Werk

Titel: Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung
Verlag: Kohlhammer
Jahr: 1970
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN379931524_0013
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379931524_0013

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN379931524
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379931524

Terms and Conditions

Contact

Archiv für

MATHEMATISCHE LOGIK UND GRUNDLAGENFORSCHUNG

Band 13

1970

VERLAG W. KOHLHAMMER

STUTTGART · BERLIN · KÖLN · MAINZ

Arch. math. Logik 13 (1969), 3—21.

MODELLTHEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN IN DER KRIPKE-SEMANTIK*

Von Horst Osswald, München

Einleitung: Der klassischen Modelltheorie kann man eine nichtklassische, eine intuitionistische Modelltheorie gegenüberstellen. Diese untersucht in analoger Weise ganz allgemein die Beziehungen zwischen Formeln und den Begriffen, die die intuitionistische Prädikatenlogik semantisch charakterisieren. S. A. Kripke hat eine solche Charakterisierung gegeben. In dem Folgenden soll innerhalb dieser Semantik mit dem Aufbau einer Modelltheorie begonnen werden.

Dazu wird zunächst einmal die Semantik von Kripke so verallgemeinert, daß sie die intuitionistische PIF-Logik (Prädikatenlogik mit Funktionszeichen und Identität) charakterisiert. In Kapitel 1 wird der starke Vollständigkeitssatz bewiesen.

Der neu entstandene Begriff des i-PIF-Modells ist eine Verallgemeinerung des entsprechenden klassischen Begriffs des PIF-Modells. Die Klasse der i-PIF-Modelle umfaßt die Klasse der PIF-Modelle. Einige Zusammenhänge zwischen der klassischen Erfüllungsrelation und der intuitionistischen findet man im § 1 von Kapitel 2.

Im § 2 von Kapitel 2 werden die drei wichtigen modelltheoretischen Begriffe des Homomorphismus, der Unterstruktur und des Ultraprodukts auf die i-PIF-Modelle verallgemeinert. Es entstehen die Begriffe des k-Homomorphismus, der k-Unterstruktur und des k-Ultraprodukts. Dann wird untersucht, welche Formeln und unter welchen Bedingungen sie bei diesen neuen semantischen Operationen gültig bleiben.

Im § 3 gehen wir von den semantischen Begriffen über zu rein algebraischen Begriffen, für die wir die Ergebnisse von Kapitel 2 zusammenfassen.

Herrn Prof. Kurt Schütte danke ich für seine bereitwillige Unterstützung und seine wertvollen Ratschläge herzlich.

Als metasprachliche Abkürzungen verwenden wir oft:

F.a. (für alle), E.g. (es gibt), $\Rightarrow$ (impliziert), $\Leftrightarrow$ (genau dann, wenn) und erf (erfüllt).

Ist $\{X_i : i \in I\}$ eine Menge von Mengen, so bezeichnen wir mit $\cap\,(X_i : i \in I)$ bzw. $\cup(X_i : i \in I)$ den Durchschnitt bzw. die Vereinigung der Elemente von $\{X_i : i \in I\}$. Die endlichen Kardinalzahlen sollen mit den endlichen Ordinalzahlen identifiziert werden, und jede Ordinalzahl identifizieren wir mit der Menge aller

* Eingegangen am 25. 7. 68.

kleineren Ordinalzahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit ω, es ist $0 \in \omega$. Ist M eine Menge, so sei $|M|$ die Mächtigkeit dieser Menge.

Ist r eine 2-stellige Relation auf der Menge A und ist $B \subseteq A$, so ist $r \upharpoonright B \times B$ die Menge $\{(a, b) : (a, b) \in r \text{ und } a, b \in B\}$. Eine 0-stellige Relation ist einer der beiden Wahrheitswerte w oder f.

Die Menge aller Funktionen von A in B bezeichnen wir mit B^A. Eine n-stellige Funktion auf A ist ein Element aus $A^{(A^n)}$. Eine 0-stellige Funktion auf A ist ein festes Element von A. Ist f eine Funktion von A in B und ist $A' \subseteq A$, so ist $f \upharpoonright A' \in B^{A'}$ mit $f \upharpoonright A'(a) = f(a)$ für alle $a \in A'$.

Das Tripel $\mathfrak{A} = \langle A, (f_i)_{i \in I}, (r_j)_{j \in J} \rangle$ mit Indexmengen I und J heißt eine *Struktur* vom Typ $\tau = ((s_i)_{i \in I}, (\sigma_j)_{j \in J})$, wenn gilt: $A \neq \emptyset$, $f_i \in A^{(A^{s_i})}$ für alle $i \in I$ mit $s_i \in \omega$ und $r_j \subseteq A^{\sigma_j}$ für alle $j \in J$ mit $\sigma_j \in \omega$. A nennen wir die Trägermenge von $\mathfrak{A}$, die wir mit $|\mathfrak{A}|$ bezeichnen.

Sind $\mathfrak{A} = \langle A, (f_i)_{i \in I}, (r_j)_{j \in J} \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle B, (g_i)_{i \in I}, (p_j)_{j \in J} \rangle$ Strukturen vom Typ τ, so heißt die Funktion $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, wir schreiben dann $\varphi : \mathfrak{A} \to B$, wenn gilt: Es ist $\varphi(f_i(a_0, \ldots, a_{s_i-1})) = g_i(\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_{s_i-1}))$ für alle $a_0, \ldots, a_{s_i-1} \in A$. Und ist $(a_0, \ldots, a_{\sigma_j-1}) \in r_j$, so ist $(\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_{\sigma_j-1})) \in p_j$ für alle $a_0, \ldots, a_{\sigma_j-1} \in A$.

Kapitel 1

Semantische Charakterisierung der intuitionistischen PIF-Logik

§ 1. Syntax der intuitionistischen PIF-Logik

Definition 1: Grundzeichen der Sprache sind:

1. Individuenvariablen, die wir mit $x, x_1, x_2, \ldots, y, y_1, y_2, \ldots, z, z_1, z_2, \ldots$ bezeichnen,
2. die Elemente einer I-Folge $(F_i)_{i \in I}$ von Funktionszeichen, wobei F_i von endlicher Stellenzahl s_i ist für alle $i \in I$,
3. die Elemente einer J-Folge $(R_j)_{j \in J}$ von Relationszeichen, wobei R_j von endlicher Stellenzahl σ_j ist für alle $j \in J$,
4. die Junktoren $\neg, \vee, \wedge, \to$,
5. das Gleichheitszeichen $\equiv$,
6. die Quantoren $\exists$, $\forall$ und
7. als Hilfszeichen die runden Klammern (,), Punkt und Komma.

Wie in der klassischen Logik werden *Terme* und *Formeln* definiert.

Mit *Ind*Θ bzw. *Ind*t bezeichnen wir die Menge der Individuenvariablen, die in Θ frei vorkommen bzw. in t vorkommen. Ist Σ eine Formelmenge, so ist $Ind\Sigma = \bigcup (Ind\Theta : \Theta \in \Sigma)$.

Wir führen folgende *Klammerersparungsregeln* ein:
$\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\wedge$ stärker als $\vee$, $\vee$ stärker als $\to$.
Für $\big(\Theta_0 \to \big(\Theta_1 \to (\ldots (\Theta_{n-1} \to \Theta) \ldots)\big)\big)$ schreiben wir kürzer $\Theta_0 \to \cdots \to \Theta_{n-1} \to \Theta$.
Ist $\Delta = (\Theta_i)_{i \in n}$ eine n-Folge von Formeln, so schreiben wir $\Delta \to \Theta$ für $\Theta_0 \to \cdots \to \Theta_{n-1} \to \Theta$. Ist $n = 0$, so ist $\Delta \to \Theta = \Theta$.

Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die *Menge aller Formeln.*

Die *freie Einsetzung* sei in der üblichen Weise definiert. Entsteht die Formel H aus Θ durch freie Einsetzung des Terms t für y, so schreiben wir $FE\Theta ytH$. Für H schreiben wir auch Θ^t_y. Ist $y \notin \mathrm{Ind}\Theta$, so ist $\Theta^t_y = \Theta$.

Die gebundene Umbenennung sei ebenfalls in der üblichen Weise definiert. Entsteht die Formel H aus der Formel Θ durch gebundene Umbenennung, so schreiben wir $GU\Theta H$. Gilt $GU\Theta H$, so gilt auch $GUH\Theta$.

Definition 2: Axiome der intuitionistischen PIF-Logik sind:

A1: $\forall x(x \equiv x)$

A2: $\forall x \forall y(x \equiv y \to y \equiv x)$

A3: $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z)$

A4: $\forall x_0 \ldots \forall x_{s_i-1} \forall y_0 \ldots \forall y_{s_i-1}$
$(x_0 \equiv y_0 \to \cdots \to x_{s_i-1} \equiv y_{s_i-1} \to F_i x_0 \ldots x_{s_i-1} \equiv F_i y_0 \ldots y_{s_i-1}) : i \in I$

A5: $\forall x_0 \ldots \forall x_{\sigma_j-1} \forall y_0 \ldots \forall y_{\sigma_j-1}$
$(x_0 \equiv y_0 \to \cdots \to x_{\sigma_j-1} \equiv y_{\sigma_j-1} \to R_j x_0 \ldots x_{\sigma_j-1} \to R_j y_0 \ldots y_{\sigma_j-1}) : j \in J$

A6: $\Theta \to H \to \Theta$

A7: $(\Theta \to H) \to (\Theta \to H \to \Phi) \to \Theta \to \Phi$

A8: $\Theta \to H \to \Theta \wedge H$

A9: $\Theta \wedge H \to \Theta$

A10: $\Theta \wedge H \to H$

A11: $\Theta \to \Theta \vee H$

A12: $H \to \Theta \vee H$

A13: $(\Theta \to \Phi) \to (H \to \Phi) \to \Theta \vee H \to \Phi$

A14: $(\Theta \to H) \to (\Theta \to \neg H) \to \neg \Theta$

A15: $\Theta \to \neg \Theta \to H$

A16: $\forall x\Theta \to \Theta^t_x$

A17: $\Theta^t_x \to \exists x\Theta$.

Definition 3: Grundschlüsse der intuitionistischen PIF-Logik sind:

G1: $\Theta, \Theta \to H : H$

G2: $H \to \Theta : H \to \forall x\Theta$

G3: $\Theta \to H : \exists x\Theta \to H$.

Für G2 und G3 wird vorausgesetzt, daß $x \notin \mathrm{Ind}H$.

Definition 4: Ableitbarkeit einer Formel:

1. Jedes Axiom ist eine ableitbare Formel.

2. Sind die Prämissen eines Grundschlusses ableitbare Formeln, so ist auch die entsprechende Konklusion ableitbar.

Definition 5: Ist Σ eine Formelmenge, so heißt Θ ableitbar aus Σ, wenn gilt: Es gibt ein $n \in \omega$ und $\Delta \in \Sigma^n$, so daß $\Delta \to \Theta$ ableitbar ist.

Ist Θ ableitbar, bzw. ist Θ ableitbar aus Σ, so schreiben wir $\vdash \Theta$ bzw. $\Sigma \vdash \Theta$.

Definition 6: Ist Σ eine Formelmenge, so sei
$\overline{\Sigma} = \{\Theta : \mathrm{Ind}\Theta \subseteq \mathrm{Ind}\Sigma \text{ und } \Theta \text{ ist ableitbar aus } \Sigma\}$.

Definition 10: Die Formel Θ folgt aus der Formelmenge Σ, wenn Θ in jedem i-PIF-Modell gültig ist, in dem Σ gültig ist. Wir schreiben dann $\Sigma \Vdash \Theta$.

Die hier angegebenen Begriffe des i-PIF-Modells und der Erfüllungsrelation sind eine Verallgemeinerung der Kripke-Semantik auf die intuitionistische Logik mit Funktionszeichen und Gleichheitszeichen. Siehe Kripke [7].

Es gilt das Koinzidenztheorem und das Überführungstheorem.

Satz 2: Sind $I_1^{\mathfrak{A}}$ und $I_2^{\mathfrak{A}}$ zwei Interpretationen über der K-Struktur $\mathfrak{A}$ und ist $I_1^{\mathfrak{A}} = I_2^{\mathfrak{A}}[\Theta]$, so gilt für alle α aus der Situtionsmenge von $\mathfrak{A}$:

$I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}}$ erf $\Theta \Leftrightarrow I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}}$ erf Θ.

Satz 3: Gilt $FE\Theta ytH$ und ist $I_1^{\mathfrak{A}} \underset{y}{=} I_2^{\mathfrak{A}}$ und ist $I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}}(y) = I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}}(t)$, so gilt:

$I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}}$ erf $\Theta \Leftrightarrow I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}}$ erf H.

Beweis durch Induktion über die Länge der Formeln.

§ 3. Die semantische Vollständigkeit des Kalküls der intuitionistischen PIF-Logik

In üblicher Weise kann durch Herleitungsinduktion gezeigt werden, daß $\vdash \Theta \Rightarrow \Vdash \Theta$. Daraus folgt der folgende Satz:

Satz 1: $\Sigma \vdash \Theta \Rightarrow \Sigma \Vdash \Theta$.

Für den Beweis der Umkehrung dieses Satzes werden einige neue Begriffe gebraucht, die zuerst eingeführt werden sollen. Ich habe sie von Aczel [1] übernommen und sie auf die hier verwandte Terminologie übertragen.

Dem Beweis selbst liegt die Beweisidee von Henkin für die klassische PIF-Logik zugrunde. Siehe Hermes [3].

Folgende Mengen von Formelmengen werden definiert.

Definition 1: Es sei $WF = \{\Sigma:$ E.g.$\Phi(\text{Ind}\,\Phi \subseteq \text{Ind}\,\Sigma$ und $\Phi \notin \overline{\Sigma})\}$. Es sei Φ-$WF = \{\Sigma: \text{Ind}\,\Phi \subseteq \text{Ind}\,\Sigma$ und $\Phi \notin \overline{\Sigma}\}$. Eine Formelmenge Σ heißt *widerspruchsfrei* bzw. *Φ-widerspruchsfrei*, wenn $\Sigma \in$ WF bzw. $\Sigma \in \Phi$-WF ist.

Definition 2: Es sei Φ-MAX =
$\{\Sigma: \Sigma \in \Phi$-WF und F.a. $\Theta(\text{Ind}\,\Theta \subseteq \text{Ind}\,\Sigma \Rightarrow \Theta \in \overline{\Sigma}$ oder $\Theta \to \Phi \in \overline{\Sigma})\}$.

Definition 3: Es sei $VEL = \{\Sigma: \Theta \vee H \in \overline{\Sigma} \Rightarrow \Theta \in \overline{\Sigma}$ oder $H \in \overline{\Sigma}\}$.

Definition 4: Es sei $EX = \{\Sigma: \exists x\Theta \in \overline{\Sigma} \Rightarrow$ E.g. $y\,(\Theta_x^y \in \overline{\Sigma})\}$.

Definition 5: Es sei $SA = \{\Sigma: \Sigma = \overline{\Sigma}, \Sigma \in$ WF, $\Sigma \in$ VEL und $\Sigma \in EX\}$.

Es sei Φ-$SA = \{\Sigma: \Sigma \in$ SA und $\Sigma \in \Phi$-WF$\}$. Ist $\Sigma \in$ SA, so heißt Σ *saturiert*.

Bei Aczel [1] ist folgender Satz bewiesen.

Satz 2: Ist Σ eine Φ-widerspruchsfreie Formelmenge, so gibt es ein $F \in \Phi$-SA mit $\Sigma \subseteq F$.

Beweisskizze:

Zunächst wird gezeigt, daß es zu jeder Φ-widerspruchsfreien Formelmenge Σ eine Formelmenge Σ^0 gibt mit $\Sigma \subseteq \Sigma^0$, $\Sigma^0 \in \Phi$-MAX und $\Sigma^0 = \overline{\Sigma^0}$. Σ^0 ist ein maximales Element der Menge $X = \{\Sigma' : \Sigma' = \overline{\Sigma'}, \Sigma' \in \Phi$-WF, $\Sigma \subseteq \Sigma'$, $\text{Ind}\,\Sigma' = \text{Ind}\,\Sigma\}$. Ein maximales Element existiert auf Grund des Zornschen Lemmas, da jede Kette in X eine obere Schranke besitzt.

Dann wird gezeigt, daß es zu Σ^0 ein Σ^1 gibt mit $\Sigma^0 \subseteq \Sigma^1$, $\Sigma^1 \in \Phi$-MAX, $\Sigma^1 = \overline{\Sigma^1}$ und mit $\Theta^y_x \in \Sigma^1$ für mindestens ein y, falls $\exists x \Theta \in \Sigma^0$ ist. Durch abwechselnde Wiederholungen dieser beiden Beweisschritte erhält man schließlich eine Kette $\subseteq (\Sigma^n : b \in \omega)$, so daß $\Sigma^n \in \Phi$-MAX ist, so daß $\Sigma^n = \overline{\Sigma^n}$ ist und so daß es zu jeder Formel $\exists x \Theta \in \Sigma^n$ eine Formel $\Theta^y_x \in \Sigma^{n+1}$ gibt für mindestens ein y. Es sei $F = \bigcup (\Sigma^n : n \in \omega)$. Man kann nun zeigen, daß $F \in EX$, daß $F = \overline{F}$, daß $F \in \Phi$-WF und daß $F \in \Phi$-MAX ist. Damit ist der Satz bewiesen, denn jedes Element von Φ-MAX ist auch ein Element von VEL.

In dem Folgenden werden wir zu einer beliebigen widerspruchsfreien Formelmenge ein i-PIF-Modell angeben, in dem diese Formelmenge gültig ist.

1. $M = \{\alpha : \Sigma \subseteq \alpha$ und $\alpha \in \mathrm{SA}\}$ sei die *Situationsmenge*. Nach Satz 2 ist $M \neq \emptyset$.
2. Die *Relation auf der Situationsmenge* ist die Inklusion.
   Es gilt also: $\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$ für alle $\alpha, \beta \in M$.
3. Zu jedem $\alpha \in M$ konstruieren wir eine Struktur $\mathfrak{A}_\alpha$ vom Typ τ:
   Es sei T_α die Menge aller Terme t mit $\mathrm{Ind}\, t \subseteq \mathrm{Ind}\, \alpha$.
   Auf T_α definieren wir folgende Äquivalenzrelation:
   Es sei $t_1 \sim \alpha t_2 \Leftrightarrow t_1 \equiv t_2 \in \alpha$. Es sei $\bar{t}^\alpha$ die Äquivalenzklasse, der t angehört, und es sei $\overline{T}^\alpha$ die Menge aller Äquivalenzklassen, es ist also $\overline{T}^\alpha = \{\bar{t}^\alpha : t \in T_\alpha\}$.
   Zu jedem $i \in I$ definieren wir eine Funktion $f^\alpha_i : \overline{T}^{\alpha^{s_i}} \to \overline{T}^\alpha$:
   Es sei $f^\alpha_i(\bar{t_0}^\alpha, \ldots, \overline{t_{s_i-1}}^\alpha) = \overline{F_i t_0 \ldots t_{s_i-1}}^\alpha$.
   Zu jedem $j \in J$ definieren wir eine Relation $r^\alpha_j \subseteq \overline{T}^{\alpha^{\sigma_j}}$:
   Es sei $(\bar{t_0}^\alpha, \ldots, \overline{t_{\sigma_j-1}}^\alpha) \in r^\alpha_j \Leftrightarrow R_j t_0 \ldots t_{\sigma_j-1} \in \alpha$.
   Ist R^0 ein 0-stelliges Relationszeichen, so sei $r^{0^\alpha} = w \Leftrightarrow R^0 \in \alpha$.
   Es sei $\mathfrak{A}_\alpha = \langle \overline{T}^\alpha, (f^\alpha_i)_{i \in I}, (r^\alpha_j)_{j \in J} \rangle$.
4. Die *Funktion* φ sei folgendermaßen definiert:
   φ ordne jedem $(\alpha, \beta) \in M \times M$ mit $\alpha \subseteq \beta$ die Funktion $\overset{\alpha\beta}{\varphi} : \overline{T}^\alpha \to \overline{T}^\beta$ zu mit $\overset{\alpha\beta}{\varphi}(\bar{t}^\alpha) = \bar{t}^\beta$ für alle $\bar{t}^\alpha \in \overline{T}^\alpha$.
   Es kann leicht gezeigt werden, daß $\mathfrak{A} = \langle \{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M, \subseteq, \varphi \rangle$ eine K-Struktur ist.
5. Die *Interpretation* $I^{\mathfrak{A}}$ über $\mathfrak{A}$ ist folgendermaßen definiert: Es ist $I^{\mathfrak{A}}_\alpha(t) = \bar{t}^\alpha$, wie man durch Induktion über den Aufbau der Terme zeigen kann, wenn man $I^{\mathfrak{A}}_\alpha(x) = \bar{x}^\alpha$ definiert für alle $x \in \mathrm{Ind}\,\mathfrak{F}$ und alle $\alpha \in M$.

Damit ist also gezeigt, daß $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein i-PIF-Modell ist.

Mit dem folgenden Satz wird die Verbindung zwischen der Semantik und der Syntax unserer Logik hergestellt.

Satz 3: Ist Θ eine beliebige Formel mit $\mathrm{Ind}\,\Theta \subseteq \mathrm{Ind}\,\alpha$ und ist $\alpha \in M$, so gilt:
$I^{\mathfrak{A}}_\alpha \operatorname{erf} \Theta \Leftrightarrow \Theta \in \alpha$.

Beweis (durch Induktion über die Länge der Formeln):

1., 2. Ist Θ eine Primformel, so gilt die Behauptung auf Grund der Definition von $\mathfrak{A}_\alpha$ und $I^{\mathfrak{A}}_\alpha$.

Definition 10: Die Formel Θ folgt aus der Formelmenge Σ, wenn Θ in jedem i-PIF-Modell gültig ist, in dem Σ gültig ist. Wir schreiben dann $\Sigma \Vdash \Theta$.

Die hier angegebenen Begriffe des i-PIF-Modells und der Erfüllungsrelation sind eine Verallgemeinerung der Kripke-Semantik auf die intuitionistische Logik mit Funktionszeichen und Gleichheitszeichen. Siehe Kripke [7].

Es gilt das Koinzidenztheorem und das Überführungstheorem.

Satz 2: Sind $I_1^{\mathfrak{A}}$ und $I_2^{\mathfrak{A}}$ zwei Interpretationen über der K-Struktur $\mathfrak{A}$ und ist $I_1^{\mathfrak{A}} = I_2^{\mathfrak{A}}[\Theta]$, so gilt für alle α aus der Situtionsmenge von $\mathfrak{A}$:

$I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta$.

Satz 3: Gilt $FE\Theta ytH$ und ist $I_1^{\mathfrak{A}} \underset{y}{=} I_2^{\mathfrak{A}}$ und ist $I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}}(y) = I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}}(t)$, so gilt:

$I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } H$.

Beweis durch Induktion über die Länge der Formeln.

§ 3. Die semantische Vollständigkeit des Kalküls der intuitionistischen PIF-Logik

In üblicher Weise kann durch Herleitungsinduktion gezeigt werden, daß $\vdash \Theta \Rightarrow \Vdash \Theta$. Daraus folgt der folgende Satz:

Satz 1: $\Sigma \vdash \Theta \Rightarrow \Sigma \Vdash \Theta$.

Für den Beweis der Umkehrung dieses Satzes werden einige neue Begriffe gebraucht, die zuerst eingeführt werden sollen. Ich habe sie von Aczel [1] übernommen und sie auf die hier verwandte Terminologie übertragen.

Dem Beweis selbst liegt die Beweisidee von Henkin für die klassische PIF-Logik zugrunde. Siehe Hermes [3].

Folgende Mengen von Formelmengen werden definiert.

Definition 1: Es sei $WF = \{\Sigma : \text{E.g.}\, \Phi(\text{Ind}\,\Phi \subseteq \text{Ind}\,\Sigma \text{ und } \Phi \notin \overline{\Sigma})\}$. Es sei Φ-$WF = \{\Sigma : \text{Ind}\,\Phi \subseteq \text{Ind}\,\Sigma \text{ und } \Phi \notin \overline{\Sigma}\}$. Eine Formelmenge Σ heißt *widerspruchsfrei* bzw. *Φ-widerspruchsfrei*, wenn $\Sigma \in \text{WF}$ bzw. $\Sigma \in \Phi\text{-WF}$ ist.

Definition 2: Es sei Φ-MAX =
$\{\Sigma : \Sigma \in \Phi\text{-WF und F.a. } \Theta(\text{Ind}\,\Theta \subseteq \text{Ind}\,\Sigma \Rightarrow \Theta \in \overline{\Sigma} \text{ oder } \Theta \rightarrow \Phi \in \overline{\Sigma})\}$.

