$ senkrechten Ebene $E: \Sigma x_i = 3t$ (Parameter t beliebig reell) bilden einen Kreis mit dem Mittelpunkt $M(t/t/t)$, dessen Radius r der Beziehung $3r^4 + 36t^2 r^2 = 4c^4$ genügt. Da dies für alle t gilt, ist F eine Drehfläche mit der Drehachse g .

Beweis: Es ist

$$\overline{MP}^2 = \Sigma (x_i - t)^2 = \Sigma x_i^2 - 2t \Sigma x_i + 3t^2 = \Sigma x_i^2 - 3t^2,$$

also

$$3 \overline{MP}^4 + 36t^2 \overline{MP}^2 = 3 (\Sigma x_i^2 - 3t^2) (\Sigma x_i^2 + 9t^2).$$

Wegen $\Sigma x_i = 3t$ ist $\Sigma x_i^2 + 2 \Sigma x_i x_{i+1} = 9t^2$, somit

$$\Sigma x_i^2 - 3t^2 = (2/3) (\Sigma x_i^2 - \Sigma x_i x_{i+1}) \quad \text{und} \quad \Sigma x_i^2 + 9t^2 = 2 (\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_{i+1}),$$

folglich

$$3 \overline{MP}^4 + 36t^2 \overline{MP}^2 = 4 \{ (\Sigma x_i^2)^2 - (\Sigma x_i x_{i+1})^2 \} = 4 \Sigma (x_i^2 - x_{i+1} x_{i+2})^2 = 4c^4.$$

Bei festem t ist demnach \overline{MP} konstant für alle $P \in E \cap F$, und es ist $M \in g \cap E$, womit obige Aussage bewiesen ist.

Aus $3r^4 + 36t^2 r^2 = 4c^4$ ist zu entnehmen, dass eine Meridiankurve vom Typus einer Konchoide ist; sie nähert sich für $|t| \rightarrow \infty$ asymptotisch der Drehachse g und nimmt für $t = 0$ ihren grössten Achsenabstand $c(4/3)^{1/4}$ an.

O. REUTTER, Ochsenhausen

2. *Lösung*: Unter Beibehaltung der x_3 -Achse drehen wir die x_1 -Achse in die Halbierende des 1. Quadranten der $x_1 x_2$ -Ebene. Das neue System heiße XYZ . Bei fester Y -Achse drehen wir sodann die Z -Achse in die ursprüngliche Gerade $x_1 = x_2 = x_3$, die sich in der Bezeichnung z -Achse als Drehachse der Rotationsfläche erweisen wird. Das endgültige System heiße xyz . Insgesamt liegt jetzt vor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/3 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/3 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Flächengleichung lautet dann $4c^4 = 3(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 4z^2)$. Es liegt also wie angekündigt eine Drehfläche $z = f(x^2 + y^2)$ vor. Der Meridian $x = 0$ hat z. B. für $c^4 = 3/4$ die Gleichung $z = (1/2)\sqrt{y^2 - y^2}$.

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 566. In einer Ebene, in der ein Kreis K und ein Punkt A gegeben sind, wird jedem Punkt P derjenige Punkt P' auf der Geraden AP zugeordnet, der zu P bezüglich K konjugiert ist. Man beweise: Fasst man alle Geraden der Ebene, die durch die Abbildung $P \rightarrow P'$ in zueinander ähnliche Kegelschnitte übergehen, in eine Schar zusammen, so sind die Enveloppen dieser Scharen konzentrische Kreise. Diejenigen Geraden, die in gleichseitige Hyperbeln übergehen, bilden das Bündel durch das gemeinsame Zentrum dieser Kreise.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Der Bildpunkt P' des Punktes P der Geraden g ist der Schnittpunkt von AP mit der Polaren p von P . p läuft durch den Pol von g und steht senkrecht auf MP (M = Mittelpunkt von K). Die Geraden AP ($P \in g$) und die zugehörigen Polaren p bilden daher zwei projektive Strahlenbündel mit dem Kegelschnitt g' (= Bild von g) als «Schnittkurve».

Die Ferngerade der Ebene wird auf den Thaleskreis T mit dem Durchmesser AM abgebildet. Wegen $(P')' = P$ sind die Urbilder der Fernpunkte von g' die (reellen oder komplexen) Schnittpunkte S_1, S_2 von g mit T . Die Bildpunkte S'_1, S'_2 liegen auf AS_1, AS_2 . Also ist $\sphericalangle S_1AS_2$ der «Winkel» zwischen den Fernpunkten von g' . Zwei Kegelschnitte sind ähnlich, wenn ihre Fernpunkte denselben (reellen oder komplexen) Winkel einschließen.

$\sphericalangle S_1AS_2$ ist Peripheriewinkel auf dem Thaleskreis T . Es werden somit diejenigen Geraden als ähnliche Kegelschnitte abgebildet, die (nach dem Peripheriewinkelsatz) gleichlange Sehnen aus T ausschneiden, die also einen zu T konzentrischen Kreis einhüllen. (Im Fall gleichseitiger Hyperbeln ist $\sphericalangle S_1AS_2 = \pi/2$, d. h. S_1S_2 Durchmesser von T .)

W. VINZENZ, München

Weitere Lösungen sandten K. GRÜN (Linz/Donau) und L. KIEFFER (Luxemburg).

Aufgabe 567. Man beweise: Eine Zahl α ist genau dann rational, wenn die Zahlenfolge $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots$ eine wenigstens dreigliedrige geometrische Teilfolge enthält.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Lösung: Ist $\alpha = p/q$ (p und q natürliche Zahlen), so sind $\alpha, \alpha + p$ und $\alpha + 2p + pq$ in geometrischer Progression. Wenn α rational, aber nicht positiv ist, wende man das obige auf die positive rationale Zahl $\alpha - [\alpha] + 1$ an.

Sind umgekehrt $\alpha, \alpha + n$ und $\alpha + n + m$ in geometrischer Progression (n und m natürliche Zahlen), so ist $\alpha = n^2/(m - n)$ rational.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), P. HOHLER (Dietikon), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen).

Neue Aufgaben

Aufgabe 589. In einer Ebene sind drei Kreisbüschel gegeben. Man konstruiere drei zueinander orthogonale Kreise, von denen jeder einem dieser Büschel angehört.

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

Aufgabe 590. Gegeben sind die Ausdrücke

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

Man zeige $A_n = B_n = n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$.

I. PAASCHE, München

Aufgabe 591. Für welche reellen Zahlen α gilt die Implikation

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \dots = \sum_{i=1}^n x_i^n = \alpha \Rightarrow (\forall r \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^n x_i^{+r} = \alpha,$$

wobei x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) reelle Zahlen sind?

D. VELJAN, Zagreb

Aufgabe 592. Für $k = 1, 2, \dots$ bezeichne $(n, m)_k$ den grössten gemeinsamen Teiler von n und m der Potenz k , $\sigma_s(k, m)$ die Teilerfunktion

$$\sigma_s(k, m) = \sum_{t \mid d^k - m} t^s$$

und $c_n^{(k)}(m)$ die verallgemeinerte Ramanujansche Summe

$$c_n^{(k)}(m) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n^k \\ (r, n^k)_k = 1}} e^{2\pi i r m / n^k}.$$

Man beweise die für $R(s) > 1/k$ gültige Darstellung

$$\sigma_{s-1}(k, m) = \zeta(k s) m^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^{(k)}(m)}{n^{k s}},$$

worin ζ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

E. KRÄTZEL, Jena

Literaturüberschau

Calculus of Fractions and Homotopy Theory. Von P. GABRIEL und M. ZISMAN. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. X und 168 Seiten mit 114 Figuren. DM 38.—. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1967.

Dieses Buch vermittelt eine in sich abgeschlossene Darstellung der semisimplizialen Topologie. Es wird dabei durchweg ausführlicher Gebrauch der Kategoriensprache gemacht. Der Leser findet zu Beginn des Buches eine Zusammenstellung der fundamentalen Begriffe und Konstruktionen in der Kategorientheorie.

Hauptanliegen des Buches ist die Konstruktion der sogenannten homotopischen Kategorie H und ihre Beziehung zu andern wohlbekannten Kategorien. Insbesondere wird gezeigt, dass die Kategorie H äquivalent ist zur Kategorie der CW-Komplexe modulo Homotopie. Ausgangspunkt der Konstruktion von H ist die Kategorie $\mathcal{A}^0 E$ der semisimplizialen Mengen. In dieser wird eine Homotopie erklärt und in der entsprechenden Kategorie $\overline{\mathcal{A}^0 E}$ der semisimplizialen Mengen modulo Homotopie eine spezielle Klasse \mathcal{A} von Morphismen ausgezeichnet. Geometrisch gesprochen ist \mathcal{A} die Klasse derjenigen Morphismen in $\mathcal{A}^0 E$, deren geometrische Realisierung invertierbar ist. Die homotopische Kategorie H geht nun aus $\overline{\mathcal{A}^0 E}$ dadurch hervor, dass die Morphismen der Klasse \mathcal{A} formal

invertierbar gemacht werden. Dieser Prozess wird auch als Lokalisierung der Kategorie $\overline{A^0E}$ bezüglich des Systems A bezeichnet.

Kapitel I handelt vom Problem der Lokalisierung einer Kategorie C bezüglich einer Klasse Σ . Es wird gezeigt, dass die Lokalisierung besonders übersichtlich beschrieben werden kann, wenn die Klasse Σ einen «calculus of fractions» zulässt. In diesem Falle wird das Problem der Lokalisierung in enge Verknüpfung gebracht mit der Existenz adjungierter Funktoren. In Kapitel II werden die semisimplizialen Komplexe besprochen und die Poincaré-Gruppe eingeführt. Kapitel III handelt von Milnors Realisierungsfunktor $|\cdot|$. Es wird gezeigt, dass falls der Bildbereich von $|\cdot|$ die Kelley-Räume sind, dieser Funktor mit direkten und endlichen inversen Limites kommutiert. In Kapitel IV wird nach dem in Kapitel I entwickelten Konzept die homotopische Kategorie eingeführt. In Kapitel V und VI wird eine einheitliche, selbstduale Beschreibung einiger in der algebraischen Topologie bekannten exakten Sequenzen gegeben. Kapitel VII schliesslich bringt als Hauptergebnis die Äquivalenz der semisimplizialen und der topologischen Theorie. Im Anhang I ist die Theorie der Überlagerungen besprochen. In Anhang II wird die Äquivalenz der Homologie eines semisimplizialen Komplex mit der singulären Homologie der zugehörigen Realisierung gezeigt und die Spektralsequenz einer Faserung diskutiert.

Ein mit der Kategorientheorie nicht vertrauter Leser wird den Aufbau dieses Buches als sehr abstrakt und den Stoff als schwierig zu bewältigen finden. H. VÖGELE

Linear Differential Equations and Function Spaces. Von JOSÉ LUIS MASSERA und JUAN JORGE SCHÄFFER. XX und 404 Seiten. \$16.00. Academic Press, New York and London 1966.

Der Hauptteil des Buches enthält die Ergebnisse der neueren Untersuchungen der Autoren über die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} + Ax = f$$

In dieser Gleichung sind $x(t)$ und $f(t)$ Funktionen über $R_+ = [0, +\infty)$ mit Werten in einem Banachraum X . A ist eine Abbildung von R_+ in den Raum der beschränkten Operatoren über X . Im ersten Teil werden die notwendigen Grundlagen für die folgende Theorie zusammengestellt. Die Geometrie der Banachräume, verschiedene Klassen von Funktionenräumen und grundlegende Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen werden behandelt. Der zweite Teil enthält die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Zur Charakterisierung des Verhaltens der Lösungen der homogenen Gleichung werden die Begriffe «Ordinary Dichotomy» und «Exponential Dichotomy» eingeführt und diskutiert. Ein Paar von Funktionenräumen wird in bezug auf eine inhomogene Gleichung als zulässig definiert, wenn zu jeder Funktion f des ersten Raumes eine Lösung x aus dem zweiten Raum existiert. Das folgende Kapitel behandelt die Zusammenhänge zwischen dem Verhalten der Lösungen der homogenen Gleichung und der Zulässigkeit bei der inhomogenen Gleichung. Abschliessend wird die Abhängigkeit der untersuchten Eigenschaften von der Operatorfunktion A studiert. Den Abschluss des Hauptteils bildet eine Untersuchung über verschiedene Probleme der linearen Gleichungen über $R = (-\infty, +\infty)$. Der dritte Teil enthält verschiedene Ergänzungen und Spezialfälle der allgemeinen Theorie (Gleichungen mit periodischem oder fastperiodischem A , Gleichungen höherer Ordnung). Dem Buch ist ein ausführliches Literaturverzeichnis beigegeben.

Obwohl die Theorie der Banach- und Hilbert-Räume, soweit sie für die vorliegenden Untersuchungen benötigt wird, am Anfang kurz zusammengestellt ist, sind für das Verständnis des Buches gewisse Kenntnisse aus der Funktionalanalysis, insbesondere der Theorie der Banachräume, notwendig. A. MÜLLER

Ordinary Differential Equations. Von I. G. PETROVSKI, X und 232 Seiten mit 45 Figuren. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1966.

Blättert man auf den ersten Seiten in dieser fliessend, von R. A. SILVERMANN besorgten, englischen Übersetzung der 1964 in Moskau erschienenen russischen Originalarbeit, so fällt zunächst die bekannte Reihenfolge der Grundthemen dieser Vorlesung auf. Bei

genauerem Durchlesen entdeckt man aber bald die sehr sorgfältig aufgebaute Theorie mit gründlicher Diskussion einiger Typen expliziter (reeller) Gleichungen erster Ordnung und die strengen Beweise der zugehörigen Theoreme. Dem Studierenden sind am Ende grösserer Abschnitte Probleme beigelegt, die von einfacheren Berechnungen, Aufsuchen von Beispielen zur Theorie bis zu sehr anspruchsvollen, rein theoretischen Fragen reichen.

Den Hauptraum dieses Lehrbuches (etwa 160 Seiten) nimmt die allgemeine Theorie ein, die in jedem der behandelten Kapitel: Funktion $y' = f(x, y)$ – Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen – lineare Systeme – lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten – Autonome Systeme – in einheitlicher Art aufgebaut ist, nämlich zuerst Existenz der Lösung – Eindeutigkeit – das Cauchy-Problem – Implizite Form der Gleichung usw. Zahlreiche wichtige Eigenschaften sind kurz dargestellt: Stabilität der Lösung (nach LYAPUNOV), kanonische Form der Lösung usw. Nur als Zusatz beschliesst ein Abschnitt (33 Seiten) über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung das beachtenswerte Werk.

A. HÄUSERMANN

Introductory Calculus with Algebra and Trigonometry. Von S. BELL, J. R. BLUM, J. V. LEWIS, J. ROSENBLATT. XXIV und 309 Seiten mit 193 Figuren. \$9.35. Holden-Day, San Francisco 1966.

Dieses Werk erfüllt zwei Aufgaben: es ist einerseits ein Lehr- und Übungsbuch für einen einjährigen Kurs in eine «moderne» Infinitesimalrechnung, und auch andererseits eine Einführung in das zweite Buch «University Calculus» derselben Verfasser, auf das oft für genauere Begründungen hingewiesen wird. Die Darstellung unseres Buches ist durchaus anschaulich und bevorzugt Beispiele technischer oder physikalischer Vorgänge; von modern axiomatischer Darstellung oder einer Terminologie der Mengenlehre ist nichts zu spüren.

Es wird offenbar mit sehr unterschiedlichen Vorkenntnissen der Leser gerechnet, wird doch hier auf fast einem Drittel des Lehrstoffes der «background» in Kürze aufgefrischt, aber auch auf Fragen der Genauigkeit eingegangen und von elementaren Funktionen die Umkehrung (Arkusfunktionen) und die Komposition behandelt. Etwa 360 Aufgaben (teilweise mit Lösungen) sind für diese «Repetition» bereitgestellt.

Die Begriffe der Ableitung und des bestimmten Integrals sowie der Fundamentalsatz werden mit physikalischen Überlegungen entwickelt, daran anschliessend verallgemeinert, aber ohne ausführliches Eingehen auf die Grenzwertbildung, und erst nachher die geometrische Bedeutung der Begriffe angezeigt. Ausführlich sind aber die sehr zahlreichen Beispiele und Übungen dargestellt. Eine kurze Einführung in Ableitung und Integral von Funktionen mit zwei freien Variablen beschliessen das eigenwillige Werk. Fast 400 Aufgaben zeigen dem Studierenden die Technik und die Anwendungsgebiete der Ableitung und des Integrals.

A. HÄUSERMANN

Modern University Calculus. Von S. BELL, J. R. BLUM, J. V. LEWIS und J. ROSENBLATT. 905 Seiten. \$12.95. Holden-Day, San Francisco 1966.

Dieses dicke Buch ist der zweite Teil eines Werkes, welches Anfängern die Elemente der Infinitesimalrechnung – und soweit nötig – auch mathematische Logik, lineare Algebra und analytische Geometrie vermittelt. Die Verfasser haben sich sehr darum bemüht, die Gedankenschritte stets zu motivieren und die Theorie anhand einfacher Beispiele zu veranschaulichen. Gross ist die Zahl der «drill exercises» sowie der angewandten Aufgaben, und wo letztere nicht zur Verfügung stehen, erfinden die Verfasser «lebensnahe» Beispiele über Autos, Sport, hübsche Mädchen u. a.

R. CONZELMANN

Calculus \cup Analysis \cup Vectors. Von JOHN F. RANDOLPH. XI und 681 Seiten. s 88—. Dickenson Publishing Company, Belmont, California 1967.

Auch dieser Autor schreibt für Anfänger. Das Anschauliche wird der abstrakten Theorie vorgezogen, und schwierige Beweise werden auf später verschoben. Der Lehrgang behandelt auch die Analysis der Funktionen von mehreren Variablen und schliesst mit je einem Abschnitt über unendliche Reihen und Differentialgleichungen. Dass Kegel und

Zylinder im Schrägbild oft falsch gezeichnet sind, spielt für das Verständnis keine Rolle. Der Student wird besonders die vielen Übungsbeispiele schätzen, deren Lösungen er im Anhang des Buches findet.

R. CONZELMANN

Introduction to Probability and Statistical Decision Theory. Von G. HADLEY. X und 580 Seiten. \$11.85. Holden-Day, Inc., San Francisco 1967.

Der rund 600 Seiten fassende Band vermittelt eine Einführung in die moderne *Entscheidungstheorie*. In praktischen und wissenschaftlichen Angelegenheiten besteht fast immer die Notwendigkeit über Ereignisabläufe zu entscheiden, wobei die Auswirkungen der Entscheidungen nie mit Sicherheit vorausgesagt werden können. In vier Kapiteln wird deshalb der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, als mathematisches Modell der Unsicherheit, gebührende Beachtung geschenkt.

Ein spezieller Abschnitt befasst sich mit der modernen *Nutzentheorie* (theory of rational decision making), die das Verhalten des Entscheidenden bei Unsicherheit beschreibt. Hierbei werden die Axiome von LUCE und RAIFFA zugrunde gelegt. Die statistische Entscheidungstheorie (vor ca. 10 Jahren massgebend von A. WALD entwickelt) wird in den vier letzten Kapiteln dargestellt, sowohl in klassischer Sicht, als auch nach der sog. Bayes'schen Methode (Verwendung subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten).

Ein Ausblick in sequentielle Entscheidungsverfahren (z.B. «Roll-back»-Analyse) beschliesst das Werk, das sich vor allem an Studierende der Wirtschaftswissenschaften richtet. Rund 800 z.T. praxisnahe Aufgaben erleichtern das Eindringen in die moderne (für viele Anwendungsgebiete eminent wichtige) Entscheidungstheorie. HANS LOEFFEL

Mathematikgeschichtlich interessante Nachdrucke in Verlag G. Olms, Hildesheim

Das Leibniz-Jahr 1966 hat Gelegenheit gegeben, eine Reihe wertvoller Nachdrucke herauszubringen. Die im nachfolgenden aufgeführten Werke waren schon längst vergriffen und nur mehr an Bibliotheken zugänglich, nur im Glücksfall auch antiquarisch aufzutreiben. Für den Mathematiker sind aus dem Angebot des rührigen Verlags Olms folgende Werke von Interesse:

G. E. GUHRAUER: *G. W. Leibniz, eine Biographie*, Breslau 1846 (2 Bände). Nachdruck: XXIX, 373 und 80 Seiten, 1 Bildnis, 1 Handschriftenprobe; VII, 374 und 121 Seiten. In Leinen je DM 59.80.

Diese Lebensbeschreibung (die Erstausgabe erschien 1842, die zweite ist eine Titelaufgabe mit neuem Vorwort und hinzugefügtem Register) ist zwar veraltet, enthält jedoch einige Originaltexte, die anderweitig noch nicht abgedruckt und daher von unverändertem Interesse sind.

ÉMILE RAVIER: *Bibliographie des Œuvres de Leibniz*, Paris 1937. Nachdruck: V und 703 Seiten. In Leinen DM 88.—.

Diese Bibliographie ist zwar nicht ganz vollständig und in geringfügigen Kleinigkeiten ergänzungsbedürftig, jedoch von unschätzbarem Wert, weil sie nicht nur über die Originalausgaben der Leibnizschen Veröffentlichungen und die späteren Drucke aus den Handschriften Auskunft gibt, sondern auch über die Nachdrucke in den verschiedenen späteren Ausgaben.

EDUARD BODEMANN: *Die Leibniz-Handschriften der kgl. öffl. Bibliothek zu Hannover*, Hannover 1889. Nachdruck: IV und 339 Seiten. In Leinen DM 48.—.

Derselbe: *Der Briefwechsel des G. W. Leibniz in der kgl. öffl. Bibliothek zu Hannover*, Hannover/Leipzig 1895. Nachdruck: II und 415 Seiten. In Leinen DM 58.—.

Wer sich über die Leibniz-Handschriften in Hannover aus gedruckten Angaben orientieren will, muss noch immer zu diesen beiden Katalogen greifen. Sie sind seinerzeit ohne Register herausgegeben worden und zeigen vom modernen Standpunkt aus erhebliche Unvollkommenheiten, sind jedoch noch nicht durch Gleichwertiges ersetzt. Besonders

verdienstvoll sind die von GISELA KRÖNER und HEINRICH LACKMANN zu beiden Nachdrucken hinzugefügten Ergänzungen (S. 341/42 bzw. 418/21), ausserdem das für beide Nachdrucke gemeinsame Namenregister (S. 343/83 bzw. 423/63), das die Nachsuche wesentlich erleichtert. Jedem der Bände ist ein wohlausgewogenes Vorwort von KARL-HEINZ WEIMANN beigegeben (S. XI), das sich auf die Art und Einrichtung der Kataloge usw. bezieht. Wer die Leibnizsche Mathematik wirklich verstehen will, kann sich nicht nur auf das bisher Gedruckte allein beziehen; er muss unbedingt auch Handschriften ergänzend ansehen. In ihnen ist, wie ich selbst immer wieder feststelle, eine Summe bisher unbekannter Dinge enthalten, teils nur gelegentlich auftauchende Gedanken von Augenblickswert, teils Vorwegnahme viel später auftauchender Grundvorstellungen, teils auch neue Ideen, auf die meines Wissens bisher noch niemand verfallen ist.

J. E. HOFMANN

Bericht

VII. Oesterreichischer Mathematikerkongress

Linz, 16. — 20. September 1968

Trotz der politischen Unruhe in der Nähe Österreichs fand auch dieser Kongress wieder reges internationales Interesse. Ohne die begleitenden Personen zu zählen, betrug die Zahl der Teilnehmer etwa 400.

Der Ort des Kongresses war die Hochschule für Sozial- und Wirtschaftswissenschaften, die erst vor zwei Jahren den Studierenden ihre Tore öffnete. Mit der Gründung dieser Hochschule ging ein lang gehegter Wunsch der Stadt Linz in Erfüllung. Die Errichtung der Bauten für eine mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät, die der Hochschule angegliedert werden soll, ist bereits im Gange. Mit dem Kongress wurde auch das Rechenzentrum der Hochschule eröffnet.

Gegliedert in die Sektionen Algebra und Zahlentheorie, Analysis, Geometrie und Topologie, Angewandte Mathematik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Numerische Mathematik und Informationsverarbeitung, Geschichte und Philosophie, fanden über 200 Vorträge zu je 20 Minuten statt, wobei etwa drei Viertel auf die ersten drei Sektionen entfielen. Wenigstens eines Vortrages soll hier gedacht werden. G. RINGEL sprach über die Lösung des Heawoodschen Kartenfärbungsproblems. Sei $\chi(p)$ die kleinste Zahl von Farben, mit der jede Karte auf einer orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht p zulässig gefärbt werden kann; Heawood hat schon 1890 nachgewiesen, dass für $p > 0$

$$\chi(p) \leq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rceil.$$

Es steht jetzt fest, dass hier das Gleichheitszeichen gilt. Um dies zu beweisen wurde das verwandte Fadenproblem von n Punkten gelöst. Es zeigte sich als notwendig, die verschiedenen Restklassen von n modulo 12 zu unterscheiden. Nachdem Ringel und andere schon 9 dieser Restklassen untersucht hatten, haben Ringel und Youngs gemeinsam im Frühjahr 1968 die letzten drei behandelt. Drei Einzelfälle für kleines n , die noch übrig geblieben waren, wurden von J. Mayer, Professor für französische Literatur, der sich für Graphentheorie interessierte, gelöst.

Es sei erwähnt, dass die Probleme der Studienreform an Hoch- und Mittelschulen auch mehrfach berührt wurden.

Einige gesellschaftliche Anlässe lockerten den Kongress auf. So die Kepler-Feier der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft verbunden mit einem Empfang von Stadt und Land im Landhaus in Linz, in welchem seinerzeit Kepler gewirkt hat, der Kongressausflug auf der Donau und der traditionelle Schlussabend.

Den Herren Adam und Bruckmann und ihren Mitarbeitern, in deren Händen die Organisation lag, sei für das gute Gelingen des Kongresses herzlich gedankt.

J. M. EBERSOLD

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 24

Heft 2

Seiten 25–48

10. März 1969

Die Realteil- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen

1. Einleitung

Einer komplexen Funktion

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (z = x + i y) \quad (1.1)$$

kann man verschiedenartige reelle oder komplexe Flächen zuordnen. Bekannt und eingehend untersucht sind z. B. die Betragflächen [2, 6, 7, 9, 10]. In der vorliegenden Arbeit nehmen wir an, $f(z)$ sei analytisch, und ordnen $f(z)$ die *Realteilfläche* $R(f)$, definiert durch

$$\mathfrak{x}(x, y) = (x, y, u(x, y)), \quad (1.2)$$

und die *Imaginärteilfläche* $I(f)$, definiert durch

$$\mathfrak{x}(x, y) = (x, y, v(x, y)), \quad (1.3)$$

zu.

In Abschnitt 3 und 4 beweisen wir, dass beide Flächen in einem beliebigen Punkt jeweils dieselbe Gaußsche Krümmung haben, dass aber diese identische Abbildung für nichtkonstantes f nicht isometrisch ist. Die Frage nach der Existenz isometrischer Abbildungen führt auf das komplizierte System (4.3) bzw. (5.4). In einzelnen Fällen (u. a. e^z , z^n) sieht man sofort, dass $R(f)$ und $I(f)$ isometrisch sind. In anderen Fällen (z. B. $\ln z$, $\sin z$, $\cos z$) besteht keine Isometrie, wie gezeigt wird. Wie man Aussagen aus den genannten Systemen in systematischer Weise gewinnt, wird in den letzten beiden Abschnitten erörtert.

Interessanterweise fügt sich WANGERINS klassisches Beispiel [8], das von Überlegungen bei Drehflächen herrührt, auch in unsere funktionentheoretisch motivierte Untersuchung ein.

Meinen Mitarbeitern, Herrn Doz. Dr. H. KNAPP und Herrn Dr. K. ECKER, danke ich für Diskussionsbemerkungen im Rahmen unseres differentialgeometrischen Seminars.

2. Hilfsformeln

Die Darstellungen (1.2) und (1.3) haben die Form

$$\mathfrak{x}(x, y) = (x, y, h(x, y)).$$

Für eine solche Darstellung hat die erste Grundform die Koeffizienten

$$g_{11} = 1 + h_x^2, \quad g_{12} = h_x h_y, \quad g_{22} = 1 + h_y^2, \quad (2.1)$$

also die Diskriminante

$$g = 1 + h_x^2 + h_y^2. \quad (2.2)$$

Die zweite Grundform hat die Koeffizienten

$$b_{11} = h_{xx}/\sqrt{g}, \quad b_{12} = h_{xy}/\sqrt{g}, \quad b_{22} = h_{yy}/\sqrt{g}, \quad (2.3)$$

also die Diskriminante

$$b = R_{1212} = \frac{1}{g} (h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2). \quad (2.4)$$

Dabei ist R_{abcd} der kovariante Krümmungstensor. So erhalten wir die Gaußsche Krümmung

$$K = \frac{b}{g} = \frac{1}{g^2} (h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2). \quad (2.5)$$

3. Gaußsche Krümmung

Für die Realteilfläche $R(f)$ folgt aus (1.2), (2.1) und den Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$g_{11} = 1 + (\operatorname{Re} f')^2, \quad g_{12} = -\operatorname{Re} f' \operatorname{Im} f', \quad g_{22} = 1 + (\operatorname{Im} f')^2, \quad (3.1)$$

wobei der Strich die Ableitung nach z bedeutet. So wird

$$g = 1 + |f'|^2. \quad (3.2)$$

Die zweite Grundform hat die Koeffizienten

$$b_{11} = u_{xx}/\sqrt{g}, \quad b_{12} = u_{xy}/\sqrt{g}, \quad b_{22} = u_{yy}/\sqrt{g}, \quad (3.3)$$

also wegen $\Delta u = 0$ und (3.2) die Diskriminante

$$b = -\frac{|f''|^2}{1 + |f'|^2}. \quad (3.4)$$

Aus (2.5) erhalten wir die Gaußsche Krümmung

$$K(z) = -\frac{|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2}. \quad (3.5)$$

Wie wir aus (3.5) sehen, haben $f(z)$ und

$$f_1(z) = e^{i\gamma} f(z) + c \quad (\gamma \text{ reell})$$

dieselbe Gaußsche Krümmung. Für $\gamma = -\pi/2$ und $c = 0$ liefert dies den

Satz 3.1. *Die Realteilfläche $R(f)$ und die Imaginärteilfläche $I(f)$ einer analytischen Funktion $f(z)$ haben in entsprechenden Punkten dieselbe Gaußsche Krümmung.*

Aus (3.5) und Satz 3.1 folgt ferner:

$R(f)$ und $I(f)$ sind mit Ausnahme der Punkte, in denen $f''(z) = 0$ ist, hyperbolisch gekrümmt.

4. Isometriebedingung

Der Satz 3.1 legt es nahe, der Frage der Isometrie von $R(f)$ und $I(f)$ nachzugehen. Bekanntlich gilt allgemein der

Satz 4.1. a) Ist eine Abbildung $A: F \rightarrow F^*$ isometrisch, so stimmt die Gaußsche Krümmung in einem Punkt $P \in F$ und in seinem Bild $P^* = A P \in F^*$ überein. b) Haben zwei Flächen dieselbe konstante Gaußsche Krümmung, so sind sie (lokal) isometrisch.

Aus (3.5) und Satz 4.1b folgt im vorliegenden Fall sofort das triviale Ergebnis, dass für die lineare Funktion $f(z) = a z + k$ die Flächen $R(f)$ und $I(f)$ isometrisch sind.

Der Abbildungen wegen, die wir betrachten wollen, setzen wir $z^* = x^* + i y^*$ und schreiben (1.3) in der Form

$$z^*(x^*, y^*) = (x^*, y^*, v(x^*, y^*)). \quad (4.1)$$

Es gilt dann der folgende

Satz 4.2. Eine Abbildung

$$x^* = \alpha(x, y), \quad y^* = \beta(x, y) \quad (4.2)$$

der Realteilfläche $R(f)$ einer analytischen Funktion $f(z)$, $z = x + i y$, auf die Imaginärteilfläche $I(f)$ [vgl. (4.1)] dieser Funktion ist genau dann isometrisch, wenn

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad 1 + u_x^2 &= (1 + u_{y^*}^2) \alpha_x^2 - 2 u_{x^*} u_{y^*} \alpha_x \beta_x + (1 + u_{x^*}^2) \beta_x^2, \\ \text{b)} \quad u_x u_y &= (1 + u_{y^*}^2) \alpha_x \alpha_y - u_{x^*} u_{y^*} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + (1 + u_{x^*}^2) \beta_x \beta_y, \\ \text{c)} \quad 1 + u_y^2 &= (1 + u_{y^*}^2) \alpha_y^2 - 2 u_{x^*} u_{y^*} \alpha_y \beta_y + (1 + u_{x^*}^2) \beta_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

gilt. Hierbei bedeuten Indizes partielle Ableitungen nach den betreffenden Variablen; die partiellen Ableitungen auf der linken Seite und von α und β sind an der Stelle (x, y) zu nehmen, die übrigen an der Stelle (x^*, y^*) .

Beweis. Die Abbildung (4.2) ist genau dann isometrisch, wenn die zu (1.2) bzw. (4.1) gehörigen ersten Grundformen in entsprechenden Punkten übereinstimmen, $ds^{*2} = ds^2$. Hieraus folgt

$$g_{11} = g_{11}^* \alpha_x^2 + 2 g_{12}^* \alpha_x \beta_x + g_{22}^* \beta_x^2$$

usw. Dabei hat ds^{*2} die Koeffizienten

$$g_{11}^* = 1 + v_{x^*}^2, \quad g_{12}^* = v_{x^*} v_{y^*}, \quad g_{22}^* = 1 + v_{y^*}^2. \quad (4.4)$$

Mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen ersetzen wir Ableitungen von $v(x^*, y^*)$ durch solche von $u(x^*, y^*)$ und erhalten (4.3).

Wir vermerken noch folgendes: Aus (4.4) ergibt sich

$$g_{11}^* = 1 + (\text{Im} f')^2, \quad g_{12}^* = \text{Re} f' \text{Im} f', \quad g_{22}^* = 1 + (\text{Re} f')^2, \quad (4.5)$$

wobei der Strich die Ableitung nach z^* bezeichnet. Im Falle der Abbildung

$$x^* = x, \quad y^* = y \quad (4.6)$$

stimmt die Gaußsche Krümmung von $R(f)$ und $I(f)$ in entsprechenden Punkten überein (Satz 3.1). Aus (3.1) und (4.5) folgt dann

$$g_{11}^* = g_{22}, \quad g_{12}^* = -g_{12}, \quad g_{22}^* = g_{11}, \quad (4.7)$$

und wir sehen, dass (4.6) für nichtkonstantes $f(z)$ keine isometrische Abbildung ist. Dies kann man auch mittels (4.3) und der Cauchy-Riemann-Gleichungen bestätigen.

5. Spezielle Ansätze

Unsere einfache Überlegung im Zusammenhang mit (4.6) zeigt, dass *eine* Methode, Aussagen aus (4.3) zu gewinnen, darin besteht, die Abbildungsfunktionen (4.2) in spezieller Weise anzusetzen und dann $u(x, y)$ und damit $f(z)$ zu bestimmen. Wir wollen dies für zwei weitere Fälle erläutern.

Bei einer Translation

$$x^* = x, \quad y^* = y + k \quad (5.1)$$

erhalten wir aus (4.3) zunächst

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \pm u_y(x, y + k), \\ u_x(x, y) u_y(x, y) &= -u_x(x, y + k) u_y(x, y + k), \\ u_y(x, y) &= \mp u_x(x, y + k). \end{aligned}$$

Der Produktansatz $u(x, y) = F(x) G(y)$ liefert beim Einsetzen

$$F'(x) G(y) = \pm F(x) G'(y + k)$$

usw. Separation und Integration ergibt $F = e^{cz}$. Das zugehörige $G(y)$ bestimmt man am einfachsten aus $\Delta u = 0$. So erhalten wir insgesamt das *Ergebnis*:

Bei $f(z) = e^{cz}$, c reell, sind $R(f)$ und $I(f)$ isometrisch, sogar kongruent, und können durch die Translation (5.1) mit $k = \pi/2 c$ ineinander übergeführt werden.

Um die Rotation in ähnlicher Weise behandeln zu können, gehen wir zu Polarkoordinaten r, ϕ und r^*, ϕ^* über, die durch

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad x^* = r^* \cos \phi^*, \quad y^* = r^* \sin \phi^*$$

definiert sind. Wir schreiben einfach

$$f(z) = u(r, \phi) + i v(r, \phi). \quad (5.2)$$

Wie Satz 4.2 ergibt sich der

Satz 5.1. *Eine Abbildung*

$$r^* = \gamma(r, \phi), \quad \phi^* = \omega(r, \phi) \quad (5.3)$$

der Realteilfläche $R(f)$ einer analytischen Funktion (5.2) auf die Imaginärteilfläche $I(f)$ dieser Funktion ist genau dann isometrisch, wenn

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } 1 + u_r^2 &= (1 + r^{*-2} u_{\phi^*}^2) \gamma_r^2 - 2 u_{r*} u_{\phi^*} \gamma_r \omega_r + r^{*2} (1 + u_{r*}^2) \omega_r^2, \\ \text{b) } u_r u_\phi &= (1 + r^{*-2} u_{\phi^*}^2) \gamma_r \gamma_\phi - u_{r*} u_{\phi^*} (\gamma_r \omega_\phi + \gamma_\phi \omega_r) \\ &\quad + r^{*2} (1 + u_{r*}^2) \omega_r \omega_\phi, \\ \text{c) } r^2 + u_\phi^2 &= (1 + r^{*-2} u_{\phi^*}^2) \gamma_\phi^2 - 2 u_{r*} u_{\phi^*} \gamma_\phi \omega_\phi + r^{*2} (1 + u_{r*}^2) \omega_\phi^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

gilt, wobei Indizes partielle Ableitungen bedeuten. Die partiellen Ableitungen auf der linken Seite und von γ und ω sind an der Stelle (r, ϕ) zu nehmen und die übrigen an der Stelle (r^, ϕ^*) .*

Im Falle einer Rotation

$$r^* = r, \quad \phi^* = \phi + \delta \quad (5.5)$$

folgt aus (5.4)

$$\begin{aligned} u_r(r, \phi) &= \pm r^{-1} u_\phi(r, \phi + \delta), \\ u_r(r, \phi) u_\phi(r, \phi) &= -u_r(r, \phi + \delta) u_\phi(r, \phi + \delta), \\ u_\phi(r, \phi) &= \mp r u_r(r, \phi + \delta). \end{aligned}$$

Der Produktansatz $u(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi)$ ergibt

$$\begin{aligned} R'(r) \Phi(\phi) &= \pm r^{-1} R(r) \Phi'(\phi + \delta), \\ \Phi(\phi) \Phi'(\phi) &= -\Phi(\phi + \delta) \Phi'(\phi + \delta), \\ R(r) \Phi'(\phi) &= \mp r R'(r) \Phi(\phi + \delta). \end{aligned}$$

Separation und Integration führt auf $R = r^c$, und Φ bestimmt man am einfachsten vermöge $\Delta u = 0$. Weiter folgt

$$\Phi(\phi + \delta) = -\Phi(\phi - \delta).$$

So erhalten wir das *Ergebnis*:

Bei $f(z) = z^c$, c reell, sind $R(f)$ und $I(f)$ isometrisch, sogar kongruent, und können durch die Rotation (5.5) mit $\delta = \pi/2c$ ineinander übergeführt werden.

Dasselbe gilt auch für $k z^c$. Weiterhin hat man die folgenden Transformationen, bei denen die Isometrie erhalten bleibt: Translationen und Rotationen in der z -Ebene, Addition einer Konstanten zu $f(z)$. Hieraus folgt:

Für $f(z) = a z^2 + b z + c$ sind $R(f)$ und $I(f)$ isometrisch.

6. Zwei weitere Methoden

Notwendige Bedingungen für Isometrie sind die Gleichheit von K , von ∇K und von ΔK in entsprechenden Punkten. Um festzustellen, ob für eine bestimmte Funktion $f(z)$ Isometrie von $R(f)$ und $I(f)$ vorliegt, bieten sich die folgenden beiden Wege an, die wir gemischte bzw. Minding-Methode nennen wollen.

I. *Gemischte Methode*: Man benutzt Satz 4.1a, um (4.2) gewisse Bedingungen aufzuerlegen, und geht dann in (4.3) ein.

II. *Mindings Methode* [3]: Man benutzt die obigen notwendigen Bedingungen allein, also (4.3) überhaupt nicht, und sieht zu, ob man daraus Bedingungen oder Widersprüche bezüglich der gesuchten Abbildungsfunktionen erhält.

Wichtig ist in beiden Fällen die Annahme, dass die betrachteten Flächen durch ganz bestimmte Darstellungen gegeben sind. Die Methoden sind nicht verwendbar, wenn wir $f(z)$ noch ganz beliebig lassen, also Klassen von Flächen betrachten. Selbst wenn man sich auf ein Paar ganz bestimmter Flächen beschränkt, hat man im allgemeinen mit erheblichen Schwierigkeiten zu rechnen. Deshalb wurde frühzeitig versucht, wenigstens für Drehflächen unter Benutzung der Symmetrie praktische Resultate zu erzielen; vgl. P. STÄCKEL [5]. Durch diese Arbeit angeregt, hat dann A. WANGERIN [8] sein bekanntes Beispiel angegeben, das zeigt, dass Gleichheit der Gaußschen Krümmung nur notwendig, aber (im nichtkonstanten Fall) nicht hinreichend für Iso-

metrie ist. Interessanterweise ordnet sich dieses Beispiel in unsere gegenwärtigen von der Funktionentheorie bestimmten Untersuchungen ein, indem wir es folgendermaßen betrachten:

$f(z) = \ln z$ hat die Realteilfläche $x = (x, y, \ln r)$ und die Imaginärteilfläche $x^* = (x^*, y^*, \phi^*)$. Hierbei ist $z = r e^{i\phi}$ bzw. $z^* = r^* e^{i\phi^*}$. Für die Gaußsche Krümmung findet man

$$K = -\frac{1}{(1+r^2)^2} \quad \text{bzw.} \quad K^* = -\frac{1}{(1+r^{*2})^2}.$$

Aus $K = K^*$ folgt $r = r^*$. In (5.4) ist wegen $u = \ln r$ nun $u_\phi = 0$, $u_{\phi^*} = 0$ sowie $\gamma_\phi = 0$, und (5.4 b) gewinnt die einfache Form $0 = (r^2 + 1) \omega_r \omega_\phi$. Dann wäre aber $\omega_r = 0$, da anderenfalls die Funktionaldeterminante der Abbildung identisch verschwände. Aus (5.4 a) folgte dann $1 + 1/r^2 = 1$, ein Widerspruch. Also lautet unser *Ergebnis*:

Bei $f(z) = \ln z$ sind $R(f)$ (Drehfläche der Logarithmuskurve) und $I(f)$ (Schraubenfläche) nicht isometrisch.

Im vorliegenden Falle ist auch Mindings Methode brauchbar und liefert dasselbe Ergebnis: Aus $K = K^*$ folgt $r = r^*$. Statt ∇K betrachten wir einfacher

$$\nabla r^2 = g^{11} (2r)^2 = \nabla r^{*2} = g^{11*} (2r^*)^2.$$

Diese Gleichung ist wegen

$$g^{11} = \frac{r^2}{1+r^2}, \quad g^{11*} = 1, \quad r^* = r$$

unverträglich. $R(f)$ und $I(f)$ sind also nicht isometrisch.

$\ln z$ und e^z zusammen zeigen:

Aus der Isometrie oder Nichtisometrie von $R(f)$ und $I(f)$ folgt nicht die entsprechende Aussage für die Umkehrfunktion.

Übrigens ist K bei e^z ebenfalls so einfach, dass die Methoden I und II ohne Schwierigkeiten angewendet werden können. Man hat nämlich

$$K = -\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \quad \text{und} \quad K^* = -\frac{e^{2x^*}}{(1+e^{2x^*})^2}.$$

$K = K^*$ ergibt $x = x^*$. Weiterhin wird

$$\nabla e^x = g^{11} e^{2x} = \frac{e^{2x} + e^{4x} \sin^2 y}{1 + e^{2x}}$$

und wegen $x = x^*$

$$\nabla e^{x^*} = g^{11*} e^{2x^*} = \frac{e^{2x} + e^{4x} \cos^2 y^*}{1 + e^{2x}}.$$

So erhalten wir $\sin y = \pm \cos y^*$, also $y^* = \mp \pi/2$, in Übereinstimmung mit unserem vorigen Ergebnis.

Schwierig wird die Anwendung der Methoden, wenn K von beiden Variablen abhängt. Ein typisches Beispiel ist $f(z) = \cos z$. Hier hat $R(f)$ die Gaußsche Krümmung

$$K = -\frac{\cosh^2 y - \sin^2 x}{(\cosh^2 y + \sin^2 x)^2}.$$

Unter Benutzung der Tatsache, dass eine isometrische Abbildung geodätisch sein muss, erhielt H.-W. PU [4] das *Ergebnis*:

Bei $\cos z$ und $\sin z$ sind die Realteil- und die Imaginärteilfläche nicht isometrisch.

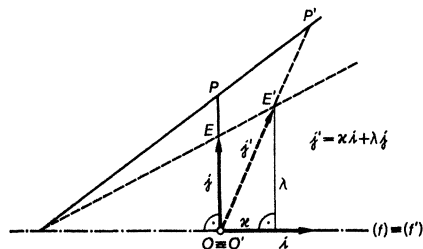
ERWIN KREYSZIG, Universität Düsseldorf

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. KOMMERELL, *Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen*, Math. Ann. 60, 548–596 (1905).
- [2] E. KREYSZIG, *Differentialgeometrie*. 2. Aufl. (Leipzig 1968).
- [3] F. MINDING, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse*. J. reine angew. Math. 19, 370–387 (1839).
- [4] H.-W. PU, *Isometry Properties of the Surfaces of the Real and the Imaginary Parts of Analytic Functions*, M. Sc. Thesis (Supervisor E. KREYSZIG), (Ohio State University, Columbus, Ohio 1960).
- [5] P. STÄCKEL, *Zur Theorie des Gaußschen Krümmungsmasses*, Ber. Verh. Kön. Sächs. Akad. Wiss. 45, 163–169 (1893).
- [6] E. ULLRICH, *Betragsflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten*, Math. Z. 54, 297–328 (1951).
- [7] E. ULLRICH, *Geometrisches über Potenzbetragsflächen*, Z. angew. Math. Mech. 31, 250–251 (1951).
- [8] A. WANGERIN, *Zur Theorie des Gaußschen Krümmungsmasses*, Ber. Verh. Kön. Sächs. Akad. Wiss. 45, 170–172 (1893).
- [9] W. WUNDERLICH, *Zur Geometrie der Potenzbetragsflächen*, Arch. Math. 14, 204–211 (1963).
- [10] J. ZAAT, *Differentialgeometrie der Betragsflächen analytischer Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen 30 (1944).

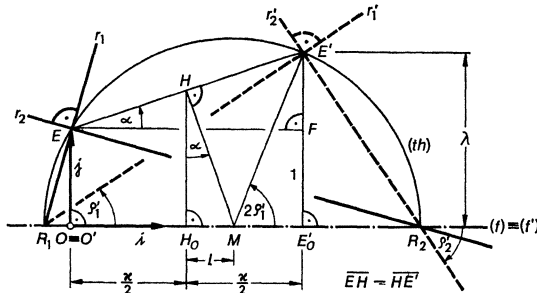
Über das invariante Rechtwinkelpaar einer schiefen Affinität und dessen Zusammenhang mit der JAKOBISCHEN Konstruktion der Achsen einer Ellipse

Eine perspektive Affinität sei durch ihre orientierte Fixpunktgerade $(f) \equiv (f')$ und durch ein Paar zugeordneter Punkte $P \rightarrow P'$ gegeben. Zur Beschreibung der Abbildung legen wir (f) durch einen Einheitsvektor \mathbf{i} fest, konstruieren den Bildpunkt E' eines Punktes E , der den Abstand $+1$ von (f) besitzt, und geben den Bildvektor $\overrightarrow{OE'} = \mathbf{j}' = \kappa \mathbf{i} + \lambda \mathbf{j}$ ($\lambda \neq 0$) des Originalvektors $\overrightarrow{OE} = \mathbf{j}$ an (siehe Figur 1). Die Abbildung ist durch \mathbf{j}' oder durch die Parameter κ und λ eindeutig festgelegt (vgl. [3, S. 17]).



Figur 1

Da die Frage nach dem invarianten Rechtwinkelpaar für $\kappa = 0$ (Identität, normale Geradenspiegelung, normale Affinität) uninteressant ist, soll $\kappa \neq 0$ vorausgesetzt werden. Für $\kappa \neq 0$, $\lambda = 1$ erhalten wir eine Scherung, für $\kappa \neq 0$, $\lambda = -1$ eine Schrägspiegelung, für $\kappa \neq 0$, $|\lambda| \neq 1$ eine eigentliche schiefe Achsenaffinität. Unsere Untersuchungen für $\kappa \neq 0$, $\lambda \neq 0$ schliessen also die Sonderfälle Scherung und schiefe Geradenspiegelung ein. In bekannter Weise konstruieren wir zunächst das invariante Rechtwinkelpaar r_1' und r_2' einer solchen perspektivaffinen Punktverwandtschaft (siehe Figur 2; vgl. z. B. [2, S. 78]) und berechnen dann die zu r_1' und r_2' gehörenden, auf $(f) \equiv (f')$ bezogenen Richtungswinkel ϱ_1' und ϱ_2' aus den Skalaren κ und λ .



Figur 2

1. Die Richtungswinkel des invarianten Rechtwinkelpaares

Wegen $\varrho_1' = \varrho_2' \pm 90^\circ$ genügt es, *einen* der beiden Winkel mit Hilfe von κ und λ auszudrücken.

Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist $\sphericalangle R_2 M E' = 2\varrho_1'$ (siehe Figur 2). Da $\cot 2\varrho_1' = \cot 2\varrho_2'$ ist, gilt für jeden Richtungswinkel ϱ_i' des invarianten Rechtwinkelpaares $\cot 2\varrho_i' = \overline{ME_0'}/\overline{E_0' E'}$. Nun ist $\overline{H_0 E_0'} = \kappa/2$. Wegen $\overline{M E_0'} = \overline{H_0 E_0'} - \overline{H_0 M} = (\kappa/2) - l$ ist $\cot 2\varrho_i' = ((\kappa/2) - l)/\lambda$ mit $l = \overline{H_0 M}$. Aus $\tan \alpha = \overline{FE'}/\overline{EF} = (\lambda - 1)/\kappa$ und $\tan \alpha = \overline{H_0 M}/\overline{H_0 H} = 2l/(1 + \lambda)$ ergibt sich $l = (\lambda^2 - 1)/2\kappa$. Also gilt:

$$\cot 2\varrho_i' = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\lambda^2 - 1}{\kappa \lambda} \right) \kappa \neq 0, \quad \lambda \neq 0 \quad (1)$$

Durch Spezialisierung von (1) für $\lambda = +1$ (Scherung) und für $\lambda = -1$ (Schrägspiegelung) erhalten wir für diese Abbildungen:

$$\text{Scherung:} \quad \cot 2\varrho_i' = \kappa/2 \quad \kappa \neq 0 \quad (1')$$

$$\text{Schrägspiegelung:} \quad \cot 2\varrho_i' = -\kappa/2 \quad \kappa \neq 0 \quad (1'')$$

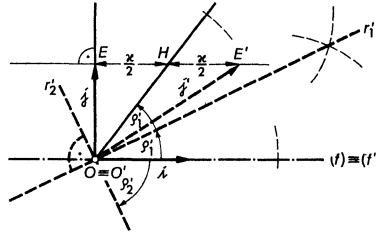
Das Rechtwinkelpaar einer Schrägspiegelung mit Parameter κ ergibt sich aus dem Rechtwinkelpaar einer Scherung mit demselben Parameter und derselben Achse durch Normalspiegelung an dieser Achse. Geometrisch ist das evident, da sich diese Schrägspiegelung durch Hintereinanderausführung der Scherung und der Normalspiegelung ersetzen lässt.

In der Literatur wird eine schiefe Affinität häufig nicht durch die Parameter κ und λ , sondern durch α und λ angegeben (α gibt die Affinitätsrichtung an, λ heisst Affinitätsverhältnis oder Affinitätsfaktor). Mit $\tan \alpha = (\lambda - 1)/\kappa$ oder $\kappa = (\lambda - 1) \cdot \cot \alpha$ wird (1) zu:

$$\cot 2 \varrho'_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot \cot \alpha - \frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \tan \alpha \right) \quad \lambda \neq 0; \quad \alpha \neq 0^\circ, 90^\circ \quad (2)$$

2. Zur Konstruktion des invarianten Rechtwinkelpaares

Für die Scherung liefert die Beziehung (1') unmittelbar eine einfache Konstruktion des invarianten Rechtwinkelpaares (siehe Figur 3).



Figur 3

Es ist dieselbe Konstruktion, die in [3, S. 25/26] durch rein geometrische Betrachtungen gewonnen worden ist. Wir wollen untersuchen, ob sich aus der allgemeineren Beziehung (1) eine Konstruktion für das Rechtwinkelpaar einer eigentlichen schiefen Affinität herleiten lässt.