Definition 3: Es sei $VEL = \{\Sigma : \Theta \vee H \in \overline{\Sigma} \Rightarrow \Theta \in \overline{\Sigma} \text{ oder } H \in \overline{\Sigma}\}$.

Definition 4: Es sei $EX = \{\Sigma : \exists x\Theta \in \overline{\Sigma} \Rightarrow \text{E.g. } y\,(\Theta_x^y \in \overline{\Sigma})\}$.

Definition 5: Es sei $SA = \{\Sigma : \Sigma = \overline{\Sigma}, \Sigma \in \text{WF}, \Sigma \in \text{VEL und } \Sigma \in EX\}$.
Es sei Φ-$SA = \{\Sigma : \Sigma \in \text{SA und } \Sigma \in \Phi\text{-WF}\}$. Ist $\Sigma \in \text{SA}$, so heißt Σ *saturiert.*

Bei Aczel [1] ist folgender Satz bewiesen.

Satz 2: Ist Σ eine Φ-widerspruchsfreie Formelmenge, so gibt es ein $F \in \Phi$-SA mit $\Sigma \subseteq F$.

Beweisskizze:

Zunächst wird gezeigt, daß es zu jeder Φ-widerspruchsfreien Formelmenge Σ eine Formelmenge Σ^0 gibt mit $\Sigma \subseteq \Sigma^0$, $\Sigma^0 \in \Phi$-MAX und $\Sigma^0 = \overline{\Sigma^0}$. Σ^0 ist ein maximales Element der Menge $X = \{\Sigma' : \Sigma' = \overline{\Sigma'}, \Sigma' \in \Phi\text{-WF}, \Sigma \subseteq \Sigma', \text{Ind}\,\Sigma' = \text{Ind}\,\Sigma\}$. Ein maximales Element existiert auf Grund des Zornschen Lemmas, da jede Kette in X eine obere Schranke besitzt.

Dann wird gezeigt, daß es zu Σ^0 ein Σ^1 gibt mit $\Sigma^0 \subseteq \Sigma^1$, $\Sigma^1 \in \Phi$-MAX, $\Sigma^1 = \overline{\Sigma^1}$ und mit $\Theta^y_x \in \Sigma^1$ für mindestens ein y, falls $\exists x\Theta \in \Sigma^0$ ist. Durch abwechselnde Wiederholungen dieser beiden Beweisschritte erhält man schließlich eine Kette $\subseteq (\Sigma^n : b \in \omega)$, so daß $\Sigma^n \in \Phi$-MAX ist, so daß $\Sigma^n = \overline{\Sigma^n}$ ist und so daß es zu jeder Formel $\exists x\Theta \in \Sigma^n$ eine Formel $\Theta^y_x \in \Sigma^{n+1}$ gibt für mindestens ein y. Es sei $F = \bigcup (\Sigma^n : n \in \omega)$. Man kann nun zeigen, daß $F \in$ EX, daß $F = \overline{F}$, daß $F \in \Phi$-WF und daß $F \in \Phi$-MAX ist. Damit ist der Satz bewiesen, denn jedes Element von Φ-MAX ist auch ein Element von VEL.

In dem Folgenden werden wir zu einer beliebigen widerspruchsfreien Formelmenge ein i-PIF-Modell angeben, in dem diese Formelmenge gültig ist.

1. $M = \{\alpha : \Sigma \subseteq \alpha \text{ und } \alpha \in \mathrm{SA}\}$ sei die *Situationsmenge*. Nach Satz 2 ist $M \neq \emptyset$.
2. Die *Relation auf der Situationsmenge* ist die Inklusion.
   Es gilt also: $\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$ für alle $\alpha, \beta \in M$.
3. Zu jedem $\alpha \in M$ konstruieren wir eine Struktur $\mathfrak{A}_\alpha$ vom Typ τ:
   Es sei T_α die Menge aller Terme t mit $\mathrm{Ind}\, t \subseteq \mathrm{Ind}\, \alpha$.
   Auf T_α definieren wir folgende Äquivalenzrelation:
   Es sei $t_1 \sim \alpha t_2 \Leftrightarrow t_1 \equiv t_2 \in \alpha$. Es sei $\overline{t}^\alpha$ die Äquivalenzklasse, der t angehört, und es sei $\overline{T}^\alpha$ die Menge aller Äquivalenzklassen, es ist also $\overline{T}^\alpha = \{\overline{t}^\alpha : t \in T_\alpha\}$.
   Zu jedem $i \in I$ definieren wir eine Funktion $f^\alpha_i : \overline{T}^{\alpha^{s_i}} \to \overline{T}^\alpha$:
   Es sei $f^\alpha_i(\overline{t_0}^\alpha, \ldots, \overline{t_{s_i-1}}^\alpha) = \overline{F_i t_0 \ldots t_{s_i-1}}^\alpha$.
   Zu jedem $j \in J$ definieren wir eine Relation $r^\alpha_j \subseteq \overline{T}^{\alpha^{\sigma_j}}$:
   Es sei $(\overline{t_0}^\alpha, \ldots, \overline{t_{\sigma_j-1}}^\alpha) \in r^\alpha_j \Leftrightarrow R_j t_0 \ldots t_{\sigma_j-1} \in \alpha$.
   Ist R^0 ein 0-stelliges Relationszeichen, so sei $r^{0\alpha} = w \Leftrightarrow R^0 \in \alpha$.
   Es sei $\mathfrak{A}_\alpha = \langle \overline{T}^\alpha, (f^\alpha_i)_{i\in I}, (r^\alpha_j)_{j\in J}\rangle$.
4. Die *Funktion* φ sei folgendermaßen definiert:
   φ ordne jedem $(\alpha, \beta) \in M \times M$ mit $\alpha \subseteq \beta$ die Funktion $\overset{\alpha\beta}{\varphi} : \overline{T}^\alpha \to \overline{T}^\beta$ zu mit $\overset{\alpha\beta}{\varphi}(\overline{t}^\alpha) = \overline{t}^\beta$ für alle $\overline{t}^\alpha \in \overline{T}^\alpha$.
   Es kann leicht gezeigt werden, daß $\mathfrak{A} = \langle\{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M, \subseteq, \varphi\rangle$ eine K-Struktur ist.
5. Die *Interpretation* $I^{\mathfrak{A}}$ über $\mathfrak{A}$ ist folgendermaßen definiert: Es ist $I^{\mathfrak{A}}_\alpha(t) = \overline{t}^\alpha$, wie man durch Induktion über den Aufbau der Terme zeigen kann, wenn man $I^{\mathfrak{A}}_\alpha(x) = \overline{x}^\alpha$ definiert für alle $x \in \mathrm{Ind}\mathfrak{F}$ und alle $\alpha \in M$.

Damit ist also gezeigt, daß $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ ein i-PIF-Modell ist.

Mit dem folgenden Satz wird die Verbindung zwischen der Semantik und der Syntax unserer Logik hergestellt.

Satz 3: Ist Θ eine beliebige Formel mit $\mathrm{Ind}\Theta \subseteq \mathrm{Ind}\alpha$ und ist $\alpha \in M$, so gilt:
$I^{\mathfrak{A}}_\alpha \,\mathrm{erf}\, \Theta \Leftrightarrow \Theta \in \alpha$.

Beweis (durch Induktion über die Länge der Formeln):

1., 2. Ist Θ eine Primformel, so gilt die Behauptung auf Grund der Definition von $\mathfrak{A}_\alpha$ und $I^{\mathfrak{A}}_\alpha$.

3. Ist Θ eine Konjunktion, so gilt die Behauptung auf Grund der Axiome A8, A9, A10.

4. Ist Θ eine Disjunktion, so gilt die Behauptung auf Grund der Axiome A11 oder A12 und da $\alpha \in$ VEL ist.

5. $\Theta = \exists x \Theta_1$. „$\Rightarrow$"

$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erf Θ.

$\Rightarrow$ E.g. $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*}(I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*} \underset{x}{=} I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ und $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*\alpha}$ erf $\Theta_1)$.

Es sei $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*\alpha}(x) = \bar{t}^{\alpha} = I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{\alpha}(t)$. Es sei $GU\Theta_1 H_1$, so daß in H_1 keine Variable, die in t vorkommt, gebunden ist. Nach Satz 4 § 1 und Satz 1 erfüllt $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*\alpha}H_1$. Da $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*} \underset{x}{=} I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ und da $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*\alpha}(x) = I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{\alpha}(t)$ ist, erfüllt $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{\alpha} H_1{}^{t}_{x}$. Es ist also $H_1{}^{t}_{x} \in \alpha$, das heißt, es ist $\alpha \vdash \exists x H_1$ (A17). Es gilt $GU\exists x H_1 \exists x \Theta_1$. Deshalb ist $\alpha \vdash \exists x \Theta_1$ und damit $\exists x \Theta_1 \in \alpha$.

„$\Leftarrow$"

$\exists x \Theta_1 \in \alpha$.

$\Rightarrow$ Es gibt ein y mit $\Theta_1{}^{y}_{x} \in \alpha$, da $\alpha \in EX$. $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{\alpha}$ erfüllt $\Theta_1{}^{y}_{x}$. Es ist $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{\alpha}(y) = \bar{y}^{\alpha}$. Es sei $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*} \underset{x}{=} I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ und es sei $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*\alpha}(x) = I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{\alpha}(y)$. $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*\alpha}$ erfüllt Θ_1 nach Satz 3 § 2. Es gilt also: E.g. $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*}(I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*} \underset{x}{=} I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ und $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*\alpha}$ erf $\Theta_1)$. Daraus folgt die Behauptung.

6. $\Theta = \forall x \Theta_1$. „$\Rightarrow$"

$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erf $\forall x \Theta_1$.

$\Rightarrow$ F.a. β F.a. $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*}(\alpha \subseteq \beta$ und $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{*} \underset{x}{=} I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha} \Rightarrow I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*\beta}$ erf $\Theta_1)$.

Wir nehmen an, daß $\forall x \Theta_1 \notin \alpha$. Es sei $y \notin \operatorname{Ind}\alpha \cup \{\Theta_1\}$. Dann ist $\alpha \cup \{\Theta_1{}^{y}_{x} \to \Theta_1{}^{y}_{x}\} \in \Theta_1{}^{y}_{x}$-WF. Denn wäre $\alpha \cup \{\Theta_1{}^{y}_{x} \to \Theta_1{}^{y}_{x}\} \vdash \Theta_1{}^{y}_{x}$, so wäre $\alpha \vdash \Theta_1{}^{y}_{x}$ und es wäre auch $\alpha \vdash \forall y \Theta_1{}^{y}_{x}$. Da $GU\forall y \Theta_1{}^{y}_{x} \forall x \Theta_1$, ist $\alpha \vdash \forall x \Theta_1$, also $\forall x \Theta_1 \in \alpha$. Widerspruch!

Es ist also $\alpha \cup \{\Theta_1{}^{y}_{x} \to \Theta_1{}^{y}_{x}\} \in \Theta_1{}^{y}_{x}$-WF. Nach Satz 2 gibt es ein β mit $\alpha \cup \{\Theta_1{}^{y}_{x} \to \Theta_1{}^{y}_{x}\} \subseteq \beta$ und $\beta \in \Theta_1{}^{y}_{x}$-SA. Es gibt also ein $\beta \in M$ mit $\alpha \subseteq \beta$ und $\Theta_1{}^{y}_{x} \notin \beta$. Es sei $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*} \underset{x}{=} I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}$ und $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*\beta}(x) = \bar{y}^{\beta} = I^{\mathfrak{A}}_{\beta}(y)$. Da $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*\beta}\Theta_1$ erfüllt, erfüllt nach Satz 3 § 2 $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{\beta}\Theta_1{}^{y}_{x}$, das heißt, es ist $\Theta_1{}^{y}_{x} \in \beta$. Widerspruch!

Es ist also $\forall x \Theta_1 \in \alpha$.

„$\Leftarrow$"

$\forall x \Theta_1 \in \alpha$.

Wir nehmen an, daß $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ nicht $\forall x \Theta_1$ erfüllt. Dann gilt:

E.g. β E.g. $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*}(\alpha \subseteq \beta$ und $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*} \underset{x}{=} I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}$ und $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*\beta}$ erf nicht $\Theta_1)$. Es sei $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*\beta}(x) = \bar{t}^{\beta} = I^{\mathfrak{A}}_{\beta}(t) = I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_{\beta}(t)$. Es sei $GU\Theta_1 H_1$, so daß in H_1 keine Variable, die in t vorkommt, gebunden ist. Dann erfüllt $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{*\beta}$ nicht H_1 und deshalb erfüllt $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}_{\beta}$ nicht $H_1{}^{t}_{x}$. Es ist also $H_1{}^{t}_{x} \notin \beta$. Da $GU\forall x \Theta_1 \forall x H_1$ und da $\forall x \Theta_1 \in \beta$, ist $\beta \vdash \forall x H_1$ und damit $\forall x H_1 \in \beta$. Da $\vdash \forall x H_1 \to H_1{}^{t}_{x}$, ist $\beta \vdash H_1{}^{t}_{x}$. Da $t \in \bar{t}^{\beta}$, ist $\operatorname{Ind} t \subseteq \operatorname{Ind}\beta$. Deshalb ist $H_1{}^{t}_{x} \in \beta$. Widerspruch! $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erfüllt also $\forall x \Theta_1$.

7. $\Theta = \neg \Theta_1$. „$\Leftarrow$"

$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erf Θ.

$\Rightarrow$ F.a. β $(\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\beta}$ erf nicht $\Theta_1)$.

$\Rightarrow$ F.a. β $(\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta)$.

Wir nehmen an, daß $\neg \Theta_1 \notin \alpha$. Dann ist $\alpha \cup \{\Theta_1\} \in \neg \Theta_1$-WF. Denn wäre $\alpha \cup \{\Theta_1\} \vdash \neg \Theta_1$, so wäre $\alpha \vdash \Theta_1 \to \neg \Theta_1$ und damit auch $\alpha \vdash \neg \Theta_1$ nach

Axiom A 14. Das heißt, es wäre $\neg\, \Theta_1 \in \alpha$. Widerspruch! Da also $\alpha \cup \{\Theta_1\} \in \neg\, \Theta_1$-WF ist, gibt es nach Satz 2 ein β mit $\alpha \cup \{\Theta_1\} \subseteq \beta$ und $\beta \in \neg\, \Theta_1$-SA. Es ist also $\beta \in M$ und $\alpha \subseteq \beta$ und $\Theta_1 \in \beta$. Widerspruch! Es ist also $\neg\, \Theta_1 \in \alpha$.

„$\Leftarrow$"

$\neg\, \Theta_1 \in \alpha$.
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \neg\, \Theta_1 \in \beta$).
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta$), da alle β widerspruchsfrei sind.
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}}$ erf nicht Θ_1).
$\Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erf $\neg\, \Theta_1$.

8. $\Theta = \Theta_1 \to \Theta_2$. „$\Rightarrow$"

$I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erf Θ.
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}}$ erf nicht Θ_1 oder $I_\beta^{\mathfrak{A}}$ erf Θ_2).
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta$ oder $\Theta_2 \in \beta$).
Wir nehmen an, daß $\Theta_1 \to \Theta_2 \notin \alpha$ ist. Dann ist $\alpha \in \Theta_1 \to \Theta_2$-WF und deshalb $\alpha \cup \{\Theta_1\} \in \Theta_2$-WF. Nach Satz 2 gibt es ein β mit $\alpha \subseteq \beta$ und $\beta \in$ SA, so daß $\Theta_1 \in \beta$ und $\Theta_2 \notin \beta$. Widerspruch! Es ist also $\Theta_1 \to \Theta_2 \in \alpha$.

„$\Leftarrow$"

$\Theta_1 \to \Theta_2 \in \alpha$.
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \to \Theta_2 \in \beta$).
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta$ oder $\Theta_2 \in \beta$), denn ist $\Theta_1 \in \beta$, so ist $\beta \vdash \Theta_2$ und deshalb ist $\Theta_2 \in \beta$.
$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}}$ erf nicht Θ_1 oder $I_\beta^{\mathfrak{A}}$ erf Θ_2).
$\Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erf $\Theta_1 \to \Theta_2$.

Aus Satz 3 folgt:

Satz 4: $\Sigma \Vdash \Theta \Rightarrow \Sigma \vdash \Theta$.

Beweis:

Annahme, es ist nicht $\Sigma \vdash \Theta$. Dann ist $\Sigma' = \Sigma \cup \{\Theta \to \Theta\} \in \Theta$-WF. Nach Satz 2 gibt es ein $\Sigma^* \in \Theta$-SA mit $\Sigma' \subseteq \Sigma^*$. Nach Satz 3 gibt es ein i-PIF-Modell $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ und ein α aus der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$, so daß $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ genau dann Φ mit $\mathrm{Ind}\,\Phi \subseteq \mathrm{Ind}\,\Sigma^*$ erfüllt, wenn $\Phi \in \Sigma^*$ ist. Da $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ jede Formel von Σ erfüllt, erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}}\, \Theta$. Da $\mathrm{Ind}\,\Theta \subseteq \mathrm{Ind}\,\Sigma^*$, ist $\Theta \in \Sigma^*$. Widerspruch! Es ist also $\Sigma \vdash \Theta$.

Zusammen mit Satz 1 gilt:

Satz 5: $\Sigma \Vdash \Theta \Leftrightarrow \Sigma \vdash \Theta$.

Aus Satz 5 folgt unmittelbar der *Endlichkeitssatz:*

Satz 6: Zu jeder Formelmenge Σ gibt es genau dann ein i-PIF-Modell, in dem sie gültig ist, wenn für jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ein i-PIF-Modell existiert, in dem Σ' gültig wird.

Kapitel 2

Modelltheorie der intuitionistischen PIF-Logik

§ 1. Klassische Erfüllbarkeit und intuitionistische Erfüllbarkeit

Es sollen zuerst einige semantische Grundbegriffe gegeben werden und einige Sätze über ihren Zusammenhang angeführt werden, die wir bei Schütte [9] finden und die sich leicht auf die hier verwandte allgemeinere Logik übertragen lassen.

Definition 1: Eine Formel Θ hießt *erfüllbar*, wenn es ein i-PIF-Modell gibt, in dem sie gültig wird.

Definition 2: Eine Formel Θ heißt *endlich erfüllbar*, wenn es ein i-PIF-Modell mit einer endlichen Situationsmenge gibt, in dem Θ gültig wird.

Definition 3: Eine Formel Θ heißt *endlich allgemein erfüllbar*, wenn sie in jedem i-PIF-Modell mit endlicher Situationsmenge erfüllbar ist.

Definition 4: Eine Formel Θ heißt *allgemein erfüllbar*, wenn sie in jedem i-PIF-Modell erfüllbar ist.

Definition 5: Eine Formel Θ heißt *endlich allgemeingültig*, wenn sie in jedem i-PIF-Modell mit endlicher Situationsmenge gültig ist.

Es werden also 6 Klassen von Formeln unterschieden:

A: allgemeingültige Formeln,
B: endlich allgemeingültige Formeln,
C: allgemein erfüllbare Formeln,
D: endlich allgemein erfüllbare Formeln,
E: endlich erfüllbare Formeln und
F: erfüllbare Formeln.

Von den Klassen B und C ist keine in der anderen enthalten. Im übrigen ist jede Formelklasse in der darauf folgenden Formelklasse echt enthalten.

Die Formelklassen A, C. D, E, F können folgendermaßen syntaktisch charakterisiert werden:

Eine Formel Θ gehört dann zur Formelklasse A,
wenn Θ in der intuitionistischen PIF-Logik ableitbar ist;
Θ gehört genau dann zur Formelklasse C,
wenn $\neg\neg\Theta$ in der intuitionistischen PIF-Logik ableitbar ist;
Θ gehört genau dann zur Formelklasse D,
wenn Θ in der klassischen PIF-Logik ableitbar ist;
Θ gehört genau dann zur Formelklasse E,
wenn $\neg\Theta$ nicht in der klassischen PIF-Logik ableitbar ist und
Θ gehört genau dann zur Formelklasse F,
wenn $\neg\Theta$ nicht in der intuitionistischen PIF-Logik ableitbar ist.

Besteht in dem i-PIF-Modell $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ mit $\mathfrak{A} = \langle\{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M\}, \leqq, \varphi\rangle$ und $\mathfrak{A}_\alpha = \langle A_\alpha, (f_i^\alpha)_{i\in I}, (r_j^\alpha)_{j\in J}\rangle$ die Menge M nur aus einem Element, ist also $M = \{\alpha\}$, so ist die Definition von „$I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erfüllt Θ“ identisch mit der Definition der klassischen Erfüllungsrelation.

Das gleiche gilt, falls α ein maximales Element von $\langle M, \leqq\rangle$ ist.
Das soll nun genauer untersucht werden.

Jede Interpretation $I^{\mathfrak{A}}$ über der K-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt Anlaß zu einer klassischen Interpretation $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ über der Struktur $\mathfrak{A}_\alpha$ für alle $\alpha \in M$. Wir setzen:

$I^{\mathfrak{A}_\alpha}(x) = I_\alpha^{\mathfrak{A}}(x) = I_\alpha^{\mathfrak{A}'}(x)$ für alle $x \in \mathrm{Ind}\mathfrak{F}$, wobei $\mathfrak{A}' = \langle\{\mathfrak{A}_\alpha\}, \leqq \upharpoonright \{\alpha\} \times \{\alpha\}, \varphi \upharpoonright \{\alpha\} \times \{\alpha\}\rangle$ ist.

$\langle\mathfrak{A}_\alpha, I^{\mathfrak{A}_\alpha}\rangle$ ist ein Modell der klassischen PIF-Logik, wir nennen es kurz ein *PIF-Modell*.

Es läßt sich nun durch Induktion über den Aufbau der Terme zeigen, daß $I^{\mathfrak{A}_\alpha}(t) = I^{\mathfrak{A}}_\alpha(t) = I^{\mathfrak{A}'}_\alpha(t)$ ist für alle Terme t. Und durch Induktion über die Länge der Formeln beweist man, daß $I^{\mathfrak{A}_\alpha}\,\Theta$ (klassisch) erfüllt genau dann, wenn $I^{\mathfrak{A}'}_\alpha\,\Theta$ erfüllt für alle Formeln Θ.

Und umgekehrt gibt jede Interpretation $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ über der Struktur $\mathfrak{A}_\alpha$ Anlaß zu einer Interpretation $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ über der K-Struktur $\mathfrak{A}\restriction\alpha$. Denn $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ ist ja vollständig bestimmt, wenn $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_\alpha(x)$ für alle $x \in \mathrm{Ind}\mathfrak{F}$ definiert ist.

Wir setzen $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}_\alpha(x) = I^{\mathfrak{A}_\alpha}(x)$ für alle $x \in \mathrm{Ind}\mathfrak{F}$.

$I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ nennen wir die *von $I^{\mathfrak{A}}$ induzierte Interpretation*, bzw. $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ nennen wir die *von $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ induzierte Interpretation.*

In den folgenden Sätzen soll die klassische Erfüllungsrelation „$I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ erfüllt Θ" mit der intuitionistischen Erfüllungsrelation „$I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erfüllt Θ" verglichen werden.

Satz 1: Ist $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ ein i-PIF-Modell und ist α ein maximales Element der Situationsmenge, so gilt, falls $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ die von $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ induzierte Interpretation ist:

$I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ erf $\Theta \Leftrightarrow I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf Θ.

Beweis durch Induktion über die Länge der Formeln.

Aus diesem Satz folgt:

Satz 2: Ist $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ ein endliches i-PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, so gibt es ein α aus der Situationsmenge, so daß $I^{\mathfrak{A}_\alpha}\,\Theta$ erfüllt (*endlich* bedeutet mit endlicher Situationsmenge).

Die Umkehrung von Satz 2 ist im allgemeinen falsch. In dem folgenden Beispiel wird sogar gezeigt, daß eine klassisch allgemeingültige Formel nicht in jedem i-PIF-Modell mit endlicher Situationsmenge gültig zu sein braucht.

Beispiel 1: Es sei $\Theta = \exists x(\neg\, x \equiv F^0) \vee \forall x(x \equiv F^0)$. Diese Formel ist klassisch allgemeingültig. Es sei $\langle\{\mathfrak{A}_\nu : \nu \in \{0, 1\}\}, \leqq, \varphi\rangle = \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_0 = \langle\{0\}, 0\rangle$ und $\mathfrak{A}_1 = \langle\{0, 1\}, 0\rangle$, und es sei $\overset{01}{\varphi}(0) = 0$. Ist $I^{\mathfrak{A}}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}$, so ist Θ nicht in $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ gültig, da $I^{\mathfrak{A}}_0\,\Theta$ nicht erfüllt.

Mit dem nächsten Beispiel soll gezeigt werden, daß es ein i-PIF-Modell $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ gibt, so daß sogar die Negation der Formel $\Theta = \exists x(\neg\, x \equiv F^0) \vee \forall x(x \equiv F^0)$ in $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ gültig ist. Nach Satz 2 ist dafür notwendig, daß $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ nicht endlich ist.

Beispiel 2: Es sei $\mathfrak{B} = \langle\{\mathfrak{B}_n : n \in \omega\}, \leqq, \varphi^*\rangle$ mit $\mathfrak{B}_{2n} = \langle\{0, 2\}, 0\rangle$ und $\mathfrak{B}_{2n+1} = \langle\{0\}, 0\rangle$ für alle $n \in \omega$. $\leqq$ sei die übliche kleiner-gleich-Relation auf den natürlichen Zahlen. Es sei $\overset{2n\,2n+1}{\varphi^*}(0) = \overset{2n\,2n+1}{\varphi^*}(2) = 0$ und es sei $\overset{2n+1\,2(n+1)}{\varphi^*}(0) = 0$ für alle $n \in \omega$. (Die letzte Gleichung und auch die davor ist schon durch die Homomorphieeigenschaft von $\overset{n\,n+1}{\varphi^*}$ bestimmt.) $I^{\mathfrak{B}}$ sei eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{B}$. $I^{\mathfrak{B}}_n$ erfüllt nicht Θ für alle $n \in \omega$, das heißt, $I^{\mathfrak{B}}_n$ erfüllt $\neg\,\Theta$ für alle $n \in \omega$.

Um weitere Zusammenhänge zwischen der klassischen und intuitionistischen Erfüllbarkeit zu finden, ordnen wir jeder Formel Θ eindeutig eine Formel $N(\Theta)$ zu, die wir die *Normalform* von Θ nennen.

Definition 1: Induktive Definition der Normalform:

1. 2. Θ ist Primformel.

$N(\Theta) = \Theta$.

3. 4. $\Theta = \Theta_1 \overset{(\vee)}{\wedge} \Theta_2$.
$N(\Theta) = N(\Theta_1) \overset{(\vee)}{\wedge} N(\Theta_2)$.
5. 6. $\Theta = \exists x \Theta_1$. $(\Theta = \forall x \Theta_1.)$
$N(\Theta) = \exists x N(\Theta_1)$. $(N(\Theta) = \forall x N(\Theta_1).)$
7. $\Theta = \neg\, \Theta_1$.
a. b. Θ_1 ist Primformel.
$N(\Theta) = \Theta$.
c. d. $\Theta_1 = \Theta_1' \overset{(\vee)}{\wedge} \Theta_2'$.
$N(\Theta) = N(\neg\, \Theta_1') \overset{(\wedge)}{\vee} N(\neg\, \Theta_2')$.
e. f. $\Theta_1 = \exists x \Theta_1'$. $(\Theta_1 = \forall x \Theta_1'.)$
$N(\Theta) = \forall x N(\neg\, \Theta_1')$. $(N(\Theta) = \exists x N(\neg\, \Theta_1').)$
g. $\Theta_1 = \neg\, \Theta_1'$.
$N(\Theta) = N(\Theta_1')$.
h. $\Theta_1 = \Theta_1' \rightarrow \Theta_1'$.
$N(\Theta) = N(\Theta_1') \wedge N(\neg\, \Theta_2')$.
8. $\Theta = \Theta_1 \rightarrow \Theta_2$.
$N(\Theta) = N(\neg\, \Theta_1) \vee N(\Theta_2)$.

Θ und $N(\Theta)$ sind in der klassischen Logik äquivalent. In der intuitionistischen Logik sind Θ und $N(\Theta)$ nicht äquivalent, denn in einem i-PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, braucht nicht notwendig $N(\Theta)$ gültig zu sein.

Folgende Zusammenhänge zwischen Θ und $N(\Theta)$ bestehen in der intuitionistischen Logik, wie man durch Induktion über die Länge der Formeln beweist.

Satz 3: Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein i-PIF-Modell und ist α ein Element der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$, so gilt:

F.a. $\Theta\,(I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf $N(\Theta) \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf $\Theta)$.

Satz 4: Ist Θ eine Formel, in der keine Quantoren vorkommen, so gilt:

$I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf $\Theta \Rightarrow$ E.g. $\beta(\alpha \leqq \beta$ und $I^{\mathfrak{A}}_\beta$ erf. $N(\Theta))$.

Durch Induktion über die Länge von $N(\Theta)$ kann folgender Satz gezeigt werden:

Satz 5: Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein i-PIF-Modell und ist α ein Element aus der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$, so gilt für alle Formeln Θ:

$I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf $N(\Theta) \Rightarrow I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ erf Θ (klassisch).

Aus Satz 4 und Satz 5 folgt unmittelbar:

Satz 6: Ist Θ eine Formel, in der keine Quantoren vorkommen, so gilt:

$I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf $\Theta \Rightarrow$ E.g. $\beta\,(\alpha \leqq \beta$ und $I^{\mathfrak{A}_\beta}$ erf $\Theta)$.

Nachdem wir nun einige Sätze angegeben haben, die zeigen, unter welchen Bedingungen aus der intuitionistischen Gültigkeit die klassische folgt, sollen nun Bedingungen angegeben werden, unter denen aus der klassischen Gültigkeit die intuitionistische folgt, wie man durch Induktion über die Länge der Formeln zeigen kann.

Satz 7: Enthält die Formel $N(\Theta)$ keinen Existenzquantor und kein Disjunktionszeichen, so gilt:

F.a. $\beta\,(\alpha \leqq \beta \Rightarrow I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ erf $\Theta) \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf Θ.

Satz 8: Enthält die Formel $N(\Theta)$ keinen Allquantor und kein Negationszeichen, so gilt:

$I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ erf $\Theta \Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erf Θ.

§ 2. Die Begriffe des k-Homomorphismus, der k-Unterstruktur und des k-Ultraprodukts

In diesem Paragraphen wird der semantische Begriff des k-Homomorphismus, der Begriff der k-Unterstruktur und der Begriff des k-Ultraprodukts als Verallgemeinerungen der entsprechenden klassischen Begriffe definiert.

Dann wird untersucht, welche Formeln und unter welchen Bedingungen sie bei diesen semantischen Operationen gültig bleiben.

Im folgenden seien $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ und $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ zwei i-PIF-Modelle, wobei $\mathfrak{A} = \langle \{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M, \leqq, \varphi \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle \{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha \in M, \leqq, \varphi^* \rangle$ zwei K-Strukturen vom Typ τ sind.

Definition 1: Die Funktion ψ heißt ein *k-Homomorphismus* von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ in $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$, wir schreiben: $\psi : \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle \to \langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$, wenn gilt:

1. ψ ordnet jedem $\alpha \in M$ einen Homomorphismus $\overset{\alpha}{\psi} : \mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$ zu.
2. Sind $\alpha, \beta \in M$ mit $\alpha \leqq \beta$, so ist $\overset{\alpha\beta}{\varphi^*} \overset{\alpha}{\psi}(a) = \overset{\beta}{\psi} \overset{\alpha\beta}{\varphi}(a)$ für alle $a \in |\mathfrak{A}|$.
3. Für alle $\alpha \in M$ und alle $x \in \mathrm{Ind}\mathfrak{F}$ ist $\overset{\alpha}{\psi}(I_\alpha^{\mathfrak{A}}(x)) = I_\alpha^{\mathfrak{B}}(x)$.

ψ heißt ein *k-Epimorphismus (k-Isomorphismus)*, wenn $\overset{\alpha}{\psi}$ ein Epimorphismus (Isomorphismus) ist für alle $\alpha \in M$. $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ heißt ein *k-homomorphes Bild* von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, wenn es einen k-Epimorphismus $\psi : \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle \to \langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ gibt.

Gegenüber dem klassischen Fall können wir hier zwei Arten der Invarianz einer Formel unterscheiden.

Definition 2: Eine Formel Θ heißt *(streng) invariant gegenüber k-Homomorphismen,* wenn gilt:
Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein beliebiges i-PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, und ist $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ ein beliebiges k-homomorphes Bild von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, so gibt es eine Situation α, so daß Θ in $\langle \mathfrak{B} \restriction \alpha, I^{\mathfrak{B} \restriction \alpha} \rangle$ gültig wird (so ist Θ in $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ gültig).

Definition 3: Eine Formel Θ heißt *(streng) invariant gegenüber k-Urbildern,* wenn gilt:
Ist $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ ein beliebiges i-PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, und ist $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ k-homomorphes Bild des i-PIF-Modells $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, so gibt es eine Situation α, so daß Θ in $\langle \mathfrak{A} \restriction \alpha, I^{\mathfrak{A} \restriction \alpha} \rangle$ gültig wird (so ist Θ in $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ gültig).

Folgende Beziehungen bestehen zwischen den 4 Arten der Invarianz:

Satz 1: Ist Θ invariant gegenüber k-Homomorphismen, so ist $\neg\Theta$ streng invariant gegenüber k-Urbildern.

Satz 2: Ist $\neg\Theta$ invariant gegenüber k-Urbildern, so ist Θ invariant gegenüber k-Homomorphismen.

Satz 3: Ist $\neg\Theta$ invariant gegenüber k-Homomorphismen, so ist Θ invariant gegenüber k-Urbildern.

Satz 4: Ist Θ invariant gegenüber k-Urbildern, so ist $\neg\,\Theta$ streng invariant gegenüber k-Homomorphismen.

Mit dem folgenden Beispiel soll gezeigt werden, daß nicht jede Formel, die in der klassischen Modelltheorie invariant gegenüber Homomorphismen ist, auch invariant ist gegenüber k-Homomorphismen.

Beispiel 1: Es sei $\mathfrak{A} = \langle\{\mathfrak{A}_n : n \in \omega, \leqq, \varphi\rangle$ mit $\mathfrak{A}_{2n} = \langle\{0, 1, 2\}, 0\rangle$ und $\mathfrak{A}_{2n+1} = \langle\{0, 1\}, 0\rangle$ für alle $n \in \omega$. $\leqq$ sei die übliche kleiner-gleich-Relation auf den natürlichen Zahlen. Es sei $\overset{2n\,2n+1}{\varphi}(0) = \overset{2n\,2n+1}{\varphi}(2) = 0$ und $\overset{2n\,2n+1}{\varphi}(1) = 1$. Und es sei $\overset{2n+1\,2(n+1)}{\varphi}(0) = 0$ und $\overset{2n+1\,2(n+1)}{\varphi}(1) = 1$. Das gelte für alle $n \in \omega$. $\mathfrak{B}$ sei die K-Struktur aus Beispiel 2, § 1. $I^{\mathfrak{A}}$ sei eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}$ und $I^{\mathfrak{B}}$ eine beliebige über $\mathfrak{B}$ aber mit der in Definition 1.3. geforderten Eigenschaft. Der k-Epimorphismus $\psi : \langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle \to \langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ sei so definiert: Es sei $\overset{2n}{\psi}(0) = \overset{2n}{\psi}(1) = 0$ und es sei $\overset{2n}{\psi}(2) = 2$ und es sei $\overset{2n+1}{\psi}(0) = \overset{2n+1}{\psi}(1) = 0$ für alle $n \in \omega$.

Die klassisch allgemeingültige Formel $\Theta = \forall x(x \equiv F^0) \vee \exists x(\neg\, x \equiv F^0)$ ist invariant gegenüber Homomorphismen, aber nicht invariant gegenüber k-Homomorphismen. Denn sie ist in $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ gültig, da $\exists x(\neg\, x \equiv F^0)$ in $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ gültig ist, aber es ist $\neg\,\Theta$ in $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ gültig.

Es gilt aber folgender Satz:

Satz 5: Ist Θ eine Formel, so daß $N(\Theta)$ kein Negationszeichen enthält, so ist Θ streng invariant gegenüber k-Homomorphismen.

Beweis:
Es sei $\psi : \langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle \to \langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ ein k-Epimorphismus und es sei Θ eine beliebige Formel, die die Voraussetzung von Satz 5 erfüllt. Durch geschachtelte Induktion über die Länge der Formeln wird gezeigt:

$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erf $\Theta \Rightarrow I^{\mathfrak{B}}_{\alpha}$ erf Θ.

In ähnlicher Weise beweist man:

Satz 6: Ist Θ eine Formel, so daß vor jeder Primformel in $N(\Theta)$ ein Negationszeichen steht, so ist Θ streng invariant gegenüber k-Urbildern.

Satz 7: Ist $\psi : \langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle \to \langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ ein k-Isomorphismus, so gilt für alle Formeln Θ:

$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erf $\Theta \Leftrightarrow I^{\mathfrak{B}}_{\alpha}$ erf Θ.

Nun wenden wir uns dem Begriff des k-Untermodells eines i-PIF-Modells zu.

Definition 4: $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ heißt ein *k-Untermodell* von $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$, wir schreiben $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle \subseteq \langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$, wenn gilt:

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\mathfrak{B}_{\alpha}$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}_{\alpha}$.
2. Für alle $\alpha, \beta \in M$ mit $\alpha \leqq \beta$ ist $\overset{\alpha\beta}{\varphi}{}^{*} = \overset{\alpha\beta}{\varphi} \upharpoonright |\mathfrak{B}_{\alpha}|$.
3. Für alle $\alpha \in M$ und alle $x \in \mathrm{Ind}\mathfrak{F}$ ist $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(x) = I^{\mathfrak{B}}_{\alpha}(x)$.

Ist $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$ ein k-Untermodell von $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$, so heißt $\langle\mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ ein *k-Obermodell* von $\langle\mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}}\rangle$.

Wie beim k-Homomorphismus können wir auch hier zwei Arten der Invarianz gegenüber k-Untermodellen bzw. gegenüber k-Obermodellen unterscheiden und entsprechende Sätze wie beim k-Homomorphismus beweisen.

Und das Beispiel in diesem Paragraphen zeigt, daß nicht jede Formel, die in der klassischen Modelltheorie invariant gegenüber Untermodellen ist, auch invariant gegenüber k-Untermodellen ist.

Es gilt aber der folgende Satz:

Satz 8: Ist Θ eine Formel, so daß $N(\Theta)$ keinen Existenzquantor enthält, so ist Θ streng invariant gegenüber k-Untermodellen.

Beweis:

Es sei $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ und es sei Θ eine beliebige Formel, die die Voraussetzung dieses Satzes erfüllt. Wir zeigen durch geschachtelte Induktion über die Länge der Formeln, daß für alle $\alpha \in M$ gilt:

$I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erf $\Theta \Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{B}}$ erf Θ.

In ähnlicher Weise wird folgender Satz bewiesen:

Satz 9: Ist Θ eine Formel, so daß $N(\Theta)$ keinen Allquantor enthält, so ist Θ streng invariant gegenüber k-Obermodellen.

Im folgenden soll die Ultraproduktkonstruktion der klassischen Modelltheorie auf die intuitionistische Modelltheorie übertragen werden und ein dem klassischen Hauptsatz über Ultraprodukte entsprechender Satz angegeben werden.

Der Einfachheit halber soll im folgenden vorausgesetzt werden, daß die K-Strukturen vom Typ $\tau = ((2), (3))$ sind. Das heißt also, in den Strukturen kommt nur eine 2-stellige Funktion und 3-stellige Relation vor. Die Konstruktionen und Sätze, die hier angegeben werden, lassen sich auf den allgemeinen Fall übertragen.

Das der 2-stelligen Funktion entsprechende Funktionszeichen sei F, das der 3-stelligen Relation entsprechende Relationszeichen sei R.

Im folgenden sei L eine beliebige nicht leere Menge und $(\langle \mathfrak{A}^l, I^{\mathfrak{A}^l} \rangle)_{l \in L}$ eine L-Folge von i-PIF-Modellen mit $\mathfrak{A}^l = \langle \{\mathfrak{A}_\alpha^l : \alpha \in M\}, \leqq, \varphi_l \rangle$ und $\mathfrak{A}_\alpha^l = \langle A_\alpha^l, f_\alpha^l, r_\alpha^l \rangle$, wobei $\mathfrak{A}^l$ eine K-Struktur vom Typ $\tau = ((2), (3))$ ist.

Es sei D ein Ultrafilter auf L.

Definition 5: Das i-PIF-Modell $\langle \overline{\mathfrak{A}}, I^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle$ mit $\overline{\mathfrak{A}} = \langle \{\overline{\mathfrak{A}_\alpha} : \alpha \in M\}, \leqq, \bar{\varphi} \rangle$ und $\overline{\mathfrak{A}_\alpha} = \langle \overline{A_\alpha}, \overline{f_\alpha}, \overline{r_\alpha} \rangle$ heißt das *k-Ultraprodukt von* $(\langle \mathfrak{A}^l, I^{\mathfrak{A}^l} \rangle)_{l \in L}$ *bezüglich* D, wenn gilt:

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\overline{\mathfrak{A}_\alpha}$ das Ultraprodukt von $(\mathfrak{A}_\alpha^l)_{l \in L}$ bezüglich D.
2. Sind α, $\beta \in M$ und ist $\overline{(a_l)_{l \in L}} \in \overline{A_\alpha}$, so ist $\overset{\alpha\beta}{\bar{\varphi}}\ \overline{(a_l)_{l \in L}} = \overline{(\overset{\alpha\beta}{\varphi_l}(a_l))_{l \in L}}$.
3. Für alle $\alpha \in M$ und alle $x \in \mathrm{Ind}\mathfrak{F}$ ist $I_\alpha^{\overline{\mathfrak{A}}}(x) = \overline{(I_\alpha^{\mathfrak{A}^l}(x))_{l \in L}}$.

Es ist leicht zu zeigen, daß $\langle \overline{\mathfrak{A}}, I^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle$ wirklich ein i-PIF-Modell ist.

Nun soll der Hauptsatz über das k-Ultraprodukt angegeben werden. In der allgemeinen Form wie in der klassischen Modelltheorie läßt er sich nicht auf die intuitionistische Modelltheorie übertragen.

Es gilt aber folgender Satz:

Satz 10: Ist $\langle \overline{\mathfrak{A}}, I^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle$ das k-Ultraprodukt von $(\langle \mathfrak{A}^l, I^{\mathfrak{A}^l} \rangle)_{l \in L}$ bezüglich des Filters D und ist der Durchschnitt geeignet vieler Filterelemente ein Element des Filters, wobei die Anzahl jeweils abhängig ist von der Mächtigkeit der Situationsmenge und den Mächtigkeiten der Trägermengen, so gilt für alle Formeln Θ:

$I_\alpha^{\overline{\mathfrak{A}}}$ erf $\Theta \Rightarrow \{l : I_\alpha^{\mathfrak{A}^l}$ erf $\Theta\} \in D$.

§ 3. *Übergang von den semantischen zu algebraischen Begriffen*

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse des zweiten Kapitels zusammengefaßt werden, nachdem wir von den semantischen Begriffen zu den entsprechenden algebraischen Begriffen übergegangen sind.

Im folgenden seien $\mathfrak{A} = \langle\{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M\}, \leqq, \varphi\rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle\{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha \in M\}, \leqq, \varphi^*\rangle$ zwei K-Strukturen vom Typ $\tau = ((s_i)_{i \in I}, (\sigma_j)_{j \in J})$.

Definition 1: $\mathfrak{A}$ nennen wir ein i-Modell von Θ oder kurz *i-Θ-Modell*, wenn gilt:

F.a. α F.a. $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}(\alpha \in M \Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ erf $\Theta)$.

In Analogie zu diesem Begriff der intuitionistischen Modelltheorie definieren wir den entsprechenden klassischen Begriff. $\mathfrak{A}_\alpha$ heißt ein *Θ-Modell*, wenn $I^{\mathfrak{A}_\alpha}\,\Theta$ erfüllt für alle Interpretationen $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ über $\mathfrak{A}_\alpha$.

Der folgende Satz stellt eine Beziehung her zwischen den Begriffen „$\mathfrak{A}$ ist ein i-Θ-Modell" und „$I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erf Θ".

Satz 1: Ist Θ eine geschlossene Formel und ist $I^{\mathfrak{A}}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}$ und ist $\alpha \in M$, so gilt:

$I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erf $\Theta \Leftrightarrow \mathfrak{A} \restriction \alpha$ ist ein i-Θ-Modell.

Beweis: „$\Rightarrow$"

Es sei $\alpha \leqq \beta$ und es sei $I_*^{\mathfrak{A}\restriction\beta}$ eine Interpretation über $\mathfrak{A} \restriction \beta$. Es ist $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta} = I_*^{\mathfrak{A}\restriction\beta}\,[\Theta]$. Da $I_\beta^{\mathfrak{A}\restriction\beta}$ Θ erfüllt, erfüllt nach Satz 2, § 2, Kap. 1 $I_{*\beta}^{\mathfrak{A}\restriction\beta}$ Θ. $\mathfrak{A} \restriction \alpha$ ist also ein i-Θ-Modell.

„$\Leftarrow$" folgt unmittelbar aus Definition 1.

Aus Satz 1 folgt:

Satz 2: Ist Θ eine geschlossene Formel und ist $\mathfrak{A}$ ein i-Θ-Modell, so ist auch $\mathfrak{A} \restriction \alpha$ ein i-Θ-Modell.

Beweis:

Ist $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ eine Interpretation über $\mathfrak{A} \restriction \alpha$, so erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ Θ nach Voraussetzung. Nach Satz 1 ist $\mathfrak{A} \restriction \alpha$ ein i-Θ-Modell.

Die folgenden Sätze, in denen einige Ergebnisse von Kapitel 2 auf die K-Strukturen bzw. Strukturen übertragen werden, sind nun alle im Prinzip ebenso zu beweisen wie der folgende Satz 3. Deshalb soll nur der Beweis dieses Satzes angegeben werden.

Satz 3. (Satz 1, § 1): Ist α ein maximales Element von M, so gilt für alle Formeln Θ:

$\mathfrak{A}_\alpha$ ist ein Θ-Modell $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A} \restriction \alpha$ ist ein i-Θ-Modell.

Beweis: „$\Rightarrow$"

Es sei $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A} \restriction \alpha$ und es sei $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ die von $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ induzierte Interpretation über $\mathfrak{A}_\alpha$. Da $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ-Modell ist, erfüllt $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ Θ. Nach Satz 1, § 1 erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ Θ. Da α ein maximales Element von M ist und da $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ beliebig gewählt ist, gilt:

F.a. β F.a. $I^{\mathfrak{A}\restriction\beta}(\alpha \leqq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}\restriction\beta}$ erf $\Theta)$. $\mathfrak{A} \restriction \alpha$ ist also ein i-Θ-Modell.

„$\Leftarrow$"

Es sei $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}_\alpha$ und es sei $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ die von $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ induzierte Interpretation über $\mathfrak{A} \restriction \alpha$. Da $I_\alpha^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ Θ erfüllt, erfüllt nach Satz 1 § 1 $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ Θ, es ist also $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ-Modell.

Satz 4 (Satz 2, § 1): Ist $\mathfrak{A}$ ein i-Θ-Modell und ist M endlich, so gibt es ein $\alpha \in M$, so daß $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ-Modell ist.

Satz 5 (Satz 5, § 1): Ist $\mathfrak{A}$ ein i-$N(\Theta)$-Modell, so ist $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ-Modell für alle $\alpha \in M$.

Satz 6 (Satz 7, § 1): Enthält die Formel $N(\Theta)$ keinen Existenzquantor und kein Disjunktionszeichen, so gilt:

F.a. α ($\alpha \in M \Rightarrow \mathfrak{A}_\alpha$ ist ein Θ-Modell) $\Rightarrow \mathfrak{A}$ ist ein i-Θ-Modell.

Zum folgenden Satz soll wieder ein Beweis angegeben werden.

Satz 7 (Satz 8, § 1): Enthält $N(\Theta)$ keinen Allquantor und kein Negationszeichen und ist Θ eine geschlossene Formel, so gilt:

$\mathfrak{A}_\alpha$ ist ein Θ-Modell $\Rightarrow \mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ist ein i-Θ-Modell.

Beweis:

Es sei $\alpha \leqq \beta$ und es sei $I^{\mathfrak{A}\upharpoonright\beta}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A} \upharpoonright \beta$. Da $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ-Modell ist, ist auch $\mathfrak{A}_\beta$ ein Θ-Modell. Denn Θ ist in der klassischen Modelltheorie invariant gegenüber Homomorphismen und auch invariant gegenüber Oberstrukturen, und $\mathfrak{A}_\beta$ ist Oberstruktur eines homomorphen Bildes von $\mathfrak{A}_\alpha$. $I^{\mathfrak{A}_\beta}$ sei die von $I^{\mathfrak{A}\upharpoonright\beta}$ induzierte Interpretation. Da $I^{\mathfrak{A}_\beta}$ Θ erfüllt, erfüllt nach Satz 8, § 1 $I_\beta^{\mathfrak{A}\upharpoonright\beta}$ Θ. $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ist also ein i-Θ-Modell.