Durch Umformung von (1) ergibt sich:

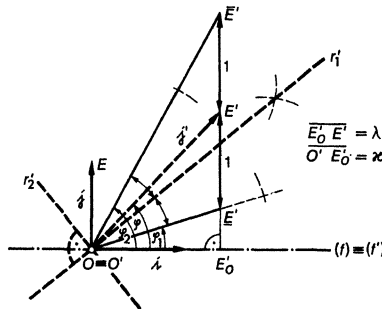
$$\cot 2 \varrho'_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\lambda - 1}{\kappa} \cdot \frac{\lambda + 1}{\kappa} \frac{\kappa}{\lambda} \right) \quad \kappa, \lambda \neq 0$$

Führen wir Winkel $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ mit

$$\tan \varphi = \frac{\lambda}{\kappa}, \quad \tan \varphi_1 = \frac{\lambda - 1}{\kappa}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{\lambda + 1}{\kappa}$$

ein (siehe Figur 4), so wird (1) zu

$$\cot 2 \varrho'_i = \frac{1 - \tan \varphi_1 \cdot \tan \varphi_2}{2 \tan \varphi}.$$



Figur 4

Es sei $\sphericalangle C O A_2 = \varphi$; mit $\overline{OC} = a_1 \cos \varphi$ und $\overline{CA_2} = a_1 \sin \varphi$ ergibt sich:

$$\begin{array}{l|l} \overline{OA_2}^2 = a_1^2 \cos^2 \varphi + (a_1 \sin \varphi - b_1)^2 & \overline{OA_2}^2 = a_1^2 \cos^2 \varphi + (a_1 \sin \varphi + b_1)^2 \\ = a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \sin \varphi & = a_1^2 + b_1^2 + 2 a_1 b_1 \sin \varphi \end{array}$$

Nun ist aber $2 a_1 b_1 \sin \varphi = 2 a b$ (Flächentreue!) und $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$; damit ergibt sich:

$$\overline{OA_2}^2 = (a - b)^2 \quad | \quad \overline{OA_2}^2 = (a + b)^2 \quad \text{q. e. d.}$$

R. JAKOBI hat seine Konstruktion im Jahre 1952 veröffentlicht und durch kinematische Betrachtungen bewiesen (vgl. [1]). O. TAMASCHKE gab 1963 einen elementargeometrischen Beweis (vgl. [4]). H. SIEBER führte 1967 zwei abbildungsgeometrische Beweise, die nur Drehungen, Parallelverschiebungen und Geradenspiegelungen verwenden (vgl. [3], S. 37–39).

HELMUT SIEBER, Böblingen

LITERATUR

- [1] R. JAKOBI, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse*, Z. angew. Math. Mech. 32, 30 (1952).
- [2] M. JEGGER, *Konstruktive Abbildungsgeometrie*, Räber (Luzern und Stuttgart, 1964).
- [3] H. SIEBER, *Achsenaffinitäten im Unterricht*, Der Mathematikunterricht, 9. Jahrgang, 1967, S. 5–47.
- [4] O. TAMASCHKE, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach R. JAKOBI*, El. Math. 18, 3 (1963), S. 58.

Kleine Mitteilungen

Eine Bemerkung zum Verfahren von Leverrier

Verschiedene mathematische und technische Probleme führen auf die Berechnung des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E - A),$$

wobei A eine beliebige Matrix aus $M_n(K)$, dem Ring der komplexen $n \times n$ -Matrizen, und E die Einheitsmatrix ist. Entwickelt man diese Determinante in üblicher Weise als Summe von Produkten ihrer Elemente und ordnet dann nach fallenden Potenzen von λ , so erhält man das Ergebnis

$$p_A(\lambda) = \sum_{\omega=0}^n (-1)^\omega c_\omega \lambda^{n-\omega},$$

wobei $c_0 = 1$, $c_n = \det A$ und für alle $j = 1, 2, \dots, n-1$

$$c_j = \sum_{[\gamma_1, \dots, \gamma_j] \in K_j} \det \begin{pmatrix} a_{\gamma_1 \gamma_1} & \dots & a_{\gamma_1 \gamma_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\gamma_j \gamma_1} & \dots & a_{\gamma_j \gamma_j} \end{pmatrix}$$

ist. K_j ist dabei die Menge sämtlicher Kombinationen j -ter Klasse ohne Wiederholung: $[\gamma_1, \dots, \gamma_j] \subseteq [1, \dots, n]$ und $1 \leq \gamma_1 < \dots < \gamma_j \leq n$. ([6], S. 114).

Diese direkte Berechnung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ist sehr aufwendig und für grosse Werte von n nur von theoretischem Interesse. Ein anderes Verfahren, das die Berechnung der Koeffizienten von $p_A(\lambda)$ gestattet, ist unter dem Namen «Verfahren von LEVERRIER» bekannt [1]. Es stellt wohl die älteste Methode dar, wenn man von der obenerwähnten direkten Berechnung absieht. Vor allem besitzt das Verfahren von LEVERRIER gegenüber verschiedenen anderen Verfahren den Vorzug, dass an die betrachtete Matrix A keinerlei zusätzliche Forderung gestellt werden muss. Dieses Verfahren wurde wiederentdeckt von HORST [2], schliesslich verbessert und verallgemeinert von SOURIAU [3], FADDEEV-SOMINSKII [5] und FRAME [4]. Alle diese Überlegungen beruhen auf den sogenannten Newtonschen Formeln, die die Berechnung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms auf die Berechnung der Spuren der n aufeinanderfolgenden Matrixpotenzen A, A^2, \dots, A^n und die Lösung eines gewissen linearen Gleichungssystems zurückführen.

Setzen wir

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{\omega=1}^n p_\omega \lambda^{n-\omega} \quad \text{und} \quad s_k = \text{Sp } A^k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

so lauten die Newton'schen Formeln

$$s_k + s_{k-1} p_1 + s_{k-2} p_2 + \dots + s_1 p_{k-1} + k p_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Wir können (2) auch in Form eines linearen Gleichungssystems für die Koeffizienten p_1, \dots, p_n

$$L p = r \quad (3)$$

schreiben, wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ s_1 & 2 & & & \\ s_2 & s_1 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \dots & n \end{pmatrix}, \quad p = \text{col}(p_1, \dots, p_n) \quad \text{und}$$

$r = \text{col}(-s_1, \dots, -s_n)$ zu setzen ist. Eine Möglichkeit, das System in (3) nach p aufzulösen, ist die Bestimmung von L^{-1} ; dann ist $p = L^{-1} r$. Wir wollen uns jetzt überlegen, wie man die explizite Berechnung der Matrix umgehen kann, indem wir die spezielle Form von L ausnützen.

Zuerst setzen wir $R = L - D$ mit $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$, dann $D^{-1} R = B = (b_{kl})$. Mit dieser Bezeichnung ist $L = D(E + B)$ und daher

$$L^{-1} = (E + B)^{-1} D^{-1}. \quad (4)$$

Aus der Struktur der Matrizen D und R findet man leicht, dass die Elemente der Matrix B den Bedingungen

$$b_{kl} = 0 \quad l \geq k \quad (5)$$

genügen. Nach (5) besitzt B daher nur den n -fachen Eigenwert 0 und erfüllt somit die Gleichung $B^n = 0$, woraus trivialerweise

$$B^{n+j} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

folgt.

Nach einem bekannten Satz (siehe z. B. [8], S. 98, Satz 49) gilt dann für die Matrix B

$$(E + B)^{-1} = \sum_{\omega=0}^{\infty} (-1)^\omega B^\omega. \quad (7)$$

Mit (6) reduziert sich die unendliche Summe auf der rechten Seite in (7) auf eine endliche Summe

$$(E + B)^{-1} = \sum_{\omega=0}^{n-1} (-1)^\omega B^\omega. \quad (8)$$

Schliesslich folgt aus (4) und (8) das Ergebnis

$$L^{-1} = \sum_{w=0}^{n-1} (-1)^w B^w D^{-1}.$$

In (3) eingesetzt, erhalten wir für die Unbekannten p_1, \dots, p_n

$$p = \text{col}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{w=0}^{n-1} (-1)^w B^w D^{-1} r.$$

Wir haben damit die Inversion der Matrix L auf Multiplikationen von Matrizen (derselben Ordnung) zurückgeführt.

R. Z. DOMIATY, Graz

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] U. J. J. LEVERRIER, *Sur les variations seculaires des elements des orbites pour les sept planètes principales*; Journal de mathématiques [1] 5, 230 (1840); *Connaissance des Temps pour l'an 1843*, Additions, 1–66 (Paris 1840).
- [2] P. HORST, *A Method for Determining the Coefficients of a Characteristic Equation*, Ann. math. Statist. 6, 83 (1935).
- [3] J. M. SOURIAU, *Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices*, C. R. Acad. Sci., Paris 227, 1010 (1948).
- [4] J. S. FRAME, *A Simple Recursion Formula for Inverting a Matrix*. (Abstract), Bull. Amer. Math. Soc. 55, 1045 (1949).
- [5] D. K. FADDEEV, I. S. SOMINSKII, *Sbornik zadac po vyssei algebre* [Aufgabensammlung zur höheren Algebra, russ.] Gostechisdat (Moskow-Leningrad 1949), S. 160.
- [6] G. KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie* (W. de Gruyter, Berlin 1942).
- [7] J. V. USPENSKY, *Theory of Equations* (McGraw-Hill, New York – Toronto – London 1948).
- [8] C. C. MACDUFFEE, *The Theory of Matrices* (Springer-Verlag, Berlin 1933).

Eine Bemerkung zur eindeutigen Primfaktorenzerlegung in Halbgruppen

Es sei H eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element e . Sie sei ferner regulär, d. h. in H gelte die Streichungsregel ($a c = b c \Rightarrow a = b$ für alle $a, b, c \in H$). Wie üblich heisst a Teiler von b (in Zeichen $a \mid b$), wenn es ein $c \in H$ mit $a c = b$ gibt. Das Element e soll keine Teiler $\neq e$ haben, d. h. also $H \setminus \{e\}$ ist eine Unterhalbgruppe. Ein Element $a \in H$ heisst *irreduzibel*, wenn es ausser a und e keine Teiler hat. $p \in H$ heisst *Primelement*, wenn für alle $a, b \in H$ gilt: $p \mid a b \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$. Bekanntlich ist jedes Primelement irreduzibel.

Hilfssatz: *Gibt es in H eine assoziative Verknüpfung $*$ mit den Eigenschaften:*

$$a * b \mid a, \quad a * b \mid b \quad (\text{für alle } a, b \in H) \quad (1)$$

$$a * b \mid c, \quad c \mid a, \quad c \mid b \Rightarrow c = a * b \quad (\text{für alle } a, b, c \in H) \quad (2)$$

so gilt:

$$c \mid a, \quad c \mid b \Rightarrow c \mid a * b \quad (\text{für alle } a, b, c \in H). \quad (2')$$

Beweis mittels (1) und (2):

Aus $c \mid a, c \mid b$ ergibt sich $a * c = c, b * c = c$, wegen der Assoziativität also $(a * b) * c = a * (b * c) = a * c = c$ und daher nach (1) $c \mid a * b$.

Bekanntlich besagen (1), (2'), dass $a * b$ der ggT von a, b (und somit $*$ assoziativ) ist. Daraus ergibt sich¹⁾: Jedes irreduzible Element ist Primelement.

Setzt man nun noch die Gültigkeit des Teilerkettensatzes voraus (das heisst: im Falle $a_{n+1} \mid a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ ist stets $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich), so folgt bekanntlich¹⁾ weiter, dass jedes Element von H bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primelementen dargestellt werden kann. Eine Verknüpfung $*$ mit (1), (2) kann man nun leicht angeben, wenn in H eine Relation « $<$ » mit $a \mid b \Rightarrow a \leq b$ (für alle $a, b \in H$) existiert, bezüglich der stets $T(a) \cap T(b)$ (mit $T(a)$ als der Menge der Teiler von a) ein maximales Element²⁾ hat. Ordnet man jetzt jedem Paar a, b als Verknüpfungsergebnis $a * b$ ein maximales Element von $T(a) \cap T(b)$ zu, so erfüllt $*$ offenbar die Bedingungen (1) und (2).

Die im Vorstehenden an die kommutative Halbgruppe H mit dem neutralen Element e und die Relation « $<$ » gestellten Forderungen (mit Ausnahme der Assoziativität von $*$) sind nun erfüllt, wenn man « $<$ » als eine mit der Halbgruppenverknüpfung verträgliche (d.h. $a < b \Rightarrow a c < b c$) Wohlordnung voraussetzt. Offenbar ist dann H regulär. Man zeigt ferner, dass e kleinstes Element ist. Aus $a < e$ würde nämlich $a^n < a^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) folgen, im Widerspruch dazu, dass die Kette $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein kleinstes Element haben muss. Wegen $e \leq c$ gilt nun $a \leq a c$ und daher $a \mid b \Rightarrow a \leq b$.

Jedes Element von H hat jetzt nur endlich viele Teiler. Im anderen Falle würde es nämlich $b_v, c_v \in H$ ($v \in \mathbb{N}$) geben mit $b_v c_v = a$ und $\mu < v \Rightarrow b_\mu \leq b_v$ ($\mu, v \in \mathbb{N}$), daraus würde aber $\mu < v \Rightarrow c_\mu > c_v$ ($\mu, v \in \mathbb{N}$) folgen, so dass $\{c_v \mid v \in \mathbb{N}\}$ kein kleinstes Element haben könnte. Es gilt also der Teilerkettensatz, und $T(a) \cap T(b)$ hat stets ein grösstes Element. Dann wird wie oben $a * b$ als dieses grösste Element von $T(a) \cap T(b)$ gewählt. Setzt man jetzt noch die Assoziativität von $*$ voraus, so ist jedes Element von H bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primelementen darstellbar.

Satz: In einer kommutativen Halbgruppe mit neutralem Element e ist genau dann $H \setminus \{e\}$ Unterhalbgruppe und jedes Element eindeutig (abgesehen von der Reihenfolge) als Primelementprodukt darstellbar, wenn es eine mit der Halbgruppenverknüpfung verträgliche Wohlordnung gibt und diejenige Verknüpfung assoziativ³⁾ ist, die jedem Elementepaar den bezüglich der Wohlordnung grössten gemeinsamen Teiler zuordnet.

Beweis: Es wurde gezeigt, dass die Bedingung hinreichend ist. Die Notwendigkeit wird so bewiesen: Die Menge \mathcal{P} der Primelemente von H sei wohlgeordnet. Es sei $f_a: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung von \mathcal{P} in \mathbb{N} mit $a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{f_a(p)}$, wobei $f_a(p) \neq 0$ für endlich viele $p \in \mathcal{P}$. Die

Elemente $a, b \in H$ werden antilexikographisch geordnet nach dem bezüglich der Wohlordnung von \mathcal{P} grössten Element $p \in \mathcal{P}$, für das $f_a(p)$ von $f_b(p)$ differiert⁴⁾. Diese Ordnung ist eine Wohlordnung. Man zeigt das unter Benutzung bekannter⁵⁾ Überlegungen. Wegen $f_{ab} = f_a + f_b$ ist diese Wohlordnung verträglich mit der Halbgruppenverknüpfung. Jedes Elementepaar a, b besitzt einen ggT, und die ggT-Bildung ist assoziativ. Der grösste gemeinsame Teiler von a, b ist aber zugleich das bezüglich der Wohlordnung grösste Element $a * b$ von $T(a) \cap T(b)$. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen.

H. WÄSCHE, Lübeck

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).
- [2] N. JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*, Bd. 1, (van Norstrand, Princeton, 1964).
- [3] H. WÄSCHE, *Strukturtheoretische Analyse des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie*. Der Mathematik-Unterricht XI, 5. (Klett-Verlag Stuttgart 1965).

¹⁾ Siehe [2] Ch. 4

²⁾ $x \in M$ heisst (bzgl. $<$) maximales Element von $M (\subseteq H)$, wenn es kein $y \in M$ mit $x < y$ gibt.

³⁾ Die Assoziativität dieser Verknüpfung ist wesentlich, siehe [3], S. 89.

⁴⁾ Siehe [1], S. 79.

⁵⁾ Siehe [1], Kap. VI, § 3.

On (m, n) -ideals in subcommutative semigroups

Let S be a semigroup¹⁾. Following the terminology of the theory of rings we say that S is *subcommutative* if in S the equation

$$a b = c a \quad (1)$$

always has a solution c given a and b . Obviously every commutative semigroup is subcommutative. We show by an example that there exists a subcommutative semigroup which is not commutative:

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	2	2	2	2
3	2	3	2	3

The semigroup S of four elements 0, 1, 2, 3 with the above multiplication table is subcommutative but not commutative.

It is easy to see that the following assertion is true.

Proposition 1. *A semigroup S is subcommutative if and only if the relation $a S \subseteq S a$ holds for each element a in S .*

The Proposition 1 implies the

Proposition 2. *In a subcommutative semigroup S every left ideal is a two-sided ideal.*

As the author introduced (see e.g. [2]) a subsemigroup A of a semigroup S is called an (m, n) -ideal of S , if the inclusion

$$A^m S A^n \subseteq A \quad (2)$$

holds, where m, n are arbitrary non-negative integers and A^m is suppressed if $m = 0$. Concerning the (m, n) -ideals of semigroups the author proved, among others, that a semigroup is a group if and only if it has no proper (m, n) -ideals, where m, n are fixed positive integers [3]. Let π be a finite sequence π_1, \dots, π_t of the symbols l and r . A subsemigroup A of S is said to be a π -ideal if

$$A = S_l \subseteq S_{l-1} \subseteq \dots \subseteq S_0 = S \quad (3)$$

holds, where S_i is a left [right] ideal of S_{i-1} if $\pi_i = l$ [r] ($i = 1, \dots, t$). In the sequence π let $m[n]$ be the number of occurrences of r [l]. The author proved that a subset A of a semigroup S is a π -ideal if and only if A is an (m, n) -ideal of S . If S is a regular semigroup (i.e. $a \in a S a$ for each a in S), then a subset A of S is an (m, n) -ideal if and only if it is the intersection of an $(m, 0)$ -ideal and a $(0, n)$ -ideal of S (see [2]).

In the theory of (m, n) -ideals the Proposition 2 may be easily generalized as follows.

Proposition 3. *In a subcommutative semigroup every (m, n) -ideal is at the same time an $(m + 1, n - 1)$ -ideal.*

This statement has some consequences.

Corollary 1. *In a subcommutative semigroup every $(0, 2)$ -ideal is a bi-ideal.*

Corollary 2. *In a subcommutative semigroup every (m, n) -ideal is an $(m + n, 0)$ -ideal.*

Corollary 3. *In a subcommutative semigroup every $(0, n)$ -ideal is a (p, q) -ideal, where p, q are arbitrary non-negative integers such that $p + q = n$.*

It is easy to show that the subcommutative semigroups have the following property, too.

Proposition 4. *In a subcommutative semigroup every quasi-ideal is a right ideal and conversely.*

S. LAJOS, Budapest, Hungary

¹⁾ For the terminology we refer to [1].

REFERENCES

- [1] A.H. CLIFFORD and G.B. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. 1 and 2 Amer. Math. Soc. (Providence R.I. 1961; 1967).
 [2] S.LAJOS, *Generalized Ideals in Semigroups*, Acta Sci. Math. 22, 217–222 (1961).
 [3] S.LAJOS, *Notes on (m, n) -ideals I–III*, Proc. Japan Acad. 39, 419–421 (1963); 40, 631–632 (1964); 41, 383–385 (1965).

A Note on Integral Domains that are not Right Distributive

The following are three well known or easily proven results about integral domains.

Theorem I: *If $(R, +, \cdot)$ is an integral domain with characteristic $m > 0$, then m is a prime and all the non-zero elements in R have order m .*

Theorem II: *If $(R, +, \cdot)$ is an integral domain and R is finite, then $(R, +, \cdot)$ is a division ring.*

Theorem III: *If $(R, +, \cdot)$ is an integral domain and $e \in R$ is a non-zero idempotent, then e is an identity for $(R, +, \cdot)$.*

It is the purpose of this note to show that analogous results can not be obtained if just one of the distributive laws hold in $(R, +, \cdot)$.

Recall that $(N, +, \cdot)$ is a *near-ring* if $(N, +)$ is a group (not necessarily abelian), if (N, \cdot) is a semi-group, and if whenever $a, b, c \in N$, then $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. For lack of a better name, a *near integral domain* is a near-ring $(N, +, \cdot)$ such that if N^* are the non-zero elements of N , then (N^*, \cdot) is a semi-group. Similarly, a *near-field* is a near-ring $(N, +, \cdot)$ such that (N^*, \cdot) is a group.

The following result shows that analogues to Theorem I, Theorem II and Theorem III do not hold for near integral domains.

Theorem A: *Let $(G, +)$ be a group (not necessarily abelian). Let $*$ and \cdot be binary operations defined on G as follows: $a * b = b$ for any pair $a, b \in G$; $a \cdot b = b$ for any pair $a, b \in G$ if $a \neq 0$, and $0 \cdot b = 0$ for any $b \in G$. Then $(G, +, \cdot)$ and $(G, +, *)$ are near integral domains.*

This result follows immediately from [2], or from Theorem 1.8 of [1], or it can easily be proven by the reader.

It is interesting to note that the two near integral domains defined in Theorem A are the only ones definable on $(Z_4, +)$, $(Z_6, +)$, and $(S_3, +)$ where $(Z_n, +)$ denotes the cyclic group of order n , and $(S_n, +)$ denotes the symmetric group on n letters, the operation written additively instead of the usual \circ for composition. (These results are observed from Section II in [1].) For all other non-trivial groups of order less than eight there are additional near integral domains. Below are non-trivial examples for $(Z_5, +)$ and $(Z_7, +)$.

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	4	3	2	1
3	0	1	2	3	4
4	0	4	3	2	1

*	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	2	4	6	1	3	5
2	0	4	1	5	2	6	3
3	0	4	1	5	2	6	3
4	0	1	2	3	4	5	6
5	0	2	4	6	1	3	5
6	0	1	2	3	4	5	6

Based upon empirical evidence and efforts to show the contrary, the author makes the following

Conjecture. If $(N, +, \cdot)$ is a near integral domain with characteristic $m > 0$ and if \cdot is not one of the two binary operations defined in Theorem A, then m is a prime.

JAMES R. CLAY, University of Arizona, Tucson, Arizona, U.S.A.

REFERENCES

- [1] J. R. CLAY, *The Near-Rings on Groups of Low Order*, Math. Z. 104 (1968), 364–371.
 [2] J. J. MALONE, JR., *Near-Rings with Trivial Multiplications*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1111–1112.

Aufgaben

Aufgabe 569. Gegeben sind ein Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit den Seitenflächen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und ein Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$ mit den Seitenflächen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. l_i ist die Senkrechte von A_i auf β_i , m_i die Senkrechte von B_i auf α_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Man zeige: Wenn die Geraden l_i durch einen Punkt gehen, dann gehen auch die Geraden m_i durch einen Punkt.

O. BOTTEMA, Delft

Lösung: Der gemeinsame Punkt der Geraden l_i sei L . Das Tetraeder $B'_1 B'_2 B'_3 B'_4$ sei zu $A_1 A_2 A_3 A_4$ polarreziprok in bezug auf eine Kugel mit Zentrum L . Da seine Flächen parallel zu $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sind, ist es ähnlich und in ähnlicher Lage zum Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$. Die Lote von den Ecken B'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) auf die Flächen α_i gehen durch einen Punkt (nämlich L); also gilt dasselbe von den zu ihnen parallelen (und damit in jener Ähnlichkeit homologen) Geraden m_i . (Die Aufgabe findet sich auch bei J. HADAMARD, *Leçons de géométrie élémentaire*, vol. II, 7 éd., Problème 559. In Problème 1215^{bis} wird eine interessante Eigenschaft eines solchen Tetraederpaares angegeben.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

I. PAASCHE (München) zeigt, dass die entsprechende Aussage auch beim ebenen Simplex gilt.

Aufgabe 570. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels il existe seulement un nombre fini > 0 de nombres triangulaires qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Solution:

$$t_a + t_{a+1} + \cdots + t_{a+k-1} = \frac{1}{2} \left[k a^2 + k^2 a + \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \right].$$

Let $k[a^2 + k a + (k^2 - 1)/3] = m(m+1)$, therefore

$$(2m+1)^2 - k(2a+k)^2 = \frac{k^3 - 4k + 3}{3}.$$

Let k be an even perfect square $4t^2$, $t > 1$, that is not divisible by 3.

$$2m+1 + 2t(2a+4t^2) = \frac{64t^6 - 16t^2 + 3}{3}, \quad 2m+1 - 2t(2a+4t^2) = 1$$

gives $4t(2a+4t^2) = (64t^6 - 16t^2)/3$ or $2a+4t^2 = (16t^5 - 4t)/3$ hence $a = -2t^2 + (8t^5 - 2t)/3$ an integer. Further we have $4m = (64t^6 - 16t^2)/3$ or m is an integer.

Hence there will be at least one solution and at most a finite number of solutions if k is so chosen.

G. WULCZYN, Bucknell University, USA

P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.) bewies die Aussage der Aufgabe für $k = 9(2t-1)^2$ ($t = 1, 2, \dots$).

Aufgabe 571. 1. Let F denote the finite field of odd order q . Show that if $b \in F$ but not a square in F then

$$\prod_{a \in F} [(x+a)^2 - b] = (x^q - x)^2 - 4b.$$

2. More generally if F is a finite field of order q and $n \mid q-1$, evaluate the product $\prod_{a \in F} [(x+a)^n - b]$, where $b \in F$.
L. CARLITZ, Duke University, USA

Solution by the Proposer:

1. Put $b = \beta^2$, where $\beta \in \text{GF}(q^2)$. Then $\beta^q = -\beta$ and

$$\begin{aligned} \prod_{a \in F} [(x+a)^2 - b] &= \prod_{a \in F} (x + \beta + a)(x - \beta + a) \\ &= [(x + \beta)^q - (x + \beta)] [(x - \beta)^q - (x - \beta)] \\ &= (x^q - x + \beta^q - \beta)(x^q - x - \beta^q + \beta) \\ &= (x^q - x - 2\beta)(x^q - x + 2\beta) = (x^q - x)^2 - 4b. \end{aligned}$$

2. Put $b = \beta^n$, where β is in some $\text{GF}(q^r)$. Put $q = nk + 1$; then $\beta^q = \beta^{nk+1} = b^k \beta$. Also let $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ denote the n -th roots of unity in F . Then

$$\begin{aligned} \prod_{a \in F} [(x+a)^n - b] &= \prod_{a \in F} [(x+a)^n - \beta^n] \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{a \in F} (x + a - \omega^j \beta) = \prod_{j=0}^{n-1} [(x - \omega^j \beta)^q - (x - \omega^j \beta)] \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} [x^q - x - \omega^j (\beta^q - \beta)] = \prod_{j=0}^{n-1} [x^q - x - \omega^j (b^k - 1) \beta] \\ &= (x^q - x)^n - b (b^k - 1)^n. \end{aligned}$$

Aufgabe 572. Wenn in einem Dreieck die Ecktransversalen die Gegenseiten im Verhältnis der x -ten Potenzen der anliegenden Seiten teilen, dann schneiden sie sich in einem Punkt, und dessen Abstände von den Seiten sind dann zu deren $(x-1)$ -ten Potenzen proportional. Dabei kann x eine beliebige reelle Zahl sein.

Man beweise die Richtigkeit dieser Aussage und ihrer Umkehrung.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Lösung: Entsprechend der Unterteilung in Abschnitte A , α setzen wir die Seite $a = \alpha + A$ usw. Aus $\alpha : A = b^x : c^x$ usw. zyklisch folgt $\alpha \beta \gamma : A B C = 1$, also existiert ein Ceva-Schnittpunkt. Er teile die Transversalen in die Abschnitte U (bis zur Ecke) und u (bis zur Seite) usw. und habe von a den Abstand ξ , usw. Der Satz von H. VAN AUBEL $\beta : B + C : \gamma = U : u = (h_a - \xi) : \xi$ führt mittels $h_a = 2F : a$ auf $\xi = a^{x-1} 2F : (a^x + b^x + c^x)$ usw., q.e.d.

Liegt umgekehrt ein Cevatransversalen-Schnittpunkt mit den Abständen $\xi, \eta, \zeta = t a^{x-1}, t b^{x-1}, t c^{x-1}$ von den Seiten a, b, c vor, so gilt offenbar $\xi a + \eta b + \zeta c = 2F$, also $t = 2F : (a^x + b^x + c^x)$, das heisst es liegt genau derjenige Cevatransversalen-Schnittpunkt vor, der durch die Seitenteilung $a = \alpha + A$ mit $\alpha : A = b^x : c^x$ usw. erzeugt wird, q.e.d.

Die bekanntesten Spezialfälle sind $x = 1$ (Inkreiszentrum) und $x = 0$ (Gravizentrum).

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), E. FRÜH (Kradolf), W. JÄNICHEN (Berlin), L. KIEFFER (Luxemburg), S. KLEVEN (Steinkjer, Norwegen), E. WIDMER (Biel).

Neue Aufgaben

Aufgabe 593. Gegeben ist die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung

$$x'' + \lambda p(t) x = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad p(t) > 0.$$

Die Eigenfunktionen seien $g_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$.

$$\text{Behauptung: } \begin{vmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2.$$

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute Brooklyn, USA

Aufgabe 594. Es sei V ein Rechtsvektorraum vom Range > 4 über dem (nicht notwendig kommutativen) Körper K . Mit $L(V)$ bezeichnen wir den Verband aller Unterräume von V , d.h. die zu V gehörige projektive Geometrie. Sind U und W Unterräume von V mit $V = U \oplus W$, so bezeichnen wir mit $\Gamma(U, W)$ die Gruppe aller Kollineationen von $L(V)$, die sowohl U als auch W punktweise festlassen. Wir sagen, dass $L(V)$ ein (U, W) -transitiver Raum ist, falls es zu zwei verschiedenen Punkten P und Q von $L(V)$ mit $P, Q \notin U, W$ und $(P + Q) \cap U \neq \{0\} \neq (P + Q) \cap W$ stets ein $\gamma \in \Gamma(U, W)$ mit $P\gamma = Q$ gibt. Ist U ein Punkt und daher W eine Hyperebene von $L(V)$, so folgt aus der Gültigkeit des Satzes von Desargues, dass $L(V)$ ein (U, W) -transitiver Raum ist. Man zeige: In $L(V)$ gilt genau dann der Satz von Pappos, falls es zwei Unterräume U und W von V mit $V = U \oplus W$ und $r(U) > 1 < r(W)$ gibt, so dass $L(V)$ ein (U, W) -transitiver Raum ist.

H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgabe 595. Show that

$$\left(\binom{n}{k}, k \right) = 1 \quad (k \leq n \leq 2k)$$

if and only if $k = p^s$, where p is prime and $s \geq 1$.

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 596. Das ebene Dreieck mit den Seiten a, b, c besitze den Umfang $2s$, den Umkreisdurchmesser h und den Inkreisradius ϱ . Man zeige

$$(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 = (s^2 - \varrho^2 - 2\varrho h)^2 + (2\varrho s)^2.$$

I. PAASCHE, München

Literaturüberschau

Lineare Geometrie. Von HORST TIETZ. X und 202 Seiten mit 18 Figuren. DM 30.–. Verlag Aschendorff, Münster (Westfalen) 1967.

Das vorliegende Buch ist aus einer 2semestrigen Anfängervorlesung über lineare Algebra hervorgegangen, wie sie an den meisten Hochschulen für die Mathematiker und Physiker gehalten wird. Mit dem gewählten Titel will der Autor betonen, dass er dem geometrisch motivierten Teil der linearen Algebra in einer Anfängervorlesung eine gewisse Priorität zuschreibt. Daneben lässt das Buch noch weitere didaktische Anliegen erkennen. Wer sich in die Lektüre vertieft, wird eine erfreuliche Feststellung machen: Es gibt trotz BOURBAKI noch Dozenten, die sich der Tatsache bewusst sind, dass mit einer unvermittelt anhebenden abstrakten Breite auf die Studenten im ersten Studiensemester der Wirkungsgrad des Mathematikstudiums nicht unbedingt erhöht wird. TIETZ stellt seinem Buch ein Kapitel über den 3dimensionalen Anschauungsraum voran, in dem er die naive

Vektorrechnung und die elementaren Teile der analytischen Geometrie in vorwiegend empirischer Manier entwickelt. Für die Studierenden fällt damit etwas ab, das sie in der Physikvorlesung sofort verwenden können. Dieses einleitende Kapitel bildet aber zugleich auch eine anschauliche Motivation für die anschließende Theorie.

Das Buch vermittelt eine solide Einführung in die Begriffswelt der heutigen Mathematik und in die fundamentalen Theoreme der linearen Algebra. Dieses Programm entspricht dem Lehrziel, das der Vorlesung über lineare Algebra innerhalb des Studiums aufgetragen ist; sie hat den Zugang zur Mathematik freizulegen.

Die einzelnen Kapitel des Buches führen folgende Überschriften: 1. Der Anschauungsraum, 2. Der Vektorraum, 3. Dualität, 4. Abbildungstheorie, 5. Orthogonalität, 6. Lineare Punkträume.

Das Buch ist sehr übersichtlich gestaltet und ist leicht lesbar. Es kann als Parallellektüre zu einer Vorlesung über lineare Algebra wie auch zum Selbststudium bestens empfohlen werden.

M. JEGER

Elementarmathematik in moderner Darstellung. Von LUCIENNE FÉLIX. Übersetzung aus dem Französischen, besorgt von Ivo Steinacker. XV und 558 Seiten mit 54 Figuren. DM 39.—. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1966.

An sich ist die Übersetzung des Exposé moderne des mathématiques élémentaires aus dem Jahre 1961 sehr zu begrüßen. Die bekannte Autorin gibt darin eine Darstellung des Unterrichtsstoffes der höheren Schule unter dem Gesichtspunkt der Vereinheitlichung. Dies läuft auf die Heraushebung einiger wesentlicher Strukturen und auf das Aufzeigen der Durchgängigkeit in den Methoden hinaus. Die Hauptabschnitte des Buches tragen folgende Überschriften: Fundamentale Strukturen, Arithmetik und Algebra, Analysis, Die Geometrien.

Der Leser erwartet von einer modernen Darstellung des Schulstoffes präzise Begriffsbildungen, eine tiefere Einsicht in die einzelnen Stoffgebiete, eine Herausarbeitung der Querverbindungen zwischen verschiedenen Gebieten und nicht zuletzt einen sinnvollen Anschluss der Schulmathematik an die höhere Mathematik. Diese Erwartungen werden leider nur teilweise erfüllt. Fundamentale Begriffe sind häufig nur sehr unklar definiert (Relation, Struktur, Transformation, Funktion, Ereignis, um nur einige wenige zu nennen). Die bewusst gepflegte Vielologie (viele werden geboten!) bewirkt oft eine Oberflächlichkeit, die zahlreiche wichtige Gegenstände nur gerade anklingen lässt und damit kaum zu einem tieferen Verständnis ausreicht. Im weitern sind verschiedene Rückfälle in die traditionelle Sprechweise zu vermelden (auf Seite 299 tauchen neben den gewöhnlichen Funktionen noch implizite Funktionen auf; im Zusammenhang mit dem Doppelverhältnis wird auf Seite 385 die Zahl ∞ eingeführt). Die Darstellung der Geometrie wird vom Vektorraum her vollzogen und wirkt reichlich vertheoretisiert, was sich auch darin kundtut, dass ausgerechnet bei der Behandlung des klassischen Schulstoffes (Seiten 403–474) die Figurendichte das absolute Minimum 0 erreicht. Die Begründung für den Verzicht auf Figuren auf Seite 340 ist mir schleierhaft. Der Formalismus wird des öftern sehr willkürlich gehandhabt: Während z.B. auf den Seiten 10/11 für das direkte Produkt von Mengen das Zeichen \times und für eine innere Operation auf einer Menge das Zeichen \circ eingeführt werden, benutzt die Autorin später für die Verknüpfung von affinen Abbildungen das Zeichen \times . Dass hier wiederum eine innere Verknüpfung auf einer Menge vorliegt, geht fast vollkommen unter (Querverbindung!). Die Kongruenzgruppen in der Ebene und im Raum sind trotz eines ausgiebigen Vorstosses in die Spiegelungsgeometrie nur schlecht herausgestellt. Eine Schlussbemerkung auf Seite 449, die auf die Gruppenstruktur anspielt, ist völlig missraten: «Die Menge der Ebenenspiegelungen bildet die Gruppe der Isometrien». Eine Reihe von sprachlichen Unklarheiten wie gerade an dieser Stelle ist wohl auf das Konto der Übersetzung zu buchen. Bei einem Werk mit vorwiegend didaktischem Einschlag dürfte man aber erwarten, dass die Übersetzung sorgfältiger überwacht wird.

Die Absichten der Autorin, die sich mit der Popularisierung der Bourbaki-Ideen im Hinblick auf die Schule einen guten Namen gemacht hat, verdienen grundsätzlich ein weites Interesse. Es ist aber zu beachten, dass ihr Exposé moderne einer relativ frühen

Phase in der Reformbewegung angehört und dass seither auch im deutschen Sprachraum aus den Bemühungen um die Didaktik der Mathematik auf der höheren Schule eine reichhaltige Literatur hervorgegangen ist. Was die begriffliche Präzision und die Grundlagen der Elementarmathematik anbetrifft, ist auf der andern Seite des Rheins sogar hervorragende Arbeit geleistet worden. Es fehlt heute nur noch an einer zusammenfassenden Darstellung auf einem gesunden Niveau.

M. JÉGER

Introduction à la combinatoire en vue des applications. Par A. KAUFMANN. Préface par M. CLAUDE BERGE. 606 pages. Dunod, Paris 1968.

Les méthodes nombreuses et variées d'analyse combinatoire trouvent d'importantes applications aussi bien dans l'art d'ingénieur que dans le domaine de la recherche opérationnelle. C'est en vue de ces applications que M. KAUFMANN, professeur à l'Institut polytechnique de Grenoble, a écrit ce nouvel ouvrage qui met à la disposition des praticiens une importante documentation concernant le dénombrement, l'emploi des fonctions génératrices, les graphes, l'énumération et l'optimisation. Deux annexes complètent l'ouvrage. L'une d'elles est consacrée à l'Algèbre de Boole, aux anneaux des classes résiduelles modulo n et au corps de Galois de caractéristique p . La seconde annexe est consacrée au codage et aux codes correcteurs. On trouve dans cet ouvrage nombre de figures, d'exemples et d'exercices. Cet exposé clair et précis s'adresse à un vaste public.

S. PICCARD

Ideas in Mathematics. Von M. E. MUNROE. 264 Seiten mit 89 Figuren. 59s. Addison-Wesley, London 1968.

Einige Vorstellungen über die wichtigsten mathematischen Begriffe und Methoden sollte sich heute jeder Gebildete erwerben. Das vorliegende Buch kann dafür ein guter Helfer sein, denn es gibt nicht nur sorgfältige und ausführliche Erklärungen der Begriffe und Definitionen, sondern auch viele einfache Beispiele, die die Rechenmethoden illustrieren. Hier ist natürlich eine intensive Mitarbeit des nichtmathematischen Lesers vorausgesetzt. Entsprechend dem mehr induktiven Charakter der Darstellung werden Beweise gelegentlich weggelassen. Der Vertiefung dienen Aufgaben (zum Teil mit Lösungen) in jedem Abschnitt. Einem einleitenden Kapitel über Mengen, Funktionsbegriff und lineare Funktion folgt ein Abschnitt über mathematische Logik. Dem umfangreichsten Kapitel «Calculus» schliessen sich Abschnitte über Wahrscheinlichkeit, Lineare Algebra, Lineare Programmierung und Abstrakte algebraische Systeme an. Das letzte Kapitel enthält eine Einführung in die Programmiersprache FORTRAN.

E. TROST

Educational Studies in Mathematics. Editor: H. FREUDENTHAL. Vol. 1, No. 1/2. 246 Seiten. Dfl. 45.—. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1968.

Der Zweck dieser neuen internationalen Zeitschrift ist die Publikation substantieller Arbeiten über Fragen des mathematischen Unterrichts. Ein hohes Niveau dürfte durch den Herausgeber, den derzeitigen Präsidenten der ICMI (IMUK), und die Redaktionskommission, der bekannte Mathematiker angehören, garantiert sein. Pro Jahr soll ein Band von ca. 500 Seiten in vier Heften erscheinen (Subskriptionspreis Dfl. 80.—, Einzelheft Dfl. 22.50).

Das vorliegende Doppelheft enthält 21 Referate, die am ICMI-Kolloquium in Utrecht (August 1967) gehalten wurden (Autoren: H. Behnke, A. Brailly, A. Delessert, A. Engel, T. J. Fletcher, M. Glaymann, H. B. Griffiths, J. M. Hammersley, M. Hästad, M. S. Klamkin, A. Z. Krygovska, R. C. Lyness, C. Pisot, H. O. Pollak, A. Revuz, A. Roumanet, W. Servais, H. G. Steiner, J. Tavernier, R. C. Walker, G. Young). Es ist im Hinblick auf die fortschreitende Modernisierung des Mittelschulunterrichts in Richtung der Strukturen sehr zu begrüßen, dass Professor Freudenthal die Frage «How to teach Mathematics so as to be useful» in diesem Kolloquium zur Diskussion gestellt hat. Diese Berichte und die Wiedergabe einer «Panel Discussion» zeigen die ganze Problematik der Vermittlung von «brauchbarer» Mathematik auf, sie geben aber auch eine Menge wertvoller Hinweise und viele schöne konkrete Beispiele. Als besonders wichtiges, aber schwer erreichbares Ziel des Unterrichts erscheint die Fähigkeit, eine gegebene «Situation» zu mathematisieren. Diese

für die Anwendungen wesentliche Tätigkeit kann man aber auch an innermathematischen Situationen lernen und üben.

Der Start der drucktechnisch alle Ansprüche erfüllenden Zeitschrift ist vielversprechend.

E. TROST

The Mathematical Papers of Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, Vol. III: Algebra. Herausgegeben von H. HALBERSTAM und R. E. INGRAM. Cunningham Memoir No. XV. XXIV und 672 Seiten mit 1 Abbildung. \$ 37.50. Cambridge University Press, London, New York 1967.

Es handelt sich um den dritten Band der Werke Hamiltons. Band I (1931) behandelt die Optik, Band II (1940) die Dynamik; der vierte und letzte Band soll die Arbeiten Hamiltons zur Geometrie und Analysis enthalten. Der vorliegende Band ist den Arbeiten zur Algebra gewidmet. Teil I behandelt die komplexen Zahlen als Spezialfall einer zweidimensionalen kommutativen und assoziativen Divisionsalgebra über den reellen Zahlen. Teil II umfasst die Arbeiten zu den Quaternionen. Teil III bringt die Untersuchungen zur Gleichungstheorie (insbesondere also die Hamiltonsche Verbesserung des Abelschen Beweises über die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades durch Radikale). Teil IV enthält die Ausführungen zum «Ikosaeder Kalkül» und seine Anwendungen auf Wegprobleme auf den fünf Platonischen Körpern. Das vorliegende Buch enthält eine vorzügliche Einleitung; nebst drei kurzen Appendices der Herausgeber bringt ein vierter Appendix ein weiteres neulich entdecktes Manuskript Hamiltons über ganze Quaternionen.

HERBERT GROSS

Sets, Functions and Probability. Von J. B. JOHNSTON, G. B. PRICE und F. S. VAN VLECK. VIII und 376 Seiten. 89s. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.) 1968.

Das Buch gibt eine solide, ausführliche Einführung in die im Titel genannten Gebiete, wobei die Behandlung der Mengen, der Relationen und Funktionen, die Darstellung der Differenzgleichungen und die Kombinatorik durchaus eigenständig ist und nicht etwa nur im Hinblick auf die in der zweiten Hälfte des Buches behandelte Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgenommen wird. Es stellt eine vollständige Neubearbeitung eines Teils der vor einigen Jahren von denselben Verfassern herausgegebenen «Introduction to Mathematics» dar. – Die Wahrscheinlichkeitsrechnung umfasst nur die elementaren Gebiete dieser Disziplin. – Besondere Beachtung verdienen die zahlreichen interessanten Beispiele und Aufgaben aus der Biologie und aus dem Wirtschafts- und Sozialleben.

R. INEICHEN

Bericht

13. Mathematikgeschichtliches Kolloquium im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald), 20.-26. Oktober 1968

Die diesjährige Tagung stand unter der gemeinsamen Leitung von J. E. HOFMANN (Ichenhausen) und C. J. SCRIBA (Hamburg). Als Ehrengast durften die Leiter Herrn KURT VOGEL (München) begrüßen, der eben das achte Lebensjahrzehnt vollendet hatte. Mit warmen und gerechten Worten würdigte J. E. HOFMANN das umfangreiche und bedeutungsvolle Schaffen des Jubilars. Zur besonderen Freude gereichte dem Tagungskollegium die Präsenz der beiden andern Senioren S. HELLER (Schleswig) und K. FLADT (Calw), die mit dem Gefeierten ein 250 Jahre Mathematikgeschichte repräsentierendes Trio verkörperten.

Die Vortragsthemen umspannten den respektablen Zeitraum von den Babyloniern bis Euler, wenn auch die Antike – numerisch beurteilt – etwas zu kurz gekommen sein mag. Ihr waren bloss zwei Vorträge gewidmet:

E. M. BRUINS (Amsterdam) gab an, dass auf erhaltenen babylonischen Tafeln Quadrat- und Kubikwurzeln (YBC 6295) «zerstückelt» werden mit Hilfe von Divisionen, aus der letzten Stelle ersichtlich. Analog können Reziprokwerte multiplikativ berechnet werden.

Der Vortragende entwickelte zwei multiplikative Verfahren zur Wiederherstellung der grossen Reziprozentafel (Physis IX, 1967, p. 373–392). – B. L. VAN DER WAERDEN (Zürich) zeigte, wie im fünften vorchristlichen Jahrhundert in einer Gruppe von Pythagoreern ein System von vier Wissenschaften entwickelt wurde: Arithmetik, Geometrie, Harmonik und Astronomie. Zu diesem System gehört eine pythagoreische Erkenntnistheorie, die Plato im «Staat» kritisiert. In der Diskussion wagte VAN DER WAERDEN die Hypothese, dass wahrscheinlich nicht nur das ganze zweite Buch der Elemente Euklids, sondern auch das dritte, vierte und siebente pythagoreisch seien. Das achte Buch könnte auf Archytas zurückgehen. – Über das astronomische System der persischen Tafeln sprach J. J. BURCKHARDT (Zürich) im Sinne eines Berichts über eine mit B. L. VAN DER WAERDEN gemeinsam verfasste Arbeit, die im *Centaurus* erscheinen wird. Von Ibn Hibinta sind 16 Horoskope des Mashallah (ca. 800 AD) überliefert, die sich auf die Jahre – 3320 bis + 928 beziehen. Diese Horoskope werden mit verschiedenen Methoden nachgerechnet und es wurde versucht, daraus Rückschlüsse auf die persische Astronomie zu ziehen. – Ebenfalls in die Welt der Muslime führte uns Frau Y. DOLD-SAMPLONIUS (Neckargemünd). Der Mathematiker Al Sigi gibt in einem Jugendmanuskript (Paris Nr. 2457) eine Lösung des Winkeltrisektionsproblems mittels Einschiebung von Proportionalen. In diesem Manuskript führt er verschiedene ältere Verfahren an von Abû'l Hasan el-Semsi Herawî, ab Kûhi und Tabit ben Qurrah. – M. FOLKERTS (Göttingen) beschäftigt sich mit ungedruckten Euklidausgaben. Neben den Hauptvertretern des *Euclides Latinus* bis zum 13. Jh. (Boethius, Adelhard) gibt es einige Mischfassungen, die aus Adelhard und Boethius kontaminiert sind. Zwei derartige Versionen aus dem 12. Jh. wurden auf klare und interessante Weise vorgestellt. Die eine wird in bloss einer einzigen Handschrift überliefert, während von der anderen drei Bearbeitungen bekannt sind. – H. L. L. BUSARD (Venlo) führte aus, wie im zweiten Viertel des 14. Jhs. der Traktat *De motu* des Gerhard von Brüssel zum Ausgangspunkt für die kinematische und dynamische Behandlung der Bewegung durch die sog. Oxfordschule wurde. In Paris wurden diese Probleme zuerst von Buridan, dann etwa um die Jahrhundertmitte von seinen Schülern Oresme und Albert von Sachsen in Angriff genommen. Letzterer hat sich damit in seinem Physikkommentar und im *Tractatus proportionum*, der sich stark an die Traktate von Bradwardine und Heytesbury anlehnt, eingehend beschäftigt. – Mit *Alhazens Problem* befasst sich J. A. LOHNE (Flekkieford). Er zeigte, wie Ibn al-Haitam (965?–1039) den Reflexionspunkt eines sphärischen Spiegels mittels Einschiebungen konstruiert hat. Erwähnt wurden die Vorarbeiten des Ptolemäus, die vereinfachte Konstruktion von Harriot sowie dessen Verwendung einer Schneckenkurve zur Lösung des Problems von Alhazen.

Mehr als die Hälfte aller Vorträge waren Themen der neueren Zeit gewidmet. I. SCHNEIDER (München) referierte über Proportionalzirkel. Versteht man unter einem solchen einen irgendwie gearteten Zirkel, auf den unter Berücksichtigung der Proportionallehre eine oder mehrere Funktionsleitern aufgetragen sind, so ist die Entstehung dieses Instrumentes in die Mitte des 16. Jh. anzusetzen. Der Proportionalzirkel vom Typ desjenigen von Galilei wurde bis zum Ausgang des 18. Jh. benutzt. – Von J. VERDONK (Bussum) erfuhren wir, dass Petrus Ramus und Simon Stevin ähnliche Ideen hatten über Didaktik, Theorie und Praxis, Methode, Natur und Logik, *philosophia prisca* und Erfahrung. Die Untersuchung des Einflusses von Ramus auf Stevin ist lohnend. Als Illustration ist eine (damals neue) Definition der Zahl gegeben worden, die sich erstmals bei Ramus findet und die bei Stevin zum Ausgangspunkt für die Ausdehnung des Zahlbegriffes bis auf die reellen Zahlen genommen wurde. – J. GRISARD (Paris) trug über Fr. Viète vor, dessen gesamtes Werk fast durchgängig Schwierigkeiten im Hinblick auf die formale Darstellung aufweist. Dies wird im einzelnen ersichtlich beim Studium seiner Versuche, eine Formeltabelle zur sphärischen Trigonometrie aufzustellen. Man bemerkt hier dieselben Mängel, die die meisten seiner Arbeiten kennzeichnen: Schwerfälligkeit und Mangel an Klarheit in der Darstellung. Diese Dinge erschweren das Verständnis von Viètes Werken sehr und bewirkten nicht zuletzt, dass sie in der Folge in Vergessenheit geraten konnten. – Im wahrsten Sinne des Wortes *problemgeschichtlich* war der Vortrag von J. E. HOFMANN (Ichenhausen) über die geometrische Behandlung einer Fermatschen Extremalaufgabe (Bestimmung des Punktes, der von drei gegebenen minimale Abstand-

summe erhält) durch Italiener des 17. Jh. B. Cavalieri (1647) gewann den gesuchten Punkt unter Verwendung einer Ellipse, deren sich auch E. Torricelli in ähnlicher Form bediente. V. Viviani gab später einen Beweis auf Grund allgemeiner Überlegungen, die von C. Renaldini adoptiert wurden. Bei allen Autoren handelt es sich um direkte geometrische Ansätze, die aus Weiterführung der von Pappos (Collectiones, lat. 1588) angedeuteten Methoden hervorgegangen sind. – L. v. MACKENSEN (München) stellte anhand eines bisher unbekannten Leibniz-Manuskriptes zur Mechanisierung der Multiplikation dar, wie ein zunächst verworren und flüchtig erscheinender Entwurf nach eingehender Deutung als notwendige Vorstufe zur Erfindung der ersten digitalen 4-Spezies-Rechenmaschine durch G. W. Leibniz angesehen werden kann. Dabei wurde die Leibnizsche Erfindungskunst durch ein konkretes Beispiel verdeutlicht. – Ebenfalls im Zusammenhang mit Leibniz orientierte R. W. LAURI (Riehen/Basel) über einen Umstand, den man beinahe als eine bibliographische Neuentdeckung werten könnte. Es handelt sich um eine deutsche Übersetzung der Leibnizschen *Physica nova* (1671), die im Zusammenhang mit einer Bearbeitung der *Pseudodoxia epidemica* des englischen Arztes Thomas Brown durch Christian Peganius alias Rautner im Jahre 1680 erschienen ist. Diese Übersetzung ist (bzw. war) ersten Leibnizforschern deshalb unbekannt, weil sie in der Leibniz-Bibliographie (Ravier) lediglich unter einem rosenkreuzerischen Pseudonym (Knorr von Rosenroth) aufgeführt ist! – Einen Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des Limesbegriffs gab P. BOCKSTAELE (Heverlee) durch eine Analyse der *Geometrica inquisitio* (1688) des Jesuiten Ignatius de Jonghe. Bemerkenswert an diesem Buch ist die Art und Weise, wie de Jonghe den Limesbegriff anwendet. Dies geschieht allerdings nicht immer richtig. So führt ihn der Trugschluss, $\lim_n (1 - k^{1/n})$ verschwinde für unendlich grosses n , zum Glauben, dass die Quadratur eines Segmentes der Hyperbel $xy = c$ unmöglich sei. – W. HESTERMEYER (Paderborn) legte dar, dass die *Aretologistik* Erhard Weigels von 1687 die wahrscheinlich früheste deutschsprachige Didaktik der Mathematik ist. Das Ziel einer Gewöhnung zum «tugendhaften» (= sachgerechten) Handeln scheint Weigel über die Sprache nicht erreichbar, hingegen über das Rechnen mit seinen Gesetzen. Ein Fortschritt gegenüber den zeitüblichen Rechenbüchern liegt im methodisch überlegten Vorgehen, dem Aufzeigen der Zusammenhänge und im Beweisen der behandelten Regeln. – Die Bestimmung bogengleicher Kurventeile und Kurven durch Mathematiker des 17. Jh. war das Thema von H. KRIEGER (Mössingen). Ausgehend von dem Problem, algebraische Kurven zu finden, die einer gegebenen bogengleich und inkongruent sind, geben Johann Bernoulli eine allgemeine (*motus rectorius*), Leibniz und John Craig unterschiedliche Lösungen an. Die Beziehung der Bogengleichheit der archimedischen Spirale und der Parabel wird von Cavalieri, Gregorius a St. Vincentio, Roberval, Pascal, Fermat und anderen mit verschiedenen Methoden verifiziert. – Mit Beispielen aus Eulers zahlentheoretischem Briefwechsel bildete C. J. SCRIBA (Hamburg) – auch chronologisch – einen würdigen Abschluss. Die (kürzlich neu herausgegebene) Korrespondenz Eulers mit Goldbach umspannt 35 Jahre und beinhaltet 196 Briefe. Aus den vielen darin behandelten zahlentheoretischen Problemen wurde – nach einer allgemeinen Übersicht – die Entdeckung Eulers vorgeführt, dass $2^{2^5} + 1$ einen Teiler 641 besitzt.

Als ganz besonders fruchtbar und lehrreich erwiesen sich – quod erat expectandum – die oft ausgiebigen Diskussionen, welche die Vorträge einrahmten, doch vor allem die direkten persönlichen Kontakte der Teilnehmer untereinander, die den speziellen Reiz und Gewinn dieser einzigartigen Tagung ausmachen.