Nun gehen wir von den semantischen Begriffen des k-Homomorphismus und der k-Unterstruktur über zu den algebraischen Begriffen des K-Homomorphismus und der K-Unterstruktur.

Definition 2: Die Funktion ψ heißt ein *K-Homomorphismus* von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, wir schreiben: $\psi : \mathfrak{A} \underset{K}{\rightarrow} \mathfrak{B}$, wenn gilt (siehe Def. 1, § 2):

1. ψ ordnet jedem $\alpha \in M$ einen Homomorphismus $\overset{\alpha}{\psi} : \mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha$ zu.
2. Sind $\alpha, \beta \in M$, so ist $\overset{\alpha\beta}{\varphi} * \overset{\alpha}{\psi}(a) = \overset{\beta}{\psi}\,\overset{\alpha\beta}{\varphi}(a)$ für alle $a \in |\mathfrak{A}_\alpha|$.

$\psi : \mathfrak{A} \underset{K}{\rightarrow} \mathfrak{B}$ heißt ein *K-Epimorphismus (K-Isomorphismus)*, wenn $\overset{\alpha}{\psi} : \mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha$ ein Epimorphismus (Isomorphismus) ist für alle $\alpha \in M$. Gibt es einen K-Epimorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{B}$ *K-homomorphes Bild* von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{B}$ K-homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$, so ist auch $\mathfrak{B} \upharpoonright \alpha$ K-homomorphes Bild von $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ für alle $\alpha \in M$.

Ist M einelementig, so ist der Begriff des K-Homomorphismus mit dem klassischen Homomorphiebegriff identisch.

Satz 8 (Satz 5, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ K-homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$ und enthält die Normalform $N(\Theta)$ von Θ kein Negationszeichen, so gilt:

$\mathfrak{A}$ ist ein i-Θ-Modell $\Rightarrow \mathfrak{B}$ ist ein i-Θ-Modell.

Satz 9 (Satz 6, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ K-homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$ und steht vor jeder Primformel in $N(\Theta)$ ein Negationszeichen, so gilt:

$\mathfrak{B}$ ist ein i-Θ-Modell $\Rightarrow \mathfrak{A}$ ist ein i-Θ-Modell.

Satz 10 (Satz 7, §2): Gibt es einen K-Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt:

$\mathfrak{A}$ ist ein i-Θ-Modell $\Leftrightarrow \mathfrak{B}$ ist ein i-Θ-Modell.

Die Beweise dieser Sätze sind im Prinzip so zu führen wie der Beweis von Satz 1.

Definition 3: $\mathfrak{B}$ heißt eine *K-Unterstruktur* von $\mathfrak{A}$, wenn gilt:

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\mathfrak{B}_\alpha$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}_\alpha$.
2. Für alle $\alpha, \beta \in M$ mit $\alpha \leqq \beta$ ist $\overset{\alpha\beta}{\varphi *} = \overset{\alpha\beta}{\varphi} \restriction |\mathfrak{B}_\alpha|$ (siehe Def. 4, § 2).

Ist $\mathfrak{B}$ K-Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B} \restriction \alpha$ K-Unterstruktur von $\mathfrak{A} \restriction \alpha$.

Ist M einelementig, so ist der Begriff der K-Unterstruktur mit dem klassischen Unterstrukturbegriff identisch.

Auch der folgende Satz läßt sich im Prinzip so beweisen wie Satz 1.

Satz 11 (Satz 8, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ eine K-Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ und enthält die Normalform von Θ keinen Existenzquantor, so gilt:

$\mathfrak{A}$ ist ein i-Θ-Modell $\Rightarrow$ $\mathfrak{B}$ ist ein i-Θ-Modell.

Satz 12 (Satz 9, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ eine K-Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ und enthält die Normalform der geschlossenen Formel Θ keinen Allquantor, so gilt:

$\mathfrak{B}$ ist ein i-Θ-Modell $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ ist ein i-Θ-Modell.

Beweis:

Es sei $\alpha \in M$ und $I^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ eine Interpretation mit $I_\alpha^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}(x) \in |\mathfrak{B}|$ für alle $x \in \operatorname{Ind}\mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{B}$ ein i-Θ-Modell ist, erfüllt nach Satz 8 § 2 $I_\alpha^{\mathfrak{A}\restriction\alpha}$ Θ. Nach Satz 1 ist $\mathfrak{A} \restriction \alpha$ ein i-Θ-Modell. Das gilt für alle $\alpha \in M$. Deshalb ist $\mathfrak{A}$ ein i-Θ-Modell.

Auch der Invarianzbegriff und die Sätze 1 bis 4 in § 2 lassen sich geeignet übertragen.

Zum Abschluß wenden wir uns noch dem Begriff des K-Ultraprodukts zu.

Definition 4: Ist $(\mathfrak{A}^l)_{l\in L}$ eine L-Folge von K-Strukturen mit $\mathfrak{A}^l = \langle\{\mathfrak{A}_\alpha^l : \alpha \in M\}, \leqq, \varphi_l\rangle$, so heißt die K-Struktur $\overline{\mathfrak{A}} = \langle\{\overline{\mathfrak{A}}_\alpha : \alpha \in M\}, \leqq, \bar\varphi\rangle$ das *K-Ultraprodukt* von $(\mathfrak{A}^l)_{l\in L}$ bezüglich des Ultrafilters D, wenn gilt (siehe Def. 5, § 2):

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ das Ultraprodukt von $(\mathfrak{A}^l)_{l\in L}$ bezüglich D.
2. Sind $\alpha, \beta \in M$ und ist $\overline{(a_l)_{l\in L}} \in |\overline{\mathfrak{A}}_\alpha|$, so ist $\overset{\alpha\beta}{\bar\varphi}\,\overline{(a_l)_{l\in L}} = \overline{\big(\overset{\alpha\beta}{\varphi_l}(a_l)\big)_{l\in L}}$.

Es gilt folgender Satz über K-Ultraprodukte, wie man mit Hilfe von Satz 10, § 2 zeigen kann.

Satz 13: Es sei $\overline{\mathfrak{A}}$ das K-Ultraprodukt von $(\mathfrak{A}^l)_{l\in L}$ bezüglich des Ultrafilters D. Hat D die Eigenschaft, daß der Durchschnitt geeignet vieler Filterelemente ein Element des Filters ist, so gilt für alle Formeln Θ.

$\overline{\mathfrak{A}}$ ist ein i-Θ-Modell $\Leftrightarrow$ $\{l : \mathfrak{A}^l$ ist ein i-Θ-Modell$\} \in D$.

Beweis: „$\Rightarrow$"

Es sei $\alpha \in M$ und es sei $(I^{\mathfrak{A}^l\restriction\alpha})_{l\in L}$ eine L-Folge von Interpretationen. $I^{\overline{\mathfrak{A}}\restriction\alpha}$ sei die Interpratation mit

$I_\alpha^{\overline{\mathfrak{A}}\restriction\alpha}(x) = \overline{(I_\alpha^{\mathfrak{A}^l\restriction\alpha}(x))_{l\in L}}$ für alle $x \in \operatorname{Ind}\mathfrak{F}$.

$\Rightarrow$ $\langle\overline{\mathfrak{A}} \restriction \alpha, I^{\overline{\mathfrak{A}}\restriction\alpha}\rangle$ ist das k-Ultraprodukt von $(\langle\mathfrak{A}^l \restriction \alpha, I^{\mathfrak{A}^l\restriction\alpha}\rangle)_{l\in L}$.

Da $I_\alpha^{\overline{\mathfrak{A}}\restriction\alpha}$ Θ erfüllt, ist $D^0(\alpha, (I^{\mathfrak{A}^l\restriction\alpha})_{l\in L}) = \{l : I_\alpha^{\mathfrak{A}^l\restriction\alpha} \text{ erf } \Theta\} \in D$ nach Satz 10 § 2. Jedem $\alpha \in M$ und jeder L-Folge von Interpretationen $(I^{\mathfrak{A}^l\restriction\alpha})_{l\in L}$ ordnen wir ein Filterelement $D^0(\alpha, (I^{\mathfrak{A}^l\restriction\alpha})_{l\in L})$ zu. Es sei D^0 der Durchschnitt aller so erhaltenen

Filterelemente. Es ist
$D^0 \subseteqq \{l : \mathfrak{A}^l \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}\} = D^1$.
$\Rightarrow D^1 \in D$.
$\Rightarrow \{l : \mathfrak{A}^l \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}\} \in D$.

„$\Leftarrow$"

Es sei $\alpha \in M$ und es sei $I^{\overline{\mathfrak{A}} \restriction \alpha}$ eine Interpretation über $\overline{\mathfrak{A}} \restriction \alpha$. Es sei $(I^{\mathfrak{A}^l \restriction \alpha})_{l \in L}$ eine L-Folge von Interpretationen mit $\overline{(I_\alpha^{\mathfrak{A}^l \restriction \alpha}(x))_{l \in L}} = I_\alpha^{\overline{\mathfrak{A}} \restriction \alpha}(x)$ für alle $x \in \operatorname{Ind} \mathfrak{F}$. Es ist $\{l : \mathfrak{A}^l \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}\} \subseteqq \{l : I_\alpha^{\mathfrak{A}^l \restriction \alpha} \text{ erf } \Theta\} = D^0$.
$\Rightarrow D^0 \in D$. Nach Satz 10, § 2 gilt:
$I_\alpha^{\overline{\mathfrak{A}} \restriction \alpha}$ erf Θ. Das gilt für alle $\alpha \in M$ und alle $I^{\overline{\mathfrak{A}} \restriction \alpha}$.
$\Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}$ ist ein i-Θ-Modell.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. H. G. Aczel: Saturated intuitionistic theories. Contributions to the Mathematical Logic. Proceedings of the Logic Colloquium, Hannover 1966. Eds. H. A. Schmidt, K. Schütte and H.-J. Thiele, North-Holland Publishing Company. Amsterdam 1968.
[2] T. E. Frayne, A. C. Morel, D. S. Scott: Reduced direct products. Fund. Math. vol. 51 1962.
[3] H. Hermes: Einführung in die mathematische Logik. Teubner Verlag Stuttgart 1963.
[4] A. Heyting: Intuitionism. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1956.
[5] S. C. Kleene: Introduction to Metamathematics. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1952.
[6] G. Kreisel, J. L. Krivine: Eléments de logique mathématique. Monographies de la Société Mathématique de France. Paris 1967.
[7] S. A. Kripke: Semantical analysis of intuitionistic logic. Formal Systems and Recursive Functions, eds. J. N. Crossley and M. A. E. Dummet. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1965.
[8] R. G. Lyndon: Properties preserved under homomorphism. Pacific Journal Math. vol 9 1959.
[9] K. Schütte: Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 42. Springer Verlag 1968.

Arch. math. Logik 13 (1970), 22–38.

METAMATHEMATISCHE BEGRIFFE IN STANDARDTHEORIEN*

Von GIORGIO GERMANO aus Münster i. W.

Einführung

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Präzisierung eines sehr üblichen metamathematischen Begriffs im Rahmen der ersten Stufe. Schon die Problemstellung (s.u.) und ferner manche Analogien formaler Art weisen auf Beziehungen zum Tarskischen Satz über den Wahrheitsbegriff hin. Im ersten Paragraphen betrachten wir also den allgemeinen Satz über den Wahrheitsbegriff von Tarski, 1936, und den Hauptsatz von Tarski, 1953 (Satz 1.1, Satz 1.1*). Dann wird eine gemeinsame Verschärfung dieser Sätze (die voneinander logisch unabhängig sind) bewiesen (Satz 1.2), und es wird gezeigt (mit Hilfe eines Lemmas), daß diese Verschärfung nicht weiter geführt werden kann (Satz 1.3). Aus Satz 1.2 (mit Hilfe des Lemmas) ergibt sich als Korollar auch eine gewisse Verschärfung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes, in der Form von Rosser, 1936, für die Arithmetik der ersten Stufe. Am Ende des Paragraphen wird ein neuer, intuitionistisch gültiger Beweis von Satz 1.1* angegeben (der Beweis von Tarski, 1953, gebraucht wesentlich das „tertium non datur"). Im zweiten Paragraphen wird die Unabhängigkeit des Satzes 1.2 von Satz 1.1 und von Satz 1.1* skizziert. Im dritten Paragraphen erweist sich durch Anwendung von Satz 1.1 eine erste Präzisierung $T_1(g)$ des untersuchten Begriffs als widerspruchsvoll (Satz 3.1). Um zu zeigen, daß die nächste Abschwächung $T_2(g)$ von $T_1(g)$ immer noch widerspruchsvoll ist (Satz 3.2), wird dann der stärkere Satz 1.2 angewandt. Einen befriedigenden Rahmen für die gesuchte Präzisierung stellt endlich die Abschwächung $T_3(g)$ von $T_2(g)$ dar (Satz 3.3).

Problemstellung

In mathematischen Texten trifft man häufig Wendungen an, wie:

„es ist bekannt, daß . . ."

„. . ., wie es bekannt ist, . . ."

„. . ., denn es ist bekannt, daß . . ."

Wir interessieren uns für den Begriff, der hier zum Ausdruck kommt. Stillschweigend werden allgemein einige Annahmen über diesen Begriff gemacht, aus denen man die einfachsten zunächst etwas vage folgendermaßen formulieren kann:
1. Es wird angenommen, daß die Definitionen oder mindestens einige Grundeigenschaften einiger elementarer mathematischer Begriffe (etwa der Nachfolgerfunktion, der Null, der Addition, der Multiplikation) „bekannt" sind.

* Eingegangen am 30. 8. 68.

2. Es wird angenommen, daß das, was „bekannt" ist, wahr ist.
3. Es wird angenommen, daß auch das „bekannt" ist, was aus „bekannten" Prämissen folgt.

Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist, zu untersuchen, wie eine Präzisierung dieses Begriffes durch eine Theorie der ersten Stufe angegeben werden kann.

Definitionen

Eine Standardsprache sei eine Menge von Ausdrücken der ersten Stufe, die aus den üblichen logischen Konstanten ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$, $=$), aus abzählbar vielen Individuenvariablen ($x_1, x_2, \ldots$), ohne Funktionen- und Prädikatevariablen, aus einer Individuenkonstante 0, aus einer einstelligen Funktionenkonstante S und aus einer (evtl. leeren)Menge weiterer nicht logischer Konstanten aufgebaut wird.

Sind I bzw. F bzw. P eine Menge von Individuen- bzw. Funktionen- bzw. Prädikatekonstanten, so soll $L(I, F, P)$ die Standardsprache mit den Individuenkonstanten aus $I \cup \{0\}$, den Funktionenkonstanten aus $F \cup \{S\}$ und den Prädikatekonstanten aus P sein. Ist M eine Untermenge einer Standardsprache, und sind I bzw. F bzw. P die Menge der Individuen- bzw. Funktionen- bzw. Prädikatekonstanten, die in Ausdrücken von M vorkommen, so sei $A(M) := L(I, F, P)$. Ferner sollen $A_0(M)$ bzw. $A_1(M)$ bzw. $A_2(M)$ die Menge der Ausdrücke aus $A(M)$ sein, in denen keine Individuenvariable frei vorkommt, bzw. höchstens x_1 frei vorkommt, bzw. höchstens x_1 und x_2 frei vorkommen.

Es sei: $\Delta 0 :\equiv 0, \Delta(n+1) :\equiv S\Delta n$. Für einen Ausdruck α, eine Individuenvariable x und einen Term t soll $\alpha(x/t)$ das Ergebnis der Substitution (mit Vorsichtsmaßnahmen) von t für x in α sein; ferner sei $\alpha[t] :\equiv \alpha(x_1/t)$, und für Terme t_1, t_2, so daß x_2 in t_1 nicht vorkommt, sei $\alpha[t_1, t_2] :\equiv \alpha[t_1](x_2/t_2)$. Eine Standardtheorie sei eine gegen den Prädikatekalkül der ersten Stufe mit Identität abgeschlossene Untermenge der Menge $A_0(L)$ einer Standardsprache L.

N sei die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen. Unter einer Codierung verstehen wir eine injektive Funktion, deren Werte in N liegen. Unter einer Gödelisierung verstehen wir eine (worttheoretisch) partiell rekursive Codierung mit rekursivem Wertebereich. Ist g eine Gödelisierung, so ist auch g^{-1} partiell rekursiv. Ist h eine Funktion, so sollen $B_1(h)$ bzw. $B_2(h)$ der Definitions- bzw. Wertebereich von h sein, und $h((A))$ soll für eine Menge A die Gesamtheit der Werte sein, die h den Elementen von A zuordnet.

Ist L eine Standardsprache und f eine Codierung von L (d.h. mit $B_1(f) = L$), so sei

$$d_f(n) := \begin{cases} f(f^{-1}(n)\,[\Delta n]), & \text{falls } n \in B_2(f) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Diagonalfunktion von f. Ist L eine Standardsprache und g eine Gödelisierung von L, so ist d_g rekursiv (vgl. Tarski, 1953, S. 48; Mostowski, 1952, S. 78ff.; Germano, 1966, S. 30ff.).

Ist T eine Standardtheorie und h eine (einstellige) Funktion mit $B_1(h) = N$ und $B_2(h) \subseteq N$, so heiße (nach Tarski, 1953, S. 45) h in T definierbar genau dann, wenn es ein α aus $A_2(T)$ gibt, sodaß $\bigwedge_{x_2} (\alpha[\Delta n] \leftrightarrow x_2 = \Delta h(n)) \in T$ ist, für jedes n aus N.

Eine Standardtheorie T heiße arithmetisch genau dann, wenn alle (einstelligen) rekursiven Funktionen in T definierbar sind, und (im Falle, daß T erfüllbar ist) T von einer Realisierung erfüllt wird, deren Universum N ist und die der Individuenkonstante 0 die Zahl Null und der Funktionenkonstanten S die Nachfolgerfunktion zuordnet (zur Semantik vgl. etwa Tarski, 1935, 1953).

Um metatheoretische Sachverhalte durchsichtiger formulieren zu können, werden wir oft von „non", „et", „vel", „seq" (sequitur), „aeq" (aequivalet), „Om" (Omni), „Ex" (Existit) auf die übliche Weise Gebrauch machen. Das Gleichheitszeichen wird sowohl für sprachliche wie für metasprachliche Ausdrücke gebraucht; der jeweilige Zusammenhang soll Mißverständnisse ausschliessen. Um die Identität von Zeichenreihen auszudrücken, ziehen wir aber das Zeichen „$\equiv$" vor, das ebenfalls nach dem Zusammenhang von dem Congruenzzeichen unterschieden werden soll. Als metasprachliche Variablen wollen wir die folgenden Buchstaben reservieren: „L" für Standardsprachen, „T" für Standardtheorien, „f" für Codierungen, „g" für Gödelisierungen.

§ 1. Allgemeine Sätze

Aus historischen Gründen und wegen der Anwendungen im dritten Paragraphen betrachten wir die Sätze dieses Paragraphen in folgender Anordnung:

Satz 1.1 (vgl. Tarski, 1936)[1].

$$(\mathrm{Om}\ T)\,(\mathrm{Om}\ f,\ B_1(f) = A(T))$$
$$\big((\mathrm{Ex}\ \alpha \in A_1(T))\,(\mathrm{Om}\ \beta \in A_0(T))\,(\alpha[\Delta f(\beta)] \leftrightarrow \beta) \in T$$
$$\mathrm{seq}\ (d_f \text{ in } T \text{ definierbar seq } T \text{ widerspruchsvoll})\big).$$

*Satz 1.1** (vgl. Tarski, 1953).

$$(\mathrm{Om}\ T)\,(\mathrm{Om}\ f,\ B_1(f) = A(T))$$
$$\big((\mathrm{Ex}\ \alpha \in A_1(T))\,(\mathrm{Om}\ \beta \in A_0(T))\,\big((\beta \in T \text{ seq } \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)$$
$$\text{et } (\beta \notin T \text{ seq } \neg\,\alpha[\Delta f(\beta)] \in T)\big)$$
$$\mathrm{seq}\ (d_f \text{ in } T \text{ definierbar seq } T \text{ widerspruchsvoll})\big).$$

[1] Satz 1.1 kann als eine Folge aus der These B von Tarski, 1936, S. 399 (Nachwort) angesehen werden. Diese These ist eine Verallgemeinerung des Satzes I_β von Tarski, 1933, S. 96 (und Tarski, 1936, S. 370). Für beide wird der Beweis nur skizziert. Eine zum Satz 1.1 analoge Behauptung ist in Tarski, 1939, S. 106 (Th. 2.3) enthalten und z. B. in Ladrière, 1957, S. 316f. bewiesen (allerdings nur für Theorien, die die Typentheorie oder eine Mengenlehre enthalten). In dem Beweis von Ladrière wird ferner die Definierbarkeit von Funktionen nicht im allgemeinen Sinne von Tarski, 1953, S. 45, sondern in dem von Mostowski, 1952, S. 74, Def. 1 aufgefaßt.

Satz 1.2 (aus Germano 1966).

$$(\mathrm{Om}\ T)\ (\mathrm{Om}\ f,\ B_1(f) = A(T))$$
$$\big((\mathrm{Ex}\ \alpha \in A_1(T))\ (\mathrm{Om}\ \beta \in A_0(T))\ \big((\alpha[\Delta f(\beta)] \rightarrow \beta) \in T$$
$$\text{et } (\beta \in T \text{ seq } \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)\big)$$
$$\text{seq } (d_f \text{ in } T \text{ definierbar seq } T \text{ widerspruchsvoll})\big).$$

Lemma

$$(\mathrm{Om}\ T)\ (\mathrm{Om}\ g,\ B_1(g) = A(T))$$
$$\big(T \text{ rekursiv aufzählbar et } T \text{ arithmetisch}$$
$$\text{seq } \big((\mathrm{Ex}\ \alpha \in A_1(T))\ (\mathrm{Om}\ \beta \in A_0(T))\ (\alpha[\Delta g(\beta)] \in T \text{ aeq } \beta \in T)$$
$$\text{et } d_g \text{ in } T \text{ definierbar}\big)\big).$$

Satz 1.3[2]

$$(\mathrm{Ex}\ T)\ (\mathrm{Ex}\ g,\ B_1(g) = A(T))$$
$$\big((\mathrm{Ex}\ \alpha \in A_1(T))\ (\mathrm{Om}\ \beta \in A_0(T))\ (\alpha[\Delta g(\beta)] \in T \text{ aeq } \beta \in T)$$
$$\text{et } d_g \text{ in } T \text{ definierbar et } T \text{ widerspruchsfrei}\big)$$

Korollar zu Satz 1.2 (vgl. Gödel, 1931; Rosser, 1936)

$$(\mathrm{Om}\ T)\ \big(T \text{ rek. aufzählbar et } T \text{ arithmetisch et } T \text{ widerspruchsfrei}$$
$$\text{seq } T \text{ unvollständig}\big).$$

Man sieht sofort, daß sich Satz 1.1. aus Satz 1.2. ohne weiteres ergibt. Durch Anwendung des „tertium non datur“ erhält man auch leicht Satz 1.1*. aus Satz 1.2., in dem man zeigt, daß aus der Voraussetzung von Satz 1.1*. die Voraussetzung von Satz 1.2. gewonnen werden kann:

Es sei

$$\text{(A)}\quad (\mathrm{Ex}\ \alpha \in A_1(T))\ (\mathrm{Om}\ \beta \in A_0(T))\ \big((\beta \in T \text{ seq } \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)$$
$$\text{et } (\beta \notin T \text{ seq } \neg\, \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)\big)$$

vorausgesetzt; halten wir ein solches α fest. Nach dem „tertium non datur“ gilt für ein beliebiges β aus $A_0(T) : \beta \in T$ vel $\beta \notin T$. Im ersten Falle ist auch $(\alpha[\Delta f(\beta)] \rightarrow \beta) \in T$, weil T gegen den Prädikatekalkül abgeschlossen ist (es genügt der intuitionistische). Im zweiten Falle ist $\neg\, \alpha[\Delta f(\beta)] \in T$ nach (A); somit auch

[2] In Myhill, 1950, wird ein ähnlicher Satz für ein besonders schwaches System (keine Standardtheorie) bewiesen, das unter anderem negationslos ist.
Für vollständige Theorien gilt das Negat von Satz 1.3., wie es aus den Überlegungen weiter unten hervorgeht. Häufig wird gerade dieser Sachverhalt als Tarskischer Satz (abgeschwächt) angegeben. Eine etwas abstrakte Formulierung davon ist in Smullyan, 1961, S. 45, Th. 1.1., enthalten. Dabei soll folgendes bemerkt werden: Wenn d_g in T definierbar ist, so ist T „normal“; wenn T vollständig und widerspruchsfrei ist, so ist T „complemented“.

$(\alpha[\Delta f(\beta)] \to \beta) \in T$ aus demselben Grunde wie oben. Direkt an (A) kann man ferner ablesen, daß auch $(\beta \in T$ seq $\alpha[\Delta f(\beta)] \in T)$ gilt.

Ebenfalls durch Anwendung des „tertium non datur" bei einem metatheoretischen Schluß wird Satz 1.1* (in etwas schwächerer Form) in Tarski, 1953, S. 46ff. bewiesen. Am Ende dieses Paragraphen wird ein neuer Beweis (aus Germano, 1966) angegeben, der keinen Gebrauch des „tertium non datur" weder metatheoretisch noch in den betrachteten Theorien erfordert.

Satz 1.3 folgt aus dem Lemma und daraus, daß es *axiomatische* Standardtheorien gibt, die *arithmetisch* und *widerspruchsfrei* sind (vgl. z. B. Tarski, 1953, S. 51ff.). Für eine widerspruchsfreie und vollständige Theorie T sind die Bedingungen

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \in T\,,$$

$$(\beta \in T \text{ seq } \alpha \in T) \text{ et } (\beta \notin T \text{ seq } \neg\,\alpha \in T)\,,$$

$$(\alpha \to \beta) \in T \text{ et } (\beta \in T \text{ seq } \alpha \in T)\,,$$

$$\alpha \in T \text{ aeq } \beta \in T$$

äquivalent. Für eine solche Theorie T und eine Codierung f von $A(T)$ sind also Satz 1.1, Satz 1.1*, Satz 1.2 äquivalent mit:

$$(\text{Ex}\,\alpha \in A_1(T))\,(\text{Om}\,\beta \in A_0(T))\,(\alpha[\Delta f(\beta)] \in T \text{ aeq } \beta \in T)$$
$$\text{seq } (d_f \text{ in } T \text{ definierbar seq } T \text{ widerspruchsvoll}).$$

Wegen Satz 1.2 gilt also

$$(\text{Om } T)\,(\text{Om } f,\ B_1(f) = A(T))$$
$$\big(T \text{ vollständig seq non}\big((\text{Ex}\,\alpha \in A_1(T))\,(\text{Om}\,\beta \in A_0(T))\,(\alpha[\Delta f(\beta)] \in T \text{ aeq } \beta \in T)$$
$$\text{et } d_f \text{ in } T \text{ definierbar et } T \text{ widerspruchsfrei}\big)\big).$$

Daraus ergibt sich sofort das Korollar durch Anwendung des Lemmas. Damit haben wir eine gewisse Verschärfung (für Standardtheorien) des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes in der Form von Rosser, 1936. Es gibt nämlich axiomatische, arithmetische, widerspruchsfreie Standardtheorien, die von der Peanoschen Arithmetik verschieden sind. Jede axiomatische Standardtheorie, die die Peanosche Arithmetik enthält und die von einer Realisierung erfüllt wird, deren Universum N ist und die 0 die Null und S die Nachfolgerfunktion zuordnet, ist von dieser Art. Ebenfalls von dieser Art sind die Theorien aus Tarski, 1953, S. 51ff. (vgl. dazu auch Smullyan, 1961, Supplement, § 6, 7) und die entsprechenden Erweiterungen.

Beweis von Satz 1.2.:

Betrachten wir eine beliebige Standardtheorie T und eine beliebige Codierung f von $A(T)$. Es gebe ein α aus $A_1(T)$, so daß für alle β aus $A_0(T)$ gilt:

I. $(\alpha[\Delta f(\beta)] \to \beta) \in T$,

II. $\beta \in T$ seq $\alpha[\Delta f(\beta)] \in T$.

Halten wir ein solches α fest. Ferner nehmen wir an, daß d (wir schreiben im Laufe des Beweises „d“ statt „d_f“) in T definierbar ist, d.h. daß es ein γ aus $A_2(T)$ gibt, so daß für alle n aus N gilt:

$$\text{III.} \quad \bigwedge_{x_2} (\gamma[\varDelta n] \leftrightarrow x_2 = \varDelta d(n)) \in T .$$

Halten wir ein solches γ fest. Setzen wir:

$$\text{a)} \quad \alpha_1 :\equiv \bigwedge_{x_2} (\gamma \to \alpha[x_2]) .$$

Dann gilt:

$$\text{b)} \quad \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \equiv \bigwedge_{x_2} (\gamma[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \to \alpha[x_2]) .$$

Nach der Definition von d gilt ferner:

$$\text{c)} \quad d(f(\neg \alpha_1)) = f\big(f^{-1}(f(\neg \alpha_1))\,[\varDelta f(\neg \alpha_1)]\big) = f(\neg \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)]) .$$

Setzen wir noch:

$$\text{d)} \quad \alpha_2 :\equiv \bigwedge_{x_2} \big(\gamma[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \leftrightarrow x_2 = \varDelta d(f(\neg \alpha_1))\big) ,$$

$$\text{e)} \quad \alpha_3 :\equiv \alpha[\varDelta f(\neg \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)])] \to \neg \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)] .$$

Es gilt:

$$\text{f)} \quad \alpha_3 \equiv \alpha[\varDelta d(f(\neg \alpha_1))] \to \neg \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \text{ nach c).}$$

Da $\alpha \in A_1(T)$ ist (x_2 kommt in α nicht frei vor), können wir o.B.d.A. annehmen, daß x_2 in α überhaupt nicht vorkommt. Dann gilt:

$$\text{g)} \quad \alpha[x_2]\,(x_2/\varDelta n) \equiv \alpha[\varDelta n] .$$

Es gilt: (1) $\alpha_2 \vdash \gamma[\varDelta f(\neg \alpha_1), \varDelta d(f(\neg \alpha_1))]$

mit Hilfe von: $\bigwedge$-Bes.g, $\wedge$-Bes.g, „modus ponens“, Substitutionsregel, Axiome des Gleichheitszeichens;

(2) $\alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \vdash \gamma[\varDelta f(\neg \alpha_1), \varDelta d(f(\neg \alpha_1))] \to \alpha[\varDelta d(f(\neg \alpha_1))]$

mit Hilfe von: $\bigwedge$-Bes.g, Substitutionsregel, nach b), g);

(3) $\alpha_2, \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \vdash \alpha[\varDelta d(f(\neg \alpha_1))]$

nach (1), (2) mit Hilfe des „modus ponens“;

(4) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \vdash \neg \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)]$

nach (3), f) mit Hilfe des „modus ponens“;

(5) $\alpha_3, \alpha_2 \vdash \neg \alpha_1[\varDelta f(\neg \alpha_1)]$

nach (4) mit Hilfe der Selbstwiderlegungsregel;

(6) $\alpha[\varDelta d(f(\neg \alpha_1))],\ x_2 = \varDelta d(f(\neg \alpha_1)) \vdash \alpha[x_2]$

mit Hilfe von :$\to$-Einf.g, „modus ponens“, Substitutionsregel, Axiome des Gleichheitszeichens;

(7) $\alpha_2, \gamma[\varDelta f(\neg \alpha_1)] \vdash x_2 = \varDelta d(f(\neg \alpha_1))$

mit Hilfe von: $\bigwedge$-Bes.g, $\wedge$-Bes.g, „modus ponens".

$$(8)\quad \alpha_2, \alpha[\Delta d(f(\neg \alpha_1))], \gamma[\Delta f(\neg \alpha_1)] \vdash \alpha[x_2]$$

nach (6), (7) mit Hilfe von $\rightarrow$-Einf.g und „modus ponens".

$$(9)\quad \alpha_2, \alpha[\Delta d(f(\neg \alpha_1))] \vdash \bigwedge_{x_2} (\gamma[\Delta f(\neg \alpha_1)] \rightarrow \alpha[x_2])$$

nach (8) mit Hilfe von $\rightarrow$-Einf.g, $\bigwedge$-Einf.g.
Da T eine Standardtheorie ist, gilt also nach (5), (9), b):

$$(*0)\quad \alpha_3 \in T \text{ et } \alpha_2 \in T \text{ et } \alpha[\Delta d(f(\neg \alpha_1))] \in T \text{ seq } T \text{ widerspruchsvoll.}$$

Es gilt aber:

(*1) $\alpha_3 \in T$ nach I,

(*2) $\alpha_2 \in T$ nach III,

(*3) $\alpha[\Delta d(f(\neg \alpha_1))] \in T$;

denn nach (5), (*1), (*2): $\neg \alpha_1[\Delta f(\neg \alpha_1)] \in T$; also nach II.: $\alpha[\Delta f(\neg \alpha_1[\Delta f(\neg \alpha_1)])] \in T$, woraus sich (*3) ergibt nach *c*).
Aus (*0)–(*3) erhalten wir schließlich, daß T widerspruchsvoll ist.
Es ist interessant, daß die einzigen Regeln des Aussagenkalküls, die wir verwandt haben (nämlich $\wedge$-Bes.g, $\rightarrow$-Einf.g, „modus ponens", Selbstwiderlegungsregel), intuitionistisch gültig sind (vgl. etwa Kleene, 1964, S. 98ff.). Auch sämtliche metatheoretischen Schlüsse sind intuitionistisch gültig.

Beweis des Lemmas:

Für eine beliebige Standardtheorie T und eine beliebige Gödelisierung g von $A(T)$ sei

(1) T rekursiv aufzählbar,

(2) T arithmetisch.

Es sei h eine rekursive Funktion, die nach (1) die Menge $g((T))$ aufzählt. Nach (2) ist h in T definierbar. Für ein festes γ aus $A_2(T)$ und ein beliebiges β aus $A_0(T)$ gilt also:

$$(3)\quad (\text{Om } n \in N)\,(\gamma[\Delta n, \Delta g(\beta)] \leftrightarrow \Delta g(\beta) = \Delta h(n)) \in T;$$

daraus folgt (wobei $\delta :\equiv \gamma[x_3, x_1]$):

$$\begin{aligned}(4)\quad (\text{Ex } n \in N)\, g(\beta) = h(n) &\text{ seq } (\text{Ex } n \in N)\,(\Delta g(\beta) = \Delta h(n)) \in T\\ &\text{ seq } (\text{Ex } n \in N)\,\gamma[\Delta n, \Delta g(\beta)] \in T\\ &\text{ seq } \bigvee_{x_3} \gamma[x_3, \Delta g(\beta)] \in T\\ &\text{ seq } \bigvee_{x_3} \delta[\Delta g(\beta)] \in T.\end{aligned}$$

Nach (2) können wir ferner o.B.d.A. annehmen, daß T von einer Realisierung R erfüllt ist, deren Universum N ist und die der Ziffer Δn die Zahl n zuordnet (wäre nämlich T widerspruchsvoll, so wäre das Lemma trivial). Es sei $\bar{\gamma}$ die Relation über N, die bei R dem Ausdruck γ zugeordnet wird.

Es gilt:

$$(5)\quad \bigvee_{x_2} \delta[\Delta g(\beta)] \in T \text{ seq } (\text{Ex } n \in N)\ \bar{\gamma} \text{ trifft auf } (n, g(\beta)) \text{ zu}$$
$$\text{seq } (\text{Ex } n \in N)\ g(\beta) = h(n) \quad \text{nach (3).}$$

Aus (4), (5) ergibt sich:

$$(\text{Om } \beta \in A_0(T))\ (\bigvee_{x_2} \delta[\Delta g(\beta)] \in T \text{ aeq } (\text{Ex } n \in N)\ g(\beta) = h(n)$$
$$\text{aeq } \beta \in T)\,.$$

Schließlich ist nach (2) d_g in T definierbar, weil es rekursiv ist, wie wir schon erwähnt haben.

Beweis von Satz 1.1* ohne „tertium non datur":

Betrachten wir eine beliebige Standardtheorie T, eine Codierung f von $A(T)$, einen Ausdruck α aus $A_1(T)$ und einen Ausdruck γ aus $A_2(T)$, für die folgendes gilt (dabei schreiben wir „d" statt „d_f"):

$$\text{I.}\quad (\text{Om } \beta \in A_0(T))\,\big((\beta \in T \text{ seq } \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)$$
$$\text{et } (\beta \notin T \text{ seq} \neg\, \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)\big);$$

$$\text{II.}\quad (\text{Om } n \in N) \bigwedge_{x_2} (\gamma[\Delta n] \leftrightarrow x_2 = \Delta d(n)) \in T\,.$$

Setzen wir ferner: $\delta :\equiv \bigwedge_{x_2} (\gamma \to \neg\, \alpha[x_2])$. Dann ist:

$$\text{a)}\quad \delta[\Delta f(\delta)] \equiv \bigwedge_{x_2} (\gamma[\Delta f(\delta)] \to \neg\, \alpha[x_2])\,,$$

$$\text{b)}\quad d(f(\delta)) = f(\delta[\Delta f(\delta)])\,.$$

Es gilt:

$$(*1)\quad \bigwedge_{x_2} \big(\gamma[\Delta f(\delta)] \leftrightarrow x_2 = \Delta d(f(\delta))\big) \vdash \gamma[\Delta f(\delta), \Delta d(f(\delta))]$$

mit Hilfe von: $\bigwedge$-Bes.g, $\wedge$-Bes.g, „modus ponens", Substitutionsregel, Axiome des Gleichheitszeichens;

$$(*2)\quad \delta[\Delta f(\delta)] \vdash \gamma[\Delta f(\delta), \Delta d(f(\delta))] \to \neg\, \alpha[\Delta d(f(\delta))]$$

mit Hilfe von $\bigwedge$-Bes.g und der Substitutionsregel;

$$(*3)\quad \bigwedge_{x_2}\big(\gamma[\Delta f(\delta)] \leftrightarrow x_2 = \Delta d(f(\delta))\big), \neg\, \alpha[\Delta d(f(\delta))] \vdash \bigwedge_{x_2}(\gamma[\Delta f(\delta)] \to \neg\, \alpha[x_2])$$

mit Hilfe von: $\wedge$-Bes.g, $\to$-Einf.g, „modus ponens", $\bigwedge$-Einf.g, $\bigwedge$-Bes.g, Substitutionsregel, Axiome des Gleichheitszeichens.

Es wurden auch hier nur intuitionistisch gültige Regeln verwandt. Jetzt wollen wir einige metatheoretischen Schlüsse vollziehen. Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir darauf, die Formalisierung vollständig durchzuführen. Man kann aber ohne Mühe einsehen, daß keine andere Regeln als die metatheoretischen Analoga von $\wedge$-Bes.g, $\to$-Einf.g, „modus ponens", Selbstwiderlegungsregel, Kontrapositionsregel, $\wedge$-Einf.g, $\wedge$-Bes.g, $\vee$-Einf.g, Substitutionsregel (also nur intuitionistisch gültige) verwandt werden. Die metasprachlichen Ausdrücke unter I. bzw. II. nennen wir „A" bzw. „B". In der folgenden Ableitung gebrauchen wir ständig die Theorieeigenschaft von T:

$$\alpha_1 \in T \text{ et} \ldots \text{et } \alpha_n \in T \text{ et } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \alpha \text{ seq } \alpha \in T\,.$$

Wir beschränken uns darauf, die Anwendungen der Analoga von Selbstwiderlegungsregel und Kontrapositionsregel zu erwähnen, denn die anderen sind ganz unproblematisch.

1. $B \text{ seq } \gamma[\Delta f(\delta), \Delta d(f(\delta))] \in T$ nach (*1)
2. $\delta[\Delta f(\delta)] \in T \text{ seq } \big(\gamma[\Delta f(\delta), \Delta d(f(\delta))] \to \neg\, \alpha[\Delta d(f(\delta))]\big) \in T$ nach (*2)
3. $B, \delta[\Delta f(\delta)] \in T \text{ seq } \neg\, \alpha[\Delta d(f(\delta))] \in T$
4. $B, \delta[\Delta f(\delta)] \in T \text{ seq } \neg\, \alpha[\Delta f(\delta[\Delta f(\delta)])] \in T$ nach b)
5. B, T widerspruchsfrei, $\delta[\Delta f(\delta)] \in T \text{ seq } \alpha[\Delta f(\delta[\Delta f(\delta)])] \notin T$ (Kontrap.)
6. A, B, T widerspruchsfrei, $\delta[\Delta f(\delta)] \in T \text{ seq } \delta[\Delta f(\delta)] \notin T$ (Kontrap.)
7. A, B, T widerspruchsfrei, $\text{seq } \delta[\Delta f(\delta)] \notin T$ (Selbstwid.)
8. A, B, T widerspruchsfrei, $\text{seq } \neg\, \alpha[\Delta f(\delta[\Delta f(\delta)])] \in T$
9. A, B, T widerspruchsfrei, $\text{seq } \neg\, \alpha[\Delta d(f(\delta))] \in T$ nach b)

Nach 9. und der Definition von B gilt also (vgl. (*3)):

10. A, B, T widerspruchsfrei, $\text{seq } \bigwedge_{x_2} (\gamma[\Delta f(\delta)] \to \neg\, \alpha[x_2]) \in T$
11. A, B, T widerspruchsfrei, $\text{seq } \delta[\Delta f(\delta)] \in T$ nach a)
12. A, B, $q[\Delta f(\delta)] \notin T$ seq T widerspruchsvoll (Kontrap.)

Aus 7. und 12. erhält man:

14. A, B, T widerspruchsfrei, seq T widerspruchsvoll
15. A, B seq T widerspruchsvoll (Selbstwid.)

Daraus ergibt sich schließlich die Behauptung:

$$(\text{Ex } \alpha \in A_1(T))\, A \text{ seq } ((\text{Ex } \gamma \in A_2(T))\, B \text{ seq } T \text{ widerspruchsvoll}).$$

§ 2. Unabhängigkeitsbeweise

Satz 2.1 $(\text{Ex } T)\,(\text{Ex } f, B_1(f) = A(T))$
$$\big((\text{Ex } \alpha \in A_1(T))\,(\text{Om } \beta \in A_0(T))\big((\alpha[\Delta f(\beta)] \to \beta) \in \mathrm{Q} \text{ et } (\beta \in T \text{ seq } \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)\big)$$
$$\text{et non}(\text{Ex } \alpha_1 \in A_1(T))\,(\text{Om } \beta \in A_0(T))\,(\alpha_1[\Delta f(\beta)] \leftrightarrow \beta) \in T\big)\,.$$

Beweis:

Es werden eine Standardtheorie T und eine (berechenbare) Codierung f von $A(T)$ effektiv angegeben, die die gewünschten Eigenschaften aufweisen. Der Beweis ist also intuitionistisch einwandfrei.
Es sei $L := L(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$. Es sei R_1 die Realisierung, deren Universum die Menge $\{0, 1\}$ ist und die der Individuenkonstante 0 die Zahl 0 und der Funktionenkonstante S die zyklische Permutation $(0, 1)$ zuordnet. Es sei R_2 die Realisierung, deren Universum die Menge $\{0, 1, 2\}$ ist und die der Individuenkonstante 0 die Zahl 0 und der Funktionenkonstante S die zyklische Permutation $(0\ 1\ 2)$ zuordnet.

Es sei:

$$\begin{aligned} T &:= \{\alpha \in A_0(L) | R_1 \text{ erfüllt } \alpha \text{ et } R_2 \text{ erfüllt } \alpha\} \\ T_1 &:= \{\alpha \in A_0(L) | R_1 \text{ erfüllt } \alpha \text{ et } R_2 \text{ erfüllt } \neg\alpha\} \\ T_2 &:= \{\alpha \in A_0(L) | R_1 \text{ erfüllt } \neg\alpha \text{ et } R_2 \text{ erfüllt } \alpha\} \\ T_* &:= A_0(L) - (T \cup T_1 \cup T_2)\,. \end{aligned}$$

Da es entscheidbar ist, ob ein Ausdruck von R_1 bzw. R_2 erfüllt ist oder nicht, sind T, T_1, T_2 und T_* entscheidbar und daher aufzählbar. Es seien h bzw. h_0 bzw. h_* (berechenbare) Funktionen, die T bzw. $T_1 \cup T_2$ bzw. T_* aufzählen. Für β aus $A_0(L)$ definieren wir:

$$f(\beta) := \begin{cases} \big(\underset{y}{\mu}\, \beta = h\ (y)\big).6\,, & \text{falls } \beta \in T\,, \\ \big(\underset{y}{\mu}\, \beta = h_0\,(y)\big).6 + 1\,, & \text{falls } \beta \in T_1 \cup T_2\,, \\ \big(\underset{y}{\mu}\, \beta = h_*(y)\big).6 + 5\,, & \text{falls } \beta \in T_*\,. \end{cases}$$

Für β aus $A_0(L)$ kommt also genau einer der folgenden drei Fälle in Frage:

$$\begin{aligned} &\beta \in T && \text{et } f(\beta) \equiv 0 \bmod 6\,, \\ &\beta \in T_1 \cup T_2 && \text{et } f(\beta) \equiv 1 \bmod 6\,, \\ &\beta \in T_* && \text{et } f(\beta) \equiv 5 \bmod 6\,. \end{aligned}$$

Andererseits: R_i erfüllt $\Delta m = \Delta n$ aeq $m \equiv n \bmod (i+1)$ für $i = 1, 2$. Für ein beliebiges β aus $A_0(L)$ gilt also $(i = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} R_i \text{ erfüllt } \Delta f(\beta) = \Delta 0 \ &\text{seq } f(\beta) \equiv 0 \bmod (i+1) \\ &\text{seq } f(\beta) \equiv 0 \bmod 6 \\ &\text{seq } \beta \in T \\ &\text{seq } R_i \text{ erfüllt } \beta\,, \end{aligned}$$

das heißt: (1) $(\Delta f(\beta) = \Delta 0 \to \beta) \in T$;

ferner ist: (2) $\beta \in T$ seq $f(\beta) \equiv 0 \bmod 6$

$$\begin{aligned} &\text{seq } f(\beta) \equiv 0 \bmod (i+1) && (i = 1, 2) \\ &\text{seq } R_i \text{ erfüllt } \Delta f(\beta) = \Delta 0 && (i = 1, 2) \\ &\text{seq } \Delta f(\beta) = \Delta 0 \in T\,. \end{aligned}$$

Andererseits erfüllt R_1 den Ausdruck $\Delta 2 = \Delta 0$ (nennen wir ihn „γ"), und R_2 erfüllt ihn nicht, während $\Delta 3 = \Delta 0$ (nennen wir ihn „δ") bei R_2 und nicht bei R_1 gilt. Es ist also: $f(\gamma) \equiv 1 \bmod 6$ und $f(\delta) \equiv 1 \bmod 6$. Also ist $f(\gamma) \equiv f(\delta) \bmod 2$. Das heißt: R_1 erfüllt $\Delta f(\gamma) = \Delta f(\delta)$.
Wenn es nun einen Ausdruck α_1 aus $A_1(T)$ geben würde, mit $(\alpha_1[\Delta f(\beta)] \leftrightarrow \beta) \in T$ für alle β aus $A_0(T)$, so wäre auch $(\alpha_1[\Delta f(\gamma)] \leftrightarrow \gamma) \in T$ und $(\alpha_1[\Delta f(\delta)] \leftrightarrow \delta) \in T$. Dann würde R_1 mit $\Delta f(\gamma) = \Delta f(\delta)$ auch $\alpha_1[\Delta f(\gamma)] \leftrightarrow \gamma$ und $\alpha_1[\Delta f(\delta)] \leftrightarrow \delta$ erfüllen, somit auch $\gamma \leftrightarrow \delta$, was nicht der Fall ist. Daraus und aus (1), (2) ergibt sich die Behauptung von Satz 2.1.