E. A. FELLMANN, Basel

Mitteilung

IMUK-Seminar in Echternach (Luxemburg), 28.-31. Mai 1969

Etwa 14 Vortragende aus den EWG-Staaten und der Schweiz sprechen über das Wissen der Abiturienten und die Anforderungen der Universität. – Sprachen: französisch und deutsch. – Auskunft: Séminaire CIEM, Echternach (Luxemburg).

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 24

Heft 3

Seiten 49–72

10. Mai 1969

Line-Coloring of Signed Graphs¹⁾

Introduction

A *signed graph* or *sigraph* is a graph in which some of the lines have been designated as positive and the remaining as negative. Sigraphs have been studied extensively by CARTWRIGHT and HARARY (see [2] and [5]) in their theory of balance. When drawing a sigraph it is customary to indicate positive lines by solid lines and negative lines by dashed lines. Thus, the sigraph S of Figure 1 has 3 positive and 2 negative lines.

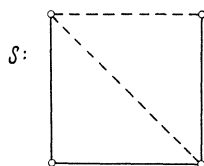


Figure 1

CARTWRIGHT and HARARY [3] have defined a sigraph S to be *colorable* if it is possible to assign colors to the points of S so that two points joined by a negative line are colored differently while two points joined by a positive line are colored the same. It was shown in [3] that a sigraph is colorable if and only if it contains no cycle with exactly one negative line. It is the purpose of this paper to define and study line-colorable sigraphs and present some of their properties. In particular, we give a characterization of line-colorable sigraphs and determine the ‘line chromatic number’ of special classes of sigraphs.

The *chromatic number* $\chi(S)$ of a colorable sigraph S is the smallest number of colors needed in a coloring of S . If one were to regard an ordinary graph G as a sigraph S all of whose lines are negative, then $\chi(G) = \chi(S)$. Indeed, if S is a complete colorable sigraph, then the ordinary graph G obtained by converting all negative lines to ordinary lines and deleting all positive lines has the same chromatic number as S . Thus, in a certain sense, complete colorable sigraphs and ordinary graphs are related, where negative lines correspond to ordinary lines and positive lines correspond to ‘no lines’.

The *line-graph* $L(G)$ of a graph G is that graph whose points can be put in one-to-one correspondence with the lines of G so that two points of $L(G)$ are adjacent if and only if the corresponding lines of G are adjacent. In order to propose a natural defini-

¹⁾ All definitions not given in this article may be found in the books [4, 5].

tion of the 'line-sigraph' of a sigraph, we again consider a complete sigraph S . Certainly, there must be a one-to-one correspondence between the points of $L(S)$ and the lines of S . Since there is a strong resemblance between the negative lines of a sigraph and the lines of an ordinary graph, the sigraph R of S induced by its negative lines should have only negative lines in its line-sigraph, while all other lines in $L(S)$ should be positive. We are thus led to the following definition. The *line-sigraph* $L(S)$ of a sigraph S is that sigraph whose points can be put in one-to-one correspondence with the lines of S in such a way that two points of $L(S)$ are joined by a negative line if and only if they correspond to two adjacent negative lines of S and are joined by a positive line if they correspond to some other two adjacent lines of S .

Since coloring the lines of an ordinary graph is equivalent to coloring the points of its line-graph, it seems natural to make the following definition. A sigraph S is *line-colorable* if its line-sigraph $L(S)$ is colorable, i.e., if it is possible to assign colors to the lines of S so that two adjacent negative lines are colored differently and any other adjacent lines are colored the same.

A Characterization of Line-Colorable Sigraphs

If v is a point of a sigraph S , then the *positive degree* \deg^+v of v is the number of positive lines of S incident with v . The *negative degree* \deg^-v of v is defined analogously. We can now present the principal result of this section.

Theorem 1. *A sigraph S is line-colorable if and only if the following two properties are satisfied:*

- (P1) *There exists no point v of S with $\deg^+v \geq 1$ and $\deg^-v \geq 2$,*
- (P2) *there exists no cycle having exactly two consecutive negative lines.*

Proof. We first show the necessity of (P1) and (P2). If a point v of S is incident with one positive line and two negative lines, then these 3 lines induce a triangle in $L(S)$ having exactly one negative line so that $L(S)$ is not colorable and S is not line-colorable. Similarly, if S contains a cycle C having exactly two consecutive negative lines, then the lines of C generate a cycle in $L(S)$ having exactly one negative line, so, again, S is not line-colorable.

To prove the sufficiency of (P1) and (P2), we employ induction on the number of positive lines in a sigraph. If S has no positive lines, then S is certainly line-colorable. Assume that every sigraph having n positive lines, $n \geq 0$, and satisfying (P1) and (P2) is line-colorable. Let S be a sigraph with $n + 1$ positive lines having properties (P1) and (P2). The removal of a positive line $x = uv$ from S results in a sigraph S' having n positive lines. Since S' obviously satisfies (P1) and (P2), S' is line-colorable by the inductive hypothesis.

Assume that x is a bridge. If there are no lines other than x incident with u or v , then x may be colored arbitrarily in S . Otherwise, if necessary, the colors used for the component in S' containing u may be easily changed or permuted so that all lines incident with u are colored the same as those incident with v . Hence, x may be given that color thereby showing that S is line-colorable.

Suppose, on the other hand, that x is not a bridge. Then x belongs to a cycle C whose line-sequence is $x, x_1, x_2, \dots, x_n = x$. If, in a line-coloring of S' , the colors of x_1 and x_{n-1} are the same, say α , implying that all lines incident with u or v have color α ,

then x may be replaced and colored α also. If x_1 and x_{n-1} are colored differently, then there must exist at least 2 consecutive negative lines in C . Thus, let i be the least integer such that x_i and x_{i+1} are negative, and let j be the largest integer such that x_{j-1} and x_j are negative. By (P2), x_i and x_j are not adjacent. Let β be a color not used in coloring S' , and let α_k , $k = i, j$, be the color of x_k . Also, let W_k be the set consisting of x_k and all lines colored α_k which lie on a common path with x_k . No negative line of W_i is adjacent to a negative line of W_j , for, otherwise, there would exist a cycle with exactly two consecutive negative lines, contradicting (P2). Now if the colors of the lines in $W_i \cup W_j$ are changed to β , then by replacing x and coloring it β , we have a line-coloring for S .

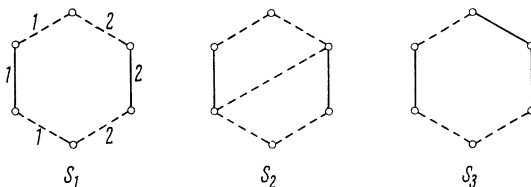


Figure 2

In Figure 2, S_1 is line-colorable and can be line-colored as indicated, S_2 is not line-colorable since (P1) does not hold, while S_3 is not line-colorable since (P2) does not hold.

The Line-Chromatic Number of a Sigraph

The *line-chromatic number* $\chi'(S)$ of a line-colorable sigraph S is the minimum number of colors required in a line-coloring of S . Clearly, $\chi'(S) = \chi(L(S))$.

Now we present formulas for special classes of line-colorable sigraphs, beginning with trees. Since a tree contains no cycles, by (P1) a tree is line-colorable if and only if it has no point v with $\deg^+ v \geq 1$ and $\deg^- v \geq 2$.

Theorem 2. For any line-colorable signed tree T , $\chi'(T) = \max \deg^- v$ if T has negative lines and $\chi'(T) = 1$ otherwise.

The proof of this theorem is straightforward and will be omitted.

A *complete sigraph* S_p has every pair of its points joined by either a positive or negative line. For $p \geq 2$, S_p is obviously line-colorable if it has no adjacent negative lines, in which case $\chi'(S_p) = 1$. Should S_p possess adjacent negative lines, then in order to satisfy (P1), there must be a point incident only with negative lines, but then to satisfy (P2) in addition, all lines must be negative. However, in this case, as we have seen, $\chi'(S_p)$ has the same value as the line-chromatic number of the ordinary complete graph K_p , which is $2\{p/2\} - 1$, as noted in [1]. We summarize this below.

Theorem 3. Let S_p be a line-colorable complete sigraph with $p \geq 2$ points. Then

$$\chi'(S_p) = \begin{cases} 1 & \text{if } S_p \text{ has no adjacent negative lines.} \\ 2\{p/2\} - 1 & \text{if } S_p \text{ is all-negative.} \end{cases}$$

We now investigate *complete bipartite sigraphs* or complete sigraphs $S_{m,n}$ whose point set V , where $|V| = m + n$, can be partitioned into subsets V_1 and V_2 , with $|V_1| = m$ and $|V_2| = n$, such that every point of V_1 is joined to a point of V_2 by either a positive or negative line but no two points of the same subset V_i are adjacent.

In order to determine which of the sigraphs $S_{m,n}$ are line-colorable, we first consider the case $m \geq n \geq 3$. Again, if no two negative lines are adjacent, $S_{m,n}$ is line-colorable, and, in fact, $\chi'(S_{m,n}) = 1$. Otherwise, $S_{m,n}$ has adjacent negative lines and in order to be line-colorable and thereby satisfy (P1), it must have a point u_1 incident only with negative lines. If all other lines were positive, then there would exist a cycle (for example, $u_1 v_1 u_2 v_2 u_1$; see Figure 3a) having exactly two consecutive negative lines. Hence, $S_{m,n}$ must have at least one more negative line, say at v_1 , but then all lines at v_1 are negative (see Figure 3b). However, if all lines at u_1 and v_1 are negative, then $S_{m,n}$ is all-negative, for otherwise any positive line $u_i v_j$ implies the existence of another positive line $u_i v_k$, which would produce the cycle $u_1 v_j u_i v_k u_1$ having exactly two consecutive negative lines. Therefore, if $S_{m,n}$, $m \geq n \geq 3$, is to be line-colorable and have adjacent negative lines, it has only negative lines. In this case, $\chi'(S_{m,n}) = \max(m, n)$ (see König [6], p.171).

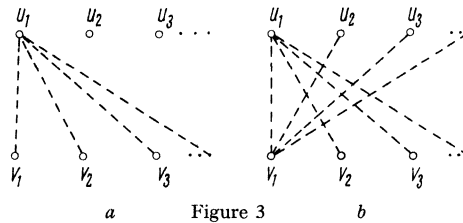


Figure 3

For $S_{m,2}$, $m \geq 3$ and $S_{m,1}$, $m \geq 1$, the situation can be handled similarly to $S_{m,n}$, $m \geq n \geq 3$, and identical results are obtained. This leaves the sigraph $S_{2,2}$ to consider. If $S_{2,2}$ contains adjacent negative lines but not all negative lines, then the only line-colorable sigraph has 3 negative lines in which case its line-chromatic number is easily seen to be 2. These results are stated in the following theorem.

Theorem 4. *A complete sibigraph $S_{m,n}$ is line-colorable if and only if*

- (1) *it has no two adjacent negative lines,*
- (2) *it has only negative lines, or*
- (3) *$m = n = 2$ and it has 3 negatives lines.*

If $S_{m,n}$ is all-positive, then $\chi'(S_{m,n}) = 1$, while if $S_{m,n}$ is line-colorable but not all-positive, then $\chi'(S_{m,n})$ is the maximum negative degree.

M. BEHZAD, Pahlavi University, Iran and G. CHARTRAND²⁾
University of Michigan and Western Michigan University

REFERENCES

- [1] M. BEHZAD, G. CHARTRAND, and J. K. COOPER, JR., *The Color Numbers of Complete Graphs*, J. London Math. Soc. 42, 226–228 (1967).
- [2] D. CARTWRIGHT and F. HARARY, *Structural Balance: a Generalization of Heider's Theory*, Psychol. Rev. 63, 277–293 (1956).
- [3] D. CARTWRIGHT and F. HARARY, *Coloring of Signed Graphs*, El. Math., to appear.
- [4] F. HARARY, *A seminar in graph theory* (New York 1967), to appear.
- [5] F. HARARY, R. Z. NORMAN, and D. CARTWRIGHT, *Structural Models: an Introduction to the Theory of Directed Graphs* (New York 1965).
- [6] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig 1936).

²⁾ Research supported by grants from the U.S. Air Force Office of Scientific Research and the National Institute of Mental Health, grant MH-10834.

Elementare Ableitung der Laplaceschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Den Abschluss der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet die Untersuchung der grundlegenden Gesetzmässigkeiten, die eines der wichtigsten Schemata der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das Schema einer Folge unabhängiger Versuche, beherrschen. Die Tatsachen, die man an diesem Schema bemerkte, waren richtungsweisend bei der Untersuchung komplizierterer Schemata, die man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet. BERNOULLI hat eine Folge unabhängiger Zufallsgrössen für den Fall untersucht, dass nur die komplementären Ereignisse A und \bar{A} mit den Wahrscheinlichkeiten $w(A) = p$, $w(\bar{A}) = q = 1 - p$ eintreten. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A bei n unabhängigen Durchführungen des Experimentes genau x -mal eintritt, ist gegeben durch die nach NEWTON bezeichnete Formel

$$w_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Die so bestimmte diskrete Verteilung heisst Bernoullische oder binomische Verteilung. Sie spielt in den Anwendungen eine grosse Rolle. Da die Newtonsche Formel für grosse n numerisch schwer zu handhaben ist, ist es notwendig, eine asymptotische Formel aufzustellen, die es gestattet, $w_n(x)$ auch für grosse n in einfacher Weise und mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen. Diese Formel hat als erster LAPLACE 1812 für beliebige $0 < p < 1$ angegeben. Sie zählt zu den wichtigsten Resultaten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn hier tritt zum erstenmal das Exponentialgesetz oder die Normalverteilung auf, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung grosse Bedeutung hat. Bei der Ableitung der Laplaceschen Formel werden aber vielfach kompliziertere Hilfsmittel benutzt, wie Reihenentwicklungen, Stirlingsche Formel, charakteristische Funktionen, zentraler Grenzwertsatz. Hier soll aufgezeigt werden, wie man mit einfacheren Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung den Grenzübergang zur Laplaceschen Formel durchführen und die gleichmässige Konvergenz der Newtonschen Formel gegen die Laplacesche Formel in jedem abgeschlossenen Intervall nachweisen kann.

Der Beweis setzt die Kenntnis der statistischen Masszahlen Erwartungswert $E(X)$ und Streuung $D^2(X)$ einer binomisch verteilten Zufallsgrösse X voraus. Es gilt [1]

$$E(X) = \xi = \sum_{\gamma=1}^n \gamma w_n(\gamma) = n p,$$

$$D^2(X) = \sigma = E(X - \xi)^2 = n p q, \quad (p + q = 1).$$

Ordnet man nach MISES [2] der diskreten Variablen x die Variable y zu durch die Transformation

$$y = x - n p, \tag{1}$$

betrachtet man also die Zufallsgrösse

$$Y = X - n p, \quad (1')$$

so ist $E(Y) = 0$ für alle n , während $D^2(Y)$ unverändert gleich $n p q$ ist. Die Transformation (1') wird nun so abgeändert, dass nicht nur $E(Y)$ von n unabhängig wird, sondern auch $D^2(Y)$. Dies leistet folgende Transformation:

$$Z = h (X - n p), \quad (2)$$

wobei h ein positiver Parameter ist. Die Zufallsgrösse Z hat dann den Erwartungswert $E(Z) = 0$, die Streuung $D^2(Z) = h^2 n p q$. Setzt man

$$h^2 = \frac{1}{\tau n p q}, \quad (3)$$

wobei τ ein beliebiger fest gewählter positiver Parameter ist, so gilt $D^2(Z) = 1/\tau$, die Streuung ist also unabhängig von n .

Deutet man die $w_n(\gamma)$ als Massenpunkte, die in den Punkten $x = \gamma$ konzentriert sind, so kann $E(X)$ als Schwerpunkt, $D^2(X)$ als Trägheitsmoment der Massenverteilung bezüglich des Schwerpunktes gedeutet werden. Daraus folgt, dass der Schwerpunkt der Verteilung von Z für alle n im Nullpunkt liegt, wobei die Massenpunkte um den Schwerpunkt so angeordnet sind, dass alle Verteilungen dasselbe Trägheitsmoment um den Schwerpunkt haben.

Transformation (2) hat noch folgende bemerkenswerte Eigenschaften: Da $z = h(x - n p)$ ist, gilt

$$x = n p + \frac{z}{h}, \quad x + 1 = n p + \frac{z + h}{h},$$

d. h. ändert sich x um 1, so ändert sich die entsprechende Grösse z um h . Ist nun n genügend gross, so ist h nach (3) entsprechend klein. Das bedeutet, dass die w_n -Werte, als Funktionen der diskreten Veränderlichen z aufgefasst, mit zunehmendem n immer mehr um den Nullpunkt zusammengeschoben werden, so dass die Streuung konstant bleibt. Man kann daher erwarten, dass sich für die oberen Begrenzungspunkte der w_n -Werte für $n \rightarrow \infty$ eine kontinuierliche glatte Kurve ergibt, deren Gleichung nun ermittelt werden soll.

Der Beweis stützt sich auf einige bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

wobei n irgendeine divergente Zahlenfolge durchläuft. Die Folge der Funktionen $f_n(x) = (1 + (x/n))^n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ konvergiert monoton gegen e^x , sofern $1 + (x/n) > 0$ ist. Durch Wahl genügend grosser n kann diese Ungleichung für alle x aus einem abgeschlossenen Intervall erfüllt werden. Man kann nun zeigen, dass eine in einem abgeschlossenen Intervall $J = (a, b)$ mit $a < b$ monotone beschränkte Funktionenfolge in J sogar gleichmässig konvergiert. Um dies für unseren Fall zu beweisen, setzt man

$$\delta_n(x) = e^x - (1 + (x/n))^n.$$

Es ist dann zu zeigen, dass $\delta_n(x) < \varepsilon$ wird für $n > N(\varepsilon)$, wobei N von den x aus J unabhängig ist. Betrachtet man einen Punkt x_1 aus J , so sei $\delta_n(x_1) < \varepsilon/2$ für $n > N(x_1)$. Da aber $\delta_n(x)$ eine stetige Funktion für alle x aus J ist, insbesondere für $x = x_1$, so gibt es eine abgeschlossene Umgebung $U(x_1)$ von x_1 , so dass die Schwankung von $\delta_n(x)$ für alle x aus $U(x_1)$ die Grösse $\varepsilon/2$ nicht überschreitet. Es ist dann $\delta_n(x) < \varepsilon$ für alle x aus $U(x_1)$ und $n > N(x_1)$. Die abgeschlossene Punktmenge aus J lässt sich durch endlich viele Umgebungen $U(x_\mu)$ ($\mu = 1, 2, 3, \dots, m$) so lückenlos überdecken – wobei teilweise Überlagerungen der einzelnen $U(x_\mu)$ nicht ausgeschlossen sind – so dass für alle x aus den $U(x_\mu)$ jeweils $\delta_n(x) < \varepsilon$ wird, sofern nur $n > N(x_\mu)$ ist. Ist $N = \text{Max } [N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_m)]$, so ist $\delta_n(x) < \varepsilon$ für alle x aus J , d. h. die Folge der $f_n(x)$ konvergiert für alle x aus J gleichmässig gegen e^x .

Da der Ausdruck für $w_n(x)$ infolge der darin vorkommenden Binomialkoeffizienten schwer zu handhaben ist, betrachtet man den Quotienten $w_n(x+1)/w_n(x)$. Es gilt wegen (2) und (3)

$$\frac{w_n(x+1)}{w_n(x)} = \frac{n-x}{n+1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1 - \frac{z}{n h q}}{1 + \frac{z+h}{n h p}}.$$

Daraus folgt

$$\ln w_n(x+1) - \ln w_n(x) = \ln \left(1 - \frac{z}{n h q} \right) - \ln \left(1 + \frac{z+h}{n h p} \right).$$

Für $x \neq n$ sind die Argumente der Logarithmen > 0 . Mit der Abkürzung $\ln w_n(x) = y_n(z)$ werden nun die Quotienten

$$\frac{y_n(z+h) - y_n(z)}{h} = \ln \left(1 - \frac{z}{n h q} \right)^{1/h} - \ln \left(1 + \frac{z+h}{n h p} \right)^{1/h}$$

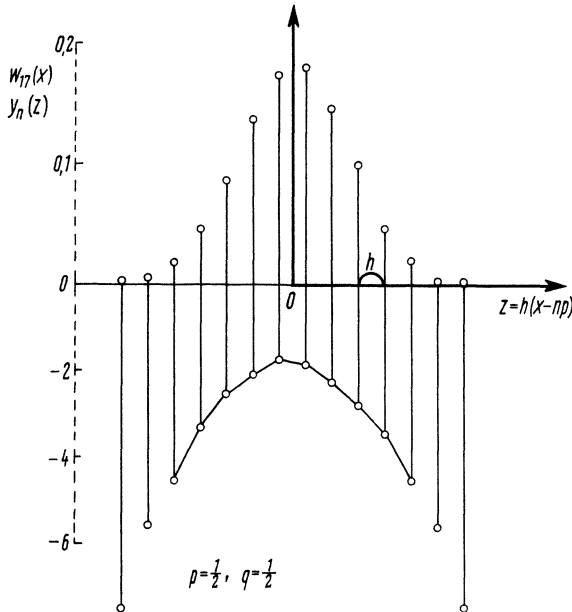
gebildet, die nur für solche diskrete Werte z definiert sind, für die das Argument von w_n eine ganze Zahl ist. Da nach (3) $h^2 = 1/\tau n p q$ ist, also $n h q = 1/\tau p h$, $n h p = 1/\tau q h$ ist, gilt

$$\frac{y_n(z+h) - y_n(z)}{h} = \ln(1 - \tau p h z)^{1/h} - \ln(1 + \tau q h (z+h))^{1/h}.$$

Die Argumente der Logarithmen stellen wegen (3) für $n = 1, 2, 3, \dots$ zwei Folgen in z dar, die nach den obigen Feststellungen für $n \rightarrow \infty$ gleichmässig gegen $e^{-\tau p z}$ bzw. $e^{-\tau q z}$ konvergieren. Infolge der Stetigkeit des Logarithmus konvergieren also auch die Quotienten gleichmässig, und zwar gegen $-\tau p z - \tau q z = -\tau z$, da $p + q = 1$ ist. Die gesuchte Grenzfunktion der $y_n(z)$ für $n \rightarrow \infty$, die mit $y(z)$ bezeichnet wird, genügt daher der Differentialgleichung $y'(z) = -\tau z$, daher ist $y(z) = -(\tau/2) z^2 + \text{konst.}$ Damit ist

$$\left| \frac{y_n(z+h) - y_n(z)}{h} + \tau z \right| < \varepsilon \quad \text{für } n > N(\varepsilon) \quad (4)$$

und alle z etwa aus dem Intervall $J = (-a, a-h)$, so dass $|z| < a$, $|z+h| < a$ ist. Verbindet man nun die Endpunkte jeweils benachbarter Ordinaten $y_n(z)$ geradlinig (s. Abbildung), so entsteht ein stetiger Kurvenzug der kontinuierlich veränderlichen Grösse z .



Mit der so definierten Funktion, die mit $\bar{y}_n(z)$ bezeichnet wird, betrachtet man die Integralfolge

$$\int_{z_0}^z \frac{\bar{y}_n(t+h) - \bar{y}_n(t)}{h} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Dabei sollen z_0 und z ($z_0 < z$) positiven ganzzahligen x entsprechen. Deutet man das bestimmte Integral als Fläche, so ergibt sich aus der Abbildung für (5) die Darstellung: $y_n(z + (h/2)) - \bar{y}_n(z_0 + (h/2))$. Da (4) auch dann gilt, wenn man y_n durch \bar{y}_n ersetzt, erhält man

$$\left| \int_{z_0}^z \left(\frac{\bar{y}_n(t+h) - \bar{y}_n(t)}{h} + \tau t \right) dt \right| < \varepsilon (z - z_0) < \varepsilon \cdot 2a.$$

Die Integralfolge (5) konvergiert also gleichmäßig gegen die Grenzfunktion

$$-\int_{z_0}^z \tau t dt = -\frac{\tau}{2} \cdot z^2 + \frac{\tau}{2} \cdot z_0^2.$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\bar{y}_n(z)$ gegen die Grenzfunktion $-(\tau/2) z^2 + \text{konst.}$ Dasselbe gilt auch für die Folge $y_n(z)$, denn $\bar{y}_n(z) = y_n(z)$ für solche z , denen positive ganzzahlige x entsprechen, und das ist das wesentlichste Ergebnis der ganzen Untersuchung.

Da $y_n(z) = \ln w_n(x)$ ist, folgt

$$w_n(x) = C \cdot e^{-\frac{\tau}{2} z^2} = C \cdot e^{-\frac{(x - np)^2}{2npq}}$$

unabhängig von τ .

Die Konstante C berechnet sich aus der Forderung, dass $w_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ eine Dichtefunktion der Variablen x sein muss, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x) dx$ muss gleich 1 sein. Da $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ist, folgt $C = 1/\sqrt{2\pi n p q}$.

Zusammenfassend erhält man also den Satz von Laplace:

Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses A in n unabhängigen Versuchen konstant gleich p ($0 < p < 1$) ist, so genügt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesen Versuchen das Ereignis A genau x -mal eintritt, für $n \rightarrow \infty$ der Beziehung

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \cdot e^{-\frac{(x - np)^2}{2npq}},$$

und zwar gleichmässig für alle x , für die sich die nach (2) entsprechende Grösse z in einem endlichen Intervall befindet.

F. HEIGL, Weiden BRD

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. BUCHNER, *Bemerkungen zum Satz von Bernoulli*, *El. Math.* 7, 8 (1952).
 [2] R. v. MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Rosenberg-Verlag, New York 1945).

Allgemeine Gestalt einer geradenerhaltenden Abbildung

In der folgenden Abhandlung soll gezeigt werden, dass eine stetige geradenerhaltende Abbildung der Ebene auf sich projektiv sein muss. Zu diesem Zweck wird zunächst Satz 1 bewiesen.

Satz 1: Es gibt genau eine projektive Abbildung der Ebene auf sich, die 4 Punkte A, B, C, O in allgemeiner Lage¹⁾ in 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in allgemeiner Lage überführt, wobei A in P_1 , B in P_2 , C in P_3 und O in P_4 übergeht.

Beweis: Den folgenden Überlegungen sind homogene Koordinaten zugrunde gelegt. Die gesuchte projektive Abbildung werde in der Gestalt

$$\varrho x = a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w,$$

$$T: \quad \varrho y = a_{21} u + a_{22} v + a_{23} w,$$

$$\varrho z = a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w$$

angesetzt. Das Koordinatendreieck wollen wir dabei so wählen, dass seine Ecken mit A, B, C zusammenfallen, während O der Einheitspunkt ist, was stets möglich ist, da ja A, B, C und O in allgemeiner Lage sind. Für die Koordinatendarstellung von A, B, C und O gilt dann:

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1), \quad O(1, 1, 1).$$

¹⁾ 4 Punkte heissen «in allgemeiner Lage», wenn keine drei auf einer Geraden liegen.

Setzen wir nun die Koordinaten von $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$ und die Koordinaten von A, B, C und O in T ein, so folgt

$$\left. \begin{aligned} k x_1 &= a_{11}, & l x_2 &= a_{12}, & m x_3 &= a_{13}, \\ k y_1 &= a_{21}, & l y_2 &= a_{22}, & m y_3 &= a_{23}, \\ k z_1 &= a_{31}, & l z_2 &= a_{32}, & m z_3 &= a_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} n x_4 &= a_{11} + a_{12} + a_{13}, \\ n y_4 &= a_{21} + a_{22} + a_{23}, \\ n z_4 &= a_{31} + a_{32} + a_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

k, l, m und n sind dabei von Null verschiedene noch näher zu bestimmende Proportionalitätsfaktoren.

Setzt man die Beziehungen (1) in (2) ein, so folgt

$$\left. \begin{aligned} n x_4 &= k x_1 + l x_2 + m x_3, \\ n y_4 &= k y_1 + l y_2 + m y_3, \\ n z_4 &= k z_1 + l z_2 + m z_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Zur Abkürzung führen wir ein

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dann folgt aus den Beziehungen (3)

$$k:l:m:n = D_1:(-D_2):D_3:D_4.$$

Da die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 nicht zu je dreien in einer Geraden liegen, sind die 4 Determinanten D_1, D_2, D_3 und D_4 von Null verschieden. Das Verhältnis der von Null verschiedenen Proportionalitätsfaktoren k, l, m und n lässt sich daher eindeutig bestimmen. Es ist jetzt noch zu zeigen, dass die Transformation T eindeutig umkehrbar ist. Zu diesem Zweck muss gezeigt werden, dass die Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ ist.

Aus den Formeln (1) entnimmt man

$$|a_{ik}| = k \cdot l \cdot m \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

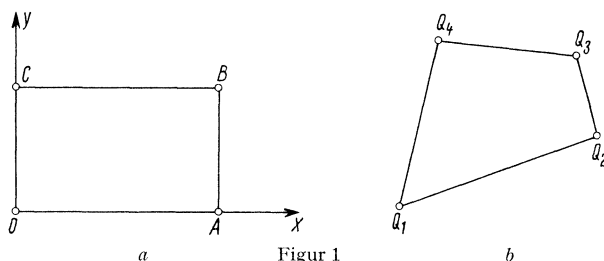
womit alles gezeigt ist.

Satz 2: Jede umkehrbar eindeutige stetige Abbildung der Ebene auf sich, die Gerade in Gerade überführt, ist eine Projektivität.

Beweis: Durch die homogenen stetigen Funktionen

$$x' = f_1(x, y, z), \quad y' = f_2(x, y, z), \quad z' = f_3(x, y, z) \quad (4)$$

sei eine umkehrbar eindeutige und geradentreue Abbildung der projektiven Ebene auf sich gegeben. Gegeben sei nun das Rechteck $OABC$. Die Eckpunkte dieses Rechtecks $OABC$ werden durch die Abbildung (4) in die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 übergeführt. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sind 4 Punkte in allgemeiner Lage. Würden nämlich etwa die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 in gerader Linie liegen, so müsste dasselbe wegen der Geradentreue für die Punkte O, A, B gelten, im Gegensatz zur Voraussetzung, dass $OABC$ ein Rechteck ist.



Figur 1

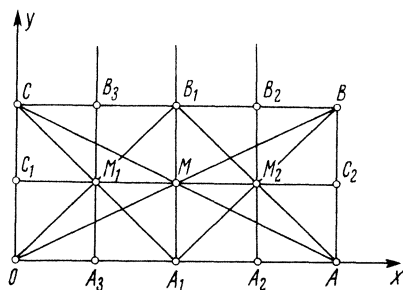
Nun existiert nach Satz 1 genau eine lineare umkehrbare Transformation, die die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in die Punkte O, A, B, C überführt. Für diese mögen die folgenden Formeln gelten:

$$\begin{aligned} \varrho u &= b_{11} x' + b_{12} y' + b_{13} z', \\ \varrho v &= b_{21} x' + b_{22} y' + b_{23} z', \\ \varrho w &= b_{31} x' + b_{32} y' + b_{33} z', \end{aligned} \quad B = |b_{ik}| \neq 0.$$

ϱ ist dabei ein von Null verschiedener Proportionalitätsfaktor. Durch die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} \varrho u &= b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + b_{13} f_3, \\ \varrho v &= b_{21} f_1 + b_{22} f_2 + b_{23} f_3, \\ \varrho w &= b_{31} f_1 + b_{32} f_2 + b_{33} f_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

werden daher die Punkte O, A, B, C auf sich abgebildet. Es handelt sich hier also um eine Abbildung mit 4 Fixpunkten O, A, B, C .

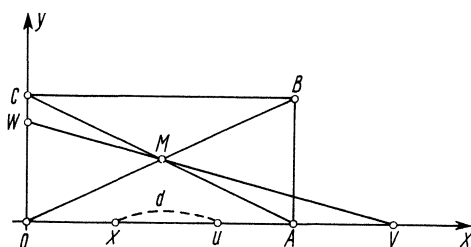


Figur 2

Da die Geraden OB und AC bei der zusammengesetzten Abbildung in sich übergehen, ist ihr Schnittpunkt M ebenfalls ein Fixpunkt der Abbildung. Die Fixgeraden OC und AB schneiden sich in ihrem Fernpunkt, der deshalb ein Fixpunkt der Abbil-

dung sein muss. Das gleiche gilt für den Fernpunkt der Geraden OA und CB . Die Gerade MA_1 parallel zur Y -Achse ist ebenfalls eine Fixgerade, da M ein Fixpunkt ist und die Gerade MA_1 auch durch den Fixpunkt von OC und AB hindurchgeht. Daher sind auch A_1 und B_1 Fixpunkte der Abbildung. Analog zeigt man, dass auch C_1 und C_2 Fixpunkte der Abbildung sind. Weitere analoge Betrachtungen kann man bei den Rechtecken OA_1B_1C und A_1ABB_1 vornehmen. Man erhält dadurch weitere Fixpunkte A_3 und A_2 auf der X -Achse zwischen den Punkten O und A .

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens (fortgesetztes Halbieren) erkennt man sofort, dass die Fixpunkte der Abbildung auf den Strecken OA und OC überall dicht liegen. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass jeder Punkt der Strecke OA Fixpunkt ist.



Figur 3

X sei ein beliebiger Punkt der Strecke OA . Wir nehmen zunächst an, er sei kein Fixpunkt der Abbildung. Der ihm entsprechende Punkt auf der X -Achse sei U , und es sei $|U - X| = d$. U könnte auch ausserhalb der Strecke OA liegen.

Nach den obigen Betrachtungen kann man nun X durch fortgesetztes Halbieren so zwischen zwei Fixpunkten F_n und F_{n+1} einschliessen, dass gilt:

$$|X - F_n| < \delta, \quad |X - F_{n+1}| < \delta,$$

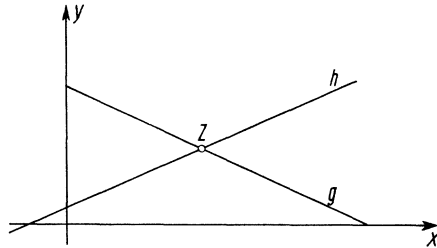
wobei δ wegen der fortgesetzten Intervallhalbierung beliebig klein gemacht werden kann. Wegen der Stetigkeit der Abbildung müsste dann auch $|U - F_n|$ und $|U - F_{n+1}|$ beliebig klein gemacht werden können. Für beide Absolutbeträge gilt aber stets

$$|U - F_n| > d - \delta \quad \text{und} \quad |U - F_{n+1}| > d - \delta,$$

was einen Widerspruch gegen die vorausgesetzte Stetigkeit der Abbildung darstellt. Sämtliche Punkte der Strecke OA sind daher Fixpunkte der Abbildung. Analog zeigt man, dass sämtliche Punkte der Strecke OC Fixpunkte der Abbildung sind.

Nunmehr verbinden wir einen beliebigen Punkt V der X -Achse mit $OV > OA$ mit dem Fixpunkt M durch eine Gerade. Diese Gerade schneidet OC in dem Fixpunkt W . WMV ist also eine Fixgerade. Da die X -Achse eine Fixgerade ist, ist auch V ein Fixpunkt der Abbildung. Sämtliche Punkte der positiven X -Achse und, wie man analog beweist, der positiven Y -Achse sind also Fixpunkte. Ebenso zeigt man, dass auch die negative X - und Y -Achse aus lauter Fixpunkten besteht.

Z sei nunmehr ein beliebiger Punkt der XY -Ebene. Zwei beliebige Geraden g und h durch Z schneiden die X - und Y -Achse in Fixpunkten, sind also selbst auch Fixgeraden. Ihr Schnittpunkt Z muss also ein Fixpunkt der Abbildung sein. Wir sehen



Figur 4

also: Jeder Punkt der XY -Ebene ist ein Fixpunkt der Abbildung. Die durch die Formeln (5) vermittelte Abbildung muss also die identische Abbildung sein.

Es muss also gelten:

$$\varrho x = b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + b_{13} f_3,$$

$$\varrho y = b_{21} f_1 + b_{22} f_2 + b_{23} f_3,$$

$$\varrho z = b_{31} f_1 + b_{32} f_2 + b_{33} f_3.$$

Wegen $B \neq 0$ folgt daraus

$$f_1 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} \\ y & b_{22} & b_{23} \\ z & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad f_2 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & x & b_{13} \\ b_{21} & y & b_{23} \\ b_{31} & z & b_{33} \end{vmatrix}, \quad f_3 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & x \\ b_{21} & b_{22} & y \\ b_{31} & b_{32} & z \end{vmatrix}.$$

Die gesuchten Abbildungsgleichungen sind daher linear und homogen.

J. MALL, München

LITERATUR

BIEBERBACH, L. *Projektive Geometrie*, (Leipzig und Berlin 1931) § 10.

BLASCHKE, W. *Projektive Geometrie*, (Basel 1954). Abschnitt 17

SCHREIER, O., SPERNER, L., *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, II, (Leipzig 1935) § 17.

Kleine Mitteilungen

Über «Super perfect numbers»

In Band 24, S. 16–17 dieser Zeitschrift, hat Herr D. SURYANARAYANA eine kleine Mitteilung veröffentlicht mit dem Titel «Super perfect numbers». Er betrachtet natürliche Zahlen n , welche

$$\sigma(\sigma(n)) = 2n \quad (1)$$

genügen, wobei $\sigma(n)$ die Summe aller (positiven) Teiler von n bedeutet. Eine solche Zahl wird «super perfect number» genannt. Wir wollen kurz s.p.n. schreiben. In der obigen Mitteilung wird der folgende Satz bewiesen: «Eine gerade Zahl n ist genau dann eine s.p.n., wenn $n = 2^r$, und $2^{r+1} - 1$ eine Primzahl ist.»

In diesem Beweis ist eine kleine Ungenauigkeit, welche aber leicht zu beheben ist. Im zweiten Teil des Beweises wird behauptet, dass $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$; $\sigma(q)$; $2^{r+1} - 1$ und 1

verschiedene Teiler von $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$ sind. Das ist aber nur richtig, wenn $\sigma(q) \neq 2^{r+1} - 1$ erfüllt ist. (Gegenbeispiel: $q = 25$, $r = 4$).

Man kann aber den Beweis so führen: Ist $q > 1$, so sind $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$; $\sigma(q)$; 1 verschiedene Teiler von $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$. Es folgt

$$2^{r+1} q \geq (2^{r+1} - 1) \sigma(q) + \sigma(q) + 1 > 2^{r+1} \sigma(q).$$

Weil $\sigma(q) > q$, ergibt sich ein Widerspruch.

Am Schluss wird die Frage nach der Existenz einer ungeraden s.p.n. gestellt. Dazu gilt der

Satz. Ist n eine ungerade s.p.n., so muss n eine Quadratzahl sein.

Beweis. Es sei $n = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}$ in der kanonischen Zerlegung gegeben. Dann gilt

$$\sigma(n) = \prod_{\kappa=1}^k (1 + p_{\kappa} + \dots + p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}) = \prod_{\lambda=1}^l q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}, \quad (2)$$

wobei der letzte Ausdruck die kanonische Zerlegung von $\sigma(n)$ sein soll. Für eine s.p.n. gilt nach (1)

$$\sigma(\sigma(n)) = \prod_{\lambda=1}^l (1 + q_{\lambda} + \dots + q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}) = 2n = 2 \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}. \quad (3)$$

$$\frac{\sigma(\sigma(n))}{\sigma(n)} = \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{\lambda=1}^l \left(1 + \frac{1}{q_{\lambda}} + \dots + \frac{1}{q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}}\right) \cdot \prod_{\kappa=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_{\kappa}} + \dots + \frac{1}{p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}}\right) = 2. \quad (4)$$

Ist n ungerade und keine Quadratzahl, dann folgt $\sigma(n) \equiv 0 \pmod{2}$, d.h. o.B.d.A.

$$q_1 = 2. \quad (5)$$

Aus (3) folgt weiterhin o.B.d.A.

$$p_1 \leq 1 + 2 + \dots + 2^{\beta_1} = 2^{\beta_1+1} - 1. \quad (6)$$

Nach (4) und (6) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 &\geq \frac{2^{\beta_1+1} - 1}{2^{\beta_1}} \cdot \frac{p_1 + 1}{p_1} \cdot \prod_{\lambda=2}^l \left(1 + \dots + \frac{1}{q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}}\right) \cdot \prod_{\kappa=2}^k \left(1 + \dots + \frac{1}{p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}}\right) \\ &\geq \frac{2^{\beta_1+1} - 1}{2^{\beta_1}} \cdot \frac{2^{\beta_1+1}}{2^{\beta_1+1} - 1} = 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Hieraus ergibt sich sogleich

$$k = l = 1, \quad \alpha_1 = 1 \text{ und } p_1 = 2^{\beta_1+1} - 1. \quad (8)$$

Dann folgt

$$\sigma(n) = p_1 + 1 = 2^{\beta_1+1}; \quad \sigma(\sigma(n)) = 2^{\beta_1+2} - 1 = 2p_1, \quad (9)$$

worin der Widerspruch ersichtlich wird.

H.-J. KANOLD, Braunschweig

Zur Möbiusinvolution der Ebene

1. Herr STRUBECKER hat in einer Abhandlung gleichen Titels [1] einen ausführlichen Bericht über zwei sich bei einer Möbiusinvolution darbietende Probleme gegeben: 1. das Problem, ihre beiden Fixpunkte und 2. bei zwei gegebenen Punktpaaren (A, A') und (B, B') zu einem weiteren Punkt C den Bildpunkt C' zu konstruieren. Es gelang ihm, für das 2. Problem eine ganz besonders einfache Lösung in zweierlei Gestalt zu finden:

Bezeichnen $(AB'C)$, $(A'BC)$, (ABC) , $(A'B'C')$ die Kreise durch die drei eingeklammerten Punkte, und $(AB'C) \cdot (A'BC) = D$, $(ABC) \cdot (A'B'C') = D'$ die Schnittpunkte der eingeklammerten Kreise, so ist entweder $(ABC) \cdot (A'B'D) = C'$ oder auch $(AB'D') \cdot (A'BD') = C'$.

Die Einfachheit der Konstruktion legt nahe, einen ebenso einfachen Beweis für sie zu suchen, ohne die Theorie der harmonischen Quadrupel (H. Wiener) oder räumliche Betrachtungen dafür (K. Strubecker) in Anspruch zu nehmen.

2. Eine *Möbiusinvolution* ist zunächst in komplexen Koordinaten durch eine Gleichung

$$\bar{z} = \frac{A z + B}{C z - A} \quad (1)$$

gegeben, wo A, B, C komplexe Konstanten mit nichtverschwindender Determinante $-A^2 - \bar{B}C \neq 0$ sind. Bezeichnet man zwei entsprechende Punktpaare von (1) mit (a, \bar{a}) und (b, \bar{b}) , so lautet die durch sie gegebene Involution

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z + \bar{z} & 1 \\ a\bar{a} & a + \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b + \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Wir bezeichnen nun die Koordinaten der in 1. angegebenen Punkte $A, A'; B, B'; C, C'; D$ mit $a, \bar{a}; b, \bar{b}; z, \bar{z}$ und u . Nach der angegebenen Konstruktion sollen u, a, \bar{b}, z auf einem Kreise liegen, also muss das Doppelverhältnis (DV)

$$\frac{u-a}{u-\bar{b}} : \frac{z-a}{z-\bar{b}} = \lambda \quad (3)$$

reell sein, nämlich gleich dem DV der Strecken $\overline{ua}/\overline{ub} : \overline{za}/\overline{zb}$ (die Umfangswinkel über \overline{ab} in u und z sind gleich).

Genau so müssen die Gleichungen gelten:

$$\frac{u-\bar{a}}{u-\bar{b}} : \frac{z-\bar{a}}{z-\bar{b}} = \mu = \frac{\overline{ua} \cdot \overline{zb}}{\overline{ub} \cdot \overline{za}} \quad (4)$$

$$\frac{u-a}{u-\bar{b}} : \frac{\bar{z}-a}{\bar{z}-\bar{b}} = \lambda' = \frac{\overline{ua} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{ub} \cdot \overline{\bar{z}a}} \quad (5)$$

$$\frac{u-\bar{a}}{u-\bar{b}} : \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}} = \mu' = \frac{\overline{ua} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{ub} \cdot \overline{\bar{z}a}} \quad (6)$$

Aus den linken Seiten von (3) bis (6) lässt sich nun der Hilfspunkt u sofort eliminieren und es käme, wenn die Gleichung (7) $\lambda \mu = \lambda' \mu'$ gelten würde, sofort die Gleichung

$$\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-\bar{a}} : \frac{\bar{z}-\bar{b}}{z-\bar{b}} = \frac{z-a}{\bar{z}-a} : \frac{z-b}{\bar{z}-b}. \quad (8)$$

Diese ist aber nichts anderes als die Gleichung der Möbiusinvolution, die nach Abscheidung des Faktors $\bar{z} - z \neq 0$ in die einfache Gleichung (2) übergeht. Die Gleichung (7) aber lautet

$$\frac{\overline{zb} \cdot \overline{zb}}{\overline{za} \cdot \overline{za}} = \frac{\overline{\bar{z}b} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{\bar{z}a} \cdot \overline{\bar{z}a}}, \quad (9)$$

und sie gilt tatsächlich. Da nämlich die Zuordnung

$$z \rightarrow \bar{z}, a \rightarrow \bar{a}, \bar{a} \rightarrow a, b \rightarrow \bar{b}, b \rightarrow \bar{b}$$

gilt, so ist die linke Seite von (9) die bekannte *Inversionsinvariante*, oder, da sie ebenso für Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen gilt, *Möbiusinvariante* von vier Strecken zwischen vier Punkten. Damit ist aber die Strubeckersche Konstruktion auf sehr einfache Weise bewiesen.

K. FLADT, Calw

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. STRUBECKER, *Zur Möbiusinvolution der Ebene*, Monatsh. Math. Phys. 41, 439-444 (1934).

Eine Bemerkung über mehrdimensionale Axonometrien

Definitionen: Eine lineare Abbildung π von E_n auf $E_m \subset E_n$ heisst (n, m) -Parallelprojektion, wenn $P \in \pi^{-1} P$ für jedes $P \in E_m$ gilt. Ist $\pi^{-1} P \perp E_m$, so bekommt man eine (n, m) -Normalprojektion. Eine (n, m) -Parallelprojektion $\pi: E_n \rightarrow E_m$ zusammen mit einem festen orthonormierten n -Bein (n_1, \dots, n_n) in E_n heisst eine (n, m) -Axonometrie. Eine (n, m) -Normalprojektion $\pi: E_n \rightarrow E_m$ gemeinsam mit einem festen orthonormierten n -Bein (n_1, \dots, n_n) in E_n heisst (n, m) -Normalaxonometrie. Weiter setzen wir

$$a_i = |\pi n_i|, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad \alpha_{ij} = \angle \pi n_i, \pi n_j \quad \text{für} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

L. A. JAZKEWITSCH zeigte in [2], dass in jeder (n, m) -Normalaxonometrie

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = m, \quad a_1 + \dots + a_n \leq \sqrt{n \cdot m}$$

gilt. Dagegen bewies J. SCHOPP in [3], dass in jeder $(n, n-1)$ -Axonometrie

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq n-1 < a_1 + \dots + a_n$$

in Kraft ist. Im folgenden möchten wir diese Beziehungen noch verallgemeinern.

Behauptung 1. In einer beliebigen (n, m) -Axonometrie gilt für die Summe s_k sämtlicher k -Hauptminoren der Matrix $\|a_i a_j \cos \alpha_{ij}\|$ die Ungleichung

$$(-1)^{n-k-1} \cdot s_k \geq \binom{m}{k}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau im Falle der (n, m) -Normalaxonometrie.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus folgendem Satz ([4]): Es sei (a_1, \dots, a_n) ein Vektor- n -tupel in $E_m \subset E_n$. Eine (n, m) -Axonometrie $\pi: E_n \rightarrow E_m$ mit $\pi n_i = a_i$, $i = 1, \dots, n$, existiert gerade dann, wenn für die (notwendig reellen) Eigenwerte $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ von $\|a_i \cdot a_j\|$ die Beziehungen $\lambda_{n-m+1} = \dots = \lambda_m = 1$, $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$ gelten. Hierbei charakterisiert der Fall $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1$ gerade die (n, m) -Normalaxonometrien. Es genügt jetzt, die bekannten Eigenschaften der elementarsymmetrischen Polynome zu verwenden (vgl. [1], S. 83), um die Behauptung 1 zu gewinnen. Für $k = 1$ erhält man $s_1 = a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq m$ (vgl. [3]) und $s_1 = a_1^2 + \dots + a_n^2 = m$ gilt genau im Falle der (n, m) -Normalaxonometrie (vgl. [2] und [3]). Einen einfachen direkten Beweis der in jeder (n, m) -Normalaxonometrie geltenden Gleichung $a_1^2 + \dots + a_n^2 = m$ bekommen wir auch so: Es sei

$$E_m = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\} \quad \text{und} \quad n_i = (e_{i1}, \dots, e_{in}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Hieraus ergibt sich

$$\pi n_i = (e_{i1}, \dots, e_{im}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Weil $\|e_{ij}\|$ eine orthogonale Matrix ist, so ist auch $\|e_{ij}\|^T$ eine orthogonale Matrix, woraus folgt

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e_{ij}^2 = \underbrace{1 + \dots + 1}_m = m.$$

Behauptung 2. In einer beliebigen (n, m) -Axonometrie $\pi: E_n \rightarrow E_m$ gilt $a_1 + \dots + a_n > m$.

Beweis. Es sei π eine (n, m) -Normalaxonometrie. Dann ist $|\pi n_i| \leq |n_i|$, d. h. $a_i \leq 1$; $i = 1, \dots, n$. Gleichheit kann hier höchstens in m Fällen auftreten. Also ist

$$a_i^2 \leq a_i; \quad i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad a_1^2 + \dots + a_n^2 < a_1 + \dots + a_n.$$

Aus $a_1^2 + \dots + a_n^2 = m$ ergibt sich $m < a_1 + \dots + a_n$. Ist nun π nicht die (n, m) -Normal-axonometrie, so verwenden wir eine m -Ebene $E_m^* \perp \pi^{-1}P$, $P \in E_m$ und die (n, m) -Normal-axonometrie $\pi^*: E_n \rightarrow E_m^*$ mit demselben orthonormierten n -Bein $(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n)$ wie π . Nach vorigem ist hier $a_1^* + \dots + a_n^* > m$, wo $a_i^* = |\pi^* \mathbf{n}_i|$, $i = 1, \dots, n$. Es ist aber auch $a_i \geq a_i^*$, $i = 1, \dots, n$, weil $\pi^*(\pi \mathbf{n}_i) = \pi^*(\mathbf{n}_i)$, $i = 1, \dots, n$. Hieraus folgt $a_1 + \dots + a_n > a_1^* + \dots + a_n^*$, so dass $a_1 + \dots + a_n > m$, was zu beweisen war. VÁCLAV HAVEL, Brno

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] B. L. v. D. WAERDEN, *Moderne Algebra* 1, 2. Aufl. (New York 1943).
- [2] L. A. JAZKEWITSCH, *Grundeigenschaften der Normalaxonometrie eines n -dimensionalen euklidischen Raumes, Fragen der angewandten Geometrie* (russisch) unter Redaktion von A.M. Tewlin, (Moskau 1966).
- [3] J. SCHOPP, *Über die n -dimensionalen Axonometrien*, *El. Math.* 19, 108–111 (1964).
- [4] V. HAVEL, *Über eine Zerlegung der singulären linearen Transformationen* (tschechisch), *Cas. pest. mat.* 85, 439–447 (1960).

Aufgaben

Aufgabe 573. Man konstruiere (mit Zirkel und Lineal) a) ein beliebiges rechtwinkliges, b) ein beliebiges nichtgleichseitiges, gleichschenkliges Dreieck aus den Schnittpunkten seiner Mittelsenkrechten, seiner Höhen und seiner Winkelhalbierenden.

K. KOPFERMANN, Hannover

Lösung: Bezeichnungen: Umkreismittelpunkt O , Inkreismittelpunkt I , Höhenschnittpunkt H .

a) Wegen $HO^2 - OI^2 = HO \cdot HI \cdot 2^{1/2}$ kann jede Seite des Dreiecks OHI aus den beiden andern berechnet werden, weshalb wir voraussetzen, dass O , H und I «richtig» liegen.

Der Kreis um O mit Radius OH (Umkreis) wird von der Geraden durch H und I ein zweites Mal in P geschnitten. Der zu PO normale Durchmesser ist die Hypotenuse, H die Rechtwinklecke des Dreiecks.

b) I ist innerer Teilpunkt von OH , Y der I harmonisch zugeordnete äussere Teilpunkt. Der Mittelpunkt P des Kreises (Apolloniuskreis) mit dem Durchmesser IY liegt auf dem Umkreis des Dreiecks. Die Schnittpunkte von Umkreis (Radius OP) und Apolloniuskreis inzidieren mit den Endpunkten der Dreiecksbasis, womit das Dreieck gezeichnet werden kann.

Bemerkungen: Y ist der Mittelpunkt des Ankreises, welcher die Basis des Dreiecks berührt. I darf nicht Mittelpunkt von OH sein. F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Weitere Lösungen sandten M. BACHMANN (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. FRISCHKNECHT (Berneck), K. HODEL (Wädenswil), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), E. WIDMER (Biel).

Aufgabe 574. Sei r der Inkreisradius, s die Summe der (orientierten) Abstände des Mittelpunktes des Feuerbachkreises von den Seiten des Dreiecks.

Man beweise oder widerlege: Jedes nichtgleichseitige Dreieck, für das $s = 3r$ ist, lässt sich aus den Schnittpunkten der Mittelsenkrechten, der Höhen und der Winkelhalbierenden (mit Zirkel und Lineal) konstruieren. K. KOPFERMANN, Hannover

Lösung des Aufgabenstellers: Es gibt unendlich viele konstruierbare und unendlich viele nicht konstruierbare Dreiecke dieser Art.

In der Terminologie der Arbeit K. KOPFERMANN, *Über Dreiecke*, *El. Math.* 23, 49–60 (1968): Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden konstruierbarer, wie nicht konstruierbarer Dreiecke liegen auf \mathfrak{h}_s'' (siehe a. a. O. S. 57) dicht.