Satz 2.2 (Ex T) (Ex f, $B_1(f) = A(T)$)

$$\Big((\mathrm{Ex}\, \alpha \in A_1(T))\,(\mathrm{Om}\, \beta \in A_0(T))\Big((\alpha[\Delta f(\beta)] \to \beta) \in T \text{ et } (\beta \in T \text{ seq } \alpha[\Delta f(\beta)] \in T)\Big)$$
$$\text{et non } (\mathrm{Ex}\, \alpha_1 \in A_1(T))\,(\mathrm{Om}\, \beta \in A_0(T))\Big((\beta \in T \text{ seq } \alpha_1[\Delta f(\beta)] \in T) \text{ et } (\beta \notin T \text{ seq } \neg\, \alpha_1[\Delta f(\beta)] \in T)\Big)\Big)$$

Beweis:

Wir betrachten wieder die $L, R_1, R_2, T, T_1, T_2, T_*$ des vorigen Beweises. Es seien h bzw. h_1 bzw. h_2 (berechenbare) Funktionen, die T bzw. T_1 bzw. $T_2 \cup T_*$ aufzählen. Für β aus $A_0(L)$ definieren wir:

$$f(\beta) := \begin{cases} \big(\mu_y\, \beta = h(y)\big).6 & , \text{ falls } \beta \in T\,, \\ \big(\mu_y\, \beta = h_1(y)\big).6 + 2\,, & \text{falls } \beta \in T_1\,, \\ \big(\mu_y\, \beta = h_2(y)\big).6 + 1 & \text{falls } \beta \in T_2 \cup T_*\,. \end{cases}$$

Für β aus $A_0(L)$ kommt genau einer der folgenden drei Fälle in Frage:

$$\beta \in T \quad \text{et } f(\beta) \equiv 0 \bmod 6\,,$$
$$\beta \in T_1 \quad \text{et } f(\beta) \equiv 2 \bmod 6\,,$$
$$\beta \in T_2 \cup T_* \text{ et } f(\beta) \equiv 1 \bmod 6\,.$$

Also gilt: R_1 erfüllt $\Delta f(\beta) = \Delta 0$ seq $f(\beta) \equiv 0 \bmod 2$
seq $f(\beta) \equiv 0 \bmod 6$ vel $f(\beta) \equiv 2 \bmod 6$
seq $\beta \in T$ vel $\beta \in T_1$
seq R_1 erfüllt β;

R_2 erfüllt $\Delta f(\beta) = \Delta 0$ seq $f(\beta) \equiv 0 \bmod 3$
seq $f(\beta) \equiv 0 \bmod 6$
seq $\beta \in T$
seq R_2 erfüllt β;

das heißt: (1) $(\Delta f(\beta) = \Delta 0 \to \beta) \in T$;
ferner gilt: (2) $\beta \in T$ seq $\Delta f(\beta) = \Delta 0 \in T$ wie im vorigen Beweis.

Andererseits erfüllen R_1 und R_2 den Ausdruck $\Delta 6 = \Delta 0$ (nennen wir ihn „γ“), während nur R_1 den Ausdruck $\Delta 2 = \Delta 0$ (nennen wir ihn „δ“) erfüllt. Es ist also $f(\gamma) \equiv 0 \bmod 6$ und $f(\delta) \equiv 2 \bmod 6$; somit auch $f(\gamma) \equiv f(\delta) \bmod 2$; d.h. R_1 erfüllt $\Delta f(\gamma) = \Delta f(\delta)$. Wenn es nun einen Ausdruck α_1 aus $A_1(T)$ geben würde, mit

$$\beta \in T \text{ seq } \quad \alpha_1[\Delta f(\beta)] \in T\,,$$

$$\beta \notin T \text{ seq } \neg\, \alpha_1[\Delta f(\beta)] \in T$$

für alle β aus $A_0(T)$, so wäre $\alpha_1[\Delta f(\gamma)] \in T$ und $\neg\, \alpha_1[\Delta f(\delta)] \in T$. R_1 würde dann mit $\Delta f(\gamma) = \Delta f(\delta)$ auch $\alpha_1[\Delta f(\gamma)]$ und $\neg\, \alpha_1[\Delta f(\delta)]$ erfüllen, somit auch $\alpha_1[\Delta f(\gamma)] \wedge \neg\, \alpha_1[\Delta f(\gamma)]$, was unmöglich ist. Daraus und aus (1), (2) ergibt sich die Behauptung von Satz 2.2.

§ 3. Anwendungen

Nach den vorigen Ergebnissen allgemeiner Art wollen wir uns jetzt der Präzisierung zuwenden, die in der Problemstellung genannt wurde. Es sei $L_0 := L(\emptyset, \{+, .\}, \{K\})$, wobei $+$ und $.$ zweistellig und K einstellig sein sollen; α, β, γ seien Ausdrücke aus $A_0(L_0)$. Für eine beliebige Gödelisierung g von L_0 betrachten wir die folgenden Axiome:

$$\text{I.a)} \quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} (Sx_1 = Sx_2 \rightarrow x_1 = x_2))\,,$$

$$\text{I.b)} \quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1} (x_1 = 0 \leftrightarrow \bigwedge_{x_2} \neg\, x_1 = Sx_2))\,,$$

$$\text{I.c)} \quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1} x_1 + 0 = x_1 \wedge \bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 + Sx_2 = S(x_1 + x_2))\,,$$

$$\text{I.d)} \quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1} x_1 \,.\, 0 = 0 \wedge \bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 \,.\, Sx_2 = (x_1 \,.\, x_2) + x_1)\,.$$

Betrachten wir ferner die folgenden Axiomenschemata:

$$\text{II.} \quad K\Delta g(\alpha) \rightarrow \alpha\,,$$

$$\text{III.} \quad (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (K\Delta g(\alpha) \wedge K\Delta g(\beta) \rightarrow K\Delta g(\gamma))\,.$$

Die Axiome I. sollen der ersten Annahme aus der Problemstellung entsprechen (Injektivität der Nachfolgerfunktion; Definition der Null, der Addition und der Multiplikation). Die Axiome nach Schema II. sollen der zweiten Annahme entsprechen (das, was „bekannt“ ist, ist wahr). Die Axiome nach Schema III. sollen der dritten Annahme entsprechen (auch das ist „bekannt“, was aus „bekannten“ Prämissen folgt). Die Menge all dieser Axiome nennen wir $M_1(g)$. $T_1(g)$ sei die kleinste Untermenge von $A_0(L_0)$, die $M_1(g)$ enthält und gegen den intuitionistischen Prädikatekalkül (mit Identität) abgeschlossen ist. Im Folgenden, immer wenn von einer Gödelisierung g von L_0 die Rede ist und klar ist, um was es geht, gebrauchen wir die Abkürzung: $K(\alpha) :\equiv K\Delta g(\alpha)$.

Durch die Theorien $T_1(g)$ ist die in der Problemstellung formulierte Aufgabe bei weitem noch nicht gelöst: diese Theorien ermöglichen keine Präzisierung, denn es gilt:

Satz 3.1 (Om g, $B_1(g) = L_0$) $T_1(g)$ widerspruchsvoll[3].

Beweis:

Betrachten wir eine Gödelisierung g von L_0. Setzen wir:

$\alpha_0 :\equiv \bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} (Sx_1 = Sx_2 \to x_1 = x_2)$. Nach III. ist $(\alpha_0 \to \beta) \to (K(\alpha_0) \to K(\beta)) \in T_1(g)$ für ein beliebiges β. Aber $\beta \to (\alpha_0 \to \beta)$ ist intuitionistisch gültig. Also ist $\big(\beta \to (K(\alpha_0) \to K(\beta))\big) \in T_1(g)$. Somit ist nach I.a) auch $(\beta \to K(\beta)) \in T_1(g)$. Danach und nach II. gilt also: (1) (Om $\beta \in A_0(L_0)$) $(K(\beta) \leftrightarrow \beta) \in T_1(g)$; also nach Satz 1.1: d_g in $T_1(g)$ definierbar seq $T_1(g)$ widerspruchsvoll. Daß d_g in $T_1(g)$ definierbar ist, folgt daraus, daß wegen der Axiome I. und des Schemas II. die Theorie Q von Tarski, 1953, S. 51, in $T_1(g)$ enthalten ist; daher ist jede einstellige rekursive Funktion in $T_1(g)$ definierbar (vgl. op. cit. II, Th. 5, 6) und insbesondere d_g. Also ist schließlich: $T_1(g)$ widerspruchsvoll.

Nach Satz 3.1 wissen wir, daß die Axiome aus $M_1(g)$ viel zu stark sind. Wir können natürlich nicht auf die Axiome I. verzichten, die schon sehr wenig an elementaren mathematischen Begriffen als „bekannt" voraussetzen. Auf das Schema II. können wir auch nicht verzichten, ebenfalls auf Grund der Problemstellung. Das Schema III. läßt sich aber noch abschwächen, ohne die Annahme der Problemstellung aus dem Blick zu verlieren.

Betrachten wir wieder die Standardsprache L_0 und eine Gödelisierung g von L_0. $M_2(g)$ sei die Menge der Axiome I. und der Axiome nach dem Schema II. Das Schema III. schwächen wir zur folgenden Regel $R(g)$ ab:

$$\frac{\alpha \wedge \beta \to \gamma}{K\Delta g(\alpha) \wedge K\Delta g(\beta) \to K\Delta g(\gamma)}\,.$$

$T_2(g)$ sei die kleinste Untermenge von $A_0(L_0)$, die $M_2(g)$ enthält und sowohl gegen den intuitionistischen Prädikatekalkül (mit Identität) wie auch gegen $R(g)$ abgeschlossen ist.

Trotz der scheinbaren Abschwächung gilt:

Satz 3.2. (Om g, $B_1(g) = L_0$) $T_2(g)$ widerspruchsvoll.

Beweis:

Betrachten wir eine Gödelisierung g von L_0. Setzen wir wieder α_0 wie im vorigen Beweis. Dann gilt für ein beliebiges β:

$$\begin{aligned} \beta \in T_2(g) \text{ seq } & (\alpha_0 \to \beta) \in T_2(g) & & \\ \text{seq } & (K(\alpha_0) \to K(\beta)) \in T_2(g) & & \text{nach } R(g) \\ \text{seq } & K(\beta) \in T_2(g) & & \text{nach Axiom I.a)}. \end{aligned}$$

[3] Eine nicht direkt für unser Problem interessante aber formal etwas ähnliche Behauptung wird in Kaplan and Montague, 1960, als Folge aus Gödel, 1931, angegeben.

Danach und nach Schema II. gilt:

$$(\mathrm{Om}\ \beta \in A_0(L_0))\big((K(\beta) \to \beta) \in T_2(g) \text{ et } (\beta \in T_2(g) \text{ seq } K(\beta) \in T_2(g))\big).$$

Daraus ergibt sich analog wie im vorigen Beweis, daß $T_2(g)$ widerspruchsvoll ist, durch Anwendung von Satz 1.2 statt Satz 1.1.

Die Tatsache, daß das gewünschte:

$$(\mathrm{Om}\ g,\ B_1(g) = L_0)\ T_2(g) \text{ widerspruchsfrei}$$

nicht der Fall ist, hängt nicht von der Stärke der Sprache L_0 ab, sondern von der Stärke der Regel $R(g)$ mit den Axiomen $M_2(g)$. Wir zeigen das, indem wir die Untermenge L_* von L_0 betrachten, die durch die folgenden extrem schwachen Bedingungen definiert ist: alle Ausdrücke der Gestalt $K\Delta n$ (für $n \in N$) sollen in L_* sein, und L_* soll gegen Negations- und Implikationsbildung abgeschlossen sein. Für eine beliebige Gödelisierung g von L_* sei $M_*(g)$ die Menge, die genau das Axiom

$$\mathrm{I}_*.\quad K\Delta g(\sigma_*) \qquad \text{für ein festes } \sigma_* \text{ aus } L_*$$

und die Axiome nach dem Schema

$$\mathrm{II}_*.\quad K\Delta g(\sigma) \to \sigma \quad \text{für ein beliebiges } \sigma \text{ aus } L_*$$

enthält. Ferner sei $R_*(g)$ die Regel $R(g)$, beschränkt auf Ausdrücke aus L_*. $T_*(g)$ sei die kleinste Untermenge von L_*, die $M_*(g)$ enthält, und die sowohl gegen $R_*(g)$ wie auch gegen „modus ponens" und Selbstwid. abgeschlossen ist. Trotz der extrem schwachen Bedingungen an L_* gilt das gewünschte

$$(\mathrm{Om}\ g,\ B_1(g) = L_*)\ T_*(g) \text{ widerspruchsfrei}$$

doch nicht. Es sei nämlich g eine Gödelisierung von L_* mit $g(\neg K\Delta n) = n$ für ein festes n aus N. Nach II_*. ist dann $(K\Delta n \to \neg K\Delta n) \in T_*(g)$. Somit ist auch $\neg K\Delta n \in T_*(g)$. Wäre nun $T_*(g)$ widerspruchsfrei, so wäre $K\Delta n \notin T_*(g)$; also wäre auch $(K\Delta g(\sigma_*) \to K\Delta n) \notin T_*(g)$ wegen I_*.; also auch $(\sigma_* \to \neg K\Delta n) \notin T_*(g)$ wegen $R_*(g)$, weil $n = g(\neg K\Delta n)$. Daraus erhielte man $\neg K\Delta n \notin T_*(g)$ im Widerspruch zum eben Gezeigten.

Abschwächungen von L_0 haben sich als unfruchtbar erwiesen, und wir wollen andererseits auf die Axiome aus $M_2(g)$ nicht verzichten. Als einziges bleibt, in der Richtung fortzugehen, die von dem Schema III. zur Regel $R(g)$ geführt hat. Nun galt für eine Gödelisierung g von L_0 nach dem Schema III.:

$$\big((\alpha \wedge \beta \to \gamma) \to (K\Delta g(\alpha) \wedge K\Delta(\beta) \to K\Delta g(\gamma))\big) \in T_1(g)$$

und nach der Regel $R(g)$:

$$(\alpha \wedge \beta \to \gamma) \in T_2(g) \text{ seq } (K\Delta g(\alpha) \wedge K\Delta g(\beta) \to K\Delta g(\gamma)) \in T_2(g).$$

In dieser Richtung fortgehend, liegt als nächste Abschwächung folgendes Axiomenschema nahe:

$$\text{für } (\alpha \wedge \beta \to \gamma) \in T_0: (K\Delta g(\alpha) \wedge K\Delta g(\beta) \to K\Delta g(\gamma)),$$

wobei T_0 die Menge aller logisch gültigen Ausdrücke aus $T_2(g)$ sein soll.
Das Axiomensystem, zu dem wir gelangt sind, sieht folgendermaßen aus:

$$\text{I.a)}\quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2}(Sx_1 = Sx_2 \to x_1 = x_2))\,,$$

$$\text{I.b)}\quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1}(x_1 = 0 \leftrightarrow \bigwedge_{x_2}\neg\, x_1 = Sx_2)\,,$$

$$\text{I.c)}\quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1} x_1 + 0 = x_1 \wedge \bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 + Sx_2 = S(x_1 + x_2))\,,$$

$$\text{I.d)}\quad K\Delta g(\bigwedge_{x_1} x_1 \,.\, 0 = 0 \wedge \bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 \,.\, Sx_2 = (x_1 \,.\, x_2) + x_1)\,,$$

$$\text{II.}\quad K\Delta g(\alpha) \to \alpha\,,$$

$$\text{III.}\quad K\Delta g(\alpha) \wedge K\Delta g(\beta) \to K\Delta g(\gamma), \quad \text{falls} \quad \alpha, \beta \vdash \gamma\,.$$

Wir können noch das folgende inhaltlich wünschenswerte Axiomenschema binzufügen:

$$\text{IV.}\quad K\Delta g(\alpha) \to K\Delta g(K\Delta g(\alpha))\,.$$

Es sei $M_3(g)$ die Menge all der eben eingeführten Axiome und $T_3(g)$ die kleinste Untermenge von $A_0(L_0)$, die $M_3(g)$ enthält und gegen den (klassischen) Prädikatekalkül mit Identität abgeschlossen ist. Wir haben einen befriedigenden Rahmen für die betrachtete Präzisierung gewonnen, denn es gilt:

Satz 3.3 (Om g, $B_1(g) = L_0$) $T_3(g)$ widerspruchsfrei.

Beweis:

Betrachten wir eine Gödelisierung g von L_0. Es sei A die Menge der Ausdrücke:

$$\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2}(Sx_1 = Sx_2 \to x_1 = x_2)\,,$$

$$\bigwedge_{x_1}(x_1 = 0 \leftrightarrow \bigwedge_{x_2}\neg\, x_1 = Sx_2)\,,$$

$$\bigwedge_{x_1} x_1 + 0 = x_1 \wedge \bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 + Sx_2 = S(x_1 + x_2)\,,$$

$$\bigwedge_{x_1} x_1 \,.\, 0 = 0 \wedge \bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 \,.\, Sx_2 = (x_1 \,.\, x_2) + x_1\,.$$

Es sei B die kleinste Untermenge von $A_0(L_0)$, die A enthält und die sowohl gegen den (klassischen) Prädikatekalkül (mit Identität) abgeschlossen ist, wie auch gegen die Regel:

$$(K)\ \frac{\alpha}{K\Delta g(\alpha)}\,.$$

Es sei R die Realisierung, deren Universum N ist und die der Individuenkonstanten 0 die Zahl Null, der Funktionenkonstanten S die Nachfolgerfunktion, der Funktionenkonstanten $+$ die Addition, der Funktionenkonstanten . die Multiplikation und der Prädikatekonstanten K die Menge $g((B))$ zuordnet. Nach der Definition von R gilt: (1) R erfüllt $K\Delta g(\alpha)$ genau dann, wenn $\alpha \in B$; also: (2) R erfüllt die Axiome I., denn $A \subseteq B$. Ferner: (3) R erfüllt die Menge A. Also: (4) R erfüllt die Menge B, nach (3), (1) und wegen der Korrektheit des Prädikatekalküls. Ferner: (5) R erfüllt die Axiome nach dem Schema II., nach (1), (4); (6) R erfüllt die Axiome nach dem Schema III., nach (1); denn B ist gegen den Prädikatekalkül abgeschlossen; (7) R erfüllt die Axiome nach dem Schema IV., wegen (1); denn B ist gegen die Regel (K) abgeschlossen. Aus (2), (5), (6), (7) ergibt sich die Behauptung von Satz 3.3.

Die Axiome I.a) – I.d) und die Axiomenschemata II., III. und IV. sind unabhängig (vgl. Germano, 1966).

Als repräsentative Sätze aus $T_3(g)$ können für eine Gödelisierung g von L_0 die folgenden angegeben werden:

$$\neg K(\alpha \wedge \neg \alpha),$$
$$K(\alpha) \rightarrow \neg K(\neg \alpha),$$
$$\neg K(\alpha \wedge K(\neg \alpha)),$$
$$\neg K(\alpha \wedge \neg K(\alpha)),$$
$$K(K(\alpha)) \rightarrow K(\alpha),$$
$$\neg K(K(\alpha) \wedge x_1 = t \wedge \neg K(\alpha[t]))$$

für einen beliebigen Ausdruck α aus $A_0(L_0)$ und einen beliebigen Term t von L_0. Dagegen sind Ausdrücke nach den Schemata:

$$K(\alpha) \vee K(\neg \alpha),$$
$$\neg K(\alpha) \rightarrow K(\neg K(\alpha))$$

nicht für jedes α aus $A_0(L_0)$ in $T_3(g)$.

Wenn der untersuchte Befriff nicht durch ein Prädikat, sondern durch einen Junktor K widergegeben worden wäre (analog wie in Hintikka, 1962), so daß $K\alpha$ wahr ist, genau dann, wenn α wahr ist, dann hätte man trivialerweise eine widerspruchsfreie (nicht-Standard-) Theorie gehabt. Dabei würde es unter anderem keine selbstbezogenen Ausdrücke geben (wie z. B. $K\Delta n$, wenn $n = g(K\Delta n)$ ist). Schon allein dieser Verlust ist ziemlich groß: Man denke an die Rolle, die solche Ausdrücke in der Umgangssprache (vgl. etwa Kaplan and Montague, 1960) wie in den formalen Sprachen (vgl. die vielen Varianten der Sätze von Gödel, 1931) spielen. Natürlich erfordern die ausdrucksfähigeren Standardsprachen, daß an den Axiomen Beschränkungen vorgenommen werden. Nichtsdestoweniger sind z. B. die Analoga aller Sätze von Hintikka, 1962, die sich speziell auf den „epistemical operator" K beziehen, auch Sätze von $T_3(g)$, wie man an der oben angegebenen Liste sehen kann.

LITERATUR

G. Germano 1966: Untersuchung zur axiomatischen Präzisierung des Begriffs der Grundkenntnis in der Mathematik. Inaugural-Dissertation. Münster (Mimeographie).

K. Gödel 1931: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik. Vol. 38, S. 173–198.

H. Hermes 1961: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Berlin-Göttingen-Heidelberg.

H. Hermes 1963: Einführung in die mathematische Logik. Stuttgart.

J. Hintikka 1962: Knowledge and beliefe. An introduction to the logic of the two notions. Ithaca, New York.

D. Kaplan and R. Montague 1960: A paradox regained. Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 1, S. 79–90.

S. C. Kleene 1964: Introduction to metamathematics. Amsterdam-P. Noordhoff N. V.-Groningen.

J. Ladrière 1957: Les limitations internes des formalismes. Louvain, Paris.

A. Mostowski 1952: Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel. Amsterdam.

J. Myhill 1950: A system which can define its own truth. Fundamenta mathematicae. Vol. XXXVII, S. 190–192.

R. M. Robinson 1950: An essentially undecidable axiom system. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Canbridge). Vol. 1, S. 729–730.

J. B. Rosser 1936: Extensions of some theorems of Gödel and Church. J.S.L. Vol. 1, S. 87–91.

R. M. Smullyan 1963: 1963: Theory of formal system. Princeton, New Jersey.

A. Tarski 1933: Pojecie prawdy w jezykach nauk dedukcyjnych. Warszawa.

A. Tarski 1935: Über den Begriff der logischen Folgerung. Actes du Congrès int. de Philos. Scient. Vol. 7, S. 1–11, Paris.

A. Tarski 1936: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia Philosophica. Vol. 1, S. 261–405. (Übersetzung von Tarski, 1933, mit *Nachwort*.)

A. Tarski 1939: On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth. J.S.L. Vol. 4, S. 105–112.

A. Tarski 1953: (In collaboration with A. Mistowski and R. M. Robinson) Undecidable Theories. Amsterdam.

Arch. math. Logik 13 (1970), 39–51.

HIERARCHIES OF NUMBER-THEORETIC FUNCTIONS. I.*

By M. H. Löb and S. S. Wainer

Herrn Professor Dr. Kurt Schütte zum 60. Geburtstag gewidmet

Introduction

The present paper is concerned with a method of classifying number-theoretic functions by means of hierarchies.

Previous related results are contained in Grzegorczyk [5], giving a hierarchy classification of the primitive recursive functions, and Péter [9], giving a hierarchy classification of the multiple recursive functions, refined in Robbin [12] by extending the method of [5]. Our results may also be viewed as an approach to the general problems discussed by Péter [10], regarding the question of extending the class of constructively describable recursive functions beyond those previously considered.

In Section 2 we introduce a general procedure for generating hierarchies, which is applicable to a wide variety of classes of number-theoretic functions, including such which also contain non-recursive functions. It is proved that the hierarchies may be extended through the ordinals of Cantor's second number class without collapsing. In particular, our procedure provides a proper extension of Grzegorczyk's hierarchy [5]. In fact our hierarchies coincide with the latter at level ω.

In Section 3 we show that restricting the ordinals appropriately to the constructive ordinals yields hierarchies of recursive functions.

Section 4 presents a simplification of our general method for the case where the ordinals range over those below ε_0. We conjecture that, in the latter case, the class of functions obtained is co-extensive with the class of ordinal recursive functions of Kreisel [7].

In Section 5 we show that, at level ω^ω, we can obtain precisely the class of multiple recursive functions, thus providing an alternative scheme to [8] and [9] for introducing these functions.

Our procedure depends on a particular method of diagonalization which, at each non-limit stage, is analogous to the steps in the Grzegorczyk hierarchy.

1. Notation

Let N denote the set of natural numbers $0, 1, 2, \ldots$, and for any fixed $k \in N$, let N^k denote the set of all k-tuples of natural numbers.

This paper is concerned with functions whose arguments and values belong to N. All our functions are totally defined, i.e. if a function has k argument-places, then its domain will be N^k.