Beweis: Die Punkte $(p, q) \in D'$ der Ähnlichkeitsklassen derjenigen Dreiecke, für die $s = 3r$ ist, sind durch (siehe S. 54)

$$q = 3p - p^2 - 1 \quad (1)$$

charakterisiert. Für rationale p, q ist die Konstruktionsaufgabe genau dann durchführbar, wenn das kubische Polynom

$$x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu \quad \text{mit} \quad \lambda = -(p+1), \quad \mu = \frac{p^2}{2} + p + \frac{q}{2}, \quad \nu = -\frac{q}{2}, \quad (2)$$

unter der Nebenbedingung (1) über den rationalen Zahlen reduzibel ist. Die rationalen Reduzibilitätsstellen sind genau die rationalen Punkte (beide Komponenten sind rational) auf den Tangenten an die Diskriminantenkurve (siehe S. 54)

$$q = 3p - p^2 - 1 \pm \sqrt{1 - 2p^3} \quad 0 < p < 1/2 \quad (3)$$

in den rationalen Punkten dieser Kurve. Nun ist (p_0, q_0) genau dann ein rationaler Punkt dieser Kurve, wenn $1 - 2p_0$ rationales Quadrat ist. Dann sind die rationalen Punkte (p, q) auf der Tangente in (p_0, q_0) an (3) genau durch

$$3 - 2p_0 \mp 3\sqrt{1 - 2p_0} = (q_0 - q)/(p_0 - p), \quad 1 - 2p_0 \text{ rationales Quadrat}$$

charakterisiert. Mit $\sigma^2 := 1 - 2p_0$ und $d := p_0 - p$ erhält man daraus

$$\sigma^3 + 3d\sigma \pm d^2 = 0. \quad (4)$$

Umgekehrt führt jedes rationale Paar (σ, d) , das dieser Gleichung genügt, zu Werten $p = p_0 - d$ mit $2p_0 = 1 - \sigma^2$, für die das Polynom (2) (q werde nach (1) gewählt) über den rationalen Zahlen reduzibel ist.

Die Gleichung (4) verschwindet genau für die rationalen Paare (σ, d) , für die die Diskriminante $9\sigma^2 \pm 4\sigma^3$ dieser in d quadratischen Gleichung rationales Quadrat ist und σ rational ist. Für diese σ erhält man

$$2p = 2p_0 - 2d = 1 - \sigma^2 + 3\sigma \pm \sigma\sqrt{9 - 4\sigma}, \quad 0 < 2p < 1.$$

Man rechnet leicht nach, dass für $\sigma := m/n$ die reduzierte Bruchdarstellung von $2p$ stets n^2 im Nenner enthält, wobei n bzw. $2n$ stets Quadratzahl ist. Sowohl die Brüche p , die diese Eigenschaft haben, als auch die, die sie nicht besitzen, liegen in dem Intervall $0 < 2p < 1$ dicht.

Also haben wir dichte Mengen rationaler Punkte (p, q) , die auf der Kurve (1) liegen, gefunden, aus denen die $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ konstruierbar bzw. nicht konstruierbar sind. Das gilt dann erst recht für alle (p, q) auf (1).

Also gibt es unendlich viele Dreiecke mit $s = 3r$, die sich aus den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden, der Höhen und der Mittelsenkrechten konstruieren wie nicht konstruieren lassen. Bei festgehaltenen Schnittpunkten der Höhen und der Mittelsenkrechten liegen die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden derjenigen Dreiecke, die sich aus diesen Punkten konstruieren wie nicht konstruieren lassen, auf \mathfrak{h}_s'' dicht, q. e. d.

Eine weitere Lösung sandte O. REUTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 575. Man beweise: Ist P das Produkt von n natürlichen Zahlen mit dem grössten gemeinsamen Teiler D und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen M , so sind die Quotienten $P/(D^{n-1}M)$ und $(DM^{n-1})/P$ ganzzahlig. W. JÄNICHE, Berlin-Zehlendorf

Lösung: n natürliche Zahlen $a_i = \prod_{j=1}^m p_j^{\alpha_{ij}}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $\alpha_{ij} \geq 0$, haben den grössten gemeinsamen Teiler

$$D = \prod_{j=1}^m p_j^{\min(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})},$$

das kleinste gemeinsame Vielfache

$$M = \prod_{j=1}^m p_j^{\max(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})}$$

und das Produkt

$$P = \prod_{j=1}^m p_j^{\alpha_{1,j} + \alpha_{2,j} + \dots + \alpha_{n,j}}.$$

Die Ganzzahligkeit der Quotienten folgt dann aus den leicht als richtig zu erkennenden Ungleichungen, die sich aus den Exponenten der Primzahlen p_j ergeben ($j = 1, 2, \dots, m$):

$$(n-1) \min(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j}) + \max(\dots) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j};$$

$$(n-1) \max(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j}) + \min(\dots) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j}.$$

H. HARBORTH, Braunschweig

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), M. D. GERHARDS (Wuppertal), P. HOHLER (Dietikon), A. MAKOWSKI (Warschau), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), O. REUTER (Ochsenhausen), D. VELJAN (Zagreb), E. WIDMER (Biel), G. WULCZYN (Bucknell Univ., USA), ferner die folgenden Studierenden der Wake Forest Univ., USA: D. ASHCRAFT, P. M. COBLE, C. CUNNINGHAM, S. HOWARD, G.-Y. KWOK, L. M. R. LOUDEN, L. V. OOT, M. A. STEELE, W. M. WATTS, D. WILSON, L. ZINZOW.

Aufgabe 576. Eine Ecktransversale, die ein Dreieck in zwei umfanggleiche Teildreiecke zerlegt, werde Umfanghalbierende genannt. Man beweise:

- (1) Die drei Umfanghalbierenden eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ schneiden sich in einem Punkt U im Innern des Dreiecks.
- (2) Die Länge der Umfanghalbierenden $A_i P_i$, $P_i \in A_{i+1} A_{i+2}$ wird durch U im Verhältnis $a_i : (s - a_i)$ geteilt. ($a_i = \overline{A_{i+1} A_{i+2}}$; $2s = \sum_k a_k$).
- (3) Der Punkt U , der Schwerpunkt S und der Inkreismittelpunkt I liegen auf einer Geraden, sofern das Dreieck nicht regulär ist, und es ist $\overline{US} = 2 \overline{SI}$.

O. REUTER, Ochsenhausen

1. *Lösung:* (1) folgt aus dem Satz von CEVA. Denn wegen $\overline{A_i P_i} = \overline{A_j P_j}$ ($i \neq j$) gilt $(\overline{A_2 P_1} : \overline{A_3 P_1}) \cdot (\overline{A_3 P_2} : \overline{A_1 P_2}) \cdot (\overline{A_1 P_3} : \overline{A_2 P_3}) = 1$.

(2) erhält man aus dem Satz von MENELAOS, angewendet z.B. auf Dreieck $A_{i+1} P_i A_i$: Aus $(\overline{P_i U} : \overline{A_i U}) \cdot (\overline{A_i P_{i+2}} : \overline{A_{i+1} P_{i+2}}) \cdot (\overline{A_{i+1} A_{i+2}} : \overline{P_i A_{i+2}}) = -1$ folgt (wegen $\overline{A_{i+1} A_{i+2}} = a_i$ und $\overline{A_{i+1} A_{i+2}} = s - a_i$) $\overline{P_i U} : \overline{A_i U} = -(s - a_i) : a_i$, d.h. $\overline{A_i U} : \overline{A_i P_i} = a_i : s$.

(3) U hat von der Parallelen zu a_i durch A_i nach (2) den Abstand $r_i = h_{a_i} \cdot a_i : s = 2 \cdot F_{A_1 A_2 A_3} : s = \text{const.}$ Also ist U der Inkreismittelpunkt desjenigen Dreiecks, dessen Seitenmitten A_1, A_2, A_3 sind.

Angewendet auf das Dreieck der Mittelpunkte M_i der Seiten a_i heisst das, dass der Inkreismittelpunkt I von Dreieck $A_1 A_2 A_3$ der Schnittpunkt der Umfanghalbierenden U_M von Dreieck $M_1 M_2 M_3$ ist. Dreieck $M_1 M_2 M_3$ und Dreieck $A_1 A_2 A_3$ liegen ähnlich mit dem Verhältnis 1:2. Ähnlichkeitszentrum ist S . Da dem Punkt U der Punkt $U_M = I$ entspricht, liegt S auf der Geraden $UU_M = UI$ und es ist $\overline{US} = 2 \overline{SU_M} = 2 \overline{SI}$.

W. VINZENZ, München

2. *Lösung:* Wir setzen wie üblich

$$A_1 A_2 A_3 P_1 P_2 P_3 a_1 a_2 a_3 s - a_1 s - a_2 s - a_3 s = A B C P Q R a b c s_a s_b s_c.$$

Es handelt sich um einen im 19. Jahrhundert und z.T. vorher bekannten Sachverhalt:

- (1) P, Q, R sind offenbar die Ankreisberührungspunkte auf a, b, c , weil $s_a = BR = CQ$ usw. zyklisch gilt. U ist daher innerer Cevapunkt für die Abschnittsprodukte $s_a s_b s_c = s_b s_c s_a$ auf den Seiten a, b, c , q.e.d. Bekanntlich heisst U Nagelpunkt.

- (2) Der bekannte Satz von H. van Aubel lautet im vorliegenden Spezialfall $CU/RU = CP/BP + CQ/AQ = s_b/s_c + s_a/s_c = c/s_c$, q.e.d.
- (3) Die folgenden je 4 harmonischen und ähnlich gelegenen Punkte mit Abständen (Zwischenräumen) im Verhältnis 2:1:3 liegen auf der
- | | |
|---------------------|-----------------------------------|
| <i>Eulergeraden</i> | <i>Nagel-Longhurstgeraden</i> |
| Umkreiszentrum | Inkreiszentrum |
| Gravizentrum | Gravizentrum |
| Feuerbachzentrum | Umfangsschwerpunkt (Spiekerpunkt) |
| Orthozentrum | Nagelpunkt |

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Literatur:

H. BAUER, *Besondere Punkte im Dreieck*, Prax. Math. 9 (1967), S. 265–270, Fig. 6.

TH. SPIEKER, *Lehrbuch der ebenen Geometrie*, 21. Aufl., Potsdam 1894, S. 178–181.

H. DÖRRIE, *Mathematische Miniaturen*, Breslau 1943, S. 73, Nr. 69.

CHR. RENNER, *Planimetrie*, 4. Aufl., München 1952, S. 152, Aufgabe 91 und 92.

Prax. Math. 4 (1962), S. 133–135, Problem 108 mit zahlreichen Literaturangaben.

Prax. Math. 6 (1964), S. 134, Problem 180.

(Prax. Math. 6 (1964), S. 49–51, Problem 171 ist verwandt.)

ARCHIMEDES 15 (1963), S. 22, Aufgabe 768 von J. E. Hofmann. I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. FRISCH-KNECHT (Berneck), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), L. KIEFFER (Luxemburg), D. VELJAN (Zagreb).

Neue Aufgaben

Aufgabe 597. Es sei G eine Gruppe und U eine Teilmenge von G , die mindestens zwei von 1 verschiedene Elemente enthält. Ist dann $U^{-1}x = U$ für alle von 1 verschiedenen $x \in U$, so ist U eine Untergruppe von G . HEINZ LÜNEBURG, University of Illinois, USA

Aufgabe 598. Let p be a fixed prime. Show that the integer n has the property

$$p \nmid \binom{n}{k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

if and only if

$$n = a p^s + p^s - 1 \quad (0 \leq a < p; s \geq 0).$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 599. Es sei

$$F_s(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq x} (i, j)^s.$$

Dann ist

$$F_1(x) = \frac{x^2 \ln x}{2 \zeta(2)} + O(x^2), \quad F_2(x) = \frac{x^3 \zeta(2)}{3 \zeta(3)} + O(x^2 \ln x),$$

$$F_s(s) = \frac{x^{s+1} \zeta(s)}{(s+1) \zeta(s+1)} + O(x^s) \quad (s > 2).$$

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Aufgabe 600. In O greifen drei koplanare Kräfte OA , OB und OC gleicher Grösse so an, dass A , B und C das Dreieck Δ bilden. Man zeige, dass die Resultierende genau dann zu einer Seite von Δ parallel ist, wenn Δ nicht stumpfwinklig ist und die Seitenlängen des Höhenfusspunktdreiecks von Δ zudem eine arithmetische Folge (1. Ordnung) bilden.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Aufgabe 601. Nach SURYANARAYANA (vgl. *El. Math.* 24, 16–17 (1969)) heisst eine natürliche Zahl n superperfekt, wenn $\sigma(\sigma(n)) = 2n$ gilt. Dabei bedeutet $\sigma(k)$ die Summe aller Teiler der natürlichen Zahl k . Man beweise: Ist $n = p^2$, p eine ungerade Primzahl, so ist n nicht superperfekt.
P. BUNDSCHUH, Freiburg/Br.

Literaturüberschau

Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie I. Von B. W. GNEDENKO, J. K. BELJAJEW und A. D. SOLOWJEW. Band XXI der II. Abteilung der Mathematischen Lehrbücher und Monographien. XII und 222 Seiten mit 37 Abbildungen und 3 Tabellen. Akademie-Verlag, Berlin 1968.

Unter der *Zuverlässigkeit* eines Erzeugnisses versteht man dessen Fähigkeit, seine Qualität unter bestimmten Nutzungsbedingungen zu wahren; Zuverlässigkeit ist also *über die Zeit erstreckte Qualität*. Aus dem Bestreben, die Zuverlässigkeit industrieller Erzeugnisse zu erhöhen, hat sich im Laufe der letzten Jahrzehnte eine eigentliche Zuverlässigkeitstheorie ergeben, an der Ingenieure, Ökonomen und Mathematiker interessiert sind. Die vielseitigen Probleme dieser Theorie erforderten die Schaffung eines eigenen mathematischen Apparates; das vorliegende Buch bringt die mathematischen Methoden einiger Teile des bereits weit verzweigten Gesamtgebietes. Im Teil I, der hier anzuzeigen ist, werden behandelt: Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik (mehr im Sinne eines Überblickes über die benötigten Grundlagen), die Charakteristika der Zuverlässigkeit und schliesslich die Probleme der Reservierung mit und ohne Erneuerung. Der II. Teil soll weitere statistische Ausführungen und vor allem auch die Darstellung der statistischen Qualitätskontrolle bringen. – Wer um das Geschick Gnedenkos weiss, statistische Probleme knapp und doch sehr verständlich darzustellen, wird die Lektüre dieses Buches mit Freude beginnen. Er wird sicher nicht enttäuscht werden.

R. INEICHEN

Elementare Topologie. Von B. H. ARNOLD. (Aus dem Amerikanischen übersetzt von H. FREUND, G. HOLLAND und A. KIRSCH.) 189 Seiten mit 91 Figuren. DM 19.80. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1964.

Dieses kleine Werk ist vorzüglich geeignet, einem Anfänger einen Begriff zu geben, was Topologie ist. Der Verfasser appelliert an das anschauliche Intuitionsvermögen des Lesers und verzichtet bewusst auf eine axiomatische Grundlegung. So kommt der Leser rasch in Kontakt mit den eigentlichen Problemen. Natürlich handelt es sich bei den gegebenen Beweisen mehr um Beweisideen und -skizzen.

Im ersten Teil (Kapitel 1–5) werden unter anderem folgende anschauliche Probleme erörtert: Netze und Landkarten, Vierfarbenproblem, Klassifikation der Flächen, Eulerscher Polyedersatz, Siebenfarbensatz für den Torus, Jordanscher Kurvensatz.

Der zweite Teil (Kapitel 6–8) ist der Einführung in die Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie gewidmet. Er enthält die Kapitel: Mengen, Abbildungen, Räume.

Jedem Abschnitt sind einige anregende Aufgaben beigelegt, die es dem Leser erleichtern, sich in die behandelten Fragen einzuarbeiten.

J. M. EBERSOLD

Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. Von G. HAMEL. Band 57 der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berichtigter Nachdruck. VIII und 796 Seiten mit 161 Figuren. DM 84.–. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1967.

Es handelt sich hier um den berichtigten Nachdruck des 1949 erschienenen Werkes. Es stellt ein Lehrbuch, nicht ein Handbuch, der klassischen Mechanik dar, das sich an mit den mathematischen Methoden bekannte Leser wendet. HAMEL gibt hier eine Einführung in die gesamte klassische Mechanik, in der es ihm besonders darauf ankommt, diese als eine einheitliche Wissenschaft darzustellen und den Aufbau konsequent auf das Prinzip

der virtuellen Arbeit, das d'Alembertsche Prinzip und das Lagrangesche Befreiungsprinzip abzustützen.

Das Werk zeugt von der grossen Erfahrung, die HAMEL in seiner Lehrtätigkeit erworben hat. Besonders wertvoll wird es auch durch den umfangreichen zweiten Teil (263 Seiten), der aus durchgerechneten Aufgaben und Problemen besteht. J. M. EBERSOLD

Mathematical Methods in the Physical Sciences. Von MARY L. BOAS. XIX und 778 Seiten. 90s. John Wiley & Sons, London 1967.

Das über 700 Seiten umfassende Buch von M. L. BOAS vermittelt dem Naturwissenschaftler genügend mathematische Grundlagen, um die Methoden der Mathematik in naturwissenschaftlichen Fächern, im Ingenieurwesen und insbesondere in der Physik zu verstehen und anzuwenden. In Fachvorlesungen wird der Student oft mit zwei Problemen konfrontiert: Erstens geht es um das Verständnis der fachlichen Materie und zweitens werden gleichzeitig mit der Einführung neuer Gebiete auch neue mathematische Methoden angewandt. Ist man aber mit solchen Methoden, wie zum Beispiel mit dem Lösen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, der Tensoranalysis, den Reihenentwicklungen und den Problemen der Statistik, nicht vertraut, besteht keine Möglichkeit, den dargebotenen Stoff kritisch durcharbeiten und zu verstehen.

Im vorliegenden Buch, das trotz des umfassenden Stoffprogramms auch für den Anfänger leicht lesbar ist, wird ein sauberer Kompromiss gemacht: Erstens werden von den verschiedenen mathematischen Teilgebieten nur Grundlagen vermittelt und zweitens sind die Sätze und Formeln zwar exakt, aber nicht immer in ihrer allgemeinsten mathematischen Formulierung eingeführt. Dies hat drittens eine Vereinfachung der Beweise zur Folge. Bei schwierigeren Problemen werden sie sogar gelegentlich weggelassen. Da aber der Gültigkeitsbereich eines Satzes, einer Methode oder einer Formel immer genau festgelegt ist, und auch ihre Anwendungsmöglichkeiten anhand von guten Beispielen geübt werden, erreicht das Buch durchaus sein Ziel, nämlich dem Studenten der Naturwissenschaften eine Übersicht über die Methoden der Mathematik zu geben und ihm deren Anwendung zu erleichtern.

Der Inhalt ist in 15 Kapitel aufgeteilt und erstreckt sich über unendliche Reihen, Komplexe Zahlen, Determinanten und Matrizen, partielle Ableitungen und mehrfache Integrale, Vektoranalysis, Fourier Reihen, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Spezielle Funktionen, Formeln und Integrale, Koordinatentransformation und Tensoranalysis, Funktionentheorie, Legendre-Polynome, Besselfunktionen, Laplacetransformationen usw. bis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In der Einleitung des Buches wird erklärt, welche vorangehenden Gebiete für das Verständnis eines Kapitels bekannt sein müssen. Der Fortgeschrittene kann aber die einzelnen Kapitel auch unabhängig von den übrigen lesen. Jedes Kapitel beginnt mit einer guten Einführung, in der jeweils ausgeführt ist, in welchen Zusammenhang das zu bearbeitende Gebiet gehört und wo es hauptsächlich angewandt wird.

Auch dem Mathematiker ist dieses Buch als Nachschlagewerk zu empfehlen. Es enthält neben vielen gut ausgewählten Beispielen 893 abstrakt mathematische und angewandte Übungsaufgaben, deren Lösungen sich zum Teil auf den letzten Seiten des Buches finden.

PETER FUCHS

Basic Programming. Von JOHN G. KEMENY und THOMAS E. KURTZ. VIII und 122 Seiten. 44s. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney 1967.

«Basic» ist eine einfache Programmiersprache, die vor allem für den Anfänger im Programmieren und als Konversationsprache in einem Teilnehmersystem gedacht ist. In ihrer elementarsten Form unterscheidet sie nur neun Befehlsarten. Dazu kommen in einem weitem Ausbau acht Befehle, die zum Beispiel die Definition einer arithmetischen Funktion oder den Sprung zu einem Unterprogramm erlauben. Ferner existieren bequeme Makroinstruktionen für das Operieren mit Matrizen. Ein weiterer Ausbau ist vorgesehen. Wenn man dies liest, zieht man vielleicht den Vergleich mit einem Kleinwagen, der mit jedem neuen Modell etwas grösser wird und schliesslich Gefahr läuft, seinen Hauptvorteil gegenüber einem Normalauto zu verlieren. Hochentwickelte Programmiersprachen wie ALGOL und FORTRAN existieren schon längst. Es braucht keine weitere derartige

Sprache. «Basic» ist übrigens zu den beiden genannten verwandt. Der Vorteil der Sprache «Basic» liegt in ihrer Einfachheit, die es z. B. ohne grossen Zeitaufwand ermöglicht, diese Programmiersprache im Mittelschulunterricht einzuführen.

Es ist erstaunlich, wie viele zum Teil schon anspruchsvolle Probleme sich mit dieser elementaren Sprache programmieren lassen. Es gibt auch kaum ein Buch über das Programmieren wie das besprochene, das auf so knappem Raum eine solche Fülle interessanter Beispiele aus verschiedenen mathematischen Disziplinen enthält. E. R. BRÄNDLI

Mathematics in the Modern World. Readings from Scientific American with Introduction by MORRIS KLINE. 409 Seiten mit 374 Figuren. 84s. (gebunden), 54s. (broschiert). W. H. Freeman and Co. Ltd., London 1968.

Mancher Leser wird sich noch an das prächtige Septemberheft 1964 der Zeitschrift Scientific American erinnern, das dem Thema «Mathematik in der modernen Welt» gewidmet war. Man findet alle Beiträge dieses Heftes mit einer Ausnahme (Control Theory) in der vorliegenden erweiterten Sammlung von 50 Artikeln führender Mathematiker aus den Jahren 1948–1968 wieder. Die Aufsätze sind in fünf Kapitel eingeteilt: The Nature of Mathematics (3), Biography (9), Some Chapters of Mathematics (13), The Foundations of Mathematics (6), The Import of Mathematics (19). Sehr lesenswert sind auch die Einleitungen von MORRIS KLINE zu den einzelnen Kapiteln. Wir geben den letzten Satz der Einleitung zum ersten Kapitel wieder, der das Ziel dieses Buches in eleganter Weise ausdrückt: A series of articles by different authors on many different subjects is not the substitute for systematic study and technical mastery, but rather a kaleidoscope, whose varicolored, bright flashes of light may illuminate, excite, and inspire – and this is the primary objective of all education. E. TROST

Algebra and the Elementary Functions. Von BEVAN K. YOUSE. IX und 297 Seiten. Dickenson Publishing Company, Belmont, California 1966.

Das Buch dient als Übergang von der «High-School»- zur «College»-Mathematik. Auf kleinem Umfang werden neben der elementaren Algebra und der Trigonometrie auch eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die analytische Geometrie und die Vektoralgebra gegeben. Der Autor hat sich folgende Ziele gesetzt:

1. Den Stoff in korrekter, interessanter und leichtfasslicher Form darzustellen.
2. Die Einführung der neuen Ideen so früh als möglich in den Text einzubauen.
3. Übungsaufgaben so auszuwählen, dass nicht nur das soeben Gelernte vertieft, sondern auch der bereits bearbeitete Stoff repetiert wird (gebietsweise).
4. Den Stoff möglichst unabhängig darzustellen, so dass der Leser in der Auswahl der verschiedenen Gebiete frei ist.

Diese Ziele wurden weitgehend erreicht, wenn auch – durch die Kürze der Darstellung bedingt – grundlegende algebraische Aspekte (algebraische Strukturen, ausser geordnete Körper; Klasseneinteilungen usw.) unerwähnt bleiben.

Nach dem Studium der ersten vier Kapitel: Mengen, reelle Zahlenmenge, Ungleichungen und absoluter Wert, Relationen und Funktionen, können die Abschnitte: Exponential- und Logarithmusfunktion; Mathematische Induktion und Folgen; Wahrscheinlichkeit (geschrieben von JOHN D. NEFF); Komplexe Zahlen und elementare Gleichungslehre; Analytische Geometrie, Lineare Gleichungen und Determinanten (geschrieben von TREVOR EVANS) und Vektoralgebra in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viele Beispiele und über 650 Übungsaufgaben dienen zum bessern Verständnis. Die Lösungen der ungerade nummerierten Aufgaben sind am Schluss des Buches beigelegt. In einem Anhang findet man Tabellen für vierstellige Logarithmen; Trigonometrische Werte und ihre Logarithmen; Quadrate, Kubik- und Wurzelwerte der Zahlen von 1 bis 100.

W. HOLENWEIG

Analytische projektive Geometrie. Von JOSEF LENSE. 303 Seiten mit 100 Abbildungen. DM 48,-. R. Oldenbourg, München 1965.

Dieses schöne Buch ist aus Vorlesungen entstanden, welche LENSE (bis 1961 Direktor des math. Instituts der TH München) über projektive Geometrie gehalten hat.

Man bemerkt, dass sich der Autor durchwegs der Koordinatenschreibweise bedient und z. B. auf Matrixmultiplikation verzichtet. Er beschränkt sich auf die Dimensionen ≤ 3 . Die geometrischen Grundgebilde werden rein analytisch definiert. So ist ein Punkt die geordnete Folge von Verhältnissen, die man aus 4 komplexen projektiven Koordinaten bilden kann. Ebenen und Geraden werden durch Komplexe von linearen Gleichungen zwischen solchen Koordinaten definiert. Trotz der analytischen Definition im komplexen Raum lässt der Autor die Anschauung nicht zu kurz kommen, was die 100 Figuren bezeugen.

Neben der üblichen Darstellung der Kurven und Flächen 2. Ordnung, bei denen man es häufig bewenden lässt, findet sich ein Exkurs über ebene Kurven n . Ordnung. Bemerkenswert ist dann die Ausführung dieser Theorie im Falle der Kurven 3. und 4. Ordnung. Dabei werden nicht Sonderfälle, sondern stets nur der allgemeine Fall dargestellt. Von den Flächen werden noch diejenigen 3. Ordnung behandelt.

Voraussetzung für das Verständnis des nicht immer leicht zu lesenden Buches sind Kenntnisse in folgenden Gebieten: Lehre von den Determinanten und den Systemen linearer Gleichungen, analytische Geometrie, Algebra und Analysis. G. ÄBERLI

First Concepts of Topology. Von W. G. CHINN und N. E. STEENROD. Band 18 der New Mathematical Library. 160 Seiten mit 116 Figuren. \$ 1.95. Random House, New York 1966.

Dem Anfänger bietet dieses Büchlein eine ausgezeichnete Einführung in die mengentheoretische Topologie. Er gewinnt einen Einblick in ihre Methoden und lernt ihre Bedeutung für andere Zweige der Mathematik kennen.

Wie der Untertitel sagt, beschränken sich die Verfasser auf die Geometrie der Abbildungen von Strecken, Kurven, Kreisen und Kreisscheiben im Euklidischen Raum.

Der Ausgangspunkt von Teil I (Existence Theorems in Dimension 1) bildet folgender Satz der Analysis: Die reellwertige Funktion $f(x)$ sei für das reelle Intervall $a \leq x \leq b$ definiert und in diesem stetig; dann besitzt die Funktion einen Minimalwert m und einen Maximalwert M und für jedes y mit $m \leq y \leq M$ besitzt die Gleichung $y = f(x)$ in $a \leq x \leq b$ mindestens eine Lösung x . Um diesen Satz zu beweisen, werden nun die notwendigen Begriffe sorgfältig entwickelt: Mengen, Funktionen, Umgebungen, Stetigkeit, usw. Nachdem dann der Beweis erbracht ist, folgen einige Anwendungen.

In Teil II (Existence Theorems in Dimension 2) werden analoge Fragen in der Dimension 2 behandelt. Dabei ist der Kernpunkt die Erarbeitung des Begriffes der Umlaufzahl. Bei den Anwendungen werden unter anderem das Sandwichtheorem und der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.

Zu fast allen der 37 Abschnitte sind instruktive Aufgaben gestellt, deren Lösungen den Schluss des Werkes bilden. J. M. EBERSOLD

Contests in Higher Mathematics (Hungary 1949–1961) in Memoriam Miklós Schweitzer. Herausgegeben von G. SZÁSZ, L. GEHÉR, I. KOVÁCS und L. PINTÉR. 260 Seiten mit 36 Figuren. \$ 10.–. Akadémiai Kiado, Budapest 1968.

Der im Titel genannte Wettbewerb findet seit 1949 alljährlich in Ungarn statt und soll den Mathematikstudenten Anreiz zu selbständiger Forschung bieten. Die ca. 10 von führenden Mathematikern gestellten Aufgaben werden zu einer bestimmten Zeit an den Anschlagbrettern der mathematischen Institute und der lokalen Gruppen der mathematischen Gesellschaft Janós Bolyai bekanntgegeben. Zur Lösung stehen 7–10 Tage zur Verfügung. Ein Bericht des Komitees mit den Lösungen der Probleme erscheint jeweils in der Zeitschrift *Matematikai Lapok*. Diese Berichte liegen dem vorliegenden Band zugrunde. Er enthält 145 Aufgaben aus den Gebieten Algebra, Kombinatorik, Funktionentheorie, Geometrie, Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Funktionen reeller Variablen, Folgen und Reihen, Mengenlehre. Zu 141 Aufgaben werden ausführliche Lösungen (zum Teil mehrere) mit Ergänzungen und Literaturhinweisen gegeben. Eine Würdigung des im Alter von 22 Jahren verstorbenen vielversprechenden Mathematikers M. Schweitzer, dessen Namen der Wettbewerb trägt, beschliesst diese sehr wertvolle und anregende Aufgabensammlung. E. TROST

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 24

Heft 4

Seiten 73–96

10. Juli 1969

Inhaltsmasszahlen für hyperbolische Rotationskörper

1. Einleitung

Wird eine ebene Kurve k um eine Gerade z , die Rotationsachse, gedreht (drehen ist dabei als fortgesetztes Spiegeln an den Ebenen des durch z bestimmten Ebenenbündels zu definieren), so beschreibt k eine Rotationsfläche. Diese Fläche bestimmt für sich allein oder zusammen mit anderen Rotationsflächen (etwa Ebenen, die auf der Drehachse senkrecht stehen) Rotationskörper. In der vorliegenden Arbeit werden speziellen Körpern dieser Art im Bereich der hyperbolischen Geometrie Inhaltsmasszahlen zugeordnet¹⁾.

Alle Untersuchungen werden im (speziellen) Poincaré-Modell durchgeführt. Wir beschränken uns dabei auf Drehkörper, bei denen die Ausgangskurve k im Modell einen euklidischen Kreis oder eine euklidische Gerade darstellt.

2. Hyperbolische Masszahlen im Poincaré-Modell

Im Poincaré-Modell gilt für die hyperbolische Länge \bar{s} einer Strecke $P_1 P_2$ (Figur 1, links) bekanntlich:

$$\bar{s} = \frac{k}{2} \ln \left[\frac{1 + \cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1} \cdot \frac{1 + \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_2} \right] = k \ln \frac{\tan(\alpha_2/2)}{\tan(\alpha_1/2)}. \quad (1a)$$

Falls die hyperbolische Gerade gleichzeitig euklidische Gerade ist (Figur 1, rechts), wird daraus:

$$\bar{s} = k \ln \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \quad (1b)$$

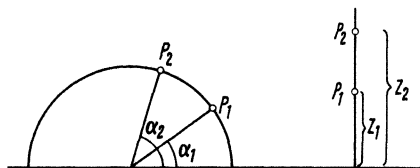
k ist dabei ein positiver Faktor, dessen Wert von der Wahl der Längeneinheit abhängt. Die hyperbolischen Längen von Strecken werden, zur Unterscheidung euklidischer Längen, im Folgenden immer mit einem Querstrich versehen.

Aus der Längendefinition heraus ergibt sich ein Ausdruck für das hyperbolische Volumelement im Poincaré-Modell:

$$dV = k^3 \cdot \frac{dx \, dy \, dz}{z^3} \quad (2)$$

¹⁾ Einzelne der sich ergebenden Formeln finden sich bei H. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie*, Leipzig 1904.

x, y, z sind dabei euklidische Koordinaten eines Modellpunktes ($z > 0$). Die hyperbolische Inhaltsmasszahl ist damit ganz allgemein als Funktion euklidischer Grössen dargestellt.



Figur 1

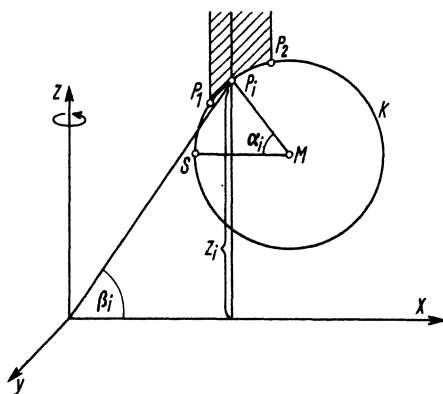
Die Längenmasszahl im Poincaré-Modell

3. Auswertung von Integralen

Das schraffierte Flächenstück der Figuren 2 und 3 rotiert um die Achse z . Wir ordnen dem dabei entstehenden, sich ins Unendliche erstreckenden Rotationskörper nach (2) eine Masszahl V zu:

$$V = k^3 \int_{z_i}^{\infty} \iint \frac{dx \, dy \, dz}{z^3} = \frac{k^3}{2} \iint \frac{dx \, dy}{z_i^2}.$$

I. Die Ausgangskurve k ist ein euklidischer Kreis (Figur 2). Kreisgleichung: $(x - \mu R)^2 + (z - \nu R)^2 = R^2$, dabei gilt: $0 \leq \mu < \infty, \nu > -1$.



Figur 2

k ist ein euklidischer Kreis

Wir führen jetzt an Stelle von x, y als neue Integrationsveränderliche den Drehwinkel φ der Rotation und den Erhebungswinkel $\sphericalangle S M P = \alpha$ ein. Dann gilt für die Koordinaten eines Punktes auf der durch Rotation des Kreises k entstehenden Fläche:

$$x = R \cos \varphi (\mu - \cos \alpha), \quad z = R (\nu + \sin \alpha), \quad y = R \sin \varphi (\mu - \cos \alpha),$$

Die zur Transformation benötigte Funktionaldeterminante hat den Wert

$$R^2 \sin \alpha (\mu - \cos \alpha).$$

Damit erhalten wir für unsere Masszahl:

$$V = \frac{k^3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha (\mu - \cos \alpha)}{(\nu + \sin \alpha)^2} d\varphi d\alpha = k^3 \pi \mu \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{(\nu + \sin \alpha)^2} - k^3 \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{(\nu + \sin \alpha)^2}.$$

Bei der späteren Verwendung dieses Integrals ist darauf zu achten, dass der Integrand auch negativ werden kann.

Wir werten dieses Integral mit den üblichen Methoden aus und unterscheiden dabei vier Fälle.

A. $\nu > 1$ (3)

$$\frac{V}{\pi k^3} = \left[-\frac{2\mu}{\nu(\nu^2-1)} \left\{ A \arctan A (z + \nu^{-1}) + \frac{\nu + A^2(z + \nu^{-1})}{1 + A^2(z + \nu^{-1})^2} \right\} - \ln |\nu + \sin \alpha| - \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

B. $\nu \neq 0, \quad |\nu| < 1$ (4)

$$\frac{V}{\pi k^3} = \left[\frac{2\mu}{\nu(1-\nu^2)} \left\{ \frac{B}{2} \ln \left| \frac{B(z + \nu^{-1}) - 1}{B(z + \nu^{-1}) + 1} \right| + \frac{B^2(z + \nu^{-1}) - \nu}{B^2(z + \nu^{-1})^2 - 1} \right\} - \ln |\nu + \sin \alpha| - \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

C. $\nu = 0$ (5)

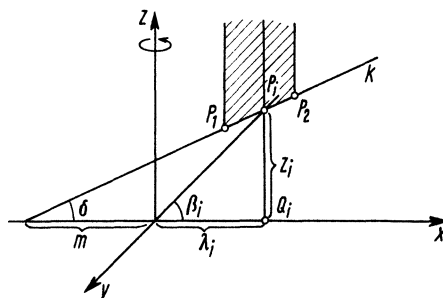
$$\frac{V}{\pi k^3} = [\mu \ln |z| - \ln |\sin \alpha|]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

D. $\nu = 1$ (6)

$$\frac{V}{\pi k^3} = \left[-\mu \frac{2(1+3z)}{3(1+z)^3} - \ln |1 + \sin \alpha| - \frac{1}{1 + \sin \alpha} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

Dabei gilt:

$$z = \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad A = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, \quad B = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}}.$$



Figur 3

k ist eine euklidische Gerade

II. Die Ausgangskurve k ist eine Gerade (Figur 3). Geradengleichung:

$$z = (x + m) \tan \delta, \quad \delta \neq \pi/2.$$

Wir führen jetzt an Stelle von x, y als neue Integrationsveränderliche den Drehwinkel φ der Rotation und die Strecke $\overline{OQ} = \lambda$ ein. Dann gilt für die Koordinaten eines Punktes auf der durch Rotation der Geraden entstandenen Fläche:

$$x = \lambda \cos \varphi, \quad y = \lambda \sin \varphi, \quad z = (\lambda + m) \tan \delta.$$

Die zur Transformation benötigte Funktionaldeterminante hat den Wert λ . Damit erhalten wir für unsere Masszahl:

$$V = \frac{k^3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda d\varphi d\lambda}{(\lambda + m)^2 \tan^2 \delta} = k^3 \pi \cot g^2 \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda + m)^2}.$$

Integration liefert:

$$\frac{V}{\pi k^3} = \cot g^2 \delta \left[\ln |\lambda + m| + \frac{m}{\lambda + m} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}. \quad (7)$$

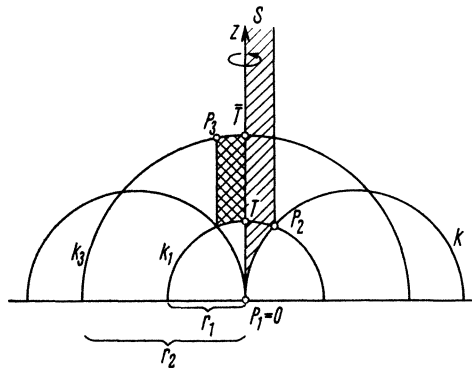
Damit sind alle in den folgenden Abschnitten benötigten Integrale bereitgestellt.

Für die weiteren Untersuchungen ordnen wir, wie aus den Figuren 2 und 3 ersichtlich ist, jedem Punkt P_i auf dem Kreis bzw. auf der Geraden k bestimmte Werte α_i, β_i, z_i bzw. λ_i, β_i, z_i zu.

Wir wollen jetzt für einige hyperbolische Rotationskörper die Inhaltsmasszahlen bestimmen. Die Tatsache, dass die einzelnen Körper bei den folgenden Untersuchungen im Modell spezielle Lagen haben, bedeutet dabei keine Einschränkung.

4. Hyperbolische Kegel

Für $\nu = 0$ liegen die Mittelpunkte der euklidischen Kreise k auf der Achse des Modells, sie stellen also hyperbolische Geraden dar. Wir können in Analogie zur euklidischen Geometrie die durch Rotation von k um z entstehenden Flächen als Kegelflächen bezeichnen. Je nach der gegenseitigen Lage der hyperbolischen Geraden k und z sprechen wir von einer Horo-, einer Hyper- oder einer eigentlichen Kegelfläche.



Figur 4
Der Horokegel

4.1 Der Horokegel. Für $\mu = 1$ sind k und z randparallel, und wir erhalten Figur 4. Nach (1 a) gilt für die Länge $\bar{\varrho}$ der hyperbolischen Strecke $P_2 T$:

$$\bar{\varrho} = \frac{k}{2} \ln \frac{1 + \cos \beta_2}{1 - \cos \beta_2}.$$

Daraus folgt:

$$\tanh(\bar{\varrho}/k) = \cos \beta_2, \quad \cosh(\bar{\varrho}/k) = 1/\sin \beta_2, \quad \sinh(\bar{\varrho}/k) = \cotg \beta_2. \quad (8)$$

Wegen $2\beta_2 = \pi - \alpha_2$ ergibt sich also:

$$\cosh(\bar{\varrho}/k) = 1/\cos(\alpha_2/2).$$

Der durch Rotation der einfach schraffierten Fläche entstehende Körper hat also nach (5) den Inhalt:

$$\begin{aligned} V &= \pi k^3 [\ln \tan(\alpha/2) - \ln \sin \alpha]_0^{\alpha_2} \\ &= \pi k^3 [\ln \sin(\alpha/2) - \ln \cos(\alpha/2) - \ln 2 - \ln \sin(\alpha/2) - \ln \cos(\alpha/2)]_0^{\alpha_2} \\ &= -2\pi k^3 \ln \cos(\alpha_2/2) = 2\pi k^3 \ln \cosh(\bar{\varrho}/k). \end{aligned}$$

Damit kennen wir den Inhalt zweier kongruenter Horokegel, die durch Spiegelung an der durch k_1 erzeugten Ebene ineinander übergehen. Die Spitze des einen ist der (euklidisch unendlich ferne) Punkt S , die des anderen der Punkt $P_1 = 0$. Hyperbolisch gesehen liegen beide Spitzen im Unendlichen. $\bar{\varrho}$ ist der Radius der Kegelgrundfläche. Für einen einzigen solchen Kegel gilt also:

$$V = \pi k^3 \ln \cosh(\bar{\varrho}/k). \quad (9)$$

Rotiert in Figur 4 das doppelt schraffierte Flächenstück um z , so entsteht ein Horokegelstumpf. Für seine Inhaltsmasszahl gilt mit (9):

$$V = \pi k^3 (\ln \cosh(\bar{\varrho}/k) - \ln \cosh(\bar{\varrho}_1/k)).$$

$\bar{\varrho}$ und $\bar{\varrho}_1$ sind dabei die Deckflächenradien $P_2 T$ und $P_3 \bar{T}$. Der Figur 4 entnehmen wir:

$$\sin \beta_2 = (z_2/r_1), \quad \sin \beta_3 = (z_3/r_2).$$

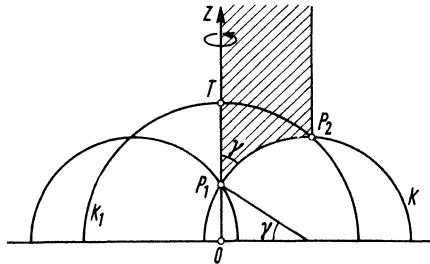
Mit (8) ergibt sich

$$V = \pi k^3 \ln \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_2} = \pi k^3 \ln \frac{z_3 r_1}{r_2 z_2} = \pi k^3 \left(\ln \frac{z_3}{z_2} - \ln \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Nach (1b) erhalten wir:

$$V = \pi k^2 (\bar{s} - \bar{h}). \quad (10)$$

\bar{s} ist dabei die Mantellinie, \bar{h} die Höhe des Horokegelstumpfes.



Figur 5
Der eigentliche Kegel

4.2 *Der eigentliche Kegel.* Für $\mu < 1$ ($\mu \neq 0$) schneiden sich k und z , und wir erhalten Figur 5. Durch Rotation des schraffierten Flächenstücks ergibt sich ein Körper, dessen Inhalt mit (5) berechnet werden kann. Der Horokegel über $T P_2$ hat den Inhalt (9). Subtraktion beider Masszahlen ergibt den Inhalt eines eigentlichen Kegels.

$$V = \pi k^3 \left(\mu \ln \frac{\tan(\alpha_2/2)}{\tan(\alpha_1/2)} - \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} - \ln \cosh(\bar{\varrho}/k) \right).$$

Mit (8) und (1a) folgt

$$V = \pi k^3 \left(\mu \frac{\bar{s}}{k} - \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 \sin \beta_2} \right).$$

Dabei ist \bar{s} die Kegelmantellinie $P_1 P_2$. Der Figur 5 entnehmen wir:

$$\cos \gamma = \cos \alpha_1 = \mu, \quad \sin \beta_2 = z_2/r_1, \quad \sin \alpha_2 = z_2/R, \quad \sin \alpha_1 = z_1/R.$$

Damit ergibt sich:

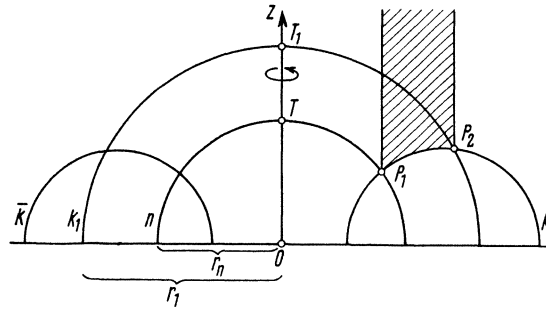
$$V = \pi k^3 \left(\frac{\bar{s}}{k} \cos \gamma - \ln \frac{r_1}{z_1} \right).$$

Mit (1b) erhalten wir

$$V = \pi k^2 (\bar{s} \cos \gamma - \bar{h}). \quad (11)$$

\bar{h} ist die Kegelhöhe $P_1 T$.

Ganz genauso lautet die Formel für den Stumpf eines eigentlichen Kegels. \bar{s} ist dann die Mantellinie und \bar{h} die Höhe des Kegelstumpfs. Für $\gamma \rightarrow 0$ wandert die Kegelspitze P_1 ins hyperbolisch Unendliche. Aus dem eigentlichen Kegelstumpf wird ein Horokegelstumpf. Formel (11) geht in (10) über.



Figur 6
Der Hyperkegel

4.3 *Der Hyperkegel.* Für $\mu > 1$ sind k und z überparallel und wir erhalten Figur 6. An die Stelle der Kegelspitze tritt jetzt eine Ebene, welche durch Rotation des gemeinsamen Lotes n der Geraden k und \bar{k} um z entsteht (\bar{k} ist dabei das Spiegelbild von k an z). Diese Ebene soll jeden Hyperkegel begrenzen.

Durch Rotation der schraffierten Fläche in Figur 6 entsteht ein Hohlkörper, dessen Volummasszahl nach (5) berechnet werden kann. Zu dieser Masszahl addieren wir zunächst den Inhalt des Horokegels über $T P_1$ (Grundflächenradius $\bar{\varrho}$) und subtrahieren schliesslich den Inhalt des Horokegels über $T_1 P_2$ (Grundflächenradius $\bar{\varrho}_1$) unter Verwendung von (9). So erhalten wir den Inhalt eines Hyperkegels:

$$V = \pi k^3 \left(\mu \ln \frac{\tan(\alpha_2/2)}{\tan(\alpha_1/2)} - \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} + \ln \cosh(\bar{\varrho}/k) - \ln \cosh(\bar{\varrho}_1/k) \right).$$

Mit (1 a) und (8) wird

$$V = \pi k^3 \left(\mu \frac{\bar{s}}{k} - \ln \frac{\sin \alpha_2 \sin \beta_1}{\sin \alpha_1 \sin \beta_2} \right).$$

Dabei ist \bar{s} die Kegelmantellinie $P_1 P_2$.

Der Figur 6 entnehmen wir:

$$\sin \alpha_2 = \frac{z_2}{R}, \quad \sin \beta_1 = \frac{z_1}{r_n}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{z_1}{R}, \quad \sin \beta_2 = \frac{z_2}{r_1},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\mu} = \sin \beta_1 = \frac{1}{\cosh(\bar{q}/k)}.$$

Damit ergibt sich:

$$V = \pi k^3 \left(\frac{\bar{s}}{k} \cosh \frac{\bar{q}}{k} - \ln \frac{r_1}{r_n} \right).$$

Mit (1b) wird

$$V = \pi k^2 (\bar{s} \cosh(\bar{q}/k) - \bar{h}). \quad (12)$$

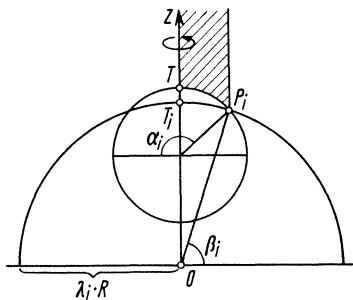
\bar{h} ist die Kegelhöhe $T T_1$.

Ganz genauso lautet die Formel für den Stumpf eines Hyperkegels. \bar{s} ist dann die Mantellinie und \bar{h} die Höhe des Kegelstumpfs.

Für $\bar{q} \rightarrow 0$ rutschen die Geraden k, \bar{k} immer enger zusammen. Aus dem Hyperkegelstumpf wird ein Horokegelstumpf. Formel (12) geht in (10) über.

5. Hyperbolische Segmente und Zonen

Für $\mu = 0, \nu > 1$ stellt k einen hyperbolischen Kreis dar, der bei Rotation um z in sich übergeht. Es entsteht also eine hyperbolische Kugel. Wir bestimmen jetzt die Volummasszahl für das Kugelsegment, für die Vollkugel und schliesslich für die Kugelzone.



Figur 7
Das Kugelsegment

5.1 Das Kugelsegment. Durch Rotation des schraffierten Flächenstücks in Figur 7 ergibt sich ein Körper, dessen Volummasszahl nach (3) bestimmt werden kann. Wir wählen zunächst $\pi/2 < \alpha_i \leq \pi$. Der Horokegel über $P_i T_i$ hat den Inhalt (9). Subtraktion liefert das Volumen eines Kugelsegments:

$$\frac{V}{\pi k^3} = \ln \cosh \frac{\bar{q}_i}{k} - \left[-\ln(\nu + \sin \alpha) - \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha} \right]_{(\pi/2)}^{\alpha_i}$$

$$= \ln \cosh \frac{\bar{q}_i}{k} + \ln(\nu + \sin \alpha_i) - \ln(\nu + 1) + \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha_i} - \frac{\nu}{\nu + 1}.$$

Aus Figur 7 entnehmen wir:

$$\cosh(\bar{\varrho}_i/k) = 1/\sin \beta_i = \lambda_i/(\nu + \sin \alpha_i),$$

$$(R \cos \alpha_i)^2 + (\nu R + R \sin \alpha_i)^2 = \lambda_i^2 R^2 \quad \text{also} \quad \sin \alpha_i = (\lambda_i^2 - \nu^2 - 1)/2\nu.$$

Für die hyperbolische Länge der Strecke T_i T gilt mit (1b):

$$\bar{h}_i = k \ln \frac{\nu + 1}{\lambda_i} \quad \text{also} \quad \sinh \frac{\bar{h}_i}{k} = \frac{(\nu + 1)^2 - \lambda_i^2}{2 \lambda_i (\nu + 1)}.$$

Mit diesen drei Aussagen formen wir unser Ergebnis um und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi k^3} &= -\ln \frac{(\nu + 1)(\nu + \sin \alpha_i)}{\lambda_i (\nu + \sin \alpha_i)} + \nu \frac{1 - \sin \alpha_i}{(\nu + 1)(\nu + \sin \alpha_i)} \\ &= -\frac{\bar{h}_i}{k} + \frac{\lambda_i}{(\nu + \sin \alpha_i)} \cdot \frac{(\nu + 1)^2 - \lambda_i^2}{2 \lambda_i (\nu + 1)} = -\frac{\bar{h}_i}{k} + \cosh \frac{\bar{\varrho}_i}{k} \sinh \frac{\bar{h}_i}{k}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Segmenthöhe mit \bar{h} und den Radius des Segmentgrundkreises mit $\bar{\varrho}$, so gilt also:

$$\boxed{V = \pi k^3 \left(-\frac{\bar{h}}{k} + \cosh \frac{\bar{\varrho}}{k} \cdot \sinh \frac{\bar{h}}{k} \right)} \quad (13)$$

Wie sich leicht zeigen lässt, bleibt diese Formel auch noch richtig für $3\pi/2 > \alpha_i > \pi$.

5.2 Die Kugel. Lläuft α von $\pi/2$ bis $3\pi/2$, so vereinfacht sich die Rechnung ganz wesentlich, und wir erhalten den Inhalt einer Kugel. $\bar{\varrho}$ verschwindet, und aus \bar{h} wird der Kugeldurchmesser $2\bar{R}$.

$$\boxed{V = \pi k^3 (-2\bar{R}/k + \sinh(2\bar{R}/k))} \quad (14)$$

5.3 Die Kugelzone. Werden aus der Kugel zwei Segmente mit den Höhen \bar{h}_1 , \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 > \bar{h}_1$) und den Grundkreisradien $\bar{\varrho}_1$, $\bar{\varrho}_2$ ausgeschnitten, so entsteht eine Kugelzone. Unter Verwendung der Ergebnisse über das Kugelsegment ergibt sich als Inhaltsmasszahl:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi k^3} &= \left(-\frac{\bar{h}_2}{k} + \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha_2} - \frac{\nu}{\nu + 1} \right) - \left(-\frac{\bar{h}_1}{k} + \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha_1} - \frac{\nu}{\nu + 1} \right) \\ &= -\frac{\bar{h}}{k} + \nu \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{(\nu + \sin \alpha_1)(\nu + \sin \alpha_2)}; \end{aligned}$$

$\bar{h} = \bar{h}_2 - \bar{h}_1$ ist dabei die Zonenhöhe.

Es gilt:

$$\bar{h} = k \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{also} \quad \sinh \frac{\bar{h}}{k} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Verwenden wir zur Umformung die aus Figur 7 bereits entnommenen Ausdrücke, so erhalten wir zunächst

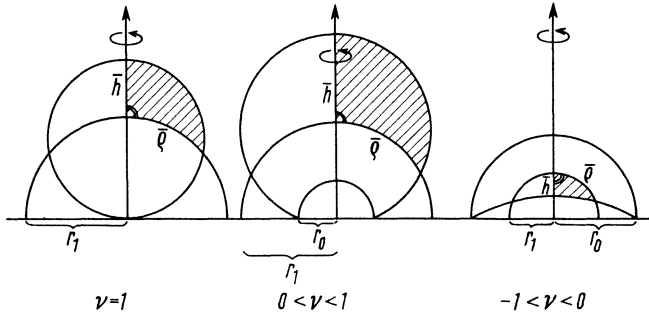
$$\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)/2\nu$$

und weiter

$$\frac{V}{\pi k^3} = -\frac{\bar{h}}{k} + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \lambda_1 \lambda_2}{2(\nu + \sin \alpha_1)(\nu + \sin \alpha_2) \lambda_1 \lambda_2}.$$

Damit ergibt sich für den Inhalt der Kugelzone:

$$V = \pi k^3 \left(-\frac{\bar{h}}{k} + \sinh \frac{\bar{h}}{k} \cosh \frac{\bar{\varrho}_1}{k} \cosh \frac{\bar{\varrho}_2}{k} \right). \quad (15)$$



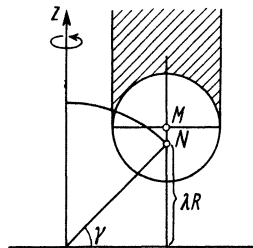
Figur 8

Horosphären- und Hypersphärensegmente

5.4 Segmente und Zonen bei Horo- und Hypersphäre. Für $\mu = 0$ und $v = 1$ bzw. $|v| < 1$, $v \neq 0$ ergibt sich bei Rotation von k um z eine Horo- bzw. Hypersphäre. Figur 8 erläutert die Entstehung von Segmenten in diesen zwei Fällen. Die Herleitungen in 5.1 und 5.3 lassen sich wörtlich übernehmen. Für die Inhaltsmasszahlen der Segmente und Zonen von Horo- und Hypersphäre gelten also wieder die Formeln (13) und (15). Ein Analogon zu Formel (14) existiert nicht. Die Masszahl des Horosphären-segments wächst nämlich für $r_1 \rightarrow 0$ (Figur 8) unbeschränkt, ebenso die des Hypersphären-segments für $r_1 \rightarrow r_0$ (Figur 8).

6. Hyperbolischer Torus

Für $\mu \geq 1$, $v > 1$ stellt k einen hyperbolischen Kreis dar, der bei Drehung um z einen Torus (Figur 9) erzeugt. Durch Rotation der schraffierten Fläche in Figur 9



Figur 9

Der Torus

(α läuft von 0 bis π) entsteht ein Körper, dessen Volumen V_2 nach (3) bestimmt werden kann. Nimmt man zu der schraffierten Fläche noch die Kreisfläche dazu, so ergibt sich bei Drehung ein zweiter Körper. Mit (3) lässt sich auch sein Volumen V_1 ermitteln

(α läuft jetzt von 2π bis π). Subtraktion liefert das Torusvolumen V .

$$\frac{V}{\pi k^3} = \frac{V_1 - V_2}{\pi k^3} = \frac{2\mu}{v(v^2 - 1)} \left\{ A \arctan \frac{A}{v} + A \frac{\pi}{2} + v \right\} + \frac{2\mu}{v(v^2 - 1)} \left\{ A \frac{\pi}{2} - A \arctan \frac{A}{v} - v \right\} = \frac{2\pi\mu}{(v^2 - 1)\sqrt{v^2 - 1}}.$$

Für den hyperbolischen Durchmesser $2\bar{R}$ des hyperbolischen Kreises k gilt nach (1b):

$$2\bar{R} = k \ln \frac{v+1}{v-1},$$

daraus folgt

$$\cosh \frac{2\bar{R}}{k} - 1 = \frac{2}{v^2 - 1}.$$

Weiter erhalten wir mit (1b):

$$\bar{R} = k \ln \frac{\lambda}{v-1} = k \ln \frac{v+1}{k},$$

und daraus folgt $\lambda^2 = v^2 - 1$.

Für den hyperbolischen Abstand \bar{a} des hyperbolischen Kreismittelpunktes N von z ergibt sich nach (8):

$$\sinh(\bar{a}/k) = \cot \gamma = \mu/\lambda = \mu/\sqrt{v^2 - 1}.$$

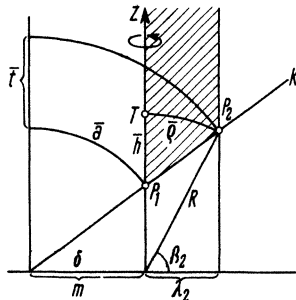
Durch Einsetzen bekommen wir schliesslich als Inhaltsmasszahl eines Torus:

$$V = \pi^2 k^3 \sinh \frac{\bar{a}}{k} \left(\cosh \frac{2\bar{R}}{k} - 1 \right) \quad (16)$$

\bar{R} ist dabei der Kreisradius und \bar{a} der Abstand des Kreismittelpunktes von der Drehachse.

7. Kegelartige Rotationskörper

Die Gerade k in Figur 3 kann als ein Hyperzyklus gedeutet werden, der mit z einen hyperbolisch unendlich fernen Punkt gemeinsam hat. Wir wenden uns zunächst dem Spezialfall zu, dass sich k und z auch noch in einem endlichen Punkt P_1 (Figur 10) schneiden.



Figur 10
Kegelartiger Drehkörper

Durch Rotation der schraffierten Fläche in Figur 10 entsteht ein Körper, dessen Volumen nach (7) berechnet werden kann. Der Horokegel über P_2 T hat den Inhalt

(9). Subtraktion beider liefert die Volummasszahl eines kegelartigen Körpers. Sie soll jetzt genauer untersucht werden.

$$\frac{V}{\pi k^3} = \cotg^2 \delta \left[\ln \left| \lambda + m \right| + \frac{m}{m + \lambda} \right]_0^{\lambda_2} - \ln \cosh \frac{\bar{\varrho}}{k}.$$

Daraus ergibt sich nach (8):

$$\frac{V}{\pi k^3} = \cotg^2 \delta \ln \frac{\lambda_2 + m}{m} + \ln \sin \beta_2 - \frac{\lambda_2}{m + \lambda_2} \cotg^2 \delta.$$

Mit den Bezeichnungen der Figur ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi k^3} &= \cotg^2 \delta \ln \frac{z_2}{z_1} + \ln \frac{z_2 z_1}{R z_1} - \frac{(m + \lambda_2) \lambda_2}{z_2 (m + \lambda_2)} \cotg \delta \\ &= \ln \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta} + \ln \frac{z_1}{R} - \frac{\lambda_2}{z_2} \cotg \delta. \end{aligned}$$

Mit (1b) und (8) folgt weiter:

$$\frac{V}{\pi k^3} = \frac{\bar{t}}{k} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta} - \frac{\bar{h}}{k} - \cotg \delta \cotg \beta_2 = \frac{\bar{t}}{k} \cosh^2 \frac{\bar{a}}{k} - \frac{\bar{h}}{k} - \sinh \frac{\bar{a}}{k} \cdot \sinh \frac{\bar{\varrho}}{k}.$$

Für die Länge des Hyperzyklenbogens $P_1 P_2$ gilt bekanntlich $\bar{s} = \bar{t} \cosh (\bar{a}/k)$, damit erhalten wir für das Volumen unseres kegelartigen Rotationskörpers:

$$V = \pi k^3 \left(\frac{\bar{s}}{k} \cosh \frac{\bar{a}}{k} - \frac{\bar{h}}{k} - \sinh \frac{\bar{a}}{k} \cdot \sinh \frac{\bar{\varrho}}{k} \right).$$

Daraus ergibt sich sofort eine Formel für den zu diesem Körper gehörenden Stumpf:

$$V = \pi k^3 \left(\frac{\bar{s}}{k} \cosh \frac{\bar{a}}{k} - \frac{\bar{h}}{k} - \sinh \frac{\bar{a}}{k} \left(\sinh \frac{\bar{\varrho}_2}{k} - \sinh \frac{\bar{\varrho}_1}{k} \right) \right).$$

Dabei sind \bar{s} die Mantellinie, \bar{h} die Höhe, $\bar{\varrho}_1$ und $\bar{\varrho}_2$ die Grundflächenradien des Stumpfs.

Genau die gleiche Formel erhalten wir für den Fall, dass Hyperzyklus und Drehachse nur einen einzigen, nämlich den unendlich fernen Punkt gemeinsam haben.

Für $\delta = \pi/2$ wird $\bar{a} = 0$ und es ergibt sich die Formel (10) für den Horokegelstumpf.

Haben Hyperzyklus und Drehachse zwei unendlich ferne Punkte gemeinsam, so bedeutet das $m = 0$ und weiter $\bar{a} = \bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}_2 = \bar{\varrho}$. Die Stumpfformel vereinfacht sich zu:

$$V = \pi k^3 \left(\bar{s} \cosh (\bar{\varrho}/k) - \bar{h} \right).$$

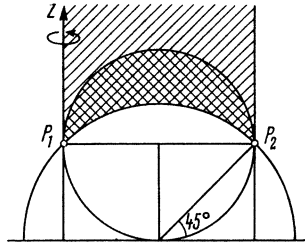
8. Spezielle hyperbolische Rotationskörper

Um auch noch für die Integrale (4) und (6) Anwendungsbeispiele zu haben, berechnen wir das Volumen zweier ganz spezieller Rotationskörper.

8.1 Spezialkörper, erzeugt durch Rotation eines Horozyklus. Ein Horozyklus berührt zwei randparallele hyperbolische Geraden in den Punkten $P_1 P_2$ (Figur 11). Durch Rotation der einfach schraffierten Fläche um eine dieser Geraden entsteht ein sich ins Unendliche erstreckender Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (6). Dabei gilt $\mu = \nu = 1$. Der Winkel α läuft von 0 bis π . Wir erhalten $V =$

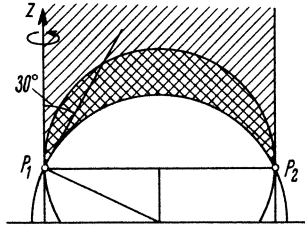
$(2/3) \pi k^3$. Lässt man die durch $P_1 P_2$ bestimmte hyperbolische Gerade mitrotieren, so liefert das doppelt schraffierte Flächenstück einen weiteren Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (5). Dabei gilt $\nu = 0$, $\mu = 1/\sqrt{2}$. Der Winkel α läuft von $\pi/4$ bis $3\pi/4$. Zusammen mit dem vorigen Ergebnis erhalten wir:

$$V = \pi k^3 \left(\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - (2/3) \right)$$



Figur 11
Spezialkörper mit Horozyklus

8.2 *Spezialkörper, erzeugt durch Rotation eines Hyperzyklus.* Ein Hyperzyklus berührt zwei randparallele hyperbolische Geraden in den Punkten $P_1 P_2$ (Figur 12). Die durch $P_1 P_2$ bestimmte hyperbolische Gerade soll den Hyperzyklus unter einem Winkel von 30° schneiden. Durch Rotation des einfach schraffierten Flächenstücks um



Figur 12
Spezialkörper mit Hyperzyklus

eine der beiden Geraden entsteht ein sich ins Unendliche erstreckender Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (4). Dabei gilt $\mu = 1$, $\nu = 1/\sqrt{3}$. Der Winkel α läuft von 0 bis π . Wir erhalten:

$$V = \pi k^3 \left((3/2) \sqrt{6} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 3 \right).$$

Lässt man die hyperbolische Gerade durch $P_1 P_2$ mitrotieren, so liefert das doppelt schraffierte Flächenstück einen weiteren Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (5). Dabei gilt $\nu = 0$, $\mu = \sqrt{3}/2$. Der Winkel α läuft von $\pi/6$ bis $5\pi/6$. Zusammen mit dem vorigen Ergebnis erhalten wir:

$$V = \pi k^3 \left(\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}) - (3/2) \sqrt{6} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 3 \right).$$

9. Schlussbetrachtung

Ziel der Arbeit ist es, an Beispielen eine Methode vorzuführen, die es gestattet, die Inhaltsmasszahlen gewisser hyperbolischer Rotationskörper zu ermitteln. Die Auswahl der Beispiele erfolgte nach zwei Gesichtspunkten. Einmal sollten alle in Teil 3 ausgewerteten Integrale bei der Bestimmung von Masszahlen tatsächlich vorkommen. Zum andern aber wollten wir vor allem solche Drehkörper behandeln, die in der euklidischen Geometrie ein Gegenstück haben. Es ist besonders interessant, in diesen Fällen den Übergang von der hyperbolischen zur euklidischen Formel durchzuführen. Wir zeigen das am Beispiel des Torus. In Formel (16) werden die vorkommenden hyperbolischen Funktionen in Reihen entwickelt:

$$V = \pi^2 k^3 \left(\frac{\bar{a}}{k} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\bar{a}}{k} \right)^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{R}}{k} \right)^2 + \dots - 1 \right)$$

Wächst jetzt k unbegrenzt, so ergibt sich das Torusvolumen der euklidischen Geometrie $V = \pi^2 a \cdot 2 R^2$.

H. ZEITLER, Weiden

On $\mathcal{S}\mathcal{C}$ Functions

Introduction

In this paper we prove that the Dirac Delta and all its derivatives can be represented by sequences of constructed discontinuous functions. Although this result is stated in [1] it is not formally proved.

We then prove that by using this definition of the n -th derivative of the Dirac Delta its Laplace Transform is s^n . This result again can be considered as "classical" (see for example [3]) but is not proved either.

We feel that although the results are known the approach is new and our proof is rigorous which justifies the contents of this paper.

Definition of the n -th Derivative of a Function

Let $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ be an n -dimensional vector. We say that the vector tends *basewise* to zero if the components v_k tend to zero *successively*. We write symbolically

$$V \xrightarrow[B]{} 0. \quad (1)$$

Geometrically speaking this means that the end point of V describes a polygonal line whose sides are parallel to the axes of the basis.

We shall use the notation $\prod V = \prod_{m=1}^n v_m$ for the product of the components of the vector.

Let $f(t) \in C^n[b, c]$ be the class of functions that are defined and continuous as well as their derivatives up to and including the order n for $b \leq t \leq c$. Let a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, be such that $(t + \alpha_{h,n}) \in [b, c]$, where $\alpha_{h,n}$ represents the sum of any h of the n

We can thus write for the n -th derivative of $f(t)$

$$D^n f(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (-1)^n a^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f[t + (k + \theta) a]. \quad (5)$$

This is the form we are going to use in the next section.

Remark. (5) can easily be checked by writing

$$\begin{aligned} f[t + (k + \theta) a] &= f(t) + \sum_{m=1}^{n-1} (m!)^{-1} a^m (k + \theta)^m D^m f(t) \\ &\quad + (k + \theta)^n a^n D^n f[t + \beta_k (k + \theta) a] / n! , \quad 0 \leq \beta_k \leq 1 , \end{aligned}$$

thus substituting into (5)

$$\begin{aligned} D^n f(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} (-1)^n a^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[f(t) + \sum_{m=1}^{n-1} (m!)^{-1} a^m (k + \theta)^m D^m f(t) \right. \\ &\quad \left. + (n!)^{-1} a^n (k + \theta)^n D^n f[t + \beta_k (k + \theta) a] \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (-1)^n a^{-n} \left\{ f(t) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{m=1}^{n-1} (m!)^{-1} a^m D^m f(t) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k + \theta)^m \right. \\ &\quad \left. + (n!)^{-1} a^n D^n f[t + \beta_k (k + \theta) a] \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k + \theta)^n \right\} . \end{aligned}$$

Since

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k + \theta)^m = (-1)^n n! \delta_n^m ,$$

where δ_n^m is the Kronecker Delta, it follows that all the terms on the right hand side, except the last one, cancel out, so that

$$D^n f(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (-1)^n a^{-n} (n!)^{-1} a^n D^n f[t + \beta_k (k + \theta) a] n! (-1)^n ,$$

which clearly is an identity.

3. The accordion function

We shall use the following notation for the Heaviside-step function:

$$u(t - T) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < T , \\ 1 & \text{for } t > T , \end{cases} \quad f(T^-) = 0 , \quad f(T^+) = 1 ,$$

so that for $T < \theta$, and $f(t) \in C^\circ[T, \theta]$,

$$\varphi(t) = f(t) [u(t - T) - u(t - \theta)] = \begin{cases} 0 & \text{for } t < T , \\ f(t) & \text{for } T < t < \theta , \\ 0 & \text{for } \theta < t , \end{cases}$$

$$\varphi(T^-) = 0 , \quad \varphi(T^+) = f(T^+) , \quad \varphi(\theta^-) = f(\theta^-) , \quad \varphi(\theta^+) = 0 .$$

Under these conditions, with $a > 0$, we define the following *accordion function*:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ac}(t, n, a) &= a^{-n-1} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [u(t - ma) - u(t - (m+1)a)], \\ &= a^{-n-1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m u(t - ma) \left[\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \right] \\ &= a^{-n-1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} u(t - ma), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

where use has been made of the classical properties of the binomial coefficients and $\binom{n}{-1} = 0$.

If we let $a \rightarrow 0$ in (6) we obtain a generalized function in the sense of MIKUSINSKI (cf. [2] and [3]). It is easier in this case not to use the notion of distribution in the sense of SCHWARTZ. We shall call this generalized function a *squeezed accordion* and shall write

$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{Ac}(t, n, a) = \text{Sc}(t, n). \quad (7)$$

For any function $f(t)$ defined and continuous over a sufficiently large neighbourhood of $t = 0$ we have, using the classical notation for the inner product

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{Sc}(t, n), f(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{Sc}(t, n) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\lim_{a \rightarrow 0} a^{-n-1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m u(t - ma) \binom{n+1}{m} \right] dt. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Since the integration is independent of a and of m we can change the order of the operations and write, using (6)

$$\langle \text{Sc}(t, n), f(t) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n-1} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [u(t - ma) - u(t - (m+1)a)] dt.$$

The integral can be written

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [u(t - ma) - u(t - (m+1)a)] dt &= \int_{ma}^{(m+1)a} f(t) dt = a f[(m + \theta_m)a] \\ &= a f[(m + \theta + \beta_m)a] = a [f[(m + \theta)a] + a \beta_m Df[(m + \theta + \eta_m \theta_m)a]], \end{aligned}$$

where $0 \leq \theta_m \leq 1$, θ is a fixed number such that

$$0 \leq \theta < \min(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad \theta_m = \theta + \beta_m, \quad \text{thus } 0 \leq \beta_m \leq 1, \quad 0 \leq \eta_m \leq 1.$$

It follows that

$$\langle \text{Sc}(t, n), f(t) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \{f[(m + \theta)a] + a \beta_m Df[(m + \theta + \eta_m \beta_m)a]\},$$

where the second term in the sum tends to zero with a so that

$$\langle \text{Sc}(t, n), f(t) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f[(m + \theta)a],$$

which according to (5) gives

$$\langle \text{Sc}(t, n), f(t) \rangle = (-1)^n D^n f(0). \quad (9)$$

(9) shows that $\text{Sc}(t, n)$ is identical to the n -th derivative of the Dirac Delta, i.e. $\text{Sc}(t, n) = \delta^{(n)}(t)$, as it is usually considered (cf. [4]). In particular for $n = 0$,

$$\langle \text{Sc}(t, 0), f(t) \rangle = f(0) = \langle \delta(t), f(t) \rangle, \quad (10)$$

i.e. $\text{Sc}(t, 0) = \delta(t)$, the Dirac Delta.

4. Laplace Transforms

We clearly have

$$\mathcal{L}[\text{Sc}(t, n)] = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-st} \text{Sc}(t, n) dt, \quad (11)$$

where the integration starts on the positive side of zero. Thus

$$\mathcal{L}[\text{Sc}(t, n)] = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-st} \left[\lim_{a \rightarrow 0} a^{-n-1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} u(t - ma) \right] dt.$$

Since the integration is independent of a and m we may change the order of operations, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\text{Sc}(t, n)] &= \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n-1} \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} (-1)^m \int_{0^+}^{+\infty} e^{-st} u(t - ma) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n-1} \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} (-1)^m [u(t - ma)] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n-1} \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} (-1)^m e^{-mas/s} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (1 - e^{-as})^{n+1} / s a^{n+1} = s^n. \end{aligned}$$

It follows that

$$\mathcal{L}[\text{Sc}(t, n)] = s^n,$$

or,

$$\text{Sc}(t, n) = \delta^{(n)}(t) = \mathcal{L}^{-1} s^n.$$

Thus the $\text{Sc}(t, n)$ function, i. e. the n -th derivative of the Dirac Delta is the inverse Laplace Transform of s^n . This result is considered classical and can be found for example in [4].

S. TAUBER, Portland State University USA

REFERENCES

- [1] VAN DER POL and BREMMER, *Operational Calculus* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1964).
- [2] J. MIKUSINSKI, *Operational Calculus* (Pergamon Press, N.Y. 1959).
- [3] A. H. ZEMANIAN, *Distribution Theory and Transform Analysis* (McGraw-Hill, N.Y. 1965).
- [4] W. KAPLAN, *Operational Methods for Linear Systems* (Addison Wesley, Reading Mass. 1962).

Aufgaben

Aufgabe 577. K. RADZISZEWSKI (Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska A 10, 57–59, 1956) hat bewiesen: Es sei P der Flächeninhalt des Rechtecks, das einem gegebenen Oval umschrieben ist und das eine Seite in der Richtung θ hat. Der Flächeninhalt des Ovals sei S . Dann ist

$$\frac{4}{\pi} S \leq \bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \, d\theta$$

mit Gleichheit nur für den Kreis. Man beweise: Es sei S^* der Flächeninhalt der Fusspunkt-kurve des Ovals für einen beliebigen inneren Punkt. Dann ist

$$\bar{P} \leq \frac{4}{\pi} S^*$$

mit Gleichheit nur, wenn das Oval durch eine Rotation von 90° in sich übergeführt werden kann. S^* hat ein einziges Minimum, wenn der Aufpunkt im Inneren variiert. Für glatte Ovale wird das Minimum im Krümmungsschwerpunkt angenommen.

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute of Brooklyn, USA

Lösung des Aufgabenstellers: Das Oval habe die Stützfunktion $h(\theta)$, gegeben als Funktion des Tangentenwinkels. Dann ist

$$\bar{P} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) h\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta.$$

Wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems ein innerer Punkt des Ovals ist, so ist die Fusspunktkurve die Kurve deren Polargleichung $r(\phi) = h(\theta)$ ist, $\theta = \phi + \pi/2$. Daher ist

$$S^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2(\theta) d\theta.$$

Die gefragte Ungleichung folgt sofort aus der Schwarzschen Ungleichung für das Integral P . Gleichheit besteht, wenn $h(\theta) = h(\theta + \pi/2)$ für alle θ .

Eine Translation des Aufpunktes resultiert in einer Änderung der Stützfunktion

$$h(\theta) \rightarrow h(\theta) + a \cos \theta + b \sin \theta.$$

Daher wird $S^* \rightarrow S^* + \text{linearer term in } a, b + \text{positiv definierter term in } a^2, b^2$. Das Verschwinden des linearen Terms charakterisiert das einzige Extremum, das ein Minimum sein muss. Die linearen Terme verschwinden, wenn die beiden ersten Fourierkoeffizienten von $h(\theta)$ verschwinden (siehe z. B. meinen Artikel in «Lectures on Calculus», Holden-Day, San Francisco 1967). Dies charakterisiert den Krümmungsschwerpunkt.

Aufgabe 578. Show that

$$\sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \binom{m}{r} \binom{n}{s} (a)_r (b)_s (b-a)_{m-r} (a-b)_{n-s} \frac{(c)_{r+s}}{(c)_r (c)_s} = (b)_m (a)_n \frac{(c)_{m+n}}{(c)_m (c)_n},$$

where

$$(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1).$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Solution by the proposer: By Vandermonde's theorem

$$\frac{(c)_{r+s}}{(c)_r (c)_s} = \sum_{k=0}^{\min(r,s)} \frac{(-r)_k (-s)_k}{k! (c)_k}.$$

Then since $(a)_n = (-1)^n (-a-n+1)_n$, we get

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \binom{m}{r} \binom{n}{s} (a)_r (b)_s (b-a)_{m-r} (a-b)_{n-s} \frac{(c)_{r+s}}{(c)_r (c)_s} \\ &= (b-a)_m (a-b)_n \sum_{r,s} \frac{(-m)_r (-n)_s (a)_r (b)_s}{r! s! (a-b-m+1)_r (b-a-n+1)_s} \sum_k \frac{(-r)_k (-s)_k}{k! (c)_k} \\ &= (b-a)_m (a-b)_n \sum_k \frac{(-m)_k (-n)_k (a)_k (b)_k}{k! (c)_k (a-b-m+1)_k (a-b-n+1)_k} \\ & \quad \cdot \sum_k \frac{(-m+k)_r (a+k)_r}{r! (a-b-m+k+1)_r} \sum_s \frac{(-n+k)_s (b+k)_s}{s! (b-a-n+k+1)_s} \\ &= (b-a)_m (a-b)_n \sum_k \frac{(-m)_k (-n)_k (a)_k (b)_k}{k! (c)_k (a-b-m+1)_k (b-a-n+1)_k} \\ & \quad \cdot \frac{(-b-m+1)_{m-k}}{(a-b-m+k+1)_{m-k}} \frac{(-a-n+1)_{n-k}}{(b-a-n+k+1)_{n-k}} \\ &= (b-a)_m (a-b)_n \sum_k \frac{(-m)_k (-n)_k (a)_k (b)_k}{k! (c)_k (a-b-m+1)_m (b-a-n+1)_n} \\ & \quad \cdot (-1)^{m+n} (b+k)_{m-k} (a+k)_{n-k} \\ &= (b)_m (a)_n \sum_k \frac{(-m)_k (-n)_k}{k! (c)_k} = (b)_m (a)_n \frac{(c)_{m+n}}{(c)_m (c)_n}. \end{aligned}$$

Aufgabe 579. Trouver tous les nombres naturels x pour lesquels chacun des six nombres $x, x+2, x+6, x+8, x+12, x+14$ est premier. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Solution: The five numbers $x, x+2, x+6, x+8, x+14$ form a complete system of residues, modulo 5, and $x+12 \equiv x+2 \pmod{5}$.

If x is 2 or 3, one of the numbers is divisible by 5. If x is a prime greater than 5, one of the numbers must lie in the residue class 0 (mod 5), and is therefore not a prime. Only when $x=5$ are the six numbers all primes.

L. M. R. LOUDEN, Wake Forest University, USA

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), H. HARBORTH (Braunschweig), P. HOHLER (Dietikon), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), H. MEYER (Birkerød, Dänemark), O. REUTTER (Ochsenhausen) sowie die folgenden Studenten der Wake Forest University, USA: D. ASHCRAFT, C. CUNNINGHAM, S. GOSSETT, G.-Y. KWEK, L. VAN OOT, B. PEELER, R. PETTYSOHN, W. M. WATTS, D. WILSON, L. ZINZOW.

Aufgabe 580. Sei

$$i, k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < k, \\ (i-k)! \binom{i}{k}^2 & \text{für } i \geq k. \end{cases}$$

Man zeige

$$\sum_{n=0}^i a_{in} a_{nk} (-1)^{n-k} = 0^{|i-k|}.$$

I. PAASCHE, München

1. Lösung: Für $i \geq n \geq k$ ist

$$a_{in} a_{nk} = \frac{(i!)^2}{(n!)^2 (i-n)!} \cdot \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} = \left(\frac{i!}{k!} \right)^2 \frac{1}{(i-n)! (n-k)!}.$$

Daraus ergibt sich nach Erweiterung mit $(i-k)!$ die Darstellung

$$a_{in} a_{nk} = \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} \binom{i-k}{n-k} \quad \text{für } i \geq n \geq k, \quad (1)$$

während

$$a_{in} a_{nk} = 0 \quad \text{für } i < n \quad \text{oder} \quad n < k. \quad (2)$$

In der Summe $s_{ik} = \sum_{n=0}^i a_{in} a_{nk} (-1)^{n-k}$ verschwinden im Fall $i < k$ nach (2) alle Summanden, sodass $s_{ik} = 0$ ist für $i < k$.

Wenn andererseits $i \geq k$ ist, gilt nach (1) und (2)

$$\begin{aligned} s_{ik} &= \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} \sum_{n=k}^i \binom{i-k}{n-k} (-1)^{n-k} = \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} \sum_{m=0}^{i-k} \binom{i-k}{m} (-1)^m = \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} (1-1)^{i-k} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i > k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases} \end{aligned}$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

2. Lösung: Es handelt sich um den Spezialfall $r = -1$ der für alle rationalen $r \geq 0$ gültigen Matrizenidentität $(a_{ik})^r = (a_{ik} r^{|i-k|})$, die ähnlich wie in El. Math. 19, S. 40–41 (1964) leicht für alle ganzrationalen r durch vollständige Induktion nach r bewiesen wird: Die Behauptung $(a_{ik} r^{|i-k|}) (a_{ik}) = (a_{ik} (r+1)^{|i-k|})$ enthält für $i \geq n \geq k$ links in einem Element (Zeilen-Spaltenprodukt) den Summanden $a_{in} r^{i-n} a_{nk}$, der bei Entwicklung des entsprechenden Elementes der rechten Seite dem Summanden $a_{ik} \binom{i-k}{n-k} r^{i-n}$ gleich ist, wie die leicht verifizierbare Identität

$$(i-n)! \binom{i}{n}^2 (n-k)! \binom{n}{k}^2 = (i-k)! \binom{i}{k}^2 \binom{i-k}{n-k}$$

zeigt. Weiterhin kann der einfache Beweis a. a. O. für $a_{ik} = \binom{i}{k}$ wörtlich auf die neuen a_{ik} übertragen werden.

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. HARBORTH (Braunschweig), E. WIDMER (Biel).

Neue Aufgaben

Aufgabe 602. Es sei p eine Primzahl, $R = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $n \in R \setminus \{0\}$, $a \in R$, $x_i \in R$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$M_{a,n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

sei die Menge der n -Tupel, die den Bedingungen

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv a \pmod{p}, \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq p-n$$

genügen. Man zeige

$$|M_{a,n}| = \frac{1}{p} \binom{p}{n}.$$

E. TROST, Zürich

Aufgabe 603. Man zeige, dass die Anzahl der echten Teilerketten

$$1 \mid d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_{r-1} \mid d_r = a$$

der Länge r der natürlichen Zahl $a = \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}$ (p_1, p_2, \dots, p_k verschiedene Primzahlen) gleich

$$\sum_{j=0}^r \left\{ (-1)^j \binom{r}{j} \prod_{i=1}^k \binom{n_i + r - j - 1}{n_i} \right\}$$

ist.

H. SCHEID, Mainz

Aufgabe 604. Es sei $0 \leq p \leq 1$. Man zeige

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k + p - k p} = \frac{1}{p}.$$

H. BRÄNDLI, Zürich

Aufgabe 605. Man beweise

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1!1 & & & & \\ 2!1 & 1!1 & & & \\ 3!1 & 2!3 & 1!1 & & \\ 4!1 & 3!6 & 2!7 & 1!1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Kummer

Pascal

Fakultät · Stirling II

Vgl. Aufgabe 41 (El. Math. 3, 83 (1948)).

I. PAASCHE, München

Literaturüberschau

Plane Geometry and its Groups. VON HEINRICH W. GUGGENHEIMER. 288 Seiten mit 168 Figuren. \$ 9.35. Holden-Day, Inc., San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam 1967.

Dieses Buch ist ein bedeutsamer Beitrag zur Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus. Zwischen dem von HILBERT und BACHMANN vorgezeichneten axiomatischen Aufbau der ebenen Geometrie und den Möglichkeiten der Schule liegt ein bisher nur schwach bebautes Feld, durch das der Weg zu einer modernen Schulgeometrie hindurchführt. Zwar gibt es einen scheinbaren Ausweg, der um dieses Feld herum geht: man kann

die Schulgeometrie nach dem Vorschlag bestimmter Reformer der linearen Algebra unterstellen. Soll jedoch mit dem Geometrieunterricht wie bis anhin eine Schulung der Raumvorstellung verbunden bleiben, so kann diese Art der Modernisierung kaum ernsthaft in Erwägung gezogen werden.

GUGGENHEIMER vollzieht in seinem Buch den Anschluss der Schulgeometrie an die Ideenkreise von HILBERT und BACHMANN. Es steht auf dem Niveau einer Hochschulvorlesung über Elementarmathematik, konzipiert für angehende Mathematiklehrer und ist getragen von der Absicht, für die spätere Schultätigkeit möglichst viel Brauchbares darzubieten. Dieses Ziel hat der Autor meines Erachtens in idealer Weise erreicht. Hier liegt jene Vorlesung in Buchform vor, die jeder Lehrer gehört haben sollte.

Das Buch behandelt die klassische Planimetrie von einer höhern Warte aus und unter den Aspekten des Abbildungs- und des Gruppenbegriffes. Der Autor beschreibt einen vollständigen axiomatischen Aufbau der Kongruenz-, der Ähnlichkeits- und der Möbiusgeometrie sowie der hyperbolischen Geometrie. Es ist längst bekannt, dass im Hilbertschen Axiomensystem für die Euklidische Geometrie die Kongruenzaxiome durch geeignete Spiegelungsaxiome ersetzt werden können. Auf diese Weise lassen sich die Begriffe und Methoden der Spiegelungsgeometrie integrieren, womit für die Abbildungsgeometrie im Schulunterricht eine saubere, logische Basis geschaffen ist. Das deduktive System ist aber im Guggenheimerschen Buch nicht Endzweck; zur Freude des Schulmathematikers steht die geometrische Substanz ganz eindeutig im Vordergrund. Der Leser begegnet dem ganzen klassischen Bestand an geometrischen Sätzen, wobei allerdings durch die Akzentuierung der Transformationsgruppen völlig neue Zusammenhänge zutage treten. Die Gruppenstruktur wird auch in den Beweisführungen kräftig eingesetzt. An zahlreichen Beispielen lernt der Leser die Methode des Beweisens durch Rechnen mit Abbildungen kennen.

Es ist zu begrüßen, dass der Autor in Abweichung von den Gepflogenheiten der Spiegelungsgeometer die Objekte (Punkte, Geraden, Kreise) und die Spiegelungen an diesen Objekten durch verschiedene Bezeichnungen auseinanderhält. Die Unterscheidung drängt sich wohl auf im Hinblick auf die übrigen vorkommenden Abbildungen (Drehungen, Streckungen u. a.), die nicht unmittelbar von einem Grundobjekt abgeleitet sind. Sie ist aber auch vom Standpunkt der Schule aus vorzuziehen. Nicht befreunden kann sich der Rezensent mit den häufig benutzten Abkürzungen in den Symbolen für transformierte Abbildungen; das Weglassen von Klammern ist gelegentlich so weit getrieben, dass die Formeln zu Rätseln werden.

Dem Text sind rund 500 Aufgaben beigelegt, die zum Teil Ergänzungen bringen, zum Teil aber auch zu weiterführenden Untersuchungen anregen sollen. Zum schönen und originellen Buch von GUGGENHEIMER müssen leider in bezug auf den Aufgabenteil einige Vorbehalte angebracht werden; die Aufgabenstellungen enthalten auffallend viele Fehler, die dem Autor bei einer präziseren Darstellung der Lösungsansätze sicher nicht entgangen wären. So sind zum Beispiel die Aufgabenstellungen 4a, 5, 12, 13 und 16 auf den Seiten 212/213 und ebenso die Aufgabenstellung 8 auf Seite 218 (vgl. *El. Math.* XXII/Heft 5, Aufgabe 533) auf Tatbestände gerichtet, die offensichtlich falsch sind. M. JEGER

Vorstufe zur höheren Mathematik. Von S. G. KREIN und V. N. USCHAKOWA. Lehrbuch für Studierende aller Fachrichtungen im 1. und 2. Semester. 153 Seiten mit 178 Abbildungen. DM 6,80. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1968.

Diese Schrift behandelt in einführender, anschaulicher Darstellung die Analysis der elementaren Funktionen mit den folgenden Abschnitten: Elementare Funktionen – Grenzwerte – Linearisierung der elementaren Funktionen – Anwendung der Ableitung für die Untersuchung von Funktionen – Implizit gegebene Funktionen einer Variablen. – Es ist schade, dass die an sich sehr klar geschriebene Darstellung – eine Übersetzung aus dem Russischen – nicht etwas besser der «westlichen Terminologie» angepasst worden ist, so vor allem, was den Begriff der Variablen, der Grösse, der Funktion anbelangt und sodann, was die Verwendung des Begriffes der «infinitesimal kleinen Funktionen» betrifft.

R. INEICHEN

Enzyklopädie der geisteswissenschaftlichen Arbeitsmethoden, 3. Lieferung: Methoden der Logik und Mathematik – Statistische Methoden, dargestellt von HANS HERMES und ERICH MITTENECKER. 141 Seiten. DM 22,-. R. Oldenbourg Verlag, München 1968.

Der erste Hauptteil, Methoden der Mathematik und der Logik (HERMES), bringt eine knappe, aber gut lesbare Übersicht über den Gegenstand der Mathematik und die logischen Aspekte, die sich bei der Betrachtung der Mathematik ergeben. Der mehr orientierend gehaltene Text wird durch zahlreiche Beispiele bereichert und gewährt eine schöne Übersicht über das Gesamtgebiet. Der zweite Hauptteil, Statistische Methoden in der Psychologie und den angrenzenden Wissenschaften (MITTENECKER), bringt eine Einführung in die beschreibende und in die induktive Statistik mit Formeln, Beispielen und einfach gehaltenem erläuterndem Text. Von Herleitungen ist aus naheliegenden Gründen im allgemeinen abgesehen worden, so dass eine allgemein verständliche Darstellung entstanden ist.

R. INEICHEN

Digitalrechner in technischen Prozessen. Von HELMUT HOTES. 313 Seiten. DM 48,-. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1967.

In der ersten Hälfte des Buches ist die Programmierung eines Digitalrechners unter Verwendung einer maschinenorientierten Symbolsprache behandelt. Die zweite Hälfte ist den Organisationsprogrammen für Prozessrechner gewidmet. Dieser Teil allein rechtfertigt den Titel des Buches.

In Steuer- und Überwachungsprogrammen spielt im Unterschied zu Rechenprogrammen nicht nur die Reihenfolge der Operationen eine Rolle. Meistens ist auch die zeitliche Staffelung wesentlich. Dies bedingt die Berücksichtigung eines oder mehrerer Uhrwerke. Bei der Prüfung von Fehlermeldungen während des Betriebes ist der Unterschied zwischen einer Störung im Prozess und einer solchen einer einzelnen Messeinrichtung mit möglichst grosser Wahrscheinlichkeit festzustellen. Das betreffende Störprogramm muss sehr sorgfältig aufgebaut sein.

Wenn ein Prozessrechner eingesetzt ist, besteht die Möglichkeit, technische Regler durch Programme des Rechners zu ersetzen. Damit lassen sich wesentlich kompliziertere Regelungen durchführen als mit den konventionellen Reglern.

E. R. BRÄNDLI

Grundzüge der theoretischen Logik. Von DAVID HILBERT und W. ACKERMANN. 5. Auflage. VIII und 188 Seiten. DM 38,-. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1967.

Nach der Meinung KANTS war mit der Aristotelischen Schlusslehre die Logik abgeschlossen und vollendet. Die neuere Entwicklung der mathematischen Logik, deren Anfänge in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu suchen sind, hat diese Vermutung widerlegt. In Wirklichkeit erweist sich die deduktive Logik schon bei ziemlich einfachen logischen Zusammenhängen als unzulänglich.

Im vorliegenden Buch werden zusätzlich bedeutsame Ergebnisse, die bis heute auf dem Gebiete der mathematischen Logik erzielt worden sind, besprochen. So, wie die Mathematik ihre grossen Fortschritte einem leistungsfähigen Formalismus verdankt, ist die Entwicklung der theoretischen Logik auf den Logikkalkül zurückzuführen. Wie können Sätze charakterisiert werden, die aus gegebenen Voraussetzungen überhaupt gefolgt werden können? Wie lässt sich feststellen, ob ein Satz aus rein logischen Gründen richtig ist? Solche Fragen können mit dem Logikkalkül behandelt werden.

D. HILBERT, der ursprüngliche Verfasser dieses Buches, hat seit den zwanziger Jahren versucht, über den Logikkalkül einen neuen Aufbau der Mathematik zu finden.

Die 5. Auflage, die inhaltlich eine unveränderte Ausgabe der 1959 erschienenen 4. Auflage darstellt, ist in vier Kapitel aufgeteilt:

Das erste Kapitel ist mit «Der Aussagenkalkül» überschrieben. Hier wird auf eine feine logische Struktur der einzelnen Aussagen verzichtet. Eine Aussage wird als Ganzes betrachtet und ist als Ganzes richtig oder falsch. Der Aussagenkalkül erlaubt die Untersuchung der logischen Verknüpfung von einzelnen Aussagen.

Der «Klassenkalkül» des zweiten Kapitels geht nun auf die logische Struktur einer Aussage ein, die in der Beziehung zwischen Subjekt und Prädikat wiedergegeben wird. Jeder

Eigenschaft von Dingen entspricht die *Klasse* der Gegenstände, die diese Eigenschaft besitzen.

Das dritte Kapitel führt mit dem «engeren Prädikatenkalkül» über die traditionelle aristotelische Schlusslehre hinaus. Es bringt Beziehungen zwischen mehreren Gegenständen, die mit der deduktiven Logik nicht erfasst werden können, zum symbolischen Ausdruck.

Im vierten Kapitel wird schliesslich gezeigt, warum der Formalismus, der in den ersten drei Kapiteln mit dem Aussagenkalkül, dem Klassenkalkül und dem Prädikatenkalkül gebildet wurde, noch nicht abgeschlossen ist und einen erweiterten Prädikatenkalkül notwendig macht. Dazu werden sogenannte Quantoren für Prädikatenvariable eingeführt.

Die vierte Auflage des Buches weist gegenüber früheren Ausgaben wesentliche Neuerungen auf, die mit der Entwicklung der mathematischen Logik Schritt halten. So musste z. B. die Hilbertsche Symbolik einer moderneren weichen. Zudem wurden nebst vielen Verbesserungen im ersten Kapitel zwei neue Paragraphen hinzugefügt, die besonders philosophisch interessierte Leser ansprechen dürften.

In der Einleitung wird erwähnt, dass die Anwendung der formalisierten Logik nicht auf die Mathematik beschränkt sei. Sie lasse sich überall dort anwenden, wo Disziplinen oder Teildisziplinen vorliegen, die einer axiomatischen Begründung fähig sind. Leider wird aber darauf nicht näher eingegangen.

Besonders wertvoll sind schliesslich die vielen Übungen und Beispiele, die auch dem fachlich nicht spezialisierten Leser das Verständnis der dargebotenen Theorie stark erleichtern.

P. FUCHS

Théorie des graphes et ses applications. Par CLAUDE BERGE. Collection universitaire de mathématiques, deuxième édition, nouveau tirage. 269 pages. Dunod, Paris 1967.

Créée par le mathématicien hongrois D. KÖNIG qui lui consacra, en 1936, un important ouvrage: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, la théorie des graphes a pris de nos jours une large extension dans diverses disciplines (topologie, physique, psychologie, économie, etc.) et M. CLAUDE BERGE est un de ceux qui ont le mieux contribué à son développement. Il donne dans son excellent livre un aperçu des résultats obtenus, dispersés dans de nombreuses revues scientifiques et présente les résultats de ses propres recherches. Illustré d'exemples concrets, ce livre qui ne nécessite pour sa lecture que la connaissance des mathématiques générales, intéressera de nombreux lecteurs: mathématiciens, physiciens, spécialistes de la théorie des jeux, de la recherche opérationnelle, des sciences du comportement. L'ouvrage compte 21 chapitres, dont un consacré aux jeux sur un graphe et un autre consacré aux réseaux de transport sont d'un intérêt très général. On trouve à la fin de l'ouvrage une copieuse bibliographie, la liste des symboles et le lexique des termes employés.

S. PICCARD

Statistique. Par C. FOURGEAUD et A. FUCHS. Collection universitaire de mathématiques dirigée par M. HENRI HIERCHE. 325 et XIV pages. Dunod, Paris 1967.

Préfacé par M. R. FORTET, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui s'exprime dans des termes très élogieux à l'égard des deux auteurs qui ont le goût du «travail bien fait», l'ouvrage de MM. FOURGEAUD et FUCHS se compose de 4 parties, dont la première est consacrée aux éléments du calcul des probabilités, la seconde aux distributions d'échantillonnage, la troisième à la théorie de la décision et l'estimation et la dernière à la théorie des tests. La théorie d'estimation des paramètres et celle des tests sont présentées ici dans le cadre d'une théorie moderne plus générale, notamment celle de la décision. Une place importante est réservée à la théorie des échantillons issus d'une population normale à un nombre > 2 de dimensions. L'auteur utilise l'intégrale de SIEGEL pour traiter cette question. Les divers modes de convergence stochastique sont traités avec soin dans cet ouvrage qui s'adresse aussi bien aux mathématiciens et aux ingénieurs qu'aux étudiants du second et du troisième cycle. On trouve, à la fin de ce livre, les tables indispensables, une bibliographie sommaire et un index des termes utilisés.

S. PICCARD

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 24

Heft 5

Seiten 97–120

10. September 1969

Konjugierte Durchmesser und extremale Vierecke konvexer Bereiche

§ 1. Definitionen und Einführung

Ein konvexer Bereich B sei eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge in der Ebene. Eine Sehne von B , d. h. ein Schnitt einer Geraden mit B , heisst Durchmesser, wenn es keine parallele Sehne von B grösserer Länge gibt. Eine Gerade g heisst Stützgerade von B , wenn sie B trifft und wenn B in einer der beiden durch g bestimmten abgeschlossenen Halbebenen liegt. Zwei nicht parallele Durchmesser heissen konjugiert, wenn es in den Endpunkten des einen Stützgeraden gibt, die parallel zum anderen sind und umgekehrt. Hierbei handelt es sich offenbar um eine Verallgemeinerung der konjugierten Durchmesser einer Ellipse. Doch gilt nun i. allg. nicht, dass einem Durchmesser genau ein konjugierter Durchmesser zugeordnet ist. Ein Viereck heisst dem Bereich B einbeschrieben oder Inviereck, wenn seine Ecken auf dem Rande ∂B von B liegen, es heisst umbeschrieben oder Umviereck, wenn seine Seiten Stützgeraden sind. Dabei verstehen wir unter einem Viereck stets ein konvexes Viereck, lassen aber zu, dass es zu einem Dreieck entartet. Diese Begriffe und alle folgenden Überlegungen gehören zur affinen Geometrie. Wir benutzen lediglich ein Inhaltsmass als Hilfsmittel.

Die Existenz eines Paares konjugierter Durchmesser ist verschiedentlich als Beweismittel benutzt worden. LAUGWITZ [5] zeigt, dass ein konvexer Bereich mit Mittelpunkt mindestens zwei verschiedene Paare konjugierter Durchmesser besitzt. Dieser Beweis benutzt die von RADON [9] angegebene Parameterdarstellung des Randes. Nach FUNK [3] findet man konjugierte Durchmesser, wenn man ein kleinstes (d. h. flächenkleinstes) Umparallelogramm, nach BLASCHKE [1], wenn man ein grösstes Inviereck aufsucht.

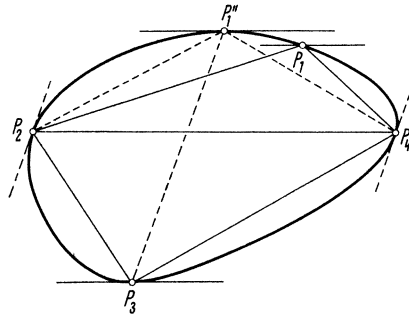
Wir zeigen, dass man so für jeden konvexen Bereich B zwei verschiedene Paare konjugierter Durchmesser findet. Hieran schliessen sich einige weitere Überlegungen an.

§ 2. Existenz zweier Paare konjugierter Durchmesser

1. Durch einige einfache Kompaktheitsschlüsse beweist man, dass es ein grösstes Inviereck und ein kleinstes Umparallelogramm des konvexen Bereiches B gibt.

Behauptung 1: Die Diagonalen eines grössten Invierecks sind konjugierte Durchmesser.

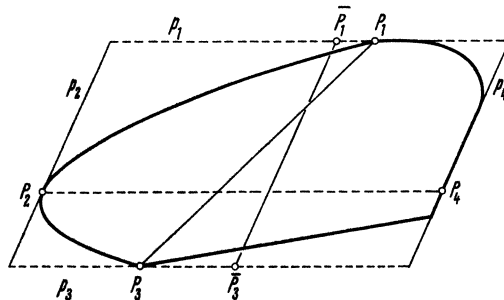
$P_1P_2P_3P_4$ sei ein grösstes Inviereck. Die Diagonalen P_1P_3 und P_2P_4 sind Durchmesser. Denn wäre etwa P_1P_3 nicht Durchmesser, gäbe es also eine parallele Sehne $P'_1P'_3$ grösserer Länge, dann hätte das Inviereck $P'_1P'_2P'_3P_4$ grösseren Inhalt. Die Durchmesser P_1P_3 und P_2P_4 sind konjugiert. Denn gäbe es etwa in P_1 keine Stützgerade parallel zu P_2P_4 , dann gäbe es einen Randpunkt P''_1 , so dass $P''_1P_2P_3P_4$ grösseren Inhalt hätte. Damit ist Behauptung 1 bewiesen.



Figur 1

Behauptung 2: Auf jeder Seite p_i ($i = 1, \dots, 4$) eines kleinsten Umparallelogramms gibt es einen Punkt P_i von ∂B , so dass die Strecken P_1P_3 und P_2P_4 konjugierte Durchmesser sind.

Für $P_i \in p_i$ sind P_1P_3 und P_2P_4 stets Durchmesser. Ist nun bei jeder Wahl der Randpunkte P_1 auf p_1 und P_3 auf p_3 der Durchmesser P_1P_3 niemals parallel zu p_2 (und p_4), so gibt es Punkte \bar{P}_1 und \bar{P}_3 auf p_1 bzw. p_3 , aber nicht auf ∂B derart, dass die Strecke $\bar{P}_1\bar{P}_3$ parallel zu p_2 ist und die Punkte P_1 und P_3 trennt. Dann kann man p_1 und p_3 um \bar{P}_1 und \bar{P}_3 drehen, so dass diese Seiten parallel bleiben, aber keinen Punkt von B mehr enthalten. Dabei bleibt der Flächeninhalt ungeändert, doch berühren nun zwei Seiten des Parallelogramms B nicht mehr, so dass es also ein kleineres Umparallelogramm gibt. Das ist ausgeschlossen, und Behauptung 2 ist bewiesen.



Figur 2

Behauptung 3: *Die beiden so erhaltenen Paare konjugierter Durchmesser sind verschieden oder es gibt unendlich viele Paare.*

Jedem Durchmesser d von B ordnen wir ein grösstes Inviereck $V(d)$ zu, das d als Diagonale hat. Dann gibt es Stützgeraden durch die 4 Ecken von $V(d)$, die ein Umparallelogramm $W(d)$ bestimmen, welches dann notwendig den doppelten Inhalt wie $V(d)$ hat. Ist nun $V(d_0)$ ein absolut grösstes Inviereck, so gibt es entweder

- a) Vierecke $V(d)$ mit kleinerem Inhalt oder
- b) alle Vierecke $V(d)$ haben gleichen Inhalt.

Im Fall a) ist $W(d_0)$ kein kleinstes Umparallelogramm, so dass die in Behauptung 1 und 2 erhaltenen Paare konjugierter Durchmesser verschieden sind. Im Fall b) ist $W(d_0)$ ein kleinstes Umparallelogramm, und es gibt unendlich viele Paare konjugierter Durchmesser.

Im Fall a) gilt sogar, dass kein Durchmesser des einen Paares parallel zu einem Durchmesser des anderen Paares ist. Denn sind zwei Durchmesser parallel, so sind sie gleich lang und zugehörige Umparallelogramme haben gleichen Inhalt. Es gilt also:

Satz 1: *Jeder konvexe Bereich B besitzt mindestens 2 Paare konjugierter Durchmesser, die alle verschiedene Richtung haben.*

2. Wir hätten auch die eben benutzte Schar $V(d)$ von Invierecken benutzen können, um 2 Paare konjugierter Durchmesser zu erhalten. Ein grösstes und ein kleinstes Viereck dieser Schar liefert jeweils ein Paar konjugierter Durchmesser.

Dies lässt sich besonders einfach zeigen, wenn man voraussetzt, dass ∂B überall eine Tangente besitzt und keine Strecken enthält. Die 4 Ecken von $V(d)$ sind dann eindeutig bestimmt und lassen sich als differenzierbare Funktionen $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, darstellen, wobei d die Verbindung der Ecken \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_3 sei. Der Inhalt $F(t)$ lässt sich durch die Determinante

$$2 F = [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4]$$

berechnen. Für die Extremwerte von $F(t)$ gilt

$$2 \dot{F} = [\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_3, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4] + [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3, \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_4] = 0.$$

Nach Konstruktion von $V(d)$ verschwindet die erste Determinante. Da die Parameterdarstellung so gewählt werden kann, dass $\dot{\mathbf{x}}_1 \neq 0$ ist, und da $\dot{\mathbf{x}}_1$ und $\dot{\mathbf{x}}_3$ entgegengesetzt gerichtet sind, ist $\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_3 \neq 0$, und folglich sind $\dot{\mathbf{x}}_1$ und $\dot{\mathbf{x}}_3$ parallel zu $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4$. D.h.: die Diagonalen sind konjugierte Durchmesser. Da eine stetige auf einer kompakten Menge definierte Funktion Maximum und Minimum annimmt, erhält man so 2 Paare konjugierter Durchmesser.

Die oben unterschiedenen Fälle a) und b) sind hier durch $\dot{F} \neq 0$ und $\dot{F} \equiv 0$ gekennzeichnet.

§ 3. Beispiele

Die Bereiche, für die in § 2 der Fall b) eintritt, besitzen zu jedem Durchmesser einen konjugierten. Sie sind auch dadurch gekennzeichnet, dass ein kleinstes Umparallelogramm doppelt so grossen Inhalt hat wie ein grösstes Inviereck. Die Randkurven solcher Bereiche nennen wir nach BLASCHKE [1] P -Kurven. Die P -Kurven

mit Mittelpunkt (Symmetriezentrum) werden dort R -Kurven genannt. Sie sind als *Radonsche Kurven* in der Literatur bekannt (nach RADON [9]).

Die einfachsten Beispiele für P - und R -Kurven liefern affin-reguläre m -Ecke, und zwar sind die $(2n + 1)$ -Ecke P -Kurven ohne Mittelpunkt und die $(4n + 2)$ -Ecke R -Kurven ($n = 1, 2, \dots$). Dies erkennt man leicht durch einige Winkelberechnungen an den euklidisch-regulären m -Ecken.

Weitere Beispiele für P -Kurven sind die *Gleichdicke* (Orbiformen). Das folgt aus der bekannten Tatsache, dass deren Normalen Doppelnormalen sind.