* Eingegangen am 3. 12. 68

Lower-case italics $a, b, \ldots, x, y, z$ (with the exception of f, g and h), with or without subscripts, denote natural numbers.
A sequence $x_1, x_2, \ldots, x_k$ will sometimes be denoted by $\boldsymbol{x}$.
Lower-case Greek letters, other than λ, ϱ, and μ, with or without subscripts, will denote countable ordinals.
The letters f, g, and h, with or without subscripts and superscripts, are used as function-variables. Capital letters are also used to denote particular functions.
μ denotes the least-number operator.
If T is a numerical term with the free variables $x_1, \ldots, x_r$ then $\lambda x_1 \ldots x_r \cdot T$ denotes the function whose value, for any particular r-tuple $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ is the result of substituting a_1 for $x_1, \ldots, a_r$ for x_r respectively, in T.
Members of N will be identified with the finite ordinals.
Suppose that C is any class of functions.
Then $E(C)$ is the smallest class of functions which contains C and is closed under the operations of

(i) *Substitution*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

(ii) *Limited Recursion*

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(y + 1, x_1, \ldots, x_n) = h_2(y, x_1, \ldots, x_n, f(y, x_1, \ldots, x_n)),$$
$$f(y, x_1, \ldots, x_n) \leqq h_3(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Thus, by the work of Grzegorczyk in [5], the class $\mathscr{E}$ of Csillag-Kalmar elementary functions can be characterized as follows:

$$\mathscr{E} = E(\lambda x \cdot 0, \lambda x \cdot x + 1, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i, \lambda x y \cdot x^y).$$

For any class C of functions, we let $P(C)$ be the smallest class of functions which contains C and is closed under the operations of Substitution and Primitive Recursion.
Thus $P(\lambda x \cdot 0, \lambda x \cdot x + 1, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i)$ is the class of primitive recursive functions, which we denote by $\mathscr{P}$.

2. Extending the Grzegorczyk Hierarchy

In [5] Grzegorczyk defined a sequence of classes of functions $\mathscr{E}^i (i \in N)$ such that

(i) for each $i \in N$, $\mathscr{E}^i \subset \mathscr{E}^{i+1}$,

(ii) $\mathscr{E}^3 = \mathscr{E}$,

(iii) $\bigcup_{i \in N} \mathscr{E}^i = \mathscr{P}$.

Robbin, in [12], extended this result by constructing a sequence of classes $E_\alpha (\alpha < \omega^\omega)$ such that

(i) whenever $\alpha < \beta < \omega^\omega$, $E_\alpha \subset E_\beta$,

(ii) for each $k > 0$, $\bigcup_{\alpha < \omega^k} E_\alpha = \mathfrak{R}_k$,

where $\mathfrak{R}_k$ denotes the class of k-recursive functions defined by Péter in [9]. We shall use methods similar to those of Robbin in order to develop a framework within which various extensions of the Grzegorczyk hierarchy can be constructed.

Definition 2.0

By a *fundamental sequence* to a limit ordinal α, we mean an ω-sequence $\{\alpha_i\}_{i \in N}$ of ordinals, such that

(i) for each $i \in N$, $\alpha_i < \alpha_{i+1} < \alpha$,

(ii) $\lim_{i \in N} \alpha_i = \alpha$.

Now, in [12], Robbin specifies, for each limit ordinal less than ω^ω, a particular fundamental sequence to that limit ordinal.

On the other hand, the development of our general framework is based on arbitrary, but fixed, fundamental sequences to all the limit ordinals under consideration. Since every countable limit ordinal has such a fundamental sequence, we are able to define classes $\mathfrak{E}_\alpha$ where α now ranges over all the countable ordinals.

Definition of the Functions F_α^n:

For each countable limit ordinal β, let $\{\beta\}(i)$, $i \in N$, denote a (arbitrarily chosen) fixed fundamental sequence to β, i.e. $\{\beta\}$ is a function mapping N into β with the properties

(i) for each $i \in N$, $\{\beta\}(i) < \{\beta\}(i+1) < \beta$,

(ii) $\lim_{i \in N} \{\beta\}(i) = \beta$.

We now define F_α^n as follows:

Def. 1. $F_0^n(x) = (n+1) \cdot (x+1)$,

Def. 2. $F_{\alpha+1}^0(x) = F_\alpha^x(x)$,

Def. 3. $F_\beta^0(x) = F_{\{\beta\}(x)}^0(\varrho_\beta(x))$, β a limit ordinal,

Def. 4. $F_\gamma^{n+1}(x) = F_\gamma^0(F_\gamma^n(x))$, $\gamma \neq 0$,

where, for β a limit ordinal,

$$\begin{cases} \varrho_\beta(0) = 0 \\ \varrho_\beta(m+1) = \mu_z\left(z > \varrho_\beta(m) \ \&\ (i)_{\leqq m} \left(F_{\{\beta\}(m+1)}^0(z) > F_{\{\beta\}(i)}^0(z)\right)\right). \end{cases}$$

We shall now exhibit some of the basic properties of these functions. First, however, we need the following

Definition 2.1

A function f is *eventually majorized* (e.m.) by a function g if f and g are totally defined and there is a number p such that for all $x \geqq p$, $f(x) < g(x)$.

Lemma 2.2

For every countable ordinal σ, if $\lambda x. F_\alpha^0(x)$ is eventually majorized by $\lambda x. F_\beta^0(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, then

(i) $\lambda nx. F_\sigma^n(x)$ is totally defined,

(ii) for all n and x, $F_\sigma^n(x) > \max(n, x)$.

Proof

We proceed by transfinite induction over the countable ordinals.
Clearly, the result holds when $\sigma = 0$.
Suppose that the result holds for η, and that $\sigma = \eta + 1$.
Then if $\lambda x \cdot F_\alpha^0(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F_\beta^0(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, we know that $\lambda x \cdot F_\alpha^0(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F_\beta^0(x)$ whenever $\alpha < \beta < \eta$, and hence (i) and (ii) must hold for η.
But $\lambda nx \cdot F_\sigma^n(x)$ is defined from $\lambda nx \cdot F_\eta^n(x)$ as follows:

$$\begin{cases} F_\sigma^0(x) = F_\eta^x(x) \\ F_\sigma^{n+1}(x) = F_\sigma^0(F_\sigma^n(x)) . \end{cases}$$

Therefore, since, by (i), $\lambda nx \cdot F_\eta^n(x)$ is totally defined, so must be $\lambda nx \cdot F_\sigma^n(x)$.
Also, since (ii) holds for η, we have by Def. 2, $F_\sigma^0(x) = F_\eta^x(x) > x$, for all x.
From this, it can easily be proved by induction that (ii) holds for $\sigma = \eta + 1$.
Hence, if $\lambda x \cdot F_\alpha^0(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F_\beta^0(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, (i) and (ii) hold for $\sigma = \eta + 1$.
Finally, suppose that σ is a limit ordinal and that the result holds for every ordinal less than σ.
Then if $\lambda x \cdot F_\alpha^0(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F_\beta^0(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$ it is clear, by the definition of ϱ_σ, that ϱ_σ is totally defined, and that for every x we can apply the induction hypothesis to deduce that $F_{\{\sigma\}(x)}^0(\varrho_\sigma(x))$ is defined and greater than x.
Hence, by Def. 3, we have for all x

$$F_\sigma^0(x) = F_{\{\sigma\}(x)}^0(\varrho_\sigma(x)) > x.$$

Now, by Def. 4, $F_\sigma^{n+1}(x) = F_\sigma^0(F_\sigma^n(x))$, and so it can easily be proved by induction, that (i) and (ii) must hold for σ.
Hence, if $\lambda x \cdot F_\alpha^0(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F_\beta^0(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, (i) and (ii) must hold for σ a limit ordinal.
This completes the induction step, and so Lemma 2.2 is proved.

Lemma 2.3

For every countable ordinal σ, if $\lambda x \cdot F_\alpha^0(x)$ is eventually majorized by $\lambda x \cdot F_\beta^0(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, then

(i) for all n and x, $F^n_\sigma(x+1) > F^n_\sigma(x)$,

(ii) for all n and x, $F^{n+1}_\sigma(x) > F^n_\sigma(x)$.

Proof

Again we proceed by transfinite induction over the countable ordinals.
First, the result clearly holds when $\sigma = 0$.
Suppose, now, that the result holds for η and that $\sigma = \eta + 1$.
Then if $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x . F^0_\beta(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$ we can apply the induction hypothesis and deduce that for all n and x,

$$F^n_\eta(x) < F^n_\eta(x+1) \quad \text{and} \quad F^n_\eta(x) < F^{n+1}_\eta(x) .$$

Hence, by Def. 2, we have, for every x,

$$F^0_\sigma(x) = F^x_\eta(x) < F^{x+1}_\eta(x) < F^{x+1}_\eta(x+1) = F^0_\sigma(x+1) .$$

Therefore, if $x < y$, $F^0_\sigma(x) < F^0_\sigma(y)$.
Now, if we assume that for every x, $F^n_\sigma(x) < F^n_\sigma(x+1)$, then we have, by Def. 4,

$$F^{n+1}_\sigma(x) = F^0_\sigma(F^n_\sigma(x)) < F^0_\sigma(F^n_\sigma(x+1)) = F^{n+1}_\sigma(x+1) ,$$

which holds for every x.
Hence, by induction, (i) holds for $\sigma = \eta + 1$.
Also, by Lemma 2.2, $F^0_\sigma(x) > x$, for all x, and so we have, by Def. 4,

$$F^{n+1}_\sigma(x) = F^0_\sigma(F^n_\sigma(x)) > F^n_\sigma(x) ,$$

for all n and x.
Hence, by induction, (ii) holds for $\sigma = \eta + 1$.
Thus, if $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, then (i) and (ii) must hold for $\sigma = \eta + 1$.
Finally, suppose that σ is a limit ordinal, and that the result holds for every ordinal less than σ.
Then if $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, it is clear that ϱ_σ is totally defined, and that for every x, we can apply the induction hypothesis to get

$$F^0_{\{\sigma\}(x)}(y) > F^0_{\{\sigma\}(x)}(z) \text{ whenever } y > z.$$

But, from the definition of ϱ_σ, we have, for all x, $\varrho_\sigma(x+1) > \varrho_\sigma(x)$.
Hence, for every x, we have the following:

$$\begin{aligned} F^0_\sigma(x+1) &= F^0_{\{\sigma\}(x+1)}(\varrho_\sigma(x+1)) \text{ by Def. 3.} \\ &> F^0_{\{\sigma\}(x)}(\varrho_\sigma(x+1)) \text{ by definition of } \varrho_\sigma . \\ &> F^0_{\{\sigma\}(x)}(\varrho_\sigma(x)) \\ &= F^0_\sigma(x) \text{ by Def. 3.} \end{aligned}$$

From this result it again easily follows that (i) and (ii) hold for σ a limit ordinal.
Hence, if $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$ whenever $\alpha < \beta < \sigma$, then (i) and (ii) hold for σ a limit ordinal.
This completes the induction step, and hence the proof of Lemma 2.3.

Lemma 2.4

For all countable ordinals α, β, if $\alpha < \beta$ then $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is eventually majorized by $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$.

Proof

We use transfinite induction to prove that for every σ, if $\alpha < \sigma$ then $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\sigma(x)$.
The result is trivial when $\sigma = 0$.
Suppose, now, that $\sigma > 0$, and that for every $\delta < \sigma$, if $\alpha < \delta$ then $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\delta(x)$.

We consider two cases:
(a) If $\sigma = \eta + 1$ then by the induction hypothesis, $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$ whenever $\alpha < \beta < \eta$.
Hence, by Lemma 2.3, for all n and x, $F^{n+1}_\eta(x) > F^n_\eta(x)$.
Therefore, for every $x \geqq 1$ we have

$$F^0_\sigma(x) = F^x_\eta(x) > F^0_\eta(x) .$$

Thus $\lambda x \cdot F^0_\eta(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\sigma(x)$.
But, by the induction hypothesis, if $\alpha < \eta$, then $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\eta(x)$.
Hence, for every $\alpha < \sigma$, $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\sigma(x)$.
This completes case (a).

(b) If σ is a limit ordinal, then for any $\alpha < \sigma$ there is a number p such that $\alpha < \{\sigma\}(p)$
Now, by the induction hypothesis, there must be a number q such that for every $x \geqq q$, $F^0_{\{\sigma\}(p)}(x) > F^0_\alpha(x)$.
Also, by the induction hypothesis, if $\beta < \gamma < \sigma$ then $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\gamma(x)$.
Hence by definition of ϱ_σ, ϱ_σ is totally defined and, if $y > z$, $\varrho_\sigma(y) > \varrho_\sigma(z)$.
Thus, by definition of ϱ_σ, we have for every $x \geqq \max(p, q)$,

$$F^0_\sigma(x) = F^0_{\{\sigma\}(x)}(\varrho_\sigma(x)) \geqq F^0_{\{\sigma\}(p)}(\varrho_\sigma(x))$$

and

$$F^0_{\{\sigma\}(p)}(\varrho_\sigma(x)) \geqq F^0_{\{\sigma\}(p)}(x) > F^0_\alpha(x) ,$$

since $\varrho_\sigma(x) \geqq x$, and since, by Lemma 2.3 and the induction hypothesis, if $y \geqq z$, then $F^0_{\{\sigma\}(p)}(y) \geqq F^0_{\{\sigma\}(p)}(z)$.
Hence $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\sigma(x)$, and this holds for any $\alpha < \sigma$.
This completes case (b).
Cases (a) and (b) together constitute the induction step, and so we have proved Lemma 2.4.
With the aid of this last result, it is now easy to obtain the next Lemma, which we state without proof.

Lemma 2.5

For all countable ordinals α, β, if $\alpha < \beta$ then for each n, $\lambda x \cdot F^n_\alpha(x)$ is eventually majorized by $\lambda x \cdot F^n_\beta(x)$.
Combining Lemmas 2.2, 2.3, 2.4 and 2.5, we obtain the following:

Lemma 2.6

(i) For each α, $\lambda n x \cdot F^n_\alpha(x)$ is totally defined.

(ii) For each α, and all n, x, $F^n_\alpha(x) > \max(n, x)$.

(iii) For each α and all n, x, y, if $x > y$, $F^n_\alpha(x) > F^n_\alpha(y)$.

(iv) For each α and all m, n, x, if $m > n$, $F^m_\alpha(x) > F^n_\alpha(x)$.

(v) For all α, β, if $\alpha < \beta$ then for each n, $\lambda x \cdot F^n_\alpha(x)$ is eventually majorized by $\lambda x \cdot F^n_\beta(x)$.

Lemma 2.7

For each α and all n and x, if $\max(n, x) \geqq 1$ then $F^n_{\alpha+1}(x) > F^n_\alpha(x)$.

Proof

Suppose that $x \geqq 1$.
Then by Lemma 2.6,

$$F^0_{\alpha+1}(x) = F^x_\alpha(x) > F^0_\alpha(x) .$$

Now assume that $F^m_{\alpha+1}(x) > F^m_\alpha(x)$.
Then by Def. 4 and Lemma 2.6,

$$F^{m+1}_{\alpha+1}(x) = F^0_{\alpha+1}(F^m_{\alpha+1}(x)) > F^0_{\alpha+1}(F^m_\alpha(x)) .$$

$$\text{But } F^m_\alpha(x) \geqq 1, \text{ so } F^0_{\alpha+1}(F^m_\alpha(x)) > F^0_\alpha(F^m_\alpha(x)) .$$

$$\text{Hence } F^{m+1}_{\alpha+1}(x) > F^0_\alpha(F^m_\alpha(x)) = F^{m+1}_\alpha(x) .$$

Thus we have proved, by induction, that for all n and all $x \geqq 1$, $F^n_{\alpha+1}(x) > F^n_\alpha(x)$.
Now $F^0_\alpha(0) \geqq 1$ and so by Def. 2 and Def. 4,

$$F^1_{\alpha+1}(0) = F^0_{\alpha+1}(F^0_{\alpha+1}(0)) = F^0_{\alpha+1}(F^0_\alpha(0)) > F^0_\alpha(F^0_\alpha(0)) .$$

But, again by Def. 4, $F^0_\alpha(F^0_\alpha(0)) = F^1_\alpha(0)$ and so we have $F^1_{\alpha+1}(0) > F^1_\alpha(0)$.
Furthermore, if we assume that $F^m_{\alpha+1}(0) > F^m_\alpha(0)$ for $m \geqq 1$, we can similarly prove that $F^{m+1}_{\alpha+1}(0) > F^{m+1}_\alpha(0)$.
Hence, by induction, $F^n_{\alpha+1}(0) > F^n_\alpha(0)$ for all $n \geqq 1$.
Thus $F^n_{\alpha+1}(x) > F^n_\alpha(x)$ whenever $\max(n, x) \geqq 1$.
Now, by Lemma 2.7 and the fact that for each α, $F^0_{\alpha+1}(0) = F^0_\alpha(0)$ by Def. 2, we get

Lemma 2.8

For each α and every $k \geqq 1$ we have, for all n and x,

$$F^n_{\alpha+k}(x) \geqq F^n_\alpha(x) ,$$

with equality holding only when $n = x = 0$.
We now consider a method of extending the Grzegorczyk hierarchy (which is uniform in the choice of fundamental sequences to limit ordinals).
The results contained in Lemmas 2.6 and 2. 8are of basic importance to the work which follows, and we shall use them without referring to them explicitly.

Definition 2.9

For each α, define $\mathfrak{E}_\alpha$ as follows:

$$\mathfrak{E}_\alpha = E(\{\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x + y, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i\} \cup \{\lambda x \cdot F^0_\beta(x) \mid \beta \leqq \alpha\}).$$

From Def. 2.9 it is obvious that whenever $\alpha \leqq \beta$, $\mathfrak{E}_\alpha \subseteq \mathfrak{E}_\beta$.
We now prove that the hierarchy $\{\mathfrak{E}_\alpha\}$ does not collapse.

Theorem 2.10

Let α be any countable ordinal > 0.
Then for every function $f \in \mathfrak{E}_\alpha$, there is a number p such that, for all $x_1, \ldots, x_n$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) < F^p_\alpha(\max(x_1, \ldots, x_n)) .$$

Proof

First of all, notice that $F^0_\alpha(x) > 0$ for all x, and that, for all $x_1, \ldots, x_n$ and each i $(1 \leqq i \leqq n)$,

$$F^0_\alpha(\max(x_1, \ldots, x_n)) > x_i .$$

Also, $F^0_1(\max(x, y)) \geqq F^x_0(y) > x + y$, for all x and y.
Now take any $\beta < \alpha$.
Since $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$ is e.m. by $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$, it is clear that there is a number p such that

$$F^0_\beta(x) \leqq F^0_\beta(x + p) < F^0_\alpha(x + p),$$

for all x.
But $F^0_\alpha(x + p) < F^0_\alpha(F^p_\alpha(x)) = F^{p+1}_\alpha(x)$.
Hence $F^0_\beta(x) < F^{p+1}_\alpha(x)$, for all x.
Also, it is clear that $F^0_\alpha(x) < F^1_\alpha(x)$, for all x.
Hence, if I is any initial function of $\mathfrak{E}_\alpha$, there must be a number q such that, for all $x_1, \ldots, x_n$,

$$I(x_1, \ldots, x_n) < F^q_\alpha(\max(x_1, \ldots, x_n)).$$

Now suppose there are numbers $q, p_1, \ldots, p_m$ such that

$$g(\boldsymbol{y}) < F^q_\alpha(\max(\boldsymbol{y})) \text{ for all } \boldsymbol{y},$$

and for each $i = 1, \ldots, m$,

$$h_i(\boldsymbol{x}) < F^{p_i}_\alpha(\max(\boldsymbol{x})) \text{ for all } \boldsymbol{x}.$$

Suppose also that f is defined from $g, h_1, \ldots, h_m$ by substitution, as follows:

$$f(\boldsymbol{x}) = g(h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, h_m(\boldsymbol{x})).$$

Then if $p = \max(p_1, \ldots, p_m)$ we have, for all $\boldsymbol{x}$,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &< F^q_\alpha\big(\max(h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, h_m(\boldsymbol{x}))\big) \\ &< F^q_\alpha\Big(\max\big(F^{p_1}_\alpha(\max(\boldsymbol{x})), \ldots, F^{p_m}_\alpha(\max(\boldsymbol{x}))\big)\Big) \\ &\leqq F^q_\alpha\big(F^p_\alpha(\max(\boldsymbol{x}))\big) \\ &= F^{p+q+1}_\alpha(\max(\boldsymbol{x})) \end{aligned}$$

since, for any n, $F_\alpha^n(x)$ is just the $n + 1$ – st. iterate of F_α^0, applied to x.
Finally, suppose f is defined by limited recursion from functions h_1, h_2, h_3 for which there are numbers p_1, p_2, p_3 such that, for each $i = 1, 2, 3$,

$$h_i(\boldsymbol{x}) < F_\alpha^{p_i}(\max(\boldsymbol{x})).$$

Then, since f is bounded by h_3, we have, for all $\boldsymbol{x}$,

$$f(\boldsymbol{x}) < F_\alpha^{p_3}(\max(\boldsymbol{x})).$$

We have now considered all possible ways of defining functions in $\mathfrak{E}_\alpha$.
Hence the Theorem is proved.

Theorem 2.11

Let α be any countable ordinal > 0.
Then for every function $f \in \mathfrak{E}_\alpha$ there is a number p such that whenever $\max(\boldsymbol{x}) \geqq p$,

$$f(\boldsymbol{x}) < F_{\alpha+1}^0(\max(\boldsymbol{x})).$$

Proof

Take any function $f \in \mathfrak{E}_\alpha$.
Then by Theorem 2.10, there is a number p such that, for all $\boldsymbol{x}$,

$$f(\boldsymbol{x}) < F_\alpha^p(\max(\boldsymbol{x})).$$

Suppose $\max(\boldsymbol{x}) \geqq p$. Then we have

$$f(\boldsymbol{x}) < F_\alpha^{\max(\boldsymbol{x})}(\max(\boldsymbol{x})) = F_{\alpha+1}^0(\max(\boldsymbol{x})).$$

Theorem 2.12

For any two countable ordinals α and β, if $\alpha < \beta$ then $\mathfrak{E}_\alpha \subset \mathfrak{E}_\beta$.

Proof

First, by the results of Grzegorczyk in [5], it is clear that

$$E(\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x + y, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i, \lambda x \cdot x + 1) = \mathscr{E}^1$$

is strictly contained in

$$E(\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x + y, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i, \lambda x \cdot x + 1, \lambda x \cdot (x + 1)^2) = \mathscr{E}^2.$$

But the first class is just $\mathfrak{E}_0$, and the second $\mathfrak{E}_1$, and hence $\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}_1$.

Now let α be any countable ordinal > 0.
Then by Theorem 2.11, $\lambda x \cdot F_{\alpha+1}^0(x)$ eventually majorizes every unary function in $\mathfrak{E}_\alpha$, and so cannot be a member of $\mathfrak{E}_\alpha$.
However, $\lambda x \cdot F_{\alpha+1}^0(x) \in \mathfrak{E}_\beta$ for every countable ordinal $\beta > \alpha$.
Hence, for every $\beta > \alpha$, $\mathfrak{E}_\alpha \subset \mathfrak{E}_\beta$.
This completes the proof of Theorem 2.12.
We shall now show that the hierarchy $\{\mathfrak{E}_\alpha\}$ is a proper extension of the Grzegorczyk hierarchy.

First we define two ω-sequences of binary functions:

$$A_0(x, y) = y + 1 ,$$
$$A_1(x, y) = x + y ,$$
$$A_2(x, y) = x \cdot y ,$$
$$A_{n+3}(0, y) = 1 ,$$
$$A_{n+3}(x + 1, y) = A_{n+2}(A_{n+3}(x, y), y) .$$

The function $\lambda nxy \cdot A_n(x, y)$ is a slight variation of the Ackermann function used in [1].

$$G_0(x, y) = y + 1 ,$$
$$G_1(x, y) = x + y ,$$
$$G_2(x, y) = (x + 1) \cdot (y + 1) ,$$
$$G_{n+3}(0, y) = G_{n+2}(y + 1, y + 1) ,$$
$$G_{n+3}(x + 1, y) = G_{n+3}(x, G_{n+3}(x, y)) .$$

The function $\lambda nxy \cdot G_n(x, y)$ is that used by Grzegorczyk in [5].
Ritchie [11] and Cleave and Rose [3] have obtained various "monotonicity" properties of the above functions.

We shall make use of the following properties which can be proved fairly easily.

(1) For all n, x, y, z, if $x \leqq z$, $G_n(x, y) \leqq G_n(z, y)$.

(2) For all n, x, y, z, if $y \leqq z$, $G_n(x, y) \leqq G_n(x, z)$.

(3) For all n, y, and all $x \geqq 1$,

$$A_{n+2}(A_{n+3}(x, y), A_{n+3}(x, y)) \geqq A_{n+2}(A_{n+3}(x, y), y) .$$

We can now prove the following relationships between the functions A, F, G.

Lemma 2.13

For all n, x, y, $F_n^x(y) \leqq G_{n+2}(x, y)$.

Proof

By definition, $F_0^x(y) = G_2(x, y)$ for all x, y.

Now assume that for all x, y,

$$F_n^x(y) \leqq G_{n+2}(x, y) .$$

Then for all y, we have

$$F_{n+1}^0(y) = F_n^y(y) \leqq G_{n+2}(y, y) \leqq G_{n+2}(y + 1, y + 1) = G_{n+3}(0, y) .$$

Suppose now that, for all y, $F_{n+1}^x(y) \leqq G_{n+3}(x, y)$.