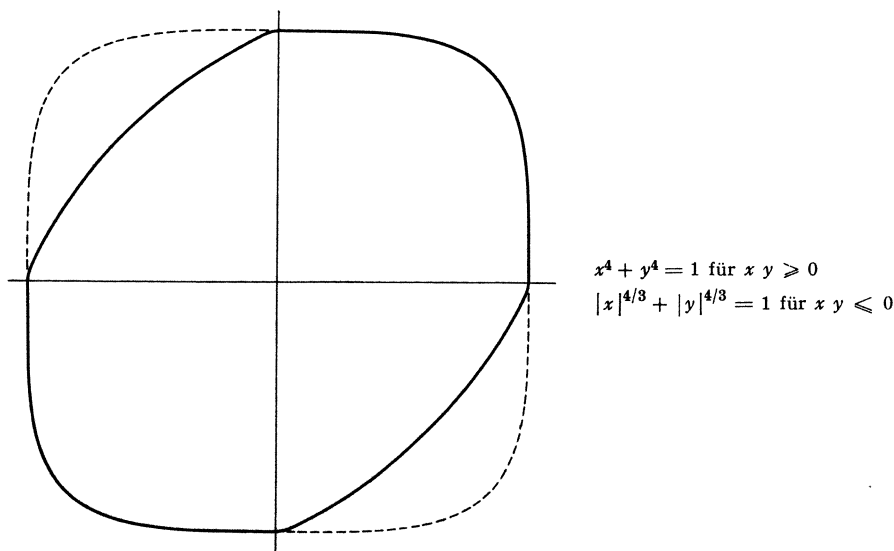
Betrachten wir die Bereiche, die in cartesischen Koordinaten durch

$$|x|^p + |y|^p \leq 1, \quad p \geq 1, \text{ reell,} \quad (1)$$

gegeben sind. Für $p = 1$ erhalten wir die Parallelelogramme, die nur zwei wesentlich verschiedene Paare konjugierter Durchmesser besitzen. Für $p > 1$, $p \neq 2$ existieren genau zwei Paare. Der Fall $p = 2$, d. h. der Fall der Ellipsen, ist unter den folgenden Bereichen enthalten:

$$\begin{cases} |x|^p + |y|^p \leq 1 & \text{für } xy \geq 0 \\ |x|^q + |y|^q \leq 1 & \text{für } xy \leq 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ p > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Die Ränder dieser Bereiche sind R -Kurven, einschliesslich des Grenzfalles $p = 1$, $q = \infty$, der das affin-reguläre Sechseck angibt. Dass durch (2) R -Kurven gegeben sind, folgt aus der von RADON [9] angegebenen Erzeugung der R -Kurven mittels einer Polarität aus einem «Viertelbogen» (siehe auch BLASCHKE [1] und LENZ [7]) und aus der Polarität der in (2) angegebenen Viertelbögen (siehe SALMON [11], Artikel 91). Dann sieht man auch leicht, dass die Bereiche (1) nur zwei Paare konjugierter Durchmesser besitzen.

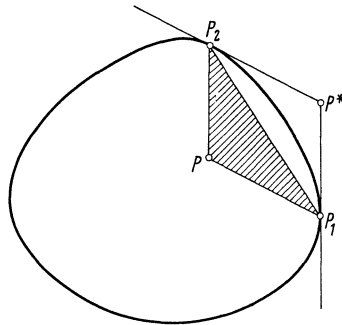


Figur 3

§ 4. Ergänzungen und Anwendungen

1. *Stützparallelogramme.* Ist P ein innerer Punkt des konvexen Bereiches B , so können wir die folgende Schar φ von Dreiecken betrachten: Zu allen Randpunkten P_1 werden die Dreiecke mit der Basis PP_1 gebildet, die in B und links von PP_1 liegen und grösstmöglichen Inhalt haben. Der Inhalt $\alpha(P_1)$ ist eine stetige Funktion von P_1 , und es gibt daher Dreiecke in φ , für die α maximal bzw. minimal ist.

STEIN [12] und LAUGWITZ [6] haben «*Stützparallelogramme*» relativ zu P betrachtet und gezeigt, dass es stets zwei verschiedene gibt. Ein Parallelogramm $PP_1P^*P_2$ heisst Stützparallelogramm zu P , wenn $P_1, P_2 \in \partial B$ und die Seiten P_1P^*, P^*P_2 auf Stützgeraden liegen.



Figur 4

Behauptung 4: *Es gibt ein kleinstes und ein grösstes Dreieck in φ , die sich zu Stützparallelogrammen ergänzen lassen.*

Hieraus folgt dann der Satz von STEIN und LAUGWITZ. Wir skizzieren den Beweis. Zunächst ist klar, dass es für jedes Dreieck aus φ eine Stützgerade in P_2 gibt, die parallel zu PP_1 ist. Zu zeigen bleibt also, dass es ein kleinstes und ein grösstes Dreieck in φ gibt, so dass in P_1 jeweils eine zu PP_2 parallele Stützgerade existiert. Die absolut grössten Dreiecke mit der Ecke P , die in B liegen, gehören zu φ . Da für sie die gewünschte Eigenschaft vorhanden ist, brauchen nur noch die kleinsten Dreiecke aus φ betrachtet zu werden. Sei PP_1P_2 ein kleinstes Dreieck aus φ und nehmen wir an, dass es in P_1 keine zu PP_2 parallele Stützgerade gibt und dass das für alle anderen (möglicherweise vorhandenen) Dreiecke aus φ mit der Basis PP_1 gilt. Bewegt man nun den Punkt P_1 auf ∂B nicht zu weit in Richtung des Schnittpunktes der Geraden PP_2 mit den Stützgeraden in P_1 , so verkleinert sich der Dreiecksinhalt α echt, wie man nach einigen einfachen Schlüssen erkennt. Damit ist dann Behauptung 4 bewiesen.

Der Kreis, in dem P nicht Mittelpunkt ist, zeigt, dass es genau 2 Stützparallelogramme geben kann. Ist P Schnittpunkt konjugierter Durchmesser, so gibt es offenbar 4 Stützparallelogramme.

Stützparallelogramme und allgemeiner Stützparallelepiped wurden von TAYLOR [13] in der Minkowski-Geometrie betrachtet. Sie liefern orthogonale Basen. Auch die Funktion α spielt in der Minkowski-Geometrie eine gewisse Rolle, vgl. PETTY [8].

2. *Eine Kennzeichnung der Radonschen Kurven.* Sei V_1 ein grösstes Inviereck, W_1 ein kleinstes Umparallelogramm und W_2 ein kleinstes Umviereck, die Inhalte seien mit $|V_1|$ usw. bezeichnet. Die Kennzeichnung der P -Kurven, die sich oben ergeben

hat, kann man nach LENZ [7] auch in der folgenden Form angeben:

$$2 |V_1| \geq |W_1|; \text{ Gleichheit genau für } P\text{-Kurven.}$$

Für R -Kurven gilt, wie LENZ vermutet hat, eine entsprechende Kennzeichnung:

$$2 |V_1| \geq |W_2|; \text{ Gleichheit genau für } R\text{-Kurven.} \quad (3)$$

LENZ hat gezeigt, dass Gleichheit höchstens für Mittelpunkts- P -Kurven, also für R -Kurven eintreten kann, wobei er allerdings Eckenfreiheit voraussetzt. Gleichheit tritt für alle R -Linien ein, wenn die kleinsten Umparallelogramme zugleich kleinste Umvierecke sind. Dies ist in der Tat der Fall. Denn DOWKER [2] hat gezeigt, dass unter den kleinsten umschriebenen $2n$ -Ecken eines konvexen Mittelpunktsbereiches stets eins mit demselben Mittelpunkt ist. (Hierzu auch PETTY [8], S. 276, und Nr. 3 dieses Paragraphen.) Weitere Ungleichungen zwischen $|V_1|$, $|W_1|$, $|W_2|$ und $|B|$ findet man bei LENZ [7].

3. Dualität. In den Überlegungen der §§ 2, 3 zeigt sich eine gewisse Dualität zwischen grössten Invierecken und kleinsten Umparallelogrammen. Nun lässt sich zwar der Inhaltsbegriff i. allg. keinem Dualitätsprinzip einordnen. Wir werden jedoch zeigen, dass für konvexe Bereiche mit Mittelpunkt M eine vollkommene Dualität zwischen grössten In- und kleinsten Umparallelogrammen besteht. Die Einschränkung auf Parallelogramme ist hier unwesentlich, weil es nach der schon genannten Arbeit von DOWKER [2] unter den kleinsten Umvierecken ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt M gibt und unter den grössten Invierecken ebenfalls. Das erste folgt auch mittels Behauptung 5 aus dem zweiten, das zweite ist direkt einfach einzusehen. Denn von einem grössten Inviereck ausgehend, dessen Diagonalen nach § 2 konjugierte Durchmesser sind, findet man ein gleichgrosses Inviereck, dessen Diagonalen durch M gehen und das daher selbst den Mittelpunkt M hat.

Die Dualität wird durch Polarität an einer Ellipse mit Mittelpunkt M vermittelt, die wie üblich Punkte in Geraden und Geraden in Punkte überführt. Der Rand ∂B als Punkt- bzw. Stützgeradenmenge wird dann in eine Stützgeraden- bzw. Punktmenge übergeführt, die wieder einen konvexen Bereich B^* begrenzt. Parallele Geraden werden in Punkte einer Geraden durch M abgebildet und umgekehrt. Daraus folgt: Ein Umparallelogramm von B mit zugehörigen konjugierten Durchmessern durch M wird in ein Inparallelogramm von B^* mit konjugierten Durchmessern durch M abgebildet und umgekehrt.

Behauptung 5: *Ein kleinstes Umparallelogramm eines konvexen Bereiches B mit Mittelpunkt M wird durch eine Polarität bezüglich M in ein grösstes Inparallelogramm von B^* abgebildet und umgekehrt.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass für ein Parallelogramm V mit Mittelpunkt M und sein polares Parallelogramm V^* stets $|V| |V^*| = 8$ gilt, wenn die Ellipse, die die Polarität bestimmt, den Inhalt π hat. Denn man überlegt sich leicht, dass dann $|V| |V^*|$ stets denselben Wert hat. Die Zahl 8 ergibt sich etwa als Produkt der Inhalte von In- und Umquadrat des Einheitskreises. Ist nun V_1 ein grösstes Inparallelogramm von B und V_2^* ein kleinstes Umparallelogramm von B^* , so gilt für $V_2^{**} = V_2$

$$|V_2| \leq |V_1|, \quad |V_2^*| \leq |V_1^*|$$

und

$$8 = |V_2| |V_2^*| \leq |V_1| |V_2^*| \leq |V_1| |V_1^*| = 8,$$

also

$$|V_2| = |V_1|, \quad |V_2^*| = |V_1^*|,$$

was zu zeigen war.

4. *Anwendungen.* Die in der Einleitung erwähnten Arbeiten von FUNK [3] und LAUGWITZ [5] benutzen konjugierte Durchmesser, um Aufgaben der Finsler- bzw. Minkowski-Geometrie zu lösen. Oben haben wir schon das Auftreten der Funktion α in der Minkowski-Geometrie erwähnt. RADON [10] benutzt konjugierte Durchmesser, um eine gegebene konvexe Kurve in einem Koordinatensystem einfach darzustellen. Damit wird eine Aufgabe aus der zentralaffinen Differentialgeometrie gelöst (hierzu auch HEIL [4]).

5. *Weiterführungen.* Unsere Untersuchungen lassen sich in verschiedenen Richtungen weiterführen. So legt das grösste einbeschriebene Viereck auch bei beliebigen Jordankurven konjugierte Durchmesser fest. Im Raum kann man an Stelle der Vierecke Oktaeder und Parallelepipede betrachten. Das folgende Ergebnis, auf das wir später zurückzukommen hoffen, steht in engem Zusammenhang mit den bekannten Sätzen von BLASCHKE über Flächen mit ebenen Selbstschattengrenzen und Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität (siehe z. B. BLASCHKE [1]):

Sei B eine beschränkte, abgeschlossene konvexe Menge mit Mittelpunkt. Liegen die Ecken eines grössten B einbeschriebenen Oktaeders auf den Seitenflächen eines kleinsten B umschriebenen Parallelepipeds, dann ist B ein Ellipsoid.

E. HEIL und W. KRAUTWALD, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. BLASCHKE, *Zur Affingeometrie der Eilinen und Eiflächen*, Math. Nachrichten 15, 258–264 (1956).
- [2] C. H. DOWKER, *On Minimum Circumscribed Polygons*, Bull. Amer. Math. Soc. 50, 120–122 (1944).
- [3] P. FUNK, *Über den Begriff extremale Krümmung und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse*, Math. Zschr. 3, 87–92 (1919).
- [4] E. HEIL, *Abschätzungen für einige Affininvarianten konvexer Kurven*, Monatsh. Math. 71, 405–423 (1967).
- [5] D. LAUGWITZ, *Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume*, Math. Zschr. 61, 235–244 (1954).
- [6] D. LAUGWITZ, *Eine Bemerkung über konvexe Kurven*, Math. Zschr. 70, 463–464 (1959).
- [7] H. LENZ, *Die Eilinen mit einer Schar konjugierter Durchmesser*, Arch. Math. 9, 134–139 (1958).
- [8] C. M. PETTY, *On the Geometry of the Minkowski Plane*, Riv. Mat. Univ. Parma 6, 269–292 (1955).
- [9] J. RADON, *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Ber. Verh. Königl. Sächs. Ges. Wiss., Math.-Phys. Kl. 68, 123–128 (1916).
- [10] J. RADON, *Lösung einer von S. Golab gestellten Aufgabe*, Jahresb. DMV 44, 22 (1934).
- [11] G. SALMON, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 2. Aufl., Leipzig 1882.
- [12] S. K. STEIN, *A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve*, Math. Zschr. 68, 282–283 (1957). Addendum: Math. Zschr. 70, 465 (1959).
- [13] A. E. TAYLOR, *A Geometric Theorem and its Applications to Biorthogonal Systems*, Bull. Amer. Math. Soc. 53, 614–616 (1947).

Diagonalen im regulären n -Eck

Zeichnet man in einem konvexen n -Eck alle möglichen Diagonalen, so kann man nach den Anzahlen der entstehenden Teilflächen $F(n)$, der Seitenlinien $K(n)$ und der Eckpunkte $E(n)$ fragen (vgl. [1, 2]). Es soll dabei berücksichtigt werden, dass sich mehr als zwei Diagonalen in nur einem Punkt schneiden können.

Bedeutet $E_\nu(n)$ die Anzahl der Punkte, in denen sich genau ν Diagonalen schneiden, so folgt

$$E(n) = n + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} E_\nu(n). \quad (1)$$

Mit $F_\nu(n)$ als der Anzahl von ν -Ecken ergibt sich auf zwei Arten die Summe aller Ecken der Teilvielecke

$$\sum_{\nu=3}^n \nu F_\nu(n) = n(n-2) + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} 2\nu E_\nu(n). \quad (2)$$

Die Winkelsumme aller Teile berechnet sich ebenfalls auf zwei Arten zu

$$\pi \sum_{\nu=3}^n (\nu-2) F_\nu(n) = (n-2)\pi + 2\pi \sum_{\nu=2}^{[n/2]} E_\nu(n). \quad (3)$$

Mit (2) und (3) folgt

$$F(n) = \sum_{\nu=3}^n F_\nu(n) = \binom{n-1}{2} + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} (\nu-1) E_\nu(n). \quad (4)$$

Für $K(n)$ gilt

$$2K(n) = n + \sum_{\nu=3}^n \nu F_\nu(n), \quad (5)$$

mit (2) also

$$K(n) = \binom{n}{2} + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} \nu E_\nu(n). \quad (6)$$

Im weiteren sollen nur reguläre n -Ecke betrachtet werden. Ist n eine Primzahl bzw. eine ungerade Zahl, so wird in [3] bzw. [4] gezeigt, dass ausser den Eckpunkten keine Schnittpunkte von drei oder mehr Diagonalen auftreten. Da zu je vier der n Eckpunkte genau ein Diagonalschnittpunkt gehört und umgekehrt, und da man aus n Ecken auf $\binom{n}{4}$ verschiedene Arten vier auswählen kann, folgt für reguläre n -Ecke mit $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$E(n) = n + \binom{n}{4}; \quad F(n) = \binom{n-1}{2} + \binom{n}{4}; \quad K(n) = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}. \quad (7)$$

Ist $n \equiv 0 \pmod{2}$, so werden die Anzahlen für $n \geq 6$ kleiner; dann gilt nämlich wegen des Mittelpunktes

$$E_{n/2}(n) = 1, \quad (8)$$

und, da sich die $n/2$ Diagonalen in $\binom{n/2}{2}$ Punkten schneiden könnten, folgt

$$E_2(n) \leq \binom{n}{4} - \frac{n(n-2)}{8}. \quad (9)$$

Für gerades n mit $(n, 3) = 1$ soll nun die Anzahl von Diagonalschnittpunkten exakt bestimmt werden.

Die Lösungen von $w^n - 1 = 0$ in der komplexen Zahlenebene seien die Eckpunkte des regulären n -Ecks. Jede primitive n -te Einheitswurzel erzeugt alle übrigen durch Potenzieren. Seien a, b, c, d, g, h ganze Zahlen modulo n und $z = \exp(2\pi i/n)$, so sind drei beliebige Diagonalen durch

$$\begin{aligned} (a, b): \quad w &= u + i v = z^a + t_1 (z^b - z^a), \\ (c, d): \quad w &= u + i v = z^c + t_2 (z^d - z^c), \\ (g, h): \quad w &= u + i v = z^g + t_3 (z^h - z^g) \end{aligned} \quad (10)$$

dargestellt. Durch Addition und Subtraktion des konjugiert Komplexen lassen sich die reellen Parameter t_1, t_2, t_3 eliminieren. Als notwendige und hinreichende Bedingung für einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Diagonalen ergibt sich dann

$$\frac{2(z^b - z^a)(z^d - z^c)(z^h - z^g)}{z^{a+b} z^{c+d} z^{g+h}} \begin{vmatrix} 1 & z^{a+b} & z^a + z^b \\ 1 & z^{c+d} & z^c + z^d \\ 1 & z^{g+h} & z^g + z^h \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Wegen $a \neq b, c \neq d, g \neq h$ muss die Determinante $D(z)$ verschwinden. Wird o. E. d. A. $g = 0$ gesetzt, so muss mit $D(z) = z^h A(z)$ gelten

$$A(z) = (1 - z^c)(1 - z^d)(1 - z^{a+b-h}) - (1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^{c+d-h}) = 0. \quad (12)$$

Da $(n, 3) = 1$, ist z^3 primitive n -te Einheitswurzel und daher muss auch $A(z^3) = 0$ erfüllt sein. Aus

$$\begin{aligned} A(z^3) &= (1 + z^c + z^{2c})(1 + z^d + z^{2d})(1 + z^{a+b-h} + z^{2(a+b-h)}) A(z) \\ &= (1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^{c+d-h}) B(z) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

folgt

$$\begin{aligned} B(z) &= (1 + z^c + z^{2c})(1 + z^d + z^{2d})(1 + z^{a+b-h} + z^{2(a+b-h)}) \\ &\quad - (1 + z^a + z^{2a})(1 + z^b + z^{2b})(1 + z^{c+d-h} + z^{2(c+d-h)}) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

weil für $a = 0$ oder $b = 0$ der Schnittpunkt Eckpunkt ist, und für $c + d = h$ die Diagonalen (c, d) und $(0, h)$ parallel sind, sich also nicht schneiden. Es folgt

$$\begin{aligned} 2B(z) + A^2(z) + 2(1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^{c+d-h}) A(z) \\ + 3(z^a + z^b + z^{c+d-h} + z^c + z^d + z^{a+b-h}) A(z) = 3C_1(z)C_2(z) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

mit

$$C_1(z) = z^{c+d} + (z^c + z^d)z^{a+b-h} - z^{a+b} - (z^a + z^b)z^{c+d-h}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_2(z) &= z^c + z^d + z^{a+b-h}(1 + z^c + z^d) + z^a + z^b + z^{c+d-h}(1 + z^a + z^b) \\ &\quad + z^{c+d} + z^{a+b}. \end{aligned} \quad (17)$$

Wenn $C_1(z) = 0$, dann muss auch

$$C_1(z) (1 + z^h) - z^h A(z) = -z^{-h} M_1(z) = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_1(z) &= (z^a + z^b) (z^{2h} + z^{c+d}) - (z^c + z^d) (z^{2h} + z^{a+b}) \\ &= (z^b - z^c) (z^{2h} - z^{a+d}) - (z^d - z^a) (z^{2h} - z^{b+c}) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

und wegen $(n, 3) = 1$

$$\begin{aligned} M_1(z^3) - (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{4h} + z^{2(c+d)} - z^{c+d+2h}) M_1(z) \\ = (z^c + z^d) (z^{2h} + z^{a+b}) N_1(z) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} N_1(z) &= (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{4h} + z^{2(c+d)} - z^{c+d+2h}) \\ &\quad - (z^{2c} + z^{2d} - z^{c+d}) (z^{4h} + z^{2(a+b)} - z^{a+b+2h}) \end{aligned} \quad (21)$$

erfüllt sein. $z^c + z^d = 0$ und $M_1(z) = 0$ haben $c = d + (n/2)$ und $a = b + (n/2)$, also den Mittelpunkt des n -Ecks, oder $c = d + (n/2)$ und $2h + (n/2) = c + d$, also $h = d$ bzw. $h = c$ und damit einen Eckpunkt, als Schnittpunkt zur Folge. Entsprechend folgt aus $z^{2h} + z^{a+b} = 0$ und $M_1(z) = 0$ ein Eckpunkt ($h = b$ bzw. $h = a$) oder zwei parallele Diagonalen ($a + b = c + d$). Der dritte Faktor in (20) $N_1(z) = 0$ ergibt nun auch

$$\begin{aligned} 2 N_1(z) + M_1^2(z) + 2 (z^c + z^d) (z^{2h} + z^{a+b}) M_1(z) - 3 (z^b + z^c) (z^{2h} + z^{a+d}) M_1(z) \\ = 3 (z^d - z^a) (z^{2h} - z^{b+c}) P_1(z) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

mit

$$P_1(z) = (z^b + z^c) (z^{2h} + z^{a+d}) - (z^d + z^a) (z^{2h} + z^{b+c}). \quad (23)$$

In (22) bedeutet $z^d - z^a = 0$ wiederum einen Eckpunkt ($a = d$). Aus $z^{2h} - z^{b+c} = 0$ und $M_1(z) = 0$ folgt entweder $b = c$ (Eckpunkt) oder $2h = a + d = b + c$. Die letzten beiden Beziehungen in $A(z) = 0$ eingesetzt ergibt (vgl. (12))

$$A(z) = z^{-(h+c+d)} (z^h - z^c) (z^h - z^d) (z^{c+d} - z^{2h}) (1 + z^h) = 0. \quad (24)$$

Die ersten drei Differenzen bedingen Eckpunkte ($h = c$, $h = d$, $b = d$) und aus $1 + z^h = 0$ folgt $h = n/2$, so dass in diesem Fall Schnittpunkte von drei Diagonalen vorliegen:

$$g = 0; \quad h = n/2; \quad a = -d; \quad b = -c. \quad (25)$$

Mit $P_1(z) = 0$ aus (22) wird schliesslich noch

$$P_1(z) + M_1(z) = -2 (z^d - z^b) (z^{2h} - z^{a+c}) = 0. \quad (26)$$

Diese Differenzen entsprechen denjenigen in (22), wenn man bedenkt, dass $A(z)$ in a und b symmetrisch ist.

Aus $C_2(z) = 0$ wird nun in analoger Weise gefolgert:

$$(z^{a+b} - z^{c+d}) C_2(z) + (z^{a+b} + z^{c+d}) A(z) = 2 z^{-h} M_2(z) = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} M_2(z) &= (z^a + z^b) (z^{a+b+h} - z^{2(c+d)}) - (z^c + z^d) (z^{c+d+h} - z^{2(a+b)}) \\ &= (z^h + z^{b+c}) (z^{2a+b} - z^{c+2d}) - (z^h + z^{a+d}) (z^{2c+d} - z^{a+2b}) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M_2(z^3) &- (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{2(a+b+h)} + z^{4(c+d)} + z^{a+b+2(c+d)+h}) M_2(z) \\ &= (z^c + z^d) (z^{c+d+h} - z^{2(a+b)}) N_2(z) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} N_2(z) &= (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{2(a+b+h)} + z^{4(c+d)} + z^{a+b+2(c+d)+h}) \\ &- (z^{2c} + z^{2d} - z^{c+d}) (z^{2(c+d+h)} + z^{4(a+b)} + z^{2(a+b)+c+d+h}). \end{aligned} \quad (30)$$

In (29) ergibt $z^c + z^d = 0$ mit $M_2(z) = 0$ entweder den Mittelpunkt ($c = d + (n/2)$, $a = b + (n/2)$) oder $c = d + (n/2)$ und $a + b + h = 2(c + d)$, woraus durch Einsetzen in (12)

$$A(z) = (z^{2d-h} - z^a) (z^{2d-a} - 1) (z^{2d-h} + 1) = 0 \quad (31)$$

folgt. In (31) ergeben sich aus den ersten beiden Faktoren mit $a - d = d - h$, $d - b = -d$, $c = d + (n/2)$ bzw. $d - a = -d$, $b - d = d - h$, $c = d + (n/2)$ zwei Fälle von Schnittpunkten, die sich durch Umbenennung der Diagonalen (a, b) , (b, c) , $(0, h)$ in $(c' - a', d' - a')$, $(h' - a', -a')$, $(0, b' - a')$ bzw. in $(d' - a', c' - a')$, $(h' - a', -a')$, $(0, b' - a')$ als in (25) enthalten erweisen. Ist der dritte Faktor in (31) Null, so sind wegen $a + b = 2(c + d) - h = 4d - h = h$ die Diagonalen (a, b) und $(0, h)$ parallel.

Aus dem zweiten Faktor von (29) $z^{c+d+h} - z^{2(a+b)} = 0$ und $M_2(z) = 0$ wird durch Vertauschen von (a, b) mit (c, d) der mit (31) diskutierte Fall, oder es folgt $h = 2(a + b) - (c + d) = 2(c + d) - (a + b)$, so dass sich wegen $(n, 3) = 1$ $a + b = c + d$ ergibt (parallele Diagonalen).

Es muss nun nach (29) $N_2(z) = 0$ gelten und damit auch

$$\begin{aligned} 2N_2(z) + M_2^2(z) + 2(z^c + z^d) (z^{c+d+h} - z^{2(a+b)}) M_2(z) \\ - 3(z^h - z^{b+c}) (z^{2a+b} + z^{c+2d}) M_2(z) = 3(z^h + z^{a+d}) (z^{2c+d} - z^{a+2b}) P_2(z) \end{aligned} \quad (32)$$

mit

$$P_2(z) = (z^h - z^{b+c}) (z^{2a+b} + z^{c+2d}) - (z^h - z^{a+d}) (z^{2c+d} + z^{a+2b}). \quad (33)$$

Aus $z^h + z^{a+d} = 0$ und $M_2(z) = 0$ ergibt sich entweder $h = a + d + (n/2)$, $h = b + c + (n/2)$ oder $h = a + d + (n/2)$, $2a + b = c + 2d$. In (12) jeweils eingesetzt ergeben sich die Bedingungen

$$A(z) = z^{-(a+b+h)} (1 + z^h) (z^h - z^{a+b}) = 0, \quad (34)$$

$$A(z) = (z^a - z^d) (1 - z^{c-2a}) (1 + z^{c+d-a}) = 0. \quad (35)$$

Gleichung (34) bedingt einmal $h = n/2$, also mit den anderen Beziehungen Schnittpunkte vom Typ (25), und zum anderen $a + b = h$, d.h. parallele Diagonalen. In (35) bedeutet die erste Differenz einen Eckpunkt ($a = d$), während $1 - z^{c-2a} = 0$ Schnittpunkte von drei Diagonalen zur Folge hat:

$$g = 0; \quad h = a + d + (n/2); \quad c = 2a; \quad b = 2d. \quad (36)$$

Der dritte Faktor von (35) $1 + z^{c+d-a} = 0$ ergibt $c = a - d + (n/2)$. Ersetzt man hierin und in $h = a + d + (n/2)$ und $b = d - a + (n/2)$ die Diagonalen (a, b) , (c, d) und $(0, h)$ durch $(h' - d', -d')$, $(b' - d', a' - d')$ und $(0, c' - d')$, so erkennt man durch Auflösen nach h' , c' und b' , dass Schnittpunkte vom Typ (36) vorliegen.

Aus (32) folgt weiter $z^{2c+d} - z^{a+2b} = 0$ und mit $M_2(z) = 0$ ist entweder $2c + d = a + 2b$, $h = b + c + (n/2)$, was sich durch Vertauschen von (a, b) und (c, d) gleich dem durch (35) betrachteten Fall erweist, oder $2c + d = a + 2b$, $2a + b = c + 2d$. Durch Addition folgt $3(a + b) = 3(c + d)$ und wegen $(n, 3) = 1$ $a + b = c + d$, d. h. (a, b) ist parallel (c, d) .

Zuletzt wird in (32) noch $P_2(z) = 0$ und daher

$$P_2(z) + M_2(z) = -2(z^h + z^{b+d})(z^{2c+d} - z^{b+2a}) = 0. \quad (37)$$

Durch Vertauschen von a und b ergeben sich die gleichen zu diskutierenden Ausdrücke wie in (32).

Setzt man in (36) $h = n/2$, so zeigt sich, dass (25) in (36) enthalten ist. Es gilt somit der

Satz: Ist $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$, so schneiden sich im regulären n -Eck ausser in Eckpunkten und Mittelpunkt höchstens drei Diagonalen in einem Punkt.

Es werden nun zunächst die Dreifachsnittpunkte gezählt, die (25) erfüllen

$$E_3^{(1)}(n) = n \sum_{a=1}^{\lfloor n/4 \rfloor - 1} \sum_{b=a+1}^{(n/2) - a - 1} 1 = n \left[\frac{n-4}{4} \right] \left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n+4}{4} \right] \right). \quad (38)$$

Dabei bedeute $[r]$ die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich r . Die übrigbleibenden Punkte von (36) liegen auf Kreisbögen um z^a mit dem Radius $|z^a - 1|$. Damit kein Punkt doppelt gezählt wird, muss $h = (n/2) + a + d < n/2$ und $d - c = d - 2a > n/2$, also $2a + (n/2) + 1 \leq d \leq n - a - 1$ und $1 \leq a \leq [(n-4)/6]$ gelten; ausserdem müssen noch $[1/2(1 + [(n-4)/6])]$ Punkte abgezogen werden, die für $b - a = 2d - a = n/2$ in (38) schon enthalten sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} E_3^{(2)}(n) &= n \sum_{a=1}^{[(n-4)/6]} \sum_{d=1+2a+(n/2)}^{n-a-1} 1 - n \left[\frac{[(n-4)/6] + 1}{2} \right] \\ &= \frac{n}{2} \left[\frac{n-4}{6} \right] \left(n - 2 - 3 \left[\frac{n+2}{6} \right] \right) - n \left[\frac{[(n+2)/6]}{2} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

und zusammen

$$E_3(n) = E_3^{(1)}(n) + E_3^{(2)}(n). \quad (40)$$

Da drei Geraden sich in drei Punkten schneiden könnten, folgt unter Berücksichtigung von (8) und (9)

$$E_2(n) = \binom{n}{4} - \frac{n(n-2)}{8} - 3 E_3(n). \quad (41)$$

Aus (1), (4), (6) und (40) erhält man nun für $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$

$$E(n) = n + \binom{n}{4} - \frac{(n+2)(n-4)}{8} - 2 E_3(n), \quad (42)$$

$$F(n) = \binom{n-1}{2} + \binom{n}{4} - \frac{(n-2)(n-4)}{8} - E_3(n), \quad (43)$$

$$K(n) = \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{4} - \frac{n(n-4)}{4} - 3 E_3(n) \quad (44)$$

mit

$$E_3(n) = \begin{cases} \frac{1}{48} n(n-2)(5n-38), & \text{wenn } n \equiv \pm 2 \pmod{12}, \\ \frac{1}{48} n(n-4)(5n-28), & \text{wenn } n \equiv \pm 4 \pmod{12}. \end{cases} \quad (45)$$

Ist $n \equiv 0 \pmod{6}$, so sind alle Punkte aus (25) und (36) Schnittpunkte von mindestens drei Diagonalen. Für $n > 6$ treten Schnittpunkte von mehr als drei Diagonalen auf, wie sich zum Beispiel durch Einsetzen von $a = 1$, $b = (2n/3) - 1$, $c = 3$, $d = (5n/6) - 1$ und $h = n/2$ in (12) und Beachten von (25) zeigt. (42), (43) und (44) mit $E_3(n)$ aus (40) stellen also für diese regulären n -Ecke echte obere Schranken dar.

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. GENTILE, *Punti diagonali e poligoni di divisione di un n -gono piano convesso*, Boll. Mat. (4) 1, 71–74 (1940).
- [2] Z. SCHNEIDER und B. STANKOVITSCH, *Über die Anzahl und Anordnung der Diagonalschnitte in einem regelmässigen n -Eck*, El. Math. 14, 6–11 (1959).
- [3] H. T. CROFT and M. FOWLER, *On a Problem of Steinhaus About Polygons*, Proc. Cambridge philos. Soc. 57, 686–688 (1961).
- [4] H. HEINEKEN, *Regelmässige Vielecke und ihre Diagonalen*, L'Enseignement math., II. sér. 8, 275–278 (1962).

Bei der Korrektur: Herr Dr. H. HEINEKEN teilte mir inzwischen mit, daß eine Arbeit von ihm zum gleichen Thema in den Rendiconti Sem. U. Padova erscheinen wird.

Kleine Mitteilungen

Ein einfacher Beweis der Stirlingschen Formel

Die bekannte Stirlingsche Formel, welche $n!$ durch eine geeignete einfache Funktion von n abschätzt, soll hier aus zwei sehr elementaren Hilfssätzen (vgl. [1]) hergeleitet werden.

Hilfssatz 1. Für $x > 0$ gilt $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} e^{1/(x+0,5)} &= 1 + \frac{1}{x+0,5} + \frac{1}{2(x+0,5)^2} + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(x+0,5)^\nu} < 1 + \frac{2(x+0,5)+1}{2(x+0,5)^2} \\ &+ \frac{1}{6(x+0,5)^3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(x+0,5)^j} = 1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{6x^2+7,5x+2,5}{6x^2+7,5x+3+(3/8x)} < 1 + \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$n! e^n n^{-n-0,5} = \gamma_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$

Es folgt

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(n+1) e n^{n+0,5}}{(n+1)^{n+1,5}} = \frac{e}{(1+1/n)^{n+0,5}} < 1. \quad (3)$$

Die γ_n bilden eine streng monoton abnehmende Folge. Daraus ergibt sich

$$\gamma_1 = e > \gamma_2 > \gamma_3 \dots; n! < (n/e)^n \sqrt{n} e \quad \text{für } n = 2, 3, \dots \quad (4)$$

Weil die γ_n alle positiv sind, existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! e^n n^{-n-0,5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma. \quad (5)$$

Jetzt soll γ auch nach unten abgeschätzt werden.

Hilfssatz 2. Für $x > 0$ gilt $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5-(1/4x)} < e$.

Beweis. Wir haben für $x \geq 0,5$ stets $x + 0,5 - (1/4x) > 0$ und

$$1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x+0,5-(1/4x)} + \frac{1}{2(x+0,5-(1/4x))^2} < e^{1/(x+0,5-(1/4x))}, \quad (6)$$

weil

$$2\left(x + 0,5 - \frac{1}{4x}\right)^2 < 2x\left(x + 0,5 - \frac{1}{4x}\right) + x; \quad 1 < 4x. \quad (7)$$

Für $0 < x < 0,5$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5-(1/4x)} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e.$$

Hiernach ergibt sich aus (3)

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/4n}; \quad \gamma_2 = \frac{e^2}{2\sqrt{2}}; \quad \gamma_{n+1} > \frac{e^2}{2\sqrt{2}} \prod_{\nu=2}^n \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-1/4\nu}. \quad (8)$$

Führen wir die Bezeichnung

$$\prod_{\nu=2}^n \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{1/\nu} = P_n \quad (9)$$

ein, dann wird

$$\log P_n = \sum_{\nu=2}^n \frac{1}{\nu} \log \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) < \sum_{\nu=2}^n \frac{1}{\nu^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \frac{3}{4}. \quad (10)$$

Nach (8), (9) und (10) ist

$$\gamma_{n+1} > \frac{e^2}{2\sqrt{2}} e^{-3/16} = \frac{e^{29/16}}{2\sqrt{2}} > 2,12. \quad (11)$$

Damit ist die in (5) definierte Konstante γ abgeschätzt:

$$2,12 < \frac{e^{29/16}}{2\sqrt{2}} \leq \gamma < e < 2,72. \quad (12)$$

$n!$ besitzt die Größenordnung $e^{-n} n^{n+0,5}$.

Der wahre Wert von γ beträgt bekanntlich $\sqrt{2\pi} \approx 2,5066$. Durch etwas grösseren Rechenaufwand lässt sich γ elementar genauer als in (12) bestimmen.

H.-J. KANOLD, TU Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H.-J. KANOLD, *Einige neuere Abschätzungen bei Stirlingschen Zahlen, 2. Art.*, Erscheint in J. reine u. angew. Math.

Die Wallaceschen Geraden und die Feuerbachschen Kreise in einem Sehnenviereck

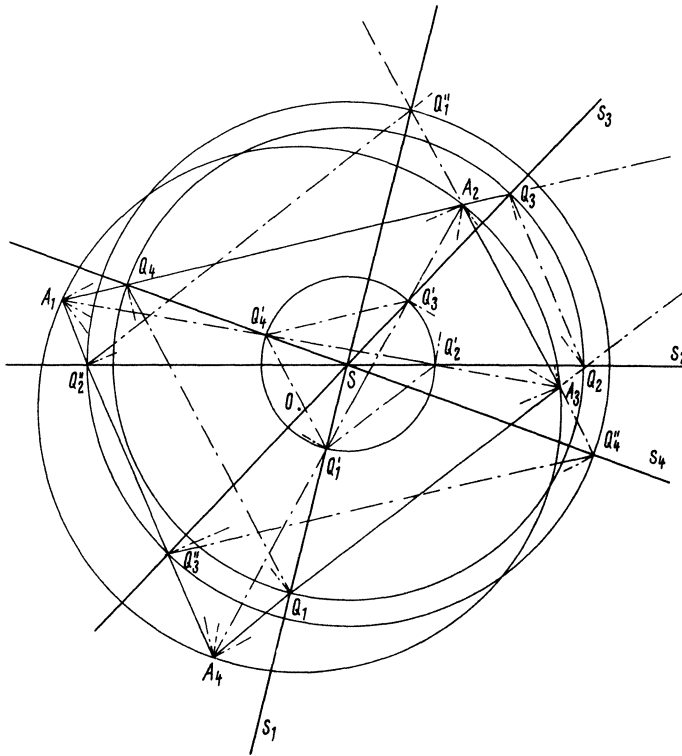
Die Punkte $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ in der natürlichen Anordnung seien die Eckpunkte, α_i die Innenwinkel eines Sehnenvierecks. Es seien weiter Q_i, Q'_i die Fußpunkte der Senkrechten, die vom Eckpunkt A_i auf die Seiten gefällt sind, die nicht durch den Eckpunkt A_i gehen. Q''_i seien die Fußpunkte der Senkrechten, die aus dem Eckpunkt A_i auf die Diagonale gefällt sind, die nicht durch diesen Eckpunkt geht. Die Punkte Q_i, Q'_i, Q''_i liegen, wie bekannt ist, auf der Wallaceschen Geraden s_i , die dem Eckpunkt A_i in bezug auf das Dreieck, das durch die drei übrigen Eckpunkte gebildet ist, zugehört. Dann gilt:

Satz 1. Die Wallaceschen Geraden $s_i (i = 1, 2, 3, 4)$ schneiden einander in einem Punkte S .

Satz 2. Die drei Punktequadrupel $\{Q_i\}, \{Q'_i\}, \{Q''_i\}$ liegen auf drei konzentrischen Kreisen mit S als Mittelpunkt, sie bilden die Ecken dreier Sehnenvierecke, die dem gegebenen Viereck $\{A_i\}$ gegenseitig ähnlich sind. Die vier Strecken $\overline{Q_i Q''_i}$ sind einander gleich.

Beweis: Da Q'_1 und Q'_2 auf dem Kreis über dem Durchmesser $\overline{A_1 A_2}$ liegen, gilt

$$\sphericalangle A_2 Q'_1 Q'_2 = \sphericalangle A_2 A_1 A_3 = \sphericalangle A_2 A_4 A_3 \dots, \quad (1)$$



Figur 1

also $Q'_1 Q'_2 \parallel A_3 A_4$ und ebenso

$$Q'_2 Q'_3 \parallel A_4 A_1, \quad Q'_3 Q'_4 \parallel A_1 A_2, \quad Q'_4 Q'_1 \parallel A_2 A_3 \dots; \quad (2)$$

das Viereck $\{Q'_1 Q'_2 Q'_3 Q'_4\}$ ist also gleichwinklig mit dem Viereck $\{A_1 A_2 A_3 A_4\}$, und da die Diagonale $Q'_1 Q'_3$ mit $Q'_1 Q'_2$ nach (1) den gleichen Winkel bildet wie die homologen Stücke $A_1 A_3$ und $A_1 A_2$, so folgt der Hilfssatz: *Durch die Zuordnung $A_i \rightarrow Q'_i$ ist eine gegenseitige Ähnlichkeitsabbildung der Ebene auf sich bestimmt.*

Es sei jetzt O der Mittelpunkt, r der Halbmesser des Umkreises des gegebenen Sehnenvierecks $\{A_1 A_2 A_3 A_4\}$.

Wir zeigen, dass den vier Geraden $O A_i$ bei dieser Abbildung die vier Geraden s_i entsprechen. Nun ist der Winkel zwischen s_1 und $Q'_1 Q'_2$ nach (2) gleich dem Winkel zwischen s_1 und $A_4 A_3$ und damit (Sehnenviereck $A_1 A_4 Q'_1 Q'_2$) gleich dem Winkel $A_4 A_1 Q'_1$, der das Komplement von $\sphericalangle A_1 A_4 A_2$ darstellt (der Hälfte des Zentriwinkels $A_1 O A_2$). Die Gerade s_1 bildet also mit der Seite $Q'_1 Q'_2$ denselben Winkel, wie die Gerade $A_1 O$ mit der Seite $A_1 A_2$.

Die Geraden s_i gehen also alle durch einen Punkt S , der in jener Abbildung dem Punkt O entspricht, womit Satz 1 bewiesen ist. Indirekt kann man auch die Umkehrung dieses Satzes beweisen.

Entsprechend (2) gelten

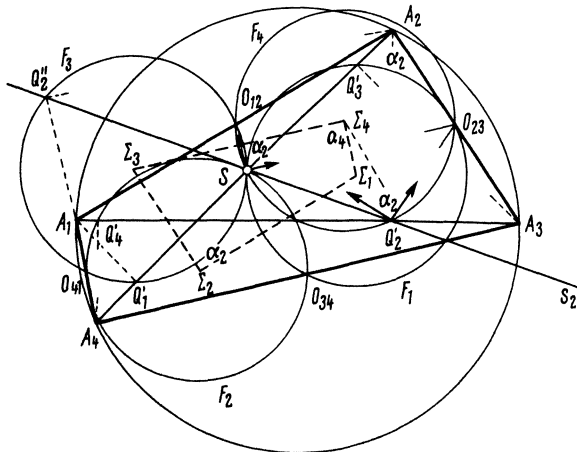
$$Q_1 Q_2 \parallel A_3 A_4, \quad Q_2 Q_3 \parallel A_4 A_1, \quad Q_3 Q_4 \parallel A_1 A_2, \quad Q_4 Q_1 \parallel A_2 A_3$$

und die analogen Relationen

$$Q''_1 Q''_2 \parallel A_3 A_4, \quad Q''_2 Q''_3 \parallel A_4 A_1, \quad Q''_3 Q''_4 \parallel A_1 A_2, \quad Q''_4 Q''_1 \parallel A_2 A_3.$$

Soweit es sich hier nicht um Identitäten handelt, sind sie wie (2) zu beweisen. Es gilt also der Satz 2.

Satz 3. *Der Schnittpunkt S der Wallaceschen Geraden s_i des Satzes 1 ist der gemeinsame Punkt der vier Feuerbachschen Kreise F_i , die durch die Dreiecke $\{A_i A_k A_m\}$ bestimmt sind (i, j, k, m eine beliebige zyklische Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4).*



Figur 2

Beweis: Bezeichnen wir mit O_{ij} den Mittelpunkt der Seite $\overline{A_i A_j}$, mit F_i den Feuerbachschen Kreis des Dreiecks $\{A_j A_k A_m\}$, mit Σ_i seinen Mittelpunkt (i, j, k, m eine beliebige zyklische Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4).

Da z.B. Q'_2 Höhenfusspunkt im Dreieck $\{A_1 A_2 A_3\}$ ist, so ist der Kreis durch O_{12} , O_{23} , Q'_2 der Feuerbachsche Kreis F_4 dieses Dreiecks, sein Radius also gleich $r/2$. Um zu zeigen, dass S auf diesem Kreise liegt, dass also $\sphericalangle Q'_2 S O_{23} = \sphericalangle Q'_2 O_{12} O_{23}$, beachte man, dass der erstere als Hälfte des Zentriwinkels $Q'_2 S Q'_3$ wegen der Ähnlichkeit der Vierecke $\{A_i\}$ und $\{Q'_i\}$ auch die Hälfte des homologen Zentriwinkels $A_2 O A_3$, also gleich dem Peripheriewinkel $A_2 A_1 A_3 = \sphericalangle A_2 O_{12} O_{23} = \sphericalangle Q'_2 O_{12} O_{23}$ ist.

Bemerkung: Betrachten wir noch ein gegebenes Sehnenviereck $\{A_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Lassen wir z.B. die Eckpunkte A_1, A_2, A_3 fest und auf dem Umkreise wählen wir statt des Eckpunktes A_4 einen anderen Eckpunkt A'_4 . Es sei S' der Schnittpunkt der Wallaceschen Geraden s'_i des Vierecks $\{A_1 A_2 A_3 A'_4\}$. Nach Satz 3 liegt dieser Schnittpunkt auf dem Kreise F'_4 , der, weil die Punkte A_1, A_2, A_3 fest sind, mit dem Feuerbachschen Kreise F_4 identisch sein muss. Es gilt also

Satz 4. Wenn der Punkt A_4 bei fest gegebenen Eckpunkten A_1, A_2, A_3 den Umkreis dieses Dreiecks durchläuft, so beschreibt der Schnittpunkt S der Wallaceschen Geraden s_i des Vierecks $\{A_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, den Feuerbachschen Kreis des gegebenen festen Dreiecks $\{A_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

Die Mittelpunkte Σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) der Feuerbachschen Kreise F_i liegen offensichtlich auf dem Kreise um S , mit dem Halbmesser $r/2$.

Nach der Konstruktion ist

$$S O_{12} \perp \Sigma_3 \Sigma_4, \quad S O_{23} \perp \Sigma_4 \Sigma_1;$$

für die Grösse des Innenwinkels $\sphericalangle \Sigma_4$ des Sehnenvierecks $\{\Sigma_i\}$ erhalten wir

$$\sphericalangle \Sigma_4 = 2R - \sphericalangle O_{23} S O_{12}.$$

Weiter gilt wieder nach der Konstruktion

$$\overline{O_{12} A_2} = \overline{O_{12} Q'_2}, \quad \overline{O_{23} A_2} = \overline{O_{23} Q'_2}$$

daraus folgt

$$\triangle O_{23} Q'_2 O_{12} \cong \triangle O_{23} A_2 O_{12} \quad (3. \text{ Kongruenzsatz})$$

und daher

$$\sphericalangle O_{23} Q'_2 O_{12} = \sphericalangle O_{23} A_2 O_{12} = \alpha_2.$$

Da die Punkte O_{23}, Q'_2, S, O_{12} auf dem Feuerbachschen Kreise F_4 liegen, folgt augenblicklich

$$\sphericalangle O_{23} Q'_2 O_{12} = \sphericalangle O_{23} S O_{12} = \alpha_2.$$

Dann ist

$$\sphericalangle \Sigma_4 = 2R - \sphericalangle O_{23} S O_{12} = 2R - \alpha_2 = \alpha_4.$$

Ähnlich erhalten wir

$$\sphericalangle \Sigma_1 = \alpha_1, \quad \sphericalangle \Sigma_2 = \alpha_2, \quad \sphericalangle \Sigma_3 = \alpha_3.$$

Das Viereck $\{\Sigma_i\}$ ist also dem Viereck $\{A_i\}$ winkelgleich; dass dieses Viereck dem Viereck $\{A_i\}$ ähnlich ist, ergibt sich aber leicht, wenn man beachtet, dass nicht nur die homologen Seiten, sondern auch die homologen Diagonalen parallel sind (Ähnlichkeitsverhältnis = $1/2$).

Es sei noch K der Kreis um S , der alle vier Feuerbachschen Kreise F_i in den Punkten T_i berührt. Man kann leicht zeigen, dass das Viereck $\{A_i\}$ mit dem Viereck $\{T_i\}$ kongruent ist:

$$\overline{S \Sigma_i} : \overline{S T_i} = 1:2; \quad \overline{\Sigma_i \Sigma_j} \parallel \overline{T_i T_j}, \quad \overline{T_i T_j} = 2 \overline{\Sigma_i \Sigma_j} = \overline{A_j A_i}.$$

Der Satz 2 kann also so erweitert werden:

Die Punktequadrupel $\{Q_i\}$, $\{Q'_i\}$, $\{Q''_i\}$, $\{\Sigma_i\}$, $\{T_i\}$ liegen auf fünf konzentrischen Kreisen um S ; sie bilden die Ecken von fünf Sehnenvierecken, die dem gegebenen Viereck $\{A_i\}$ ähnlich sind. Die vier Strecken $\overline{Q_i Q''_i}$ sind einander gleich, die Vierecke $\{A_i\}$, $\{T_i\}$ kongruent.

JOSEF BREJCHA, Brno

Angles of a Parallelogram with Vertices in Lattice Points

In the book [1] the following theorem is proved (p. 9).

Let four lattice points be the vertices of a rhombus (being not a square) and α – its angle. Then α/π is an irrational number.

Here we prove the following generalization of this theorem:

Let four lattice points be the vertices of a parallelogram and α – its angle $\leq \pi/2$. Then α/π is an irrational number or $\alpha = 2\pi/n$, where $n = 4$ or 8 .

Proof. The area S of such a parallelogram is given by the formula $S = xy \sin \alpha$, where x and y are the lengths of non-parallel sides of a parallelogram. It is known that the area of any polygon with vertices in lattice points is a rational number q (with denominator 1 or 2). Hence

$$q = xy \sin \alpha. \quad (1)$$

x and y as the distances between lattice points are square roots of integers: $x = \sqrt{r}$, $y = \sqrt{s}$. Substituting these values into (1) we get $\sin \alpha = \sqrt{q^2/rs} = \sqrt{t}$, where t is the rational number q^2/rs and we see that $\sin \alpha$ is an algebraic number at most of the second degree.

Let α be a rational multiplicity of π : $\alpha = 2\pi k/n$, k, n – positive integers, $(k, n) = 1$, $1 \leq k \leq n/4$. As follows from the theorem of LEHMER ([2], p. 37–38), for $n \neq 4$ the number $2 \sin 2\pi k/n$ is an algebraic integer of degree $\varphi(n)$, $\varphi(n)/4$ or $\varphi(n)/2$ according as $(n, 8) < 4$, $(n, 8) = 4$ or $(n, 8) > 4$. We must find all values of n such that $\sin 2\pi k/n$ is an algebraic number of degree 1 or 2, i.e. $\xi = 2 \sin 2\pi k/n$ is an algebraic integer of degree 1 or 2.

1. Suppose $2 \nmid n$. Then $(n, 8) = 1 < 4$ and ξ is an algebraic integer of degree $\varphi(n)$. The only odd integers n such that $\varphi(n) = 1$ or 2 are 1 and 3.

2. Suppose $2 \mid n$ and $4 \nmid n$. Then $(n, 8) = 2 < 4$ and ξ is an algebraic integer of degree $\varphi(n)$. The only integers n such that $2 \mid n$, $4 \nmid n$ and $\varphi(n) = 1$ or 2 are 2 and 6.

3. Suppose $4 \mid n$ and $8 \nmid n$. Then $(n, 8) = 4$ and ξ is an algebraic integer of degree $\varphi(n)/4$. The only integers n such that $4 \mid n$, $8 \nmid n$ and $\varphi(n) = 4$ or 8 are 12 and 20.

4. Suppose $8 \mid n$. Then $(n, 8) = 8 > 4$ and ξ is an algebraic integer of degree $\varphi(n)/2$. The only integer n divisible by 8 and satisfying $\varphi(n) = 2$ or 4 is 8.

Because it must be $n \geq 4$, it remains to consider only the cases $n = 4, 6, 8, 12, 20$.

Evidently $n = 4$ is possible, because $\alpha = 2\pi/4$ is an angle of the unit square. Similarly, $n = 8$ is possible as the acute angle of the parallelogram with vertices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ is equal to $2\pi/8$.

Now we exclude the values $n = 6, 12$ and 20 . Suppose that $(0, 0)$, (x, z) , (y, t) and $(x + y, z + t)$ are the vertices of a parallelogram with the angle $2\pi/6$ at the vertex $(0, 0)$; x, y, z, t are integers (evidently $x^2 + z^2 > 0$, $y^2 + t^2 > 0$). Then

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{6} = \frac{xy + zt}{\sqrt{x^2 + z^2} \sqrt{y^2 + t^2}}.$$

Hence

$$x^2 y^2 + x^2 t^2 + y^2 z^2 + t^2 z^2 = 4 x^2 y^2 + 8 x y z t + 4 z^2 t^2$$

or

$$x^2 t^2 - 2 x y z t + y^2 z^2 = 3 (x^2 y^2 + 2 x y z t + z^2 t^2)$$

and $(x t - y z)^2 = 3 (x y + z t)^2$. This implies

$$x t - y z = 0, \quad x y + z t = 0.$$

We multiply both sides of the first equation by x , both sides of the second by z and add; we obtain $(x^2 + z^2) t = 0$. Similarly, multiplying by $-z$ and x , we get $(x^2 + z^2) y = 0$.

Because $x^2 + z^2 > 0$, we get $t = y = 0$, which is impossible. The angle $2\pi/12$ is also impossible, because if $(0, 0)$, (a, c) , (b, d) , $(a + b, c + d)$ are vertices of a parallelogram with the angle $2\pi/12$ at the vertex $(0, 0)$, then the parallelogram with vertices $(0, 0)$, $(c, -a)$, (b, d) , $(b + c, d - a)$ has an angle $2\pi/6$, which has been shown to be impossible. $n = 20$ is impossible, because $\sin 2\pi/20 = (\sqrt{5} - 1)/4$, which is not of the form \sqrt{t} for rational t .

We observe that the theorem may be stated in the following equivalent form:

If $\alpha = 2\pi k/n$ (k, n - positive integers, $n \geq 4$, $k \leq n/4$, $(k, n) = 1$) is an angle between two straight lines passing through a lattice point and on each of them there are other lattice points (evidently, infinitely many), then $n = 4$ or 8 , $k = 1$, i.e. $\alpha = 90^\circ$ or 45° .

It is evident that the hypothesis, that the straight lines have one lattice point in common, is not essential (we may translate one line).

ANDRZEJ MAKOWSKI, Warsaw, Poland

REFERENCES

- [1] H. HADWIGER und H. DEBRUNNER, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*, Monographies de «l'Enseignement Mathématique» No. 2 (1960).
- [2] I. NIVEN, *Irrational Numbers*, The Carus Mathematical Monographs No. 11 (1956).

On Hall's Third Definition of Group

MARSHALL HALL, JR. in [1], p. 6, gave a definition of group in the terms of operation $/$ defined on the pairs of elements of the set S . This operation satisfies the axioms

$$\begin{array}{ll} \text{L 1. } a/a = b/b & \text{L 2. } a/(b/b) = a \\ \text{L 3. } (a/a)/(b/c) = c/b & \text{L 4. } (a/c)/(b/c) = a/b. \end{array}$$

It may be observed that L 3 is superfluous: L 4 and L 1 imply L 3. We put in L 4 $c = a$:

$$(a/a)/(b/a) = a/b;$$

in virtue of L 1 $a/a = d/d$, therefore

$$(d/d)/(b/a) = a/b,$$

which is L 3.

Now we prove that any of L 1, L 2, L 4 is independent of the others.

Let $S = [0, 1]$ and we define operation $/$ by the following tables:

$$\begin{array}{ccc} 1. \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} & 2. \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} & 4. \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \end{array}$$

The operation defined by the table n ($n = 1, 2, 4$) does not satisfy L n and satisfies the remaining two axioms. For $n = 1$ and 2 it is evident. In the case $n = 4$ it is also evident that L 1 and L 2 are satisfied; if we put in L 4 $a = c = 0$, $b = 1$ the left-hand side is equal to $(0/0)/(1/0) = 1/1 = 1$ and the right-hand side is equal to $0/1 = 0$.

A. MAKOWSKI, Warsaw

REFERENCE

- [1] MARSHALL HALL, JR., *The Theory of Groups* (Macmillan, New York 1959).

Aufgaben

Aufgabe 581. Man beweise: Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist genau dann Primzahl, wenn $\binom{n}{p} \equiv 1 \pmod{p}$ für alle natürlichen Zahlen n mit $p \leq n < 2p$.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Lösung: 1. Wenn $1 \leq q \leq p-1$, p Primzahl, so hat man

$$(p+q)(p+q-1)\dots(p+1) \equiv q! \pmod{p}.$$

Wegen $(q!, p) = 1$ kann man hier mit $q!$ teilen und bekommt

$$\binom{p+q}{p} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2. Wir setzen nun $n = p^r q$, $p \nmid q$, p Primzahl, $p < n$. Dann ist

$$\binom{n+p}{n} = \binom{n+p}{p} = (p^{r-1}q + 1) \binom{n+p-1}{p-1}.$$

Ganz wie oben schliesst man, dass

$$\binom{n+p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^r}$$

und daher

$$\binom{n+p}{n} \equiv p^{r-1}q + 1 \pmod{p^r}.$$

Wäre nun $\binom{n+p}{n} \equiv 1 \pmod{n}$, so wäre auch $\binom{n+p}{n} \equiv 1 \pmod{p^r}$, also $p^{r-1}q + 1 \equiv 1 \pmod{p^r}$ und daher $p \mid q$, im Gegensatz zur Voraussetzung. Somit ist $\binom{n+p}{n} \not\equiv 1 \pmod{n}$ und der Beweis ist beendet.

A. BAGER, Hjørring/Dänemark

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Duke University, USA), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), H. MEILI (Winterthur), H. MEYER (Birkerød, Dänemark), O. REUTTER (Ochsenhausen), D. VELJAN (Zagreb).

Aufgabe 582. Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kreise mit Radius R und mit dem Mittelpunkt auf einer festen Geraden.

T. KOETSIER, Delft

Lösung: Da die Tangente in jedem Punkt einer solchen Trajektorie durch den Mittelpunkt des zu ihr normalen Kreises geht, und da diese Mittelpunkte auf einer festen Geraden liegen, ist jede Kurve eine Traktrix mit der Zentralen der Kreisschar als Leitlinie und der konstanten Tangentenstrecke R .

I. PAASCHE (München) sandte 17 Lösungen und Literaturhinweise, von denen einige auch von anderen Lesern mitgeteilt wurden.

Aufgabe 583. Man beweise: Der Rauminhalt eines Tetraeders beträgt nicht mehr als $\sqrt{2}/12$ der Quadratwurzel aus dem Produkt seiner Kanten.

D. VOICULESCU, Bukarest

Lösung: Von den Kanten a_i des Tetraeders T sind je zwei, die einander gegenüberliegen, Diagonalen in Gegenflächen des T umschriebenen Parallelepipeds. Die Gegenkanten a_j und a_k von T bilden den Winkel α_i und haben den Abstand d_i . Dann ist das Volumen von T gegeben durch

$$V = \frac{1}{6} d_i a_j a_k \sin \alpha_i.$$

Damit ergibt sich

$$V^3 = \frac{1}{216} \left(\prod_{i=1}^3 d_i \sin \alpha_i \right) \left(\prod_{i=1}^6 a_i \right) \leq \frac{1}{216} \left(\prod_{i=1}^3 d_i \right) \left(\prod_{i=1}^6 a_i \right) \leq \frac{3}{216} V \prod_{i=1}^6 a_i,$$

womit die Behauptung verifiziert ist. In der ersten Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn P rhomboedrisch ist, in der zweiten nur, wenn T regulär ist.

F. LEUNBERGER, Feldmeilen

Eine weitere Lösung sandte D. VELJAN (Zagreb).

Aufgabe 584. Man beweise: Für einen beliebigen Punkt eines sphärischen Dreiecks (auf der Einheitskugel) mit Seiten $\leq \pi/2$ ist die Summe der (sphärischen) Eckenabstände höchstens gleich der Summe der beiden grösseren Dreiecksseiten. G. WEGNER, Göttingen

Lösung des Aufgabenstellers: Die Ungleichung ist trivial, wenn der beliebige Punkt P ein Randpunkt des Dreiecks ist (wobei dann das Gleichheitszeichen eintreten kann). Es sei daher im folgenden P ein innerer Punkt des Dreiecks.

Hilfssatz: Im sphärischen Dreieck ABC mit den Seiten $\leq \pi/2$ sei $\gamma \geq 120^\circ$. Dann ist $a + b < c + h_c$.

Beweis: Wir wählen D zwischen A und B so, dass $|AC| = |AD|$ ist und E zwischen B und C so, dass $|BD| = |BE|$. Wir definieren α' und β' durch $90^\circ - (\alpha'/2) := \sphericalangle ADC$, $90^\circ - (\beta'/2) := \sphericalangle BDE$. Wegen des sphärischen Exzesses ist $\sphericalangle ADC > 90^\circ - (\alpha/2)$, $\sphericalangle BDE > 90^\circ - (\beta/2)$, also $\alpha' \leq \alpha$ und $\beta' \leq \beta$. Ist $x := |EC| = a + b - c$, so folgt nach leichter Rechnung

$$\frac{\sin x}{\sin h_c} = \operatorname{tg} \frac{\alpha' + \beta'}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} \right).$$

Die Behauptung des Hilfssatzes ergibt sich, wenn $\alpha' + \beta' \leq 90^\circ$. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Ungleichung durch Bestimmung des Minimums von $\cos(\alpha + \beta)$ unter der Nebenbedingung $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$, $\gamma \geq 120^\circ$, $c \leq \pi/2$ und fest. Es ergibt sich $\alpha = \beta$ und $\alpha = \beta \leq 45^\circ$, also $\alpha' + \beta' \leq 90^\circ$.

r_A und r_B seien die Abstände des inneren Punktes P von A und B . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sphericalangle APB \geq 120^\circ$ und $b \geq a$. Aus dem Hilfssatz folgt $r_A + r_B < c + h_c$. Trifft der Bogen PC den Bogen AB in E , so gilt $h_c \leq |EP|$ und $|EC| \leq b$. Hieraus folgt $r_A + r_B + r_C \leq c + h_c + r_C \leq c + |EP| + r_C \leq c + b$, w. z. b. w.

Neue Aufgaben

Aufgabe 606. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von drei linear unabhängigen periodischen Lösungen von

$$x''' - \frac{p'}{p} x'' + (1 + p^2) x' - \frac{p'}{p} x = 0, \quad p(t + \omega) = p(t), \quad p(t) \neq 0$$

ist

$$\int_0^\omega \sqrt{1 + p^2} dt > 2\pi.$$

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute of Brooklyn

Aufgabe 607. Sind X und Y Teilmengen einer Menge M , so definieren wir $X + Y$ durch $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, d. h. $X + Y$ besteht aus all den Elementen von M , die in X oder Y jedoch nicht im Durchschnitt von X und Y liegen. Es sei nun M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen. Ferner sei k eine gerade ganze Zahl mit $2 \leq k \leq n - 1$. Zeige: Es gibt $n - 1$ Teilmengen B_1, \dots, B_{n-1} von M mit den Eigenschaften: a) $|B_i| = k$ für $i = 1, 2, \dots, n - 1$. b) Ist $X \subseteq M$ und ist $|X|$ gerade, so gibt es eine eindeutig bestimmte Teilmenge I von $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ mit $X = \sum_{i \in I} B_i$.

H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgabe 608. Unter Verwendung von Kollineationen konstruiere man eine Parabel durch vier gegebene Punkte (ohne Verwendung einer Involution). K. PRACHAR, Wien

Aufgabe 609. In der Gauss'schen Zahlenebene werde dem «Punkt» $z = x + i y$ der Punkt

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z - \alpha}, \quad \gamma \neq 0; \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ komplexe Zahlen}$$

zugeordnet. Welches ist die Bahn eines variablen Punktes, dessen Bewegung in jedem Moment auf den jeweils zugeordneten Punkt hin gerichtet ist?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Literaturüberschau

Lesebuch zur Mathematik (Quellen von Euklid bis heute). Von J. J. BURCKHARDT. 79 Seiten mit 34 Figuren. Fr. 13.80. Räber-Verlag, Luzern und Stuttgart 1968.

Die Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts widmen sich in erster Linie aktuellen Fragen der Unterrichtsgestaltung.

Das «Lesebuch zur Mathematik», als Heft 5 erschienen, nimmt eine gewisse Sonderstellung ein. Anhand sorgfältig ausgesuchter Quellen wird dem Leser mathematisches Ideengut in möglichst originaler Form vermittelt. Koryphäen wie Euklid, Euler, Gauss und Hilbert kommen dabei zu Wort, und der geniale John von Neumann spricht im XVII. Kapitel in fast unüberbietbarer Weise über das Wesen mathematischer Forschung. Ein Stück Geschichte der Mathematik wird so auf unkonventionelle und lebendige Weise vorgetragen.

Wir stehen in einer Zeit des Umbruchs und sprechen von «moderner» Mathematik. Um diese aber wirklich verstehen zu können, muss die geschichtliche Entwicklung mit einbezogen werden. Das genannte Lesebuch schliesst damit eine seit langem (zumindest was die Mittelschule betrifft) bestehende Lücke. Die 18 originalen Kurzabhandlungen dienen der mathematischen «Allgemeinbildung» vortrefflich. Eine Flut hochspezialisierter Fachpublikationen ergiesst sich heutzutage über jeden Mathematiker. Um so mehr tut es Not, in mathematischen Mussestunden seinen Horizont zu erweitern. Das in ansprechender Form gedruckte Büchlein sollte zumindest in keiner Fachbibliothek eines Mathematiklehrers fehlen; denn für ihn und die ihm anvertrauten Klassen bieten sich ideale Ansatzpunkte und Impulse zu Querverbindungen mit andern Fächern. Aber auch dem Mathematiker schlechthin kann das Studium einzelner Abhandlungen (z.B. der Aufgabe über kollineare Punkte) Schönheit und Eleganz mathematischer Denkweise vor Augen führen.

HANS LOEFFEL

A History of Vector Analysis. Von MICHAEL J. CROWE. 270 Seiten. \$ 12.95. University of Notre Dame Press, Notre Dame, London 1967.

In diesem interessanten Buch wird die Entwicklung der Idee eines vektoriellen Systems in drei Perioden eingeteilt. Die erste Periode beginnt mit den Untersuchungen WESSELS über die Natur der komplexen Zahlen gegen Ende des 18. Jahrhunderts. Der Schwerpunkt dieser Periode liegt in den Arbeiten HAMILTONS (Quaternionen) und GRASSMANNs (Ausdehnungslehre). Die nach dem Tod HAMILTONS (1865) beginnende zweite Periode, die einen Ausbau der grundlegenden Ideen HAMILTONS und GRASSMANNs brachte, ist durch die Namen TAIT, PEIRCE, MAXWELL und CLIFFORD gekennzeichnet. Am Anfang der dritten Periode (1880–1910) steht die Formulierung der modernen Theorie der Vektoren durch GIBBS und HEAVISIDE, die nach der Jahrhundertwende von verschiedenen Autoren in Lehrbüchern verbreitet wurde.

Die Frage, ob die Quaternionen oder die Ausdehnungslehre für die moderne Auffassung der Vektoren grössere Bedeutung hatten, zieht sich durch das ganze Buch hindurch. Der Verfasser vertritt und belegt die Ansicht, dass einerseits ein direkter Weg von den Quaternionen herführt, dass aber andererseits auch die Ausdehnungslehre alle Möglich-

keiten einer weiteren Entwicklung durch Modifikation geboten hätte. Die Studie konzentriert sich auf die Geschichte der grundlegenden Aspekte der Vektorrechnung im Raum: Addition und Subtraktion, die verschiedenen Produkte, Division (soweit im System vorhanden), Spezifikation der Vektortypen. Die Analysis (Differentiation von Vektoren, Vektorfunktionen) wird nur gestreift. Zur Abrundung der Darstellung dienen die Ausführungen über die Lebensumstände und die Persönlichkeit der wichtigsten Forscher.
E. TROST

Cours de calcul mathématique moderne. Par M. LABOUREUR, M. CHOSSAT et C. CARDOT. Tome 1. Théorie et exercices; tome 2. Applications pratiques et compléments. Dunod, Paris 1968.

Le premier volume paraît en seconde édition revue et complétée. Il s'agit d'un cours mettant sous une forme aussi claire que possible l'essentiel des mathématiques modernes à la portée des praticiens. La matière de ce premier volume est répartie en six livres: I. Calcul vectoriel, II. Calcul matriciel, III. Calcul opérationnel, IV. Calcul tensoriel, V. Calcul des probabilités et statistique, VI. Les méthodes dérivées de la théorie des ensembles. On trouve dans le livre VI des notions sur la Théorie de l'information et celle des jeux de stratégie. L'exposé assez succinct est illustré d'applications pratiques et l'on trouve à la fin de ce premier volume un ensemble de 34 exercices dont les solutions sont données dans le second volume et en forment le livre I. Dans le livre II, tome 2, intitulé: *Applications générales* il est question de fonctions eulériennes, des fonctions de Bessel, de celles de Green, des polynômes de Légendre, d'équations intégrales, de transformations de Laplace, de Fourier, de Mellin et de Hankel, de programmation linéaire, des applications générales de la statistique et des treillis distributifs. Le livre III, tome 2, intitulé: *Applications usuelles* donne des applications des théories qui précèdent aux mathématiques, à la mécanique, à la physique, à l'électricité, à la recherche opérationnelle ainsi qu'à l'économie proprement dite, à l'industrie et à l'agriculture. Le livre IV du second volume est consacré aux outils du calculateur. Il parle des calculatrices numériques, des calculateurs analogiques et des tables numériques dont il donne des extraits. On trouve en appendice de ce second volume quelques compléments sur les théories de l'algèbre moderne.

S. PICCARD

Vorlesungen über Artinsche Ringe. Von A. KERTÉSZ. 281 Seiten. \$ 7.50. Akadémiai Kiado, Budapest 1968.

Als artinschen Ring bezeichnet man einen Ring, bei dem jede absteigende Kette von Rechtsidealen nach endlich vielen Gliedern abbricht (Minimalbedingung). ARTIN hat bemerkt, dass sich die wesentlichen Ergebnisse der Strukturtheorie der assoziativen Algebren endlichen Ranges über einem Körper auf Ringe mit Minimalbedingung übertragen lassen. Diese Entdeckung hat die Ringtheorie sehr befruchtet und zu einer Fülle interessanter Ergebnisse geführt. Das vorliegende Werk ist zur Einführung in diese moderne Theorie nichtkommutativer Ringe hervorragend geeignet, da die Darstellung sorgfältig und durchsichtig ist und vom Leser ausser einer gewissen Vertrautheit mit der abstrakten Algebra keine speziellen Vorkenntnisse verlangt werden. Zu jedem Kapitel gehören Übungenaufgaben, wobei für die schwierigeren Anleitungen zur Lösung am Ende des Buches gegeben werden. Das Literaturverzeichnis umfasst mehr als 200 Titel und ermöglicht ein vertieftes Studium. Inhalt der einzelnen Kapitel: I. Mengen, Relationen; II. Der Ringbegriff; III. Ringkonstruktionen; IV. Moduln und Algebren; V. Das Radikal; VI. Allgemeines über artinsche Ringe; VII. Ringe linearer Transformationen. VIII. Halbeinfache Ringe und vollständig primäre Ringe. IX. Moduln über halbeinfachen Ringen; X. Die additive Struktur der artinschen Ringe; Anhang: Abelsche Gruppen.
E. TROST

Endliche Graphen und Netzwerke. Von R. G. BUSACKER und T. L. SAATY. 410 Seiten mit 180 Abbildungen. DM 74,-. R. Oldenbourg Verlag, München 1968.

Die Theorie der Graphen hat sich in den letzten Jahren stark entwickelt, da sie neben interessanten theoretischen Fragestellungen zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten in den

verschiedensten Gebieten bietet. Diesen Anwendungen ist mehr als die Hälfte des Umfangs des vorliegenden Werkes gewidmet, was schon beim Erscheinen der amerikanischen Originalausgabe 1965 als Vorzug bezeichnet wurde. Zum Verständnis der grundlegenden Begriffe und Methoden genügen einige Kenntnisse aus der Mengenlehre, der Theorie der Vektorräume und der Matrizenrechnung. Da die Verfasser der Darstellung die Form einer «relativ zwanglosen Diskussion der zentralen Begriffe» gegeben haben, eignet sich das Buch sehr als erste Einführung. Eine Hilfe beim Selbststudium sind auch die zahlreichen Aufgaben mit Lösungen. E. TROST

Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Von KAI LAI CHUNG. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 104. 2. Auflage. XII und 301 Seiten. DM 56,-. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1967.

Dieses Buch handelt von Markov-Ketten; das sind Markovsche Prozesse mit abzählbaren Zustandsräumen. Dabei wird im ersten Teil der Zeitparameter als diskret, im zweiten dagegen als kontinuierlich vorausgesetzt. Ausserdem werden die Übergangswahrscheinlichkeiten durchwegs als zeitunabhängig angenommen.

Im ersten Teil geht man aus von den einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} . Die n -stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ geben allgemein die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich das System nach n Zeiteinheiten im Zustand j befindet, vorausgesetzt, dass es sich zu Beginn im Zustand i befindet. Eine Verallgemeinerung davon sind die Tabu-Wahrscheinlichkeiten $Hp_{ij}^{(n)}$. Wenn H irgend eine Menge von Zuständen bezeichnet, so bedeutet $Hp_{ij}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, in n Übergängen von i nach j zu gelangen, ohne dabei einen Zustand aus H zu passieren. Das Grenzverhalten von $p_{ij}^{(n)}$ und $Hp_{ij}^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ wird studiert. Weiter wird etwa die Verteilung der Zeit des erstmaligen Eintritts von einem Zustand i in einen Zustand j untersucht. Ergodensätze und Varianten des zentralen Grenzwertsatzes werden aufgestellt.

Dem zweiten Teil liegt eine Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix $P(t) = (p_{ij}(t))$, $0 \leq t < \infty$, zugrunde. Die folgenden Axiome sollen dabei gelten:

$$(A) \quad p_{ij}(t) = 0,$$

$$(B) \quad \sum_j p_{ij}(t) = 1,$$

$$(C) \quad \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) = p_{ij}(s+t),$$

$$(D) \quad \lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Analoge Fragestellungen wie im diskreten Fall erfordern hier viel subtilere Methoden. Daneben werden aber eine Reihe von Fragen behandelt, welche für den kontinuierlichen Fall spezifisch sind. Ein Beispiel dafür ist etwa das Problem, wann die Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen gelten.

Das Buch bringt eine sehr sorgfältige und ausführliche Theorie der Markov-Ketten. Auch neueste Forschungsergebnisse sind in sie miteinbezogen; auf noch offene Fragen wird in Bemerkungen hingewiesen. Erwähnen wir zum Schluss, dass der Standpunkt dieses Buches sehr abstrakt ist; auf die Anwendungsmöglichkeiten der Markov-Ketten wird nicht eingegangen. H. BÜHLMANN

Manuel de statistique biologique. Von R. HELLER. XIII und 296 Seiten mit zahlreichen Figuren. 38 F. Gauthier-Villars, Paris 1968.

Das Buch ist von einem Biologen für die Bedürfnisse der Biologen geschrieben. Die Darstellung ist leicht fasslich; die mathematischen Herleitungen sind überall dort durchgeführt, wo sie sich ohne zu grossen mathematischen Aufwand geben lassen. Aber auch dort, wo sie fehlen müssen, ist Wert darauf gelegt worden, die Voraussetzungen genau herauszuarbeiten. Inhalt: La présentation des données numériques – Calcul des probabilités et distributions théoriques – Problèmes d'échantillonnages et d'estimation – Séries statistiques doubles. – Missverständlich scheinen uns die Formulierung des Theorems von Bernoulli (pg. 92) und jenes über die «Fréquence limite» (pg. 43), die beide den Eindruck erwecken können, es handle sich um Konvergenz im Sinne der Analysis. R. INEICHEN

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik

und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 24

Heft 6

Seiten 121–144

10. November 1969

Extremale konvexe Rotationshalbkörper im V, F, M -Problem des R_3^1)

Herrn Prof. Dr. H. HADWIGER in Freundschaft zum 60. Geburtstag

Eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse schneidet einen beliebigen konvexen Rotationskörper (wenn überhaupt) in einer Kreisscheibe. Lässt man die Ebene den Körper von einem Ende zum andern monoton durchlaufen und ist die Folge der Radien monoton²⁾, so bezeichnen wir den Körper als konvexen *Rotationshalbkörper*. Sein grösster Radius, am Rande liegend, heisse a . h ist die Länge des eventuell vorhandenen Randzylinders.

Die vorliegende Note bringt 8 Ungleichungen für die oben definierte Körperklasse H_a . Aus den ersten 4 lassen sich die Extremalkörper herleiten, welche bei gegebenem Integral der mittleren Krümmung M und ebensolcher Oberfläche F das absolute Maximum des Volumens V aufweisen. Es sind dies

a) Kappenkörper des Halbkugelzylinders von der festen Zylinderlänge $h^* = a(2 - \pi/4)$,

b) Halbkugelzylinder mit $h^* \geq h \geq a(\pi - 2)/2 = h^{**}$.

Interessanterweise sind die Kappenkörper der Halbkugel nicht extremal³⁾.

1. Für die Körperklasse H_a hat Herr H. HADWIGER eine einheitliche Integraldarstellung der Masszahlen M, F, V angegeben, welche die bequeme Herleitung von 8 linearen Ungleichungen gestattet. Sie lautet:

$$\begin{aligned} M &= \pi \int_0^{\pi/2} (a - r \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{\pi^2}{2} a + \pi h, \\ F &= \pi \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2 \sin \varphi) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \pi a^2 + 2\pi a h, \\ V &= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi/2} (a^3 - r^3) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \pi a^2 h, \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \pi/2 > \varphi \geq 0 \\ & a \geq r(\varphi) \geq 0, \\ & h \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ Die Anregung zu dieser Note stammt aus einer Vorlesung von Prof. H. HADWIGER: Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus, Sommer 1963.

²⁾ Durch passende Wahl der Durchlaufungsrichtung lässt sich immer erreichen, dass die Radienfolge monoton nicht zunehmend ausfällt. Bei der gewählten Definition sind Körper mit zylindrischem Endstück inbegriffen.

³⁾ Obschon die Halbkörper die einfachsten Körper sind, liegen die Verhältnisse doch wesentlich komplizierter als in der vollen Klasse K_a aller konvexen Rotationskörper: Dort einerlei Maximalkörper, nämlich die Kappenkörper der Kugel sowie monotones $y(x)$, hier zweierlei Maximalkörper, und $y(x)$ weist ein inneres Maximum auf.

2. Durch geeignete Kombination der Ausdrücke (1) erhalten wir die 8 linearen Ungleichungen⁴⁾

$$\begin{array}{ll}
 1a & F \leq 2 a M - \pi (\pi + 1) a^2, \\
 2a & 3 V \leq 3 a^2 M - \pi (8 + 3 \pi) a^3/2, \\
 3a & 6 V \leq 3 a F - 5 \pi a^3, \\
 4a & 3 V \leq 2 a F - a^2 M - \pi (4 - \pi) a^3/2, \\
 5a & F \geq a M - \pi (\pi - 2) a^2, \\
 6a & 3 V \geq a^2 M - \pi^2 a^3, \\
 7a & 3 V \geq a F - 2 \pi a^3, \\
 8a & V \geq a F - a^2 M + \pi (\pi - 2) a^3.
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 ^5) \\
 M \geq \pi (\pi/2 + 2) a \\
 \\
 ^6) \\
 M \geq \pi^2 a
 \end{array}
 \quad (2)$$

Die ersten 4 sind gegenüber den entsprechenden der Note⁴⁾ modifiziert und etwas unhandlicher. Die letzten 4 konnten unverändert übernommen werden, weil die dem Gleichheitszeichen zugeordneten Körper Halbkörper sind.

Das Gleichheitszeichen steht in den Ungleichungen 1a bis 3a für den *Halbkugelzylinder*, insbesondere also auch für die *Halbkugel*, in 4a dagegen allgemeiner für *Kappenkörper des Halbkugelzylinders*, insbesondere also auch für die *Kappenkörper der Halbkugel*. In den Ungleichungen 5a bis 7a gilt das Gleichheitszeichen für die *Kreisscheibe*, in 8a dagegen allgemeiner für *Zylinder*.

3. Es ist sehr zweckmässig, die Ungleichungen (2) auf Koordinaten im Blaschke-diagramm umzurechnen, wobei man den Formkoeffizienten

$$\lambda = 4 \pi a/M \quad (0 < \lambda \leq 4/\pi)$$

einführt. Man erhält:

$$\begin{array}{ll}
 1b & x \leq 2 \lambda - \frac{(1 + \pi)}{4} \lambda^2, \\
 2b & y \leq 3 \lambda^2 - \frac{(8 + 3 \pi)}{8} \lambda^3, \\
 3b & y \leq \frac{3 \lambda}{2} \cdot x - \frac{5}{8} \lambda^3, \\
 4b & y \leq 2 \lambda \cdot x - \lambda^2 - \frac{(4 - \pi)}{8} \lambda^3, \\
 5b & x \geq \lambda - \frac{(\pi - 2)}{4} \lambda^2, \\
 6b & y \geq \lambda^2 - \frac{\pi}{4} \lambda^3, \\
 7b & y \geq \lambda \cdot x - \frac{\lambda^3}{2}, \\
 8b & y \geq 3 \lambda \cdot x - 3 \lambda^2 + \frac{3 (\pi - 2)}{4} \lambda^3.
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 0 < \lambda \leq 8/(\pi + 4) \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 0 < \lambda \leq 4/\pi
 \end{array}
 \quad (3)$$

⁴⁾ H. HADWIGER: Elementare Studie über konvexe Rotationskörper. Math. Nachrichten, 2. Bd., Heft 3/4, März/April 1949. Die vorliegende Note stützt sich auf diese Publikation, die alles Grundsätzliche enthält. Insbesondere werden die Bezeichnungen zum grössten Teil übernommen. Die Darstellung ist abgekürzt gehalten.

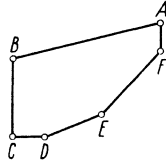
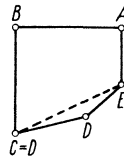
⁵⁾ Herr HADWIGER hat auch für das restliche Intervall $\pi (\pi/2 + 2) a > M \geq \pi^2 a$ Ungleichungen gefunden, die allerdings nicht linear sind.

⁶⁾ 1a–4a sowie 8a sind *ausziehinvariant*, 4a ausserdem *kappeninvariant*.

⁷⁾ 5a–7a sind durch Herrn HADWIGER noch wesentlich verschärft worden.

Mit dem Gleichheitszeichen handelt es sich bei den Ausdrücken 3) um Strecken. Dieselben beranden in der Diagrammebene einen von λ abhängigen Sechseckbereich $P_6(\lambda)$ (Figur 1).

Für festes λ ist nun zwar $P_6(\lambda)$ festgelegt, nicht aber der genaue Bildbereich aller zulässigen Körper, Teilbereich von $P_6(\lambda)$. Zwar löst 4b mit der Aussage über die Körper, welche das Gleichheitszeichen beanspruchen sowie unter Berücksichtigung von 1b und 5b das Maximumproblem von $y(x)$. Unsere Kenntnisse über das Minimum von $y(x)$ aber sind sehr lückenhaft, gehört doch nur gerade der Bildpunkt des durch a und λ eindeutig bestimmten Zylinders zum scharfen Bildrand. Fortan lassen wir das Minimum aus dem Spiel und beschäftigen uns ausschliesslich mit dem Maximum von $y(x)$.

Figur 1⁷⁾

Figur 2

4. Es geht jetzt darum, den oberen Rand des Vereinigungsbereichs aller $P_6(\lambda)$ zu ermitteln. Zu diesem Zweck studieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda \cdot x - \lambda^2 - \left(\frac{4-\pi}{8}\right) \lambda^3, \\ \lambda - \left(\frac{\pi-2}{4}\right) \lambda^2 &\leq x \leq 2\lambda - \left(\frac{1+\pi}{4}\right) \lambda^2, \\ 0 < \lambda &\leq \frac{8}{\pi+4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Enveloppenbildung liefert:

$$x^* = \lambda + \frac{3(4-\pi)}{16} \lambda^2, \quad y^* = \lambda^2 + \frac{(4-\pi)}{4} \lambda^3, \quad 0 < \lambda \leq \frac{8}{\pi+4}. \quad (5)$$

Beide Koordinaten wachsen mit λ monoton. Wegen $dy^*/dx^* = 2\lambda$ ist die Enveloppe von unten konvex und liegt deshalb ganz nicht unterhalb der betrachteten Streckenschar (4). Also gehört sie (mindestens teilweise) zum oberen Bildrand. Für die Enveloppe gelten die Relationen:

$$\begin{aligned} 4F &= 4aM + 3\pi(4-\pi)a^2, \\ 3V &= a^2M + \pi(4-\pi)a^3. \end{aligned} \quad (6)$$

⁷⁾ $P_6(\lambda)$ ist nicht maßstäblich gezeichnet. Für die Halbkugel gilt speziell:

$$\begin{aligned} 1b \quad x &\leq \frac{48}{(\pi+4)^2}; & 2b \quad y &\leq \frac{256}{(\pi+4)^3}; & 3b \quad y &\leq \frac{12}{\pi+4} \cdot x - \frac{320}{(\pi+4)^3}; \\ 4b \quad y &\leq \frac{16}{\pi+4} \cdot x - \frac{128}{(\pi+4)^3}; & 5b \quad x &\geq \frac{8(8-\pi)}{(\pi+4)^2}; & 6b \quad y &\geq \frac{64(4-\pi)}{(\pi+4)^3}; \\ 7b \quad y &\geq \frac{8}{\pi+4} \cdot x - \frac{256}{(\pi+4)^3}; & 8b \quad y &\geq \frac{24}{\pi+4} \cdot x - \frac{192(8-\pi)}{(\pi+4)^3}. \end{aligned}$$

(6) ist kappeninvariant. Es genügt deshalb, die Masszahlen des Halbkugelzylinders

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi a^3}{3} (2 + 3q), \\ F &= \pi a^2 (3 + 2q), \quad q = h/a > 0, \\ M &= \pi a (\pi/2 + q). \end{aligned} \quad (7)$$

in (6) einzusetzen, um das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis

$$q^* = 2 - \pi/4 \quad (8)$$

zu erhalten.

Nun zeigt sich aber, dass die gefundenen speziellen Kappenkörper des Halbkugelzylinders nur das Teilintervall $0 < \lambda < 16/(16 + \pi)$ beanspruchen. Im restlichen Teilintervall $16/(16 + \pi) \leq \lambda \leq 8/(4 + \pi)$ umhüllt (5), wie man leicht nachprüft, nicht mehr die betrachteten Strecken, sondern ihre rechtsseitigen Verlängerungen. Es ist deshalb die von A (Figur 1) beschriebene Kurve ins Auge zu fassen, also die Bildkurve der Halbkugelzylinder. Für sie gilt:

$$\begin{aligned} x^{**} &= 2\lambda - \frac{(1 + \pi)}{4} \lambda^2, \\ y^{**} &= 3\lambda^2 - \frac{(8 + 3\pi)}{8} \lambda^3; \quad \frac{16}{16 + \pi} \leq \lambda \leq \frac{8}{4 + \pi}, \end{aligned} \quad (9)$$

Die Kurve (9) durchläuft für $\lambda_2 = 16/(8 + 3\pi)$ einen Scheitel bezüglich der x -Achse, hernach für $\lambda_3 = 4/(1 + \pi)$ einen Scheitel bezüglich der y -Achse und mündet mit $\lambda = 8/(4 + \pi)$ in den Bildpunkt der Halbkugel ein (Figur 3). Da von S_3 an die Kurve rückläufig ist und kein Doppelpunkt existiert, fällt der Teilbogen $\widehat{S_3 H}$ für das Maximum von $y(x)$ aus⁸⁾.

Endlich ist noch das Restintervall $8/(4 + \pi) > \lambda \geq 4/\pi$ zu erledigen⁹⁾. Eine weitläufige, in dieser Note wegzulassende Untersuchung zeigt, dass (Figur 2) nicht A , der dem Extremalkörper zugeordnete Punkt, sondern B entscheidet. Die Koordinaten der B -Kurve fallen mit wachsendem λ monoton, und diese Kurve verläuft weit unter dem obren Bildrand (somit auch die A -Kurve).

Damit können wir folgendes Schlussergebnis formulieren:

$$\begin{aligned} &\text{Im Intervall } 0 < x < x_1 \text{ besitzen spezielle Kappenkörper des Halbkugel-} \\ &\text{zylinders, im Intervall } x_1 \leq x \leq x_3 \text{ Halbkugelzylinder mit } h^* \geq h \geq h^{**} \\ &\text{bei vorgegebenem } x \text{ das absolute Maximum von } y \text{ (Figur 3).}^{10)} \end{aligned} \quad (10)$$

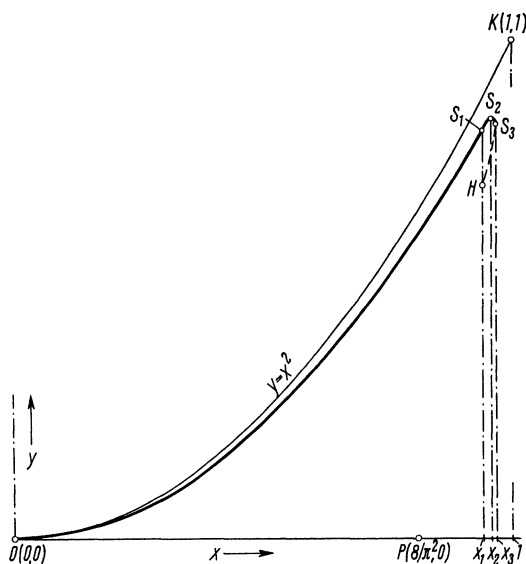
⁸⁾ Dass kein anderer Rand in Frage kommt, folgt aus der Untersuchung von $y_\lambda = 0$. Überdies kann direkt berechnet werden, dass die Steigung der Halbkugelzylinderkurve im zulässigen Intervall kleiner ist als 2λ , die Steigung der Strecken. Ferner kann man zeigen, dass die beiden Kurven in S_1 tangential anschliessen, so dass keine Ecke auftritt.

⁹⁾ Vergleiche H. HADWIGER: Math. Nach. 2, 114 (1949); 13, 19 (1955); 14, 377 (1956); Math. Annalen 122, 175 (1950); Abh. math. Sem. Hamburg. Uni. 18, 38 (1952); El. Math. 12, 101 (1957).

¹⁰⁾ In (5) und (9) liesse sich noch λ eliminieren, und man erhielte Ungleichungen in x und y . Dieselben fallen aber im Gegensatz zum analogen Problem in der vollen Klasse K_a kompliziert und sogar irrational aus, weshalb wir darauf verzichten.

Punkt	λ	x	y	q
S_1	$\frac{16}{16 + \pi}$	$\frac{32 (14 - \pi)}{(16 + \pi)^2}$	$\frac{256 (32 - 3 \pi)}{(16 + \pi)^3}$	$2 - \pi/4 > 1$
S_2	$\frac{16}{8 + 3 \pi}$	$\frac{32 (6 + \pi)}{(3 \pi + 8)^2}$	$\frac{256}{(8 + 3 \pi)^2}$	$\pi/4 < 1$
S_3	$\frac{4}{1 + \pi}$	$\frac{4}{1 + \pi}$	$\frac{8 (3 \pi - 2)}{(1 + \pi)^3}$	$\pi/2 - 1$
H	$\frac{8}{4 + \pi}$	$\frac{48}{(\pi + 4)^2}$	$\frac{256}{(4 + \pi)^3}$	0

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_H; \quad x_H < x_1 < x_2 < x_3.$$



Figur 3 (maßstäblich)

Damit ist aber auch bewiesen, dass die gefundenen Extremalkörper bei vorgegebenem M und ebensolchem F grösstes Volumen V aufweisen¹¹⁾.

H. BIERI, Bern

¹¹⁾ Es stellt sich noch die Frage, ob man die Klasse der Vergleichskörper auf konvexe Nichtrotationskörper erweitern könnte. Dies ist zu vermuten und kann in einem (y, z) -Diagramm mit Hilfe der Schwarzschen Abrundung in gewissem Umfang bewiesen werden.

Ungelöste Probleme

Nr. 51. Es bezeichne $A \subset R$ einen eigentlichen konvexen Körper des dreidimensionalen euklidischen Raumes R und A' den Normalriss von A in eine hier fest gewählte, und auch nachfolgend stets gleichbleibende Ebene $E \subset R$. Da A innere Punkte aufweist, trifft dies auch für den Eibereich A' bezüglich seiner Trägerebene E zu. Bedeuten V und F bzw. f und l das Volumen und die Oberfläche von A bzw. den Flächeninhalt und den Umfang von A' , so ist offenbar $V, F, f, l > 0$.

Es liegt auf der Hand, die Quotienten $q = F/V$ und $q' = l/f$, also die Verhältnisse von Mass und Randmass des Körpers A und seiner Projektion A' , miteinander zu vergleichen. Für einige einfache Testfälle sollen die Befunde festgestellt und in der nachfolgenden Tafel eingetragen werden.

I. A = Kugel vom Radius 1; II. A = Würfel der Kantenlänge 1, E parallel zu einer Seitenfläche; III. A = reguläres Tetraeder der Kantenlänge 1, E parallel zu einer Seitenfläche; IV. A = Kegel vom Radius 1 und der Höhe 1, E parallel zur Grundfläche; V. A = Kegel vom Radius 1 und der Höhe 1, E orthogonal zur Grundfläche.

A	q	q'
I	3	2
II	6	4
III	$6\sqrt{6}$	$4\sqrt{3}$
IV	$3 + 3\sqrt{2}$	2
V	$3 + 3\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$

Wie unmittelbar ablesbar, gilt in diesen Fällen stets $q > q'$ und viele weitere Experimente würden die Vermutung bekräftigen, dass hinter diesem Erfahrungsergebnis ein allgemein gültiger Satz stehen könnte, wonach für den Ähnlichkeitsinvariant angeetzten Quotienten

$$p = q/q' = Ff/Vl \quad (1)$$

stets $p > 1$ gelten dürfte. Ein Indiz liefert auch die Feststellung, dass dies für rotationssymmetrische Eikörper jedenfalls dann zutrifft, wenn E orthogonal zur Rotationsachse gewählt wird. In der Tat gilt nach einer bekannten Ungleichung¹⁾ $6V \leq a(3F - 4\pi a^2)$, wobei a den Äquatortradius von A anzeigt. Der Normalriss A' ist dann kongruent mit einem Äquatorkreis von A , sodass also $f = \pi a^2$ und $l = 2\pi a$ gilt. Mit einfacher Umrechnung resultiert jetzt $p \geq 1 + (2\pi a^3/3V)$, wobei Gleichheit für ein Zylotop, d. h. für einen Zylinder mit zwei aufgesetzten Halbkugeln besteht.

¹⁾ Math. Ann. 122 (1950); Seite 175 (Ib).

Wir präzisieren nun die aufgeworfene Frage, indem wir mit dem Ansatz

$$p_0 = \inf p = \inf (Ff/Vl) \quad (2)$$

das Problem aufzeigen, das auf alle eigentlichen Eikörper A des gewöhnlichen Raumes R bezogene Infimum p_0 des Quotientenverhältnisses

$$p = p(A) = [F(A)/V(A)]/[l(A^*)/f(A^*)] \quad (3)$$

zu ermitteln.

Zunächst kann man leicht erkennen, dass

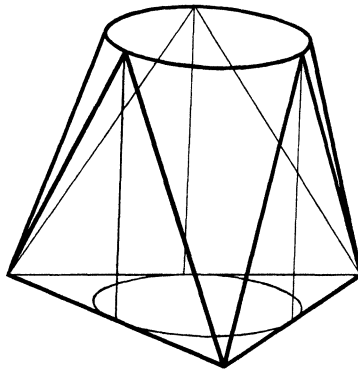
$$p_0 \leq 1 \quad (4)$$

ausfallen muss. Ist nämlich A ein gerader Kreiszylinder vom Radius 1 und der Höhe h und wählt man E orthogonal zur Rotationsachse, so ergibt sich $p = (1 + h)/h$, sodass mit $h \rightarrow \infty$ auf (4) geschlossen werden kann.

Nach der eingangs erörterten Hypothese, wonach stets $p > 1$ gelten müsste, würde andererseits $p_0 \geq 1$ sein, sodass sich mit $p_0 = 1$ die vollständige Lösung des aufgeworfenen Problems kennzeichnen liesse.

Leider ist aber die Vermutung, die sich mit der Musterung vieler Beispiele aufdrängt, falsch!

Dies wollen wir nachfolgend zeigen: Es sei K ein Kreisbereich vom Radius 1, D ein in der parallelen Ebene E im Abstand h liegendes reguläres Dreieck der Seitenlänge $2\sqrt{3}$, derart, dass die Verbindungsgerade des Zentrums von K mit dem Schwerpunkt von D auf E orthogonal steht. Der Normalriss von K in die Ebene E fällt dann mit dem Inkreis von D zusammen. Die konvexe Hülle von K und D im Raum R ist ein allgemeines Prismatoid P mit der Deckfläche K , der Grundfläche D und der Höhe h (vgl. hierzu die Figur).



Für die erforderlichen Rechnungen ist es nützlich, das Prismatoid P durch die Schnittbereiche $S(t)$ zu kennzeichnen, die von den Ebenen parallel zu E im Abstand th ($0 \leq t \leq 1$) von der Grundebene E aus P ausgeschnitten werden. Es ist nämlich $S(t) = (1 - t) D + t K$, wobei die angeschriebene Verbindung die Minkowskische Linearkombination bezeichnet. $S(t)$ ist der äussere Parallelbereich eines regulären

Dreiecks der Seitenlänge $2\sqrt{3}(1-t)$ der Spanne t . Für Flächeninhalt und Umfang ergeben sich die Formeln

$$f(t) = 3\sqrt{3}(1-t^2) + \pi t^2; \quad l(t) = 6\sqrt{3}(1-t) + 2\pi t.$$

Offensichtlich sind $f = f(0) = 3\sqrt{3}$ und $l = l(0) = 6\sqrt{3}$ die Masszahlen des Normalrisses P' von P . Mit passender Integration gewinnt man

$$V = [(6\sqrt{3} + \pi)/3] h,$$

$$F = 3\sqrt{3}(1+h) + \pi + 3 \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+h^2-4\cos w(1-\cos w)} dw.$$

Mit naheliegender einfacher Abschätzung resultiert

$$F < (3\sqrt{3} + \pi)(1 + \sqrt{1+h^2}),$$

sodass sich gemäss (1)

$$p < \frac{9\sqrt{3} + 3\pi}{12\sqrt{3} + 2\pi} \left(\frac{1 + \sqrt{1+h^2}}{h} \right)$$

ergibt. Mit $h \rightarrow \infty$ schliesst man nach (2) auf

$$p_0 \leq (9\sqrt{3} + 3\pi)/(12\sqrt{3} + 2\pi) \sim 0,924\dots, \quad (5)$$

sodass also jedenfalls $p_0 < 1$ ausfällt.

Schliesslich wollen wir noch darauf hinweisen, dass sich die Frage nach dem Wert von p_0 nicht etwa dadurch trivialisiert, dass p beliebig kleine Werte annehmen kann, sodass $p_0 = 0$ wäre, sondern dass gezeigt werden kann, dass stets $p > 1/2$ gilt. Der Nachweis kann an dieser Stelle nicht geführt werden. Im Hinblick hierauf wird mit Sicherheit

$$p_0 \geq 1/2 \quad (6)$$

gelten. Das hier vorgelegte ungelöste Problem lautet also: Welches ist der Wert des mit (2) angesetzten Infimums p_0 ($0,500 \leq p_0 \leq 0,924$)? H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

An Elementary Set Partition Problem

In an earlier note R. SCHNEIDERREIT [2] considers the problem of distributing the numbers $1, 2, \dots, n$ into two boxes so that not more than m consecutive numbers are in the same box; permuting the numbers in a box or interchanging the boxes does not give a new distribution. If $F_m(n)$ denotes the number of such distributions it is shown that

$$F_m(n) = F_m(n-1) + \dots + F_m(n-m), \quad n > m \quad (1)$$

with $F_m(n) = 2^{n-1}$ for $1 \leq n \leq m$. In the particular case $m = 2$ relation (1) with $F_2(n) = f(n)$ becomes $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ with $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(n)$ being the well-known Fibonacci number.

By treating the above problem as a partition problem a more general result is herein obtained. Indeed, the method of proof is quite elementary and direct.

Denote by $g_m(n, r)$, m, n, r positive integers, the number of partitions of $\{1, 2, \dots, n\}$ into r non-empty mutually disjoint subsets or parts such that no part contains more than m consecutive integers. Equivalently $g_m(n, r)$ is the number of ways of distributing n unlike numbered objects $1, 2, \dots, n$ into r like cells such that no cell is empty and no cell contains more than m consecutively numbered objects. Clearly $g_m(n, r) = 0$ when $n < r$.

Assume $m < n$. In a partition counted by $g_m(n, r)$, either object n is in a part not containing object $n-1$, or object n is in a part containing object $n-1$ but not object $n-2$, or object n is in a part containing $n-1, n-2$ but not $n-3, \dots$, or object n is in a part containing $n-1, n-2, \dots, n-m+1$ but not $n-m$. Now the number of partitions such that $n, n-1, \dots, n-i+1$ but not $n-i$, $1 \leq i \leq m$, are in the same part is

$$g_m(n-i, r-1) + (r-1) g_m(n-i, r) \quad (2)$$

since the first number counts those partitions for which $n, n-1, \dots, n-i+1$ are in the same part with no other objects and $(r-1) g_m(n-i, r)$ counts those partitions for which $n, n-1, \dots, n-i+1$ but not $n-i$ are in the same part with that part containing at least one other object. Summing (2) over all i , $1 \leq i \leq m$ we have for $m < n$ the relation

$$g_m(n, r) = g_m(n-1, r-1) + g_m(n-2, r-1) + \dots + g_m(n-m, r-1) + \\ + (r-1) [g_m(n-1, r) + g_m(n-2, r) + \dots + g_m(n-m, r)]. \quad (3)$$

With $r = 2$ in (3) we have

$$g_m(n, 2) = g_m(n-1, 1) + g_m(n-1, 2) + \dots + g_m(n-m, 1) + g_m(n-m, 2). \quad (4)$$

Letting $F_m(n) = g_m(n, 1) + g_m(n, 2)$, i.e. the number of partitions of $\{1, 2, \dots, n\}$ into at most two parts with not more than m consecutive integers in any part, then for $m < n$, $g_m(n, 1) = 0$ and from (4) we obtain relation (1).

Defining $g_m(n, r) = 0$ when $n \leq 0$, then relation (3) holds for all positive integral values of m . When $m > n-r$ there are no restrictions on the partitions and $g_m(n, r)$ is simply the number of partitions of a set of n elements into r non-empty, mutually disjoint subsets or parts. With $m = n-r+1$, and $S(n, r) = g_m(n, r)$ we have from (3) the relation $S(n, r) = S(n-1, r-1) + S(n-2, r-1) + \dots + S(r-1, r-1) +$

$$+ (r-1) [S(n-1, r) + S(n-2, r) + \dots + S(r-1, r)]. \quad (5)$$

Since the number of ways of distributing n unlike objects into r unlike cells with none empty is easily seen to be, by the principle of inclusion and exclusion, $\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r}{j} (r-j)^n$,

we have the known expression (cf. [1])

$$S(n, r) = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r}{j} (r-j)^n.$$

Therefore for $m \geq n$, $F_m(n) = S(n, 1) + S(n, 2) = 2^{n-1}$ as noted in [2]. It is easy to see that (5) is equivalent to the relation

$$S(n, r) = S(n-1, r-1) + r S(n-1, r) \quad (6)$$

where $S(n-1, r-1)$ counts those partitions with n in a part by itself while $r S(n-1, r)$ counts those partitions with n in a part containing at least one other element. Of course

the numbers $S(n, r)$ with n, r integers, $S(n, r) = 0$ for $r > n$ and $r < 1$, are the well known Stirling numbers of the second kind (cf. [1]) sometimes defined by

$$\sum_{r=1}^n S(n, r) x^{(r)} = x^n, \quad n > 0$$

where $x^{(r)} = x(x-1)\dots(x-r+1)$.

MORTON ABRAMSON, York University, Toronto, Canada

REFERENCES

[1] J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis* (John Wiley, N.Y. 1958).
[2] R. SCHNEIDERREIT, *Eine mögliche Verallgemeinerung der Fibonaccischen Zahlen*,
El. Math. 15, 82–84 (1960).

Two More Tetrahedra Equivalent to Cubes by Dissection

Some tetrahedra can be divided by plane cuts into a finite number of pieces which can be assembled to form a cube. A tabulation of the known cases was published by the author [1]. It included the findings of HILL [2] and SYDLER [4]. Since then, a supplementary list of five new tetrahedra was published by LENHARD [5]. The list is not complete. Two more cases, described in the following, were discovered in connection with another problem.

A classic problem in polyhedra is the determination of those polyhedral shapes which can fill space by replication of a single shape. As a special case, SOMMERVILLE derived the space-filling tetrahedra [6]. Another modification is the allowance of the use of isometric tetrahedra; that is, those tetrahedra which are mirror images of each other. These were described recently by DAVIES [7].

The following definitions and symbols will be used in the preparation of a tabulation of the solutions.

DEFINITION: A space-filling tetrahedron (designated by SFT) is one which, together with other congruent tetrahedra, can fill space without overlapping.

DEFINITION: A space-filling twin-tetrahedron (designated by SFTT) is one, which together with congruent tetrahedra and their mirror images, can fill space without overlapping.

Table 1. Tabulation of space-filling tetrahedra

No.	Description	Type	Illustrated by	
			SOMMERVILLE [6]	DAVIES [7]
1	HILL, first type	SFTT		Top. p. 51
2	HILL, first type, $\alpha = \pi/3$	SFT	Figure 7	Top. p. 51
3	HILL, second type, $\alpha = \pi/4$	SFT	Figure 9	Bot. p. 51
4	HILL, special	SFT	Figure 8	Bot. p. 51
5	SOMMERVILLE	SFT	Figure 10	Bot. p. 51
6	DAVIES (1/2 of SOMMERVILLE)	SFTT		Bot. p. 51

Replications of the foregoing space-filling tetrahedra, Nos. 2 to 5, can be assembled to form a parallelepiped. Therefore, each such tetrahedron is also dissectible to form a cube, as was shown by SYDLER [3, pp. 269–270]. Another exposition of this proof is given by BOLTYANSKII [11, pp. 60–63]. The tetrahedron, designated as No. 6, can be cut into twelve pieces to form its isomer, as was shown by BRICARD [8]. Hence, two tetrahedra of this type can be made into one of No. 5. Therefore, all of the tetrahedra in Table 1 are dissectible to form cubes. However, Numbers 5 and 6, described by SOMMERVILLE and DAVIES, have been overlooked in the previous tabulations of dissectible tetrahedra.

Table 2

Edge	HILL, first type		HILL, second type		HILL, third type		HILL, special	
	Length	Dihedral angle	Length	Dihedral angle	Length	Dihedral angle	Length	Angle
AB	$\sin \alpha$	α	$2 \sin \alpha$	α	$2 \sin \alpha$	α	$3^{1/2}$	$\pi/3$
AC	$3^{1/2} \cos \alpha$	$\pi/3$	$3^{1/2} \cos \alpha$	$\pi/3$	$12^{1/2} \cos \alpha$	$\pi/6$	$2^{1/2}$	$\pi/2$
AD	1	$\pi/2$	2	$\pi/2$	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\pi - \cos^{-1}(3^{-1/2} \cos \alpha)$	2	$\pi/4$
BC	1	$\pi/2$	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\pi - \cos^{-1}[(\cot \alpha)/2]$	2	$\pi/2$	1	$\pi/2$
BD	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$	$2 \sin \alpha$	$\pi/2 - \alpha$	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$	$3^{1/2}$	$\pi/3$
CD	$\sin \alpha$	α	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\cos^{-1}[(\cot \alpha)/2]$	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\cos^{-1}(3^{-1/2} \cos \alpha)$	$2^{1/2}$	$\pi/2$

Edge	SYDLER, T_1		SYDLER, T_2		SYDLER, T_3		SYDLER, T_4		GOLDBERG, T_5		GOLDBERG, T_6	
	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle
AB	τ	$\pi/2$	$3^{1/2}$	$2\pi/3$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$2\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$4\pi/5$
AC	τ^{-1}	$\pi/2$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$\pi/5$	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$\pi/5$
AD	1	$\pi/2$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$\pi/5$	2	$\pi/2$	$2\tau^{-1}$	$\pi/2$	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$\pi/5$
BC	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$2\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$3\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$2\pi/5$	$3^{1/2}$	$\pi/3$
BD	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$2\pi/5$	$3^{1/2} \tau^{-1}$	$\pi/3$	$3^{1/2} \tau^{-1}$	$2\pi/3$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$2\pi/5$	$3^{1/2}$	$\pi/3$
CD	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$2\pi/5$	2	$\pi/2$	$5^{1/4} \tau^{-3/2}$	$2\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-3/2}$	$3\pi/5$	$2\tau^{-1}$	$\pi/2$	2τ	$\pi/2$

Edge	LENHARD, T_7		LENHARD, T_8		LENHARD, T_9		LENHARD, T_{10}		LENHARD, T_{11}		SOMMERVILLE-GOLDBERG, T_{12}		DAVIES-GOLDBERG, T_{13}	
	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle	Length	Angle
AB	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$3\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$3\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$3\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$3\pi/10$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$3\pi/10$	$3^{1/2}$	$\pi/6$	$3^{1/2}$	$\pi/6$
AC	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$3^{1/2}$	$\pi/6$	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$3^{1/2}$	$\pi/6$	$3^{1/2}$	$\pi/6$	$2^{1/2}$	$\pi/2$
AD	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/5$	$(1 + 3\tau^{-1})^{1/2}/2$	α_3	1	α_4	$5^{1/2}/2$	$\pi - \alpha_7$	$5^{1/2}/2$	$(\pi - \alpha_7)/2$
BC	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/10$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/5$	$5^{1/4} \tau^{-1/2}$	$\pi/10$	2	$\pi/4$	1	$\pi/4$
BD	$3^{1/2}$	$\pi/3$	$3^{1/2}$	$\pi/5$	$(1 + 3\tau)^{1/2}/2$	α_2	$(1 + 3\tau^{-1})^{1/2}/2$	$\pi - \alpha_3$	1	α_5	$5^{1/2}/2$	$(\pi + \alpha_7)/2$	$5^{1/2}/2$	$(\pi - \alpha_7)/2$
CD	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$3\pi/5$	$\pi - \alpha_1$	$\pi - \alpha_1$	$(1 + 3\tau)^{1/2}/2$	$\pi - \alpha_2$	$5^{1/4} \tau^{1/2}$	$3\pi/5$	1	α_6	$5^{1/2}/2$	$(\pi + \alpha_7)/2$	$1/2$	$\pi/2$

The list of all the tetrahedra which can be dissected to form cubes, known at the present time, is given in Table 2. It is not known whether this list is exhaustive. BRICARD [8] and DEHN [9] have shown that a necessary condition on the dihedral angles A, B, C, D, E, F , now known as one of Dehn's conditions, requires that

$$m_1 A + m_2 B + m_3 C + m_4 D + m_5 E + m_6 F = k \pi,$$

where the m_i and k integers. SYDLER [10] has shown that this condition, plus another DEHN condition on the lengths of the edges, is sufficient. However, it should be noted that, in Table 2, at least two of the dihedral angles of each tetrahedron are rational fractions of π . Furthermore, in all of these cases, $m \Sigma A = k \pi$. This is a stronger condition than the DEHN condition on the angles in which the coefficients may be different integers. It is an open question whether this stronger condition is necessary.

An excellent summary and exposition of the earlier papers on the subject of the dissection of polygons and polyhedra to form other polygons and polyhedra is given by BOLTYANSKII [11].

In the table, $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$, α is a free variable,

$$\alpha_1 \approx 50^\circ, \tan \alpha_1 = \sqrt{7/5}; \cos 2\alpha_1 = -1/6;$$

$$\alpha_2 \approx 65^\circ, \tan \alpha_2 = \sqrt{9 - 2\sqrt{5}}; \cos 4\alpha_2 = -3(\sqrt{5} - 1)/20 = -3\tau^{-1}/10;$$

$$\alpha_3 \approx 75^\circ, \tan \alpha_3 = \sqrt{9 + 2\sqrt{5}}; \cos 4\alpha_3 = 3(\sqrt{5} + 1)/20 = 3\tau/10;$$

$$\alpha_4 \approx 101^\circ, \tan \alpha_4 = -3 - \sqrt{5} = -2\tau^2;$$

$$\alpha_5 \approx 117^\circ, \tan \alpha_5 = -2;$$

$$\alpha_6 \approx 143^\circ, \tan \alpha_6 = -3 + \sqrt{5} = -2\tau^{-2}; \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360^\circ;$$

$$\alpha_7 \approx 48^\circ, \cos \alpha_7 = 2/3.$$

M. GOLDBERG, Washington, D.C.

BIBLIOGRAPHY

- [1] M. GOLDBERG, *Tetrahedra Equivalent to Cubes by Dissection*, *El. Math.* 13, 107–108 (1958).
- [2] M. J. M. HILL, *Determination of the Volume of Certain Species of Tetrahedrons*, *Proc. London Math. Soc.* 27, 39–52 (1896).
- [3] J.-P. SYDLER, *Sur la décomposition des polyèdres*, *Comm. Math. Helv.* 16, 266–273 (1943–44).
- [4] J.-P. SYDLER, *Sur les tétraèdres équivalents à un cube*, *El. Math.* 11, 78–81 (1956).
- [5] H.-C. LENHARD, *Über fünf neue Tetraeder, die einem Würfel äquivalent sind*, *El. Math.* 17, 108–109 (1962).
- [6] D. M. Y. SOMMERVILLE, *Space-filling Tetrahedra in Euclidean Space*, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41, 49–57 (1923).
- [7] H. L. DAVIES, *Packings of Spherical Triangles and Tetrahedra*, *Proc. Colloquium on Convexity*, pp. 42–51 (Copenhagen 1965).
- [8] R. BRICARD, *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres*, *Nouv. Ann. Math.* 55, 331–334 (1896).
- [9] M. DEHN, *Über den Rauminhalt*, *Math. Ann.* 55, 465–478 (1902); *Göttingen Nachr., Math. Phys.* 1900, 345–354.
- [10] J.-P. SYDLER, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, *Comm. Math. Helv.* 40, 43–80 (1965).
- [11] V. G. BOLTYANSKII, *Equivalent and Equidecomposable Figures*, translated from the Russian edition (1956) by A. K. Henn and C. E. Watts, D. C. Heath & Co. (Boston 1963).

k -Tuples of the First n Natural Numbers

In connection with the problems of infinite sets investigated by ERDÖS and HAJNAL in [1], ERDÖS proposed a problem of the k -tuples of a finite set. This problem in its most general form can be formulated as follows. Take a system of k -tuples of the first n natural numbers. Suppose that the set of the i_1 -st, i_2 -nd, \dots , i_l -th ($l \leq k-1$) numbers of an arbitrary k -tuple of the system *does not* coincide with the set of the j_1 -st, j_2 -nd, \dots , j_l -th numbers of another k -tuple of the system. At most how many k -tuples can the system contain? In this paper we solve the problem in a special case.

Denote by $f(n, k)$ the maximal number of k -tuples which can be chosen from the first n numbers ($1 \leq k \leq n$) such that the last $k-1$ numbers of a k -tuple do not coincide with the first $k-1$ numbers of another selected k -tuple.

It is trivial that $f(n, 1) = n$.

It will be proved that if $k \geq 2$ then

$$f(n, k) = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-2m}{k-1}.$$

The proof uses induction on n . If $n = k$, $f(k, k) = 1$. If $n = k+1$, only the k -tuple of the first and the k -tuple of the last k numbers cannot be selected at the same time, consequently $f(k+1, k) = k$. Thus the statement holds for $n = k, k+1$, and it may be supposed that $n \geq k+2$ and it holds for the numbers less than n .

Put $N = \{1, 2, \dots, n\}$ and $M = \{2, 3, \dots, n-1\}$. Consider a maximal system \mathfrak{N} of k -tuples of N , satisfying the condition. Denote by κ a $(k-2)$ -tuple. $\kappa \subset N$ and $\kappa \subset M$ will mean that the elements of κ are in N and M , respectively. Divide the $(k-1)$ -tuples of N into two classes: \mathfrak{A} and \mathfrak{B} . If a $(k-1)$ -tuple consists of the first $k-1$ elements of a k -tuple of \mathfrak{N} , then put the $(k-1)$ -tuple into \mathfrak{A} , otherwise into \mathfrak{B} . Denote by $\alpha(\kappa)$ the number of $(k-1)$ -tuples of \mathfrak{A} , the last $k-2$ elements of which form κ , and similarly $\beta(\kappa)$ denotes the number of $(k-1)$ -tuples of \mathfrak{B} , the first $k-2$ elements of which form κ . Because of the maximality of \mathfrak{N} if κ consists of the last $k-2$ elements of a $(k-1)$ -tuple of \mathfrak{A} and it is at the same time the set of the first $k-2$ elements of a $(k-1)$ -tuple of \mathfrak{B} , then \mathfrak{N} contains the k -tuple which is the union of these two $(k-1)$ -tuples. It is obvious that this is a unique representation of the elements of \mathfrak{N} as certain unions of elements of \mathfrak{A} and \mathfrak{B} . Consequently

$$f(n, k) = \sum_{\kappa \subset N} \alpha(\kappa) \beta(\kappa).$$

If κ contains 1, $\alpha(\kappa) = 0$ and if κ contains n , $\beta(\kappa) = 0$. Thus it can be supposed that $\kappa \subset M$ in the sum above. On the other hand if $\kappa \subset M$, the $(k-1)$ -tuple consisting of 1 and of the elements of κ must belong to \mathfrak{A} . So if $\alpha'(\kappa)$ denotes the number of $(k-1)$ -tuples of \mathfrak{A} in M , having κ as the 1st $k-2$ elements, then $\alpha(\kappa) = \alpha'(\kappa) + 1$. The number $\beta'(\kappa)$ is defined similarly and $\beta(\kappa) = \beta'(\kappa) + 1$. But then

$$\begin{aligned} f(n, k) &= \sum_{\kappa \subset M} \alpha(\kappa) \beta(\kappa) = \sum_{\kappa \subset M} (\alpha'(\kappa) + 1) (\beta'(\kappa) + 1) \\ &= \sum_{\kappa \subset M} \alpha'(\kappa) \beta'(\kappa) + \sum_{\kappa \subset M} (\alpha'(\kappa) + \beta'(\kappa)) + \sum_{\kappa \subset M} 1 \leq f(n-2, k) + \binom{n-2}{k-1} \\ &\quad + \binom{n-2}{k-2} = f(n-2, k) + \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Using the inductual hypothesis this gives

$$f(n, k) \leq \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-1-2m}{k-1}.$$

To prove the converse inequality take the following system \mathfrak{N}^* of k -tuples of N . If f, l and m are the first, last and an arbitrary middle element of a k -tuple, respectively, then \mathfrak{N}^* contains this k -tuple if and only if $n-l < m \leq n-f$. Following the previous

proof it is immediate by induction that \mathfrak{N}^* has exactly $\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-1-2m}{k-1}$ elements.

This proves the required result.

Now consider systems of k -tuples of N satisfying the following condition: there are no two k -tuples in a system, say κ_1 and κ_2 , such that the last element of κ_1 is a middle element of κ_2 and the first element of κ_2 is a middle element of κ_1 . Denote by $g(n, k)$ the maximal number of elements of these systems.

As this condition is much stronger than the previous one, $f(n, k) \geq g(n, k)$ must hold. It is fairly surprising that *equality holds* in this inequality:

$$f(n, k) = g(n, k).$$

This follows simply from the construction given above, since \mathfrak{N}^* satisfies the stronger condition too. For suppose that f_1, f_2, l_1, l_2 are the first and last elements of two k -tuples of \mathfrak{N}^* for which f_2 is between f_1 and l_1 , furthermore l_1 is between f_2 and l_2 . But then $n-l_1 < f_2, l_1 \leq n-f_2$, consequently $n-f_2 < l_1 \leq n-f_2$, so this shows there are no such two k -tuples, i.e. \mathfrak{N}^* satisfies the stronger condition.

It is likely that the complete solution of the original problem is very difficult and it needs an entirely different method.

BÉLA BOLLOBÁS, Research Institute of Mathematics, Budapest

REFERENCE

- [1] P. ERDŐS and A. HAJNAL, *On Chromatic Number of Infinite Graphs; Theory of Graphs* (Proc. of the Colloquium held at Tihany), 83–98.

Sur l'équation diophantienne $(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = (z^2-1)^2$

W. SIERPIŃSKI a exposé dans [1], p. 55, les quelques résultats connus concernant l'équation:

$$(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = (z^2-1)^2 \quad x, y, z \text{ entiers } > 1, \quad (1)$$

et noté que, pour x, y, z impairs, $x = 2a+1, y = 2b+1, z = 2c+1$, cette équation pouvait s'écrire:

$$t_a^2 + t_b^2 = t_c^2 \quad a, b, c \text{ entiers } > 0, \quad t_u = \frac{u(u+1)}{2}. \quad (2)$$

Dans une précédente note [2], nous avons démontré l'impossibilité de (2) si deux au moins des trois nombres a, b, c sont consécutifs.

Supposant $x < y < z$, ce qui est loisible puisque $x \neq y$, nous prouvons cette fois que:

(A) (1) est impossible avec $y-x=1$.

(B) $(x, y, z) = (10, 13, 14)$ est la seule solution de (1) avec $z - y = 1$.

(C) (1) est impossible avec $y - x$ ou $z - y$ ou $z - x = 2$.

(A) Nous allons montrer que l'équation:

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = u^2 \quad x, y, u \text{ entiers} > 1, \quad (3)$$

n'a, pour $y - x = 1$, que la solution $(x, y, u) = (3, 4, 17)$. Le résultat s'ensuivra immédiatement puisque $z^2 - 1 \neq 17$.

Avec $y = x + 1$ donc u impair, $u = 2v + 1$, (3) devient $t_v = t_x^2$. Or W. LJUNGGREN [3] puis J. W. S. CASSELS [4] ont montré que $t_0, t_1, t_8 (= t_3^2)$ sont les seuls nombres triangulaires qui sont les carrés de nombres triangulaires. Donc $x = 3, v = 8, u = 17$.

(B) Si $z = y + 1$, l'équation:

$$u^2 + (y^2 - 1)^2 = (z^2 - 1)^2 \quad u, y, z \text{ entiers} > 1, \quad (4)$$

peut s'écrire $(2y + 1)(2y^2 + 2y - 1) = u^2$. Posons $P = 2y + 1, Q = 2y^2 + 2y - 1$. On a $PQ = u^2$ avec P, Q entiers > 0 ; d'où $P = dP_1^2, Q = dQ_1^2$ avec $d = (P, Q)$ et P_1, Q_1 entiers > 0 . Comme $P^2 - 2Q = 3$ on obtient finalement:

$$d^2 P_1^4 - 2dQ_1^2 = 3 \quad \text{avec } d = 1 \text{ ou } 3.$$

Comme d, P_1, Q_1 sont impairs on a $1 - 2d \equiv 3 \pmod{8}$ donc $d = 3$ et $3P_1^4 - 2Q_1^2 = 1$, équation qui vient d'être résolue par R. T. BUMBY [5] et qui donne $(P_1, Q_1) = (1, 1)$ ou $(3, 11)$. La première solution est à écarter car elle conduit à $y = 1$. La seconde fournit $(u, y, z) = (99, 13, 14)$, seule solution de (4) avec $z = y + 1$. En revenant à (1), on a $x^2 - 1 = 99$ soit $x = 10$.

(C) 1°) Si $z - x = 2$, alors $y - x = 1$ et (1) est impossible d'après A.

2°) Si $y - x = 2, x$ et y ont même parité et z est impair. x et y ne peuvent être pairs car $(z^2 - 1)^2 \not\equiv 2 \pmod{4}$. Ainsi (1) a lieu avec $x, y = x + 2, z$ impairs et implique (2) avec $b = a + 1$, ce qui est impossible d'après [2].

Remarquons qu'en revanche l'équation (3) possède une infinité de solutions avec $y = x + 2$ car alors, x étant impair pour la même raison que ci-dessus, $x = 2p - 1, p$ entier > 1 , elle s'écrit $32p^2(p^2 + 1) = u^2$, d'où on tire successivement $2(p^2 + 1) = v^2, v$ pair $> 2, v = 2w$, soit finalement l'équation de PELL $p^2 - 2w^2 = -1$, de solution fondamentale $(p, w) = (1, 1)$.

3°) Si $z - y = 2$, les solutions de l'équation (4) sont $(u, y, z) = (8v^3, 2v^2 - 1, 2v^2 + 1)$, v entier > 1 , car cette équation devient $u^2 = [2(y + 1)]^3$. Alors (1) a lieu avec $x, y, z = y + 2$ impairs et implique (2) avec $c = b + 1$, ce qui est impossible d'après [2].

M. E. BLANPAIN, Lille

RÉFÉRENCES

- [1] W. SIERPIŃSKI, *Elementary Theory of Numbers*, Monografie Matematyczne, Tome 42, Warszawa (1964).
- [2] M. E. BLANPAIN, *Sur le problème de ZARANKIEWICZ*, *El. Math.* 23, 135 (1968). Un résultat important concernant ce problème a été obtenu récemment par V. DIMIEV [6].
- [3] W. LJUNGGREN, *Solution complète de quelques équations du sixième degré à deux indéterminées*, *Arch. Math. Naturv.* 48, 177-211 (spécialement 202-205) (1946).
- [4] J. W. S. CASSELS, *Integral Points on Certain Elliptic Curves*, *Proc. London Math. Soc.* 14A, 55-57 (1965).
- [5] R. T. BUMBY, *The Diophantine Equation $3x^4 - 2y^2 = 1$* , *Math. Scand.* 27, 144-148 (1967).
- [6] V. DIMIEV, *Right Triangles whose Sides are Triangular Numbers* (Bulgare. Résumés russe et français), *Godišnik. Visš. Tehn. Učebn. Zaved. Mat.* 7 (1964), kn. 3, 9-14 (1965); *Math. Rev.* 36 (août 1968).

Aufgaben

Aufgabe 545. Es sei S eine endliche Menge mit n Elementen ($n > 1$). Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $f(n)$ mit folgender Eigenschaft: Unter $f(n)$ verschiedenen, beliebig ausgewählten (echten) Teilmengen von S gibt es immer eine, die zu zwei anderen elementfremd ist.

P. ERDÖS

Lösung des Aufgabenstellers: Wir benutzen den folgenden Satz (ERDÖS-KO-RADO, Intersection Theorems for Systems of Finite Sets, Quarterly J. of Math. 1961, p. 313–320): Es sei $|S| = n$, $B_j \subset S$, $|B_j| \leq k \leq n/2$, $1 \leq j \leq t$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq t$. Dann gilt $\max t = \binom{n-1}{k-1}$.

Nun sei $A_i \subset S$, $1 \leq i \leq k$ ein Mengensystem mit der Eigenschaft, dass zu jedem A_i höchstens ein A_j mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ existiert. Wir wollen k von oben abschätzen. $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ sei dasjenige Teilsystem, dessen Mengen folgende Bedingungen erfüllen:

1. $|A_{i_j}| \leq n/2$, $1 \leq j \leq r$.

2. Das Komplement \bar{A}_{i_j} gehört auch zum Teilsystem.

Offenbar gilt $A_{i_u} \cap A_{i_v} \neq \emptyset$, $1 \leq u \leq v \leq r$, denn andernfalls hätte man $A_{i_u} \cap A_{i_v} = A_{i_u} \cap \bar{A}_{i_u} = \emptyset$ entgegen der Voraussetzung über die A_i . Die A_{i_j} erfüllen also die Bedingungen für die B_j im Satz, wobei $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Somit ist

$$r \leq \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \quad \text{und} \quad k \leq 2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1},$$

da die Anzahl der Teilmengen von S , die mehr als $n/2$ Elemente enthalten, höchstens 2^{n-1} ist. Man sieht leicht, dass diese Schranke für k bestmöglich ist. Für $n = 2m$ bilden die Mengen mit mindestens m Elementen ein System $\{A_i\}$. In diesem Fall ist

$$k = \frac{1}{2} \left(2^{2m} - \binom{2m}{m} \right) = 2^{2m-1} + \binom{2m-1}{m-1}.$$

Für $n = 2m + 1$ wird ein System $\{A_i\}$ geliefert durch die Mengen mit mindestens $m + 1$ Elementen und alle Mengen mit m Elementen, die ein festes Element enthalten.

Wir haben somit das Resultat

$$f(n) = 1 + 2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}.$$

Aufgabe 585. Die Eckpunkte A_i ($i = 1, 2, 3$) eines gegebenen Dreiecks sind die Mittelpunkte von drei Kreisen, die durch einen Punkt P gehen. B_i sei der zweite Schnittpunkt der Kreise um A_{i+1} , A_{i+2} ($A_4 = A_1$, $A_5 = A_2$).

1. Konstruiere die Punkte P , für die das Dreieck $B_1B_2B_3$ gleichseitig ist.

2. Für welche Punkte P liegen B_1 , B_2 , B_3 auf einer Geraden?

3. Beweise, dass die Umkreise der Dreiecke $A_iB_{i+1}B_{i+2}$ ($i = 1, 2, 3$) sich in einem Punkt schneiden.

J. BREJCHA, Brno, ČSSR

Lösung: Vorbemerkung: Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(AXB)$, $0 \leq \alpha < \pi$, zweier Geraden AX und BX sei derjenige Winkel, der von der ungerichteten Geraden AX überstrichen wird, wenn man sie im Uhrzeigersinn auf die Gerade BX dreht, also $\sphericalangle(AXB) = \pi - \sphericalangle(BXA) \bmod \pi$. Dann gilt der Peripheriewinkelsatz in folgender Form: Die Punkte X mit $\sphericalangle(AXB) = \alpha = \text{const}$, A, B feste Punkte, sind genau die Punkte eines eindeutig bestimmten Vollkreises durch A und B .

1. Die Punkte B_i entstehen aus P durch Spiegelung an den Dreiecksgeraden $A_{i+1}A_{i+2}$. B_i wird somit durch zwei Spiegelungen, d.h. durch eine Drehung um den doppelten Winkel $2\alpha_{i+1}$ der Spiegelachsen, nach B_{i+2} gebracht. Die Bedingung der Gleichseitigkeit

$$\overline{B_i B_{i+2}} = 2 \cdot \overline{A_{i+1} P} \cdot \sin \alpha_{i+1} = c = \text{const für } i = 1, 2, 3$$

führt mit dem Sinussatz zu $\overline{A_i P} : \overline{A_j P} = a_i : a_j$ ($a_i = \overline{A_{i+1} A_{i+2}}$). Das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ ist daher genau dann gleichseitig, wenn P Schnittpunkt der drei Apollonischen Kreise ist.

2. Die Dreiecksgerade $A_{i+1}A_{i+2}$ schneidet die Strecke $\overline{PB_i}$ senkrecht im Streckenmittelpunkt M_i . Liegen die Punkte B_i auf einer Geraden, dann auch die Punkte M_i . Die Lotfusspunkte M_i der von P aus auf die Dreiecksgeraden gefällten Lote liegen genau dann auf einer Geraden, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ liegt (Satz von Wallace).

3. Q und B_2 seien die Schnittpunkte der Umkreise der Dreiecke $B_2 A_1 B_3$ und $B_1 A_3 B_2$. Aus der in der Vorbemerkung angegebenen Winkeldefinition und dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$\sphericalangle(B_1 Q B_3) = \sphericalangle(B_1 Q B_2) + \sphericalangle(B_2 Q B_3) = 2(\alpha_1 + \alpha_3) \bmod \pi = -2\alpha_2 \bmod \pi = \sphericalangle(B_1 A_2 B_3),$$

d.h. Q liegt auch auf dem Umkreis von Dreieck $B_1 A_2 B_3$.

W. VINZENZ und R. KOCH, München

Weitere Lösungen sandten J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), R. WHITEHEAD (Hayle/England), D. VELJAN, Zagreb.

Aufgabe 586. Show that

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k/2}{m} = \frac{n}{m} \binom{n-m-1}{m-1} 2^{n-2m} \quad (m \geq 1).$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Lösung: Wir setzen

$$y_n(x) = (1 + \sqrt{1+x})^n = \sum_{m=0}^{\infty} f(n, m) x^m. \quad (1)$$

Dann ist (vgl. die Lösung von Aufgabe 563, *El. Math.* 23, 139 (1968))

$$f(n, m) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k/2}{m}.$$

Man prüft leicht nach, dass $y_n(x)$ der Rekursion

$$y_{n+2}(x) - 2y_{n+1}(x) - xy_n(x) = 0 \quad (2)$$

genügt. Trägt man in (2) die Reihenentwicklung nach (1) ein, so resultiert für die Grössen $f(n, m)$ die partielle Differenzengleichung

$$f(n+2, m+1) - 2f(n+1, m+1) - f(n, m) = 0 \quad (m \geq 1). \quad (3)$$

Nach (1) ist $f(n, 0) = 2^n$, $f(0, 0) = 1$, $f(0, m) = 0$ für alle $m \geq 1$. Offensichtlich lassen sich nach (3) alle Werte $f(n, m)$ rekursiv berechnen, wenn nur die «Anfangswerte» $f(n, 1)$ für alle n und $f(1, m)$ für alle m bekannt sind. Aus (1) folgt nun unmittelbar

$$f(n, 1) = n 2^{n-2}, \quad f(1, m) = \binom{1/2}{m} \quad \text{für alle } n \text{ und } m \geq 1. \quad (4)$$

Der Ausdruck

$$\frac{n}{m} 2^{n-2m} \binom{n-m-1}{m-1}$$

stimmt für $m = 1$ und alle $n \geq 1$ sowie für $n = 1$ und alle $m \geq 1$ mit den Werten in (4) überein. Ausserdem prüft man leicht durch Einsetzen in (3) nach, dass er Lösung dieser Differenzengleichung ist.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung, die an die Anfangswerte (4) angepasst ist, wird daher durch

$$f(n, m) = \frac{n}{m} 2^{n-2m} \binom{n-m-1}{m-1}$$

gegeben. Damit ist die in Aufgabe 586 behauptete Identität bewiesen.

G. BACH, Braunschweig

Weitere Lösungen sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf).

Aufgabe 587. Prove that either of the following properties characterize the exponential function:

Property 1. $f(z)$ non-zero, entire and there exists a simple analytic arc A which divides the plane into two unbounded simply connected domains S_1 and S_2 with

$$f(S_1) \subset \{w: |w| < 1\} \text{ and } f(S_2) \subset \{w: |w| > 1\}.$$

Property 2. $f(z)$ entire and the image of the left and right half planes are contained in $\{w: |w| < 1\}$ and $\{w: |w| > 1\}$ respectively.

W. J. SCHNEIDER, Syracuse University, USA

Solution by the Proposer: 1) *Theorem:* The only function $f(z)$ satisfying Property 1 is $f(z) = e^{az+b}$ ($a \neq 0$).

Proof. $h(z) (= \log f(z))$ is analytic and by continuity purely imaginary on A and only on A . Since A is a simple analytic arc there exists an analytic homeomorphism $k(t)$ from a neighborhood of the open unit interval I onto a neighborhood of A with $k(I) = A$ ([1], p. 192 (paragraph 2)). The function $g(t) = i h(k(t))$ is a 1-1 analytic map from I into the reals. If it were not 1-1 then $g'(t)$ would equal zero at some point and this would imply $h'(z)$ would equal zero at some point z_0 of A . This would mean by the local mapping correspondence ([1], pp. 107-108) there would be at least four distinct arcs emanating from z_0 on which $h(z)$ is imaginary which would contradict Property 1. The fact $g(z)$ is 1-1 on I implies $h(z)$ is 1-1 on A . Now by the Picard theorem ([2], pp. 277-282) and the fundamental theorem of algebra $h(z)$ is a polynomial of exactly degree one. Therefore $f(z) = e^{az+b}$ ($a \neq 0$).

2) *Corollary to the Theorem:* The only function satisfying Property 2 is $f(z) = e^{az}$ (a real and positive).

Proof. The function $f(z)$ is non-zero in the left half plane for otherwise, by the reflection principle ([1], p. 191 (paragraph 4)), $f(z)$ would have a pole in the right half plane. By the Theorem, $f(z) = e^{az+eb}$. Therefore $|f(0)| = |e^b| = 1$, which implies b is imaginary. Since $|f(z)| = 1$ on the imaginary axis, az must be imaginary on the imaginary axis (hence a is real). Property 2 implies $a > 0$ and $b = 2\pi i n$ ($n = 0, 1, -1, \dots$).

REFERENCES

- [1] L. V. AHLFORS, Complex Analysis, 1st edition (McGraw-Hill, 1953).
- [2] E. C. TITCHMARSH, The Theory of Functions, 2nd edition (Oxford University Press, 1939).

Aufgabe 588. Ist n eine natürliche Zahl und p eine Primzahl, so gilt

$$(p \cdot n - 1)! [(n - 1)!]^{-p} n^{1-p} \not\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow n = p^k.$$

E. TROST, Zürich

Lösung: Wir bezeichnen mit $F(n)$ die linke Seite der obigen Kongruenz, mit $e(n)$ den Exponenten von p in der Primzerlegung von n und mit $s(n)$ die p -adische Quersumme von n . Bekanntlich ist (vgl. A. M. LEGENDRE, *Théorie des nombres*, 1808)

$$e(n!) = \frac{n - s(n)}{p - 1}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} e(F(n)) &= e((p \cdot n - 1)!) - p \cdot e((n - 1)!) - (p - 1) \cdot e(n) \\ &= 1 + \frac{p \cdot s(n - 1) - (s(n - 1) + p - 1)}{p - 1} - (p - 1) \cdot e(n) \\ &= 1 + s(n - 1) - 1 - (p - 1) \cdot e(n) \\ &= (p - 1) \cdot e(n) + s(n \cdot p^{-e(n)}) - 1 - (p - 1) \cdot e(n) \\ &= s(n \cdot p^{-e(n)}) - 1. \end{aligned}$$

Daher ist $e(F(n)) \geq 0$ und $e(F(n)) = 0$ genau dann, wenn $n \cdot p^{-e(n)} = 1$ ist.

H. SCHEID, Mainz

J. FEHÉR (Pécs/Ungarn) bemerkt, dass in der Aufgabenstellung $\equiv 0 \pmod{p}$ durch $\equiv -1 \pmod{p}$ ersetzt werden kann. In der Tat gilt, wenn die linke Seite der Kongruenz wieder mit $F(n)$ bezeichnet wird,

$$F(p^s) = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^p \binom{k \cdot p^s}{p^s} \equiv \frac{1}{p} p! = (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), P. BUNDSCHUH (Freiburg i.Br.), L. CARLITZ (Duke University, USA), Ž. M. MITROVIĆ (Vranje), E. J. F. PRIMROSE (Leicester), Dragutin SVRTAN, Zagreb.

Neue Aufgaben

Aufgabe 610. Man zeige, dass in jedem ebenen Dreieck gilt:

- Harmonisches Mittel der beiden grösseren Höhen \geq kleinste Winkelhalbierende.
- Grösste Winkelhalbierende \geq harmonisches Mittel der beiden kleineren Seitenhalbierenden.

Das Gleichheitszeichen gilt jeweils nur im gleichseitigen Dreieck.

P. ERDÖS, Budapest, und F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Aufgabe 611. Let p be an odd prime, $(a, p) = 1$. Show that

$$S = \sum_{s=1}^{p-1} \tan \frac{\pi a s^2}{p} \begin{cases} 0 & (p \equiv 1 \pmod{4}) \\ \left(\frac{-a}{p} \right) \sqrt{p} \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{k}{p} \right) & (p \equiv 3 \pmod{4}), \end{cases}$$

where (a/p) is the Legendre symbol.

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 612. Für natürliche Zahlen k, t, b mit $k \geq 3, t \geq 2, b < t$ werde gesetzt:

$$H_k(b \cdot t^{-1}) = \sum_{n \geq 0} b^{k^n} (t^{k^n} + b^{k^n})^{-1}.$$

Man zeige: $H_k(b \cdot t^{-1})$ ist irrational, wenn $b < t^{1-1/k}$ für ungerades k und wenn $b < t^{1-1/(k-1)}$ für gerades k .

(Diese Aufgabe löst eine offene Frage aus einer Arbeit von W. SCHWARZ, *Remarks on the Irrationality and Transcendence of Certain Series*, Math. Scand. 20, 269–274 (1967).)

P. BUNDSCHUH, Freiburg i.Br.

Aufgabe 613. Drei Geraden g_1, g_2, g_3 des Raumes R_3 schneiden sich in drei verschiedenen Punkten. Man bestimme alle Raumpunkte P mit der Eigenschaft: Die Fusspunkte der Lote von P auf g_1, g_2, g_3 sind kollinear.

O. REUTER, Ochsenhausen

Literaturüberschau

ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Herausgegeben in Verbindung mit dem Zentrum für Didaktik der Mathematik an der Universität Karlsruhe und der internationalen mathematischen Unterrichtskommission (IMUK); Verlag Ernst Klett, Stuttgart.

Mit dem vorliegenden Heft 1/69 ist der 1. Jahrgang dieser neuen Zeitschrift eröffnet worden. Die Zeitschrift ist geschaffen worden auf gemeinsame Initiative des Zentrums für Didaktik der Mathematik an der Universität Karlsruhe und des Klett-Verlages in Stuttgart; prominente Mathematiker, darunter auch namhafte Vertreter der Didaktik der Mathematik, stehen ihr im Redaktionskomitee und im wissenschaftlichen Beirat zur Seite, die Geschäftsführung besorgt Hans Wäsche. – Wer einigermaßen um die Mannigfaltigkeit und den Umfang der Publikationen zur Didaktik der Mathematik in den letzten Jahrzehnten Bescheid weiss, wird die Herausgabe dieses Zentralblattes freudig begrüßen! Bereits die erste Nummer zeigt eine Konzeption, die wohl von den meisten Lesern als sehr glücklich und vielversprechend empfunden wird: Der erste Teil, *Berichtsteil* genannt, enthält zunächst einen Analyseteil. Darin sollen Veröffentlichungen zu einem Thema oder mit einer bestimmten didaktischen Funktion zusammengestellt und im Hinblick auf dieses Thema und auf die jeweilige Zielsetzung analysiert werden; dadurch ergeben sich Stellungnahmen, die unter Umständen weit über eine blossе Rezension hinausgehen. Anschliessend folgen Rezensionen und dann Informationen (Literaturbericht, Mitteilungen über Seminare, Kongresse usw.). Der zweite Teil, der *Dokumentationsteil*, enthält kurze Angaben über Zeitschriftenartikel und Bücher, die in den Rahmen dieses Zentralblattes fallen, und ist so angelegt, dass er in Karteikarten zerschnitten werden kann. Beide Hauptteile bedeuten jedem an der Didaktik der Mathematik Interessierten, natürlich vor allem dem Lehrer der Mathematik an höheren Schulen, eine sehr grosse Hilfe. Es sei deshalb sehr empfehlend auf diese neue Zeitschrift hingewiesen, die – bei genügend breiter Verankerung in möglichst weitem Kreise – zu grosser Bedeutung gelangen kann.

R. INEICHEN

Linear Transformations and Matrices. Von F. A. FICKEN. XIII und 398 Seiten. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1967.

Es handelt sich um eine Einführung in die Theorie der reellen und komplexen linearen Räume. Zum Verständnis des Textes ist recht wenig vorausgesetzt: Elementare Algebra (Arithmetik) und Geometrie sowie die Kenntnis der Sinus- und Kosinusfunktion.

Die ersten vier Kapitel dienen als Einführung. Die logischen Grundlagen der mathematischen Sprache werden mit den Grundlagen der Mengenalgebra erläutert. Der Funktionsbegriff wird klar und sauber dargestellt und die Menge der reellen Zahlen aufgebaut. Schliesslich wird die Vektoralgebra des dreidimensionalen Euklidischen Raumes – vor allem mit Hilfe ihrer geometrischen Veranschaulichung und Anwendung – entwickelt. Mit Hilfe der vielen Ergebnisse zeigt der Autor im 4. Kapitel (Mengen und Strukturen) alle für den weiteren Aufbau des Buches notwendigen algebraischen Abstraktionen.

Der lineare Raum wird formell im 5. Kapitel eingeführt. Es folgen: Lineare Transformationen, Lineares Funktional und Dualität, Einige Eigenschaften von Matrizen, Systeme linearer algebraischer Gleichungen und Äquivalenz von Matrizen, Bilineare und quadratische Formen und Funktionale, Determinanten, Ähnliche Operatoren, Unitäre und Euklidische Räume, Ähnliche Operatoren in Unitären Räumen. Der Autor legt grossen Wert auf die Anschauung. Wenn immer möglich wird die «Basis-freie» (Koordinaten-freie) Darstellung gewählt. Neue Begriffe und Resultate werden an Beispielen illustriert.

Der Leser erhält nicht nur eine fundierte Einführung in diese Theorie, sondern fördert durch den geschickten Aufbau des Stoffes auch seine mathematische Reife. 720 Übungsaufgaben gestatten es, das Verständnis des Gelesenen zu prüfen und die theoretischen Kenntnisse selbständig zu vertiefen. Um die eigenen Lösungen kontrollieren zu können, stehen im Anhang eine grosse Anzahl von Hinweisen und Lösungen zur Verfügung. In einer Bibliographie findet der Leser schliesslich eine Auswahl weiterer Werke (meist englischer Sprache) zu denselben oder ähnlichen Themen und die Angabe von Büchern, die ausführlich Probleme behandeln, welche nur gestreift oder erwähnt werden (Tensoralgebra, Numerische Analysis, Lineare Ungleichungen und lineares Programmieren).

W. HOLENWEG

Some Theory of Sampling. Von W. E. DEMING. XVII und 602 Seiten. \$ 3.50. Dover Publications, New York 1966.

Das rund 600 Seiten fassende Werk ist ein ungekürzter und unveränderter Nachdruck eines 1950 bei Wiley erschienenen Bandes.

Theorie und Praxis der *Stichprobenerhebungen* haben in den letzten zwei Jahrzehnten immer mehr auch in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften Eingang gefunden (Bevölkerungssstatistik, Versicherungswesen, Qualitätskontrolle, Marktforschung, Psychologie usw.).

Das Buch von DEMING (Theoretiker und Praktiker in einer Person) ist mehrheitlich auf einige der genannten Gebiete ausgerichtet. Neben grundlegenden theoretischen Gegenständen (Testen von Hypothesen) findet man eine Fülle von Anwendungen in der statistischen Praxis wie:

Hinweise auf systematische Fehler beim Planen und Auswerten von Versuchen;

Aufstellen kostenminimaler Stichprobenpläne mit optimalem Informationsgehalt.

Die über 200 eingestreuten (z. T. mit Lösungen versehenen) Aufgaben sind von grundsätzlicher Natur sowohl für die Theorie wie auch für die Praxis. Für Dozenten bilden sie eine willkommene Ergänzung des Übungsmaterials.

Voraussetzungen für eine erfolgreiche Lektüre sind: Grundkenntnisse in Kombinatorik, Statistik und Infinitesimalrechnung.

Das in einem romanhaften, leicht fassbaren Stil geschriebene Buch richtet sich in erster Linie an Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Statistiker in der Praxis (insbesondere amtliche Bevölkerungsstatistik) sowie Dozenten der Statistik.

HANS LOEFFEL

Topologie. Eine Einführung von HORST SCHUBERT. 328 Seiten mit 23 Figuren. DM 45,60. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1964.

Dieses Werk will eine Einführung in die allgemeine und in die algebraische Topologie geben. Zwei Faktoren sind es, die die vorliegende Gestalt des Werkes im wesentlichen bestimmen. Der erste ist die Stoffauswahl. Der Inhalt ist in vier Hauptkapitel gegliedert, deren Titel lauten: Topologische Räume, Uniforme Räume, Homotopie, Singuläre Homologietheorie. Der zweite Faktor ist die an BOURBAKI sich anlehrende Darstellungsart. Sie verlangt gewissermassen, dass der Stoff wohlprogrammiert ist, was hier auch geschehen ist.

J. M. EBERSOLD

Studies in Modern Topology. Herausgegeben von P. J. HILTON. Band 5 der MAA Studies in Mathematics. 212 Seiten mit 43 Figuren. \$ 6.-. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1968.

In der Einführung dieses Orientierungsbandes für Fortgeschrittene gibt der Herausgeber einen Überblick über die Entwicklung der Topologie in etwa den letzten zwei Dezennien. Man kann die moderne Topologie, ohne ihre Anwendungsgebiete zu berücksichtigen, in die folgenden Zweige gliedern: mengentheoretische Topologie, geometrische Topologie, algebraische Topologie und die Topologie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Die folgenden fünf Artikel des Bandes geben einen Einblick in das neuere Schaffen in jedem dieser Zweige: G. T. WHYBURN: What is a Curve? W. HAKEN: Some Results on

Surfaces in 3-Manifolds. V. K. A. M. GUGENHEIM: Semisimplicial Homotopy Theory. E. DYER: The Functors of Algebraic Topology. V. POÉNARU: On the Geometry of Differentiable Manifolds. J. M. EBERSOLD

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Von HERMANN ATHEN. 2. neubearbeitete Auflage. 149 Seiten mit 57 Abbildungen. DM 9,60. Schroedel-Verlag, Hannover, und Schöningh-Verlag, Paderborn 1968.

Mit der 1. Auflage dieser Schrift (1955) hat sich der Verfasser seinerzeit recht eigentlich auf didaktisches Neuland vorgewagt. Ein Vergleich jener 1. Auflage mit der vorliegenden 2. Auflage zeigt die grosse Entwicklung, die die didaktische Seite der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik seither durchgemacht hat. Diese Entwicklung hat einerseits dazu geführt, grundlegende Begriffe (wie z.B. Ereignis, Wahrscheinlichkeit) auch im Schulunterricht auf durchaus moderne und sachgemässe Art zu behandeln, andererseits den Kreis der Betrachtungen weit über das Herkömmliche hinausgreifen zu lassen, und so z.B. einfache Beispiele zum Testen von Hypothesen oder elementare Betrachtungen über Markoffsche Ketten einzubeziehen. Beide Tendenzen sind in dieser Schrift in reichem Masse zur Geltung gekommen; trotzdem ist es dem Autor sehr gut gelungen, in allen Kapiteln wirklich auf dem Schulniveau zu bleiben. Sicher wird man nirgends den gesamten Stoff im regulären Unterricht behandeln können; die Darstellung wird aber dem Lehrer der Mathematik zahlreiche Anregungen bieten und manchen interessierten Schüler tiefer in das Stoffgebiet einführen. Zahlreiche Aufgaben (mit Lösungen) ergänzen die Ausführungen.

R. INEICHEN

Grundzüge der Mathematik; Band V, Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik (Rechenanlagen, Algebra, Analysis). Von H. BEHNKE, G. BERTRAM, L. COLLATZ, R. SAUER, H. UNGER. XI und 478 Seiten mit zahlreichen Abbildungen. DM 52,-. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1968.

Wir haben an dieser Stelle schon wiederholt auf die wertvollen «Grundzüge» hinweisen dürfen. Mit dem 5. Band liegt nun ein Standardwerk abgeschlossen vor, das kaum mehr einer besonderen Empfehlung bedarf, so dass wir uns wohl mit einer kurzen Inhaltsangabe begnügen dürfen: Allgemeine Gesichtspunkte (z.B. über die Wechselwirkung zwischen Mathematik und ihren Anwendungen) – Ziffernrechner (Rechenautomaten) – Analogrechner – Numerische Verfahren (Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme, Approximationen, Numerische Integration und Differentiation, Anfangs- und Randwertprobleme, Eigenwertprobleme, Lineare Optimierung) – Anwendungen der Algebra – Anwendungen der Analysis (mit vielen sehr schönen Beispielen für Anwendungen der verschiedenen Teilgebiete) und zum Abschluss ein interessantes orientierendes Kapitel über die neueren Entwicklungen in der numerischen Mathematik, das vor allem auch jenen Leser ansprechen wird, der an einer Übersicht interessiert ist.

R. INEICHEN

Géométrie. Terminales C et T. L'enseignement de la mathématique. Par LUCIENNE FELIX et ALFRED DONEDOU. Collection dirigée par A. DONEDOU. 313 pages. Dunod, Paris 1967.

Dû à la plume de deux éminents pédagogues français, cet ouvrage conforme au nouveau programme officiel français se compose de deux parties. On trouve dans la première partie une axiomatique de la géométrie euclidienne à trois dimensions, un exposé sur les symétries perpendiculaires et les déplacements et la notion d'espace vectoriel euclidien. La seconde partie de l'ouvrage concerne la technique de la géométrie dans le cadre de la théorie moderne des structures. Les familles de droites, de cercles et de coniques font partie du programme qui traite des géométries affine, projective, métrique, anallagmatique ainsi que de la géométrie descriptive. La géométrie euclidienne est présentée comme l'étude d'un espace ponctuel sur lequel opère le groupe des isométries. Clair et précis, cet ouvrage comprend de nombreux exercices judicieusement gradués et sera consulté avec profit par les élèves de nos gymnases ainsi que par les candidats au brevet secondaire scientifique.

S. PICCARD

Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie. Par K. KURATOWSKI. Monographie No 15 de l'*Enseignement mathématique*, Genève 1966. 305 pages. Traduit de l'anglais par M. VUILLEUMIER.

L'édition originale de cet ouvrage avait paru à Varsovie en 1955. L'ouvrage a été traduit successivement en anglais puis en français. Pour cette dernière traduction, l'auteur a apporté des modifications essentielles à la seconde partie en remplaçant l'étude des espaces métriques par celle d'espaces topologiques généraux. Quelques adjonctions ont également été apportées au début de l'ouvrage, dont la majeure partie est accessible à des débutants. Dans la première partie, l'auteur expose les éléments de la théorie des ensembles. Il parle de calcul propositionnel, d'algèbre des ensembles (opérations finies), de fonctions propositionnelles et produits cartésiens, de la notion de fonction et des opérations infinies, de la notion de puissance d'un ensemble, d'ensembles dénombrables, d'opérations sur les nombres cardinaux, des nombres a et c , de relations d'ordre et du bon ordre. La seconde partie est consacrée à la Topologie générale. Il y est question d'espaces métriques, d'espaces euclidiens, d'espaces topologiques, de diverses familles d'ensembles, de l'ensemble dérivé, d'applications continues, de produits cartésiens, d'espaces à base dénombrable, d'espaces métriques complets, d'espaces compacts, de connexité, de connexité locale, de la notion de dimension, de simplexes, de complexes et de coupure du plan. Cet ouvrage porte l'emprunte de l'illustre Maître de l'Ecole mathématique de Varsovie, le Professeur W. SIERPIŃSKI dont M. KURATOWSKI est un des plus brillants élèves.

S. PICCARD

Introduction à la théorie des graphes orientés. Par F. HARRARY, R. Z. NORMAN & D. CARTWRIGHT. 437 pages. Dunod, Paris 1968.

Dans cet ouvrage, les graphes orientés ou digraphes sont traités par voie axiomatique. On le fait de la façon suivante. On considère un ensemble V d'éléments appelés sommets, un ensemble X d'éléments appelés arcs et deux fonctions f et s définies sur X , à valeurs dans V , f et s servant à relier les sommets aux arcs. Quel que soit l'arc x de l'ensemble X , fx et sx sont deux éléments de V dont le premier est l'origine et le second l'extrémité de l'arc orienté x . On dit que x est une boucle si son origine coïncide avec son extrémité. Deux arcs sont dits parallèles s'ils ont même origine et même extrémité. La structure de digraphe est caractérisée par les quatre axiomes suivants: 1. L'ensemble V est fini, non vide. 2. L'ensemble X est fini. 3. Il n'y a pas de couples d'arcs parallèles. 4. Il n'y a pas de boucles. L'exposé est élémentaire et s'appuie sur quelques notions fondamentales de la théorie des ensembles et du calcul matriciel. Le premier chapitre est consacré à la structure de digraphe. Les chapitres 2-4 traitent des liaisons qui peuvent exister entre les sommets. L'emploi des matrices dans la théorie des digraphes est expliqué au chapitre 5. Le chapitre 6 traite de questions de descendance. Les effets de la suppression d'un sommet ou d'un arc sont exposés aux chapitres 7 et 8. Des types particuliers de digraphes sont étudiés aux chapitres 9 à 12. Les extensions des digraphes sont examinées aux chapitres 13 et 14. L'ouvrage s'adresse avant tout à des sociologues. Mais il fournit aussi un instrument de travail utile en recherche opérationnelle, dans l'étude des flots dans les réseaux de transport, dans la théorie des échelles, la logique des propositions et la structure des connaissances. L'ouvrage est illustré de nombreux schémas et d'exercices que l'on trouve à la fin des chapitres. Une bibliographie assez complète, la liste des principaux théorèmes, un glossaire des principaux termes introduits et utilisés et un index complètent cet ouvrage accessible à un vaste public.

S. PICCARD

Projektive Differentialgeometrie, 3. Teil. Von GERRIT BOL. VIII und 527 Seiten mit 15 Figuren. DM 85,-. Studia mathematica, Band XVIII. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich 1967.

Der letzte Teil von G. BOLS Monographie zur projektiven Differentialgeometrie liess etwas länger auf sich warten, als dies geplant war (Band I/II, vgl. *El. Math.* X/6, 1955). Ein Grund für die Verzögerung dürfte wohl darin liegen, dass der Autor seine ursprüngliche Konzeption geändert hat. Anstelle der seinerzeit angekündigten Darstellung einiger spezieller Flächenklassen hat nun der dritte Teil vorwiegend die Arbeitsmethoden der projektiven Differentialgeometrie zum Gegenstand. Diese bestehen einerseits in ver-

schiedenen Kalkülen (alternierende Differentialformen, Differentialoperatoren, Tensorrechnung), zum andern aber auch in einigen wichtigen Figuren des zwei- und des dreidimensionalen projektiven Raumes, die für die Flächentheorie in verschiedener Hinsicht von Bedeutung sind (2-parametrische Tetraederfigur, Kurvennetze, Strahlenkongruenzen).

Die klare Gliederung, welche die ersten beiden Bände kennzeichnet, ist erfreulicherweise auch im dritten Band wieder zu finden. Dies erleichtert dem Leser den Zugang zu den Gedankengängen des Verfassers ganz erheblich.

G. BOL gehört zu den Mitbegründern der projektiven Differentialgeometrie und ist daher in besonderer Masse zum Autor einer zusammenfassenden Darstellung über diese immer noch in Weiterentwicklung begriffene Sparte der Differentialgeometrie berufen. Er hat ein Werk geschaffen, das dem Neuling in diesem Gebiete bei der Einführung, aber auch dem Kenner bei der Vertiefung wertvolle Hilfe bietet.

M. JEGGER

Computer Methods in Mathematics. Von R. ALBRECHT, E. LINDBERG, W. MARA. 204 Seiten. s.52/- Addison-Wesley Publishing Company, London 1969.

Diese leicht verständliche Einführung ins Rechnen mit einem Computer beginnt mit der Programmierung einer elektronischen Tischrechenmaschine SAM mit zwei Registern. Die Idee wird weiter entwickelt für ein grösseres Modell BIGSAM, welches bereits Programmspeicherung gestattet. Als umfangreichster Teil folgt die Programmierung eines Computers, wobei vor allem an Teilnehmerbetrieb gedacht ist. Als Konversationssprachen werden BASIC und FORTRAN verwendet.

Die zahlreichen Beispiele sind dem Erfahrungsbereich eines Schülers der High-School oder des College entnommen, können also ohne weiteres an einer Mittelschule verwendet werden. Vereinzelte Beispiele, wie etwa Beispiel 8, Seite 107, sind falsch eingestuft oder weisen sinnstörende Druckfehler auf, was bei einer spätern Auflage berücksichtigt werden sollte.

E. R. BRÄNDLI

Die Gesetze der grossen Zahlen. Von PÁL RÉVÉSZ. 175 Seiten. Fr. 38.- Birkhäuser Verlag, Basel 1968.

Die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie ist axiomatisch aufgebaut. Dabei stellt sich die Frage, ob eine solche Theorie mit unsern «natürlichen» Vorstellungen über die Wahrscheinlichkeit einigermassen übereinstimmt. Und dies führt auf die Untersuchung der Beziehungen zwischen mathematischer Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit und damit zu den verschiedenen Gesetzen der grossen Zahlen. Etwas allgemein formuliert, sagen solche Gesetze etwas aus über die Konvergenz eines Mittelwertes von n Zufallsvariablen gegen eine andere Zufallsvariable; es kommen dabei verschiedene Konvergenzbegriffe (so die stochastische Konvergenz, die Konvergenz im quadratischen Mittel und die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1) in Betracht. Die vorliegende Monographie gibt eine Übersicht über die Ergebnisse und die wichtigsten Methoden dieses Gebietes. Aus dem Inhalt: Der mathematische Hintergrund (Überblick über Mass- und Wahrscheinlichkeitstheorie, Stochastische Prozesse, Begriff des Hilbert- und des Banachraumes usw.) – Verschiedene Arten der Gesetze der grossen Zahlen – Unabhängige Zufallsveränderliche – Orthogonale Zufallsveränderliche – Folgen von Zufallsveränderlichen – Symmetrisch abhängige Zufallsveränderliche – Markoffsche Ketten – Schwach abhängige Zufallsveränderliche – Summe einer zufälligen Anzahl von Zufallsveränderlichen – Anwendungen. Die Lektüre des Buches stellt ganz erhebliche Ansprüche. Sie führt den Leser in ein Gebiet, das er anderswo kaum in einer so zusammenhängenden Darstellung finden kann, denn es ist dem Verfasser ausgezeichnet gelungen, das Gemeinsame an zunächst ganz verschiedenen Untersuchungen herauszuarbeiten und von allgemeinen Gesichtspunkten aus zu beleuchten. Unter den verarbeiteten Abhandlungen finden sich auch mehrere, die auf den Autor selbst zurückgehen.

R. INEICHEN

Mitteilung der Redaktion

Wir haben die Freude, Herrn PD Dr. J. RÄTZ (Universität Bern) als neuen Mitarbeiter in der Redaktion begrüßen zu dürfen. Herr Rätz wird insbesondere den Aufgabenteil betreuen.