Then we have the following:

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{x+1}(y) &= F_{n+1}^{0}(F_{n+1}^{x}(y)) \text{ by Def. 4} \\ &\leqq F_{n+1}^{0}(G_{n+3}(x, y)) \\ &\leqq G_{n+3}(0, G_{n+3}(x, y)) \\ &\leqq G_{n+3}(x, G_{n+3}(x, y)) \\ &= G_{n+3}(x+1, y), \end{aligned}$$

and this holds for every y.
Hence, by induction, $F_{n+1}^{x}(y) \leqq G_{n+3}(x, y)$ for all x and y.
Therefore, again by induction, we have for all n, x, y, $F_n^x(y) \leqq G_{n+2}(x, y)$.
This completes the proof.

Lemma 2.14

For all n, x, y, $A_{n+2}(x, y) \leqq F_n^x(y)$.

Proof

Clearly $A_2(x, y) = x \cdot y \leqq (x+1) \cdot (y+1) = F_0^x(y)$, for all x, y.
Now assume that for all x and y,

$$A_{n+2}(x, y) \leqq F_n^x(y) .$$

Then for all y, $A_{n+3}(0, y) = 1 \leqq F_{n+1}^0(y)$, and also, for all y, we have

$$A_{n+3}(1, y) = A_{n+2}(1, y) = \cdots = A_2(1, y) = y \leqq F_{n+1}^1(y).$$

Suppose, now, that $x \geqq 1$ and that for all y,

$$A_{n+3}(x, y) \leqq F_{n+1}^x(y) .$$

Then we have the following:

$$\begin{aligned} A_{n+3}(x+1, y) &= A_{n+2}(A_{n+3}(x, y), y) \\ &\leqq A_{n+2}(A_{n+3}(x, y), A_{n+3}(x, y)) \text{ by (3)} \\ &\leqq F_n^{A_{n+3}(x,y)}(A_{n+3}(x, y)) \\ &= F_{n+1}^0(A_{n+3}(x, y)) \text{ by Def. 2} \\ &\leqq F_{n+1}^0(F_{n+1}^x(y)) \\ &= F_{n+1}^{x+1}(y) , \end{aligned}$$

and this holds for every y.
Hence, by induction, $A_{n+3}(x, y) \leqq F_{n+1}^x(y)$ for all x, y.
Therefore, again by induction, we have, for all n, x, y,

$$A_{n+2}(x, y) \leqq F_n^x(y) .$$

This completes the proof.

Definition 2.15

We define classes $\mathscr{F}^n$ and $\mathscr{E}^n$ as follows:

$$\mathscr{F}^n = E(\lambda x \cdot 0, \lambda x \cdot x + 1, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i, \lambda xy \cdot A_n(x, y))$$
$$\mathscr{E}^n = E(\lambda x \cdot 0, \lambda x \cdot x + 1, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i, \lambda xy \cdot G_n(x, y)) .$$

The classes $\mathscr{E}^n$ are those considered by Grzegorczyk in [5].

Lemma 2.16

For each n, $\mathscr{F}^{n+1} \subseteqq \mathfrak{E}_n$.

Proof

We know that, for every n, $\lambda x \cdot 0$, $\lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i$ and $\lambda xy \cdot x + y$ all belong to $\mathfrak{E}_n$.
Also $F_0^0(x) = x + 1$, and so $\lambda x \cdot x + 1 \in \mathfrak{E}_n$ for every n.
Hence, all we need do is show that for each n,

$$\lambda xy \cdot A_{n+1}(x, y) \in \mathfrak{E}_n .$$

Clearly, $\lambda xy \cdot A_1(x, y) \in \mathfrak{E}_0$.
Assume that $\lambda xy \cdot A_{n+1}(x, y) \in \mathfrak{E}_n$.
Then $\lambda xy \cdot A_{n+1}(x, y) \in \mathfrak{E}_{n+1}$, since $\mathfrak{E}_n \subset \mathfrak{E}_{n+1}$.
Now $\lambda xy \cdot A_{n+2}(x, y)$ is defined by a simple primitive recursion from $\lambda xy \cdot A_{n+1}(x, y)$.
Also, by Lemma 2.14, we have

$$A_{n+2}(x, y) \leqq F_n^x(y) \leqq F_n^{x+y}(x + y) = F_{n+1}^0(x + y) .$$

Therefore, $\lambda xy \cdot A_{n+2}(x,y)$ is defined by limited recursion from $\lambda xy \cdot A_{n+1}(x,y) \in \mathfrak{E}_{n+1}$ and $\lambda xy \cdot F_{n+1}^0(x + y) \in \mathfrak{E}_{n+1}$.
Hence $\lambda xy \cdot A_{n+2}(x, y) \in \mathfrak{E}_{n+1}$.
Thus, by induction, $\lambda xy \cdot A_{n+1}(x, y) \in \mathfrak{E}_n$ for every n, and this completes the proof.

Lemma 2.17

For each n, $\mathfrak{E}_n \subseteqq \mathscr{E}^{n+1}$.

Proof

Clearly, $\mathfrak{E}_0 = \mathscr{E}^1$.
Assume that $\mathfrak{E}_n \subseteqq \mathscr{E}^{n+1}$, so that $\mathfrak{E}_n \subseteqq \mathscr{E}^{n+2}$ since $\mathscr{E}^{n+1} \subset \mathscr{E}^{n+2}$.
Hence $\lambda x \cdot F_n^0(x) \in \mathscr{E}^{n+2}$.
Now $\lambda xy \cdot F_n^x(y)$ is defined by a simple primitive recursion from $\lambda x \cdot F_n^0(x)$, and by Lemma 2.13, $F_n^x(y) \leqq G_{n+2}(x, y)$ for all x, y.
Therefore, $\lambda xy \cdot F_n^x(y)$ can be defined by limited recursion from $\lambda x \cdot F_n^0(x) \in \mathscr{E}^{n+2}$ and $\lambda xy \cdot G_{n+2}(x, y) \in \mathscr{E}^{n+2}$.
Hence $\lambda xy \cdot F_n^x(y) \in \mathscr{E}^{n+2}$.
But $F_{n+1}^0(x) = F_n^x(x)$, and so $\lambda x \cdot F_{n+1}^0(x) \in \mathscr{E}^{n+2}$.

Thus, all the initial functions of $\mathfrak{E}_{n+1}$ belong to $\mathcal{E}^{n+2}$, and so it is clear that $\mathfrak{E}_{n+1} \subseteqq \mathcal{E}^{n+2}$.

Hence, by induction, we have, for every n, $\mathfrak{E}_n \subseteqq \mathcal{E}^{n+1}$.

Now Ritchie [11] and Cleave and Rose [3] have proved that, for every n, $\mathcal{F}^n = \mathcal{E}^n$.

Hence, by Lemmas 2.16 and 2.17, we have the following result:

Theorem 2.18

(i) For every n, $\mathfrak{E}_n = \mathcal{E}^{n+1}$.

(ii) $\bigcup_{n \in N} \mathfrak{E}_n = \mathcal{P}$.

REFERENCES

[1] W. Ackermann: Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Math. Annalen **99** (1928), pp. 118–133.

[2] A. Church and S. C. Kleene: Formal Definitions in the Theory of Ordinal Numbers. Fund. Methematicae **28**(1936), pp. 11–21.

[3] J. P. Cleave and H. E. Rose: $\mathcal{E}^n$-Arithmetic. Sets, Models and Recursion Theory, N. Holland (1967), pp. 297–308.

[4] K. Gödel: Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **25** (1939), pp. 220–224.

[5] A. Grzegorczyk: Some Classes of Recursive Functions. Rozprawy Matematyczne No. **4**, Warsaw (1953).

[6] S. C. Kleene: Introduction to Metamathematics. Van Nostrand (1952).

[7] G. Kreisel: On the Interpretation of Non-Finitist Proofs. J. Symbolic Logic **17** (1952), pp. 43–58.

[8] G. H. Müller: Charakterisierung einer Klasse von rekursiven Funktionen. Kolloquium „Grundlagen der Math. . . . . " Tihany (1962).

[9] R. Péter: Recursive Functions. Academic Press (1967).

[10] R. Péter: Rekursivität und Konstruktivität, Constructivity in Mathematics, ed. A. Heyting, Amsterdam (1959), pp. 226–233.

[11] R. W. Ritchie: Classes of Recursive Functions based on Ackermann's Function. Pacific Journal of Math. **15**, (iii) (1965), pp. 1027–1044.

[12] J. W. Robbin: Ph. D. Dissertation, Princeton University (1965).

[13] S. Feferman: Classifications of Recursive Functions by means of Hierarchies. Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), pp. 101–122.

(Teil II folgt in Heft 13/3–4)

Arch. math. Logik **13** (1970), 52—54.

THE UNIQUE EXISTENTIAL QUANTIFIER*

H. B. ENDERTON

In elementary number theory a set is definable by a formula

$$(\exists ! x_1) \cdots (\exists ! x_n) \varphi$$

(where φ defines a recursive relation) if and only if it is the intersection of a Π_n set and a Σ_n set. This was proved by Rödding, [6, Satz 1, p. 62]. In the present paper we investigate the extent to which analogous results hold in second-order number theory.

The unique existential quantifier $(\exists ! \alpha)$ is interpreted as meaning "there is a unique function α such that." Let $\exists !{}^1_n$ be the class of relations which are definable by formulas ($\exists !{}^1_n$ formulas)

$$(\exists ! \alpha_1) \cdots (\exists ! \alpha_n) \varphi$$

where φ defines an arithmetical relation. Here φ may contain free number variables or function variables or both. Let $\Pi^1_n \cdot \Sigma^1_n$ be the class of relations which are the intersection of a Π^1_n relation with a Σ^1_n relation. (Or in other words, which are the difference of two Π^1_n relations.) A relationship in one direction between these two notions is easy to establish:

Theorem 1: $$\exists !{}^1_n \subseteq \Pi^1_n \cdot \Sigma^1_n .$$

Proof: Use induction on n. $(\exists ! \alpha)\, \psi(\alpha)$ is equivalent to

$$\exists \alpha\, \varphi(\alpha) \ \&\ \forall \alpha\, \forall \alpha' \,(\varphi(\alpha) \ \&\ \varphi(\alpha') \to \alpha = \alpha') .$$

If φ defines a $\Pi^1_n \cdot \Sigma^1_n$ (and hence Δ^1_{n+1}) relation then the above defines a $\Pi^1_{n+1} \cdot \Sigma^1_{n+1}$ relation.

The upper bound on $\exists !^1_n$ can be improved in the $n = 1$ case; $\exists^1_1 \subseteq \Pi^1_1$. This is because any function which is the unique solution to an arithmetical condition must itself be hyperarithmetical. Thus if φ defines an arithmetical relation then $(\exists ! \alpha)\, \varphi(\alpha, \gamma)$ is equivalent to

$$(\exists \alpha \text{ hyperarithmetical in } \gamma)\, \varphi(\alpha, \gamma) \ \&\ \forall \alpha\, \forall \alpha' \,[\varphi(\alpha, \gamma) \ \&\ \varphi(\alpha', \gamma) \to \alpha = \alpha'] .$$

The above defines a Π^1_1 relation by well-known results of Kleene [3, p. 26].

For lower bounds on $\exists !^1_n$, a basic tool is the following validity:

$$(*) \qquad \forall \alpha\, \varphi(\alpha) \leftrightarrow (\exists ! \alpha) \big(\varphi(\lambda t\, 0) \ \&\ (\neg\, \varphi(\alpha) \vee \alpha = \lambda t\, 0)\big) .$$

* Eingegangen am 13. 1. 69.

(This is analogous to Rödding's (a_3), [6, p. 62]. We could equally well use the version employed by Lusin [4, p. 259]

$$\forall\alpha\, \varphi(\alpha) \leftrightarrow (\exists!\,\alpha)\big(\neg\, \varphi(\lambda t\, \alpha(t) \dot{-} 1) \vee \alpha = \lambda t\, 0\big).\big)$$

By using $(*)$ and the preceding paragraph we have:

Theorem 2: $$\exists!^1_1 = \Pi^1_1 .$$

This result is reasonably well known; it is the effective version of a result in descriptive set theory (see Lusin [4, p. 259]).

By use of the Kondo-Addison uniformization theorem [8, p. 188] we next prove:

Theorem 3: $$\exists!^1_2 = \Pi^1_2 \cdot \Sigma^1_2 .$$

Proof: It is casy to see that the intersection of two relations in $\exists!^1_n$ is again in $\exists!^1_n$. (This is because two sets are both singletons if and only if their cartesian product is a singleton.) So it suffices to show that $\Pi^1_2 \subseteq \exists!^1_2$ and $\Sigma^1_2 \subseteq \exists!^1_2$. Suppose φ defines a Π^1_1 set, and φ' defines a Π^1_1 set which uniformizes it. Then

$$\exists\alpha\, \varphi,\ \exists\alpha\, \varphi', \quad \text{and} \quad (\exists!\,\alpha)\, \varphi'$$

are equivalent. By applying Theorem 2 to φ', we get $\Sigma^1_2 \subseteq \exists!^1_2$.

For the other half, consider a formula ψ defining a Σ^1_1 relation. As in $(*)$, $\psi(\alpha)$ is equivalent to

$$\psi(\lambda t\, 0)\ \&\ (\exists!\,\alpha)\ [\neg\, \psi(\alpha) \vee \alpha = \lambda t\, 0] .$$

The first conjunct is Σ^1_1 and hence Σ^1_2 and hence $\exists!^1_2$. The part in square brackets is essentially Π^1_1 and hence $\exists!^1_1$. Hence the entire formula is essentially $\exists!^1_2$.

By applying $(*)$ to the Σ^1_2 half of Theorem 3 we obtain at once:

Corollary 4: $$\Pi^1_3 \subseteq \exists!^1_3 \subseteq \Pi^1_3 \cdot \Sigma^1_3 .$$

Theorem 3 can be extended if we have stronger uniformization principles available.

Theorem 5: Assume that Π^1_n relations can be uniformized by $\Pi^1_n \cdot \Sigma^1_n$ relations, for all $n \geqq 1$. Then for all $n \geqq 2$,

$$\exists!^1_n = \Pi^1_n \cdot \Sigma^1_n .$$

Proof: Use induction on n. That $\Pi^1_{n+1} \subseteq \exists!^1_n$ follows directly from $(*)$ and the inductive hypothesis. Next consider the Σ^1_{n+1} relation defined by $\exists\alpha\, \varphi$. Uniformize the Π^1_n relation defined by φ by a relation definable by the $\exists!^1_n$ formula ψ. Then $\exists\alpha\, \varphi$ is equivalent to $(\exists!\,\alpha)\, \psi$.

The hypothesis of Theorem 5 is a consequence of the axiom of constructibility, see Addison [1]. Hence:

Corollary 6: The axiom of constructibility implies that

$$\exists!^1_n = \Pi^1_n \cdot \Sigma^1_n$$

for $n \geqq 2$.

Although the hypothesis of Theorem 5 is consistent with ZF, there remain doubts as to whether or not it is true in the real world. It is inconsistent with the axiom of definable determinateness, which implies the existence of a Π^1_2 relation not uniformizable by any Σ^1_3 relation (see Addison and Moschovakis [2]). On the other hand it appears reasonable to hope that definable determinateness will imply that Π^1_n relations are uniformizable by Π^1_{n+1} relations. (Cf. the conjecture of D. A. Martin, [5, p. 689].) That is enough to yield a weakened from of Theorem 5.

Theorem 7: Assume that (for all n) Π^1_n relations can be uniformized by Π^1_{n+1} relations. Then for all n

$$\Pi^1_n \subseteq \exists !^1_n \subseteq \Pi^1_n \cdot \Sigma^1_n .$$

Proof: Use induction on n. The conclusion is already known for $n = 1, 2$, and 3. Consider a Π^1_{n+1} formula $\forall \alpha \, \exists \beta \, \varphi(\alpha)$ (where φ is Π^1_{n-1}). This is equivalent to

$$(\exists \beta) \, \varphi(\lambda t \, 0) \; \& \; (\exists ! \, \alpha) \, (\neg \exists \beta \, \varphi(\alpha) \vee \alpha = \lambda t \, 0) .$$

Now uniformize the relation defined by $\varphi(\lambda t \, 0)$ and apply the inductive hypothesis. The result is a $\exists !^1_{n+1}$ formula.

We conclude with some remarks on the strength of the unique existential quantifier in pure first-oder logic with equality. (The situation without equality has been considered by Rödding [7]). The proofs, which are not very difficult, are omitted. In the theory of equality (with no non-logical symbols) there is no sentence all of whose quantifiers are unique existential ones and which asserts that the universe contains at most two points. If we add an individual constant symbol to the language then (by the analog of (*)) any formula is equivalent to one all of whose quantifiers are unique existential ones. But prenex formulas do not suffice; in the theory of equality with one distinguished element there is no sentence of the form

$$(\exists ! \, x_1) \, (\exists ! \, x_2) \cdots (\exists ! \, x_n) \, \psi$$

for quantifier-free ψ, which asserts that the universe contains at least two points.

REFERENCES

[1] J. W. Addison: Some consequences of the axiom of constructibility. Fundamenta Mathematicae, vol. 46 (1959), pp. 337–357.

[2] J. W. Addison and Yiannis N. Moschovakis: Some consequences of the axiom of definable determinateness. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 59 (1968), pp. 708–712.

[3] S. C. Kleene: Quantification of number-theoretic functions. Compositio Mathematica, vol. 14 (1959), pp. 23–40.

[4] Nicolas Lusin: Les Ensembles Analytiques. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[5] Donald A. Martin: The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 74 (1968), pp. 687–689.

[6] Dieter Rödding: Anzahlquantoren in der Kleene-Hierarchie. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, vol. 9 (1966), pp. 61–65.

[7] Dieter Rödding: Anzahlquantoren in der Prädikatenlogik. Ibid., pp. 66–69.

[8] Joseph R. Shoenfield: Mathematical Logic. Addison-Wesley, 1967.

Arch. math. Logik 13 (1970), 55—59.

EIN HENKIN-VOLLSTÄNDIGKEITSBEWEIS FÜR DIE INTUITIONISTISCHE PRÄDIKATELOGIK BEZÜGLICH DER KRIPKE-SEMANTIK*

HORST LUCKHARDT, Marburg/Lahn

K. Schütte hat in [3] auf den Seiten 48—53 einen eleganten Vollständigkeitsbeweis für die intuitionistische Aussagenlogik bezüglich der Kripke-Semantik in Verallgemeinerung der Henkin-Methode durch Übergang zu Paaren von Formelnmengen gegeben. Dieser Beweis wird nachfolgend auf die intuitionistische Prädikatelogik ausgedehnt.[1]

Zugrunde gelegt werden alle Festsetzungen aus Schütte [3], Seite 44—53. — Wir beziehen uns hier auf die Verknüpfungsbasis $\curlywedge$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bigvee$, $\bigwedge$ und müssen deshalb die Modelldefinition noch um die Bedingung

$$W(\curlywedge, \alpha) = f \qquad \text{für alle} \qquad \alpha \in M$$

ergänzen.

Satz 1: (Konsistenz)

Jede in der intuitionistischen Prädikatelogik beweisbare Formel ist (intuitionistisch) allgemein-gültig.

Beweis: Den Nachweis hierfür führt man wie in Schütte [3], Seite 5—6, wobei es vorteilhaft ist, sich auf die von Gödel in [1] auf Seite 286 gegebene Kodifikation der intuitionistischen Prädikatelogik zu beziehen.

Definitionen:

0. Im folgenden bezeichnen $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \ldots$ beliebige abzählbare Mengen prädikatelogischer Formeln über obiger Verknüpfungsbasis.
1. $\mathfrak{D}_f(\alpha)$, $\mathfrak{D}_g(\alpha)$, $\mathfrak{P}(\alpha)$ seien die Mengen der freien Dingvariablen, gebundenen Dingvariablen und Prädikatvariablen von α.
2. $\mu(\alpha)$ sei eine (beliebige) Teilmenge der Sprache $\sigma(\alpha)$, die sich in üblicher Weise aus $\mathfrak{D}_f(\alpha)$, $\mathfrak{D}_g(\alpha)$, $\mathfrak{P}(\alpha)$ und $\curlywedge$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bigvee$, $\bigwedge$ aufbaut.
3. (α, β) heißt μ-vollständig, wenn (α, β) konsistent ist und $\mu \subseteqq \alpha \cup \beta$.
4. (α, β) heißt μ-ausgezeichnet, wenn (α, β) μ-vollständig ist und $\alpha \cup \beta \subseteqq \mu$.
5. $\mathsf{U}(\mu) =: \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta)\ \mu\text{-ausgezeichnet}\}$.
6. $\bar{\alpha}$ ist das Komplement von α bezüglich $\sigma(\alpha)$.

Lemma 0: Für konsistentes (α, β) ist $\alpha \cap \beta$ leer.

* Eingegangen am 6. 12. 68.

[1] Auf diese Möglichkeit hat Professor Schütte schon in [4] hingewiesen.

Lemma 1: Ist (α, β) konsistent, so ist für eine beliebige Formel F auch $(\alpha \cup \{F\}, \beta)$ oder $(\alpha, \beta \cup \{F\})$ konsistent.

Beweis: Siehe [3], Seite 49.

Lemma 2: Ist (α, β) konsistent, so gibt es zu jedem μ eine μ-vollständige Erweiterung (α^*, β^*) von (α, β) mit $\alpha^* \cup \beta^* = \mu \cup \alpha \cup \beta$.

Beweis: Lemma 1.

Lemma 3: $\mathsf{U}(\mu) \neq \emptyset$.

Beweis: Siehe [3], Seite 49.

Lemma 4: Ist (α, β) μ-vollständig und $F \in \mu$, so gehört F genau dann zu α, wenn $\alpha \rightarrow F$ intuitionistisch beweisbar ist.

Beweis: Wenn $\vdash \alpha \rightarrow F$ und (α, β) konsistent, so $F \notin \beta$. Wegen $F \in \mu \subseteqq \alpha \cup \beta$ muß daher $F \in \alpha$ sein.

Lemma 5: Ist (α, β) konsistent und $\bigvee x A(x) \in \alpha$, so ist für eine neue freie Dingvariable d auch $(\alpha \cup \{A(d)\}, \beta)$ konsistent.

Beweis: Falls $(\alpha \cup \{A(d)\}, \beta)$ inkonsistent, so $\vdash \alpha \wedge A(d) \rightarrow \beta$. Da d neu, so auch $\vdash \alpha \wedge \bigvee x A(x) \rightarrow \beta$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lemma 6: Zu jedem konsistenten (α, β) gibt es eine Erweiterung $(\alpha, \beta)^*_{\{d_1, d_2, \ldots\}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $d_1, d_2, \ldots$ sind bezüglich $\sigma(\alpha \cup \beta)$ neue, paarweise voneinander verschiedene freie Dingvariablen.

(b) $(\alpha, \beta)^*_{\{d_1, d_2, \ldots\}}$ ist μ-ausgezeichnet, wobei μ die Sprache über $\mathfrak{D}_f(\alpha \cup \beta) \cup \{d_1, d_2, \ldots\}, \mathfrak{D}_g(\alpha \cup \beta), \mathfrak{P}(\alpha \cup \beta)$ ist.

(c) Zu jedem $\bigvee x A(x) \in \alpha^*_{\{d_1, d_2, \ldots\}}$ gibt es ein $d \in \{d_1, d_2, \ldots\}$ mit $A(d) \in \alpha^*_{\{d_1, d_2, \ldots\}}$.

Beweis: Eine solche Erweiterung erhält man mit den Lemmata 2,5 auf die von Henkin in [2], Seite 162—163, angegebene Weise.

Lemma 7: Ist (α, β) konsistent und $\bigwedge x A(x) \in \beta$, so ist für eine neue freie Dingvariable d auch $(\alpha, \{A(d)\})$ konsistent.

Beweis: Aus der Inkonsistenz von $(\alpha, \{A(d)\})$ folgt $\vdash \alpha \rightarrow A(d)$. Da d neu, so auch $\vdash \alpha \rightarrow \bigwedge x A(x)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Angabe des ausgezeichneten Modells $(M, \leqq, V, W)$ zu konsistentem (α, β):

I. Definition von M^2, $\leqq^2$:

1. $(\alpha, \beta)^*_{\{d_1, d_2, \ldots\}} \in M^2$ für neue freie Dingvariablen $d_1, d_2, \ldots$

2. Ist $(\gamma, \delta) \in M^2$ und $(\gamma \cup \{F_1\}, \{F_2\})$ konsistent für $F_1, F_2 \in \sigma(\gamma \cup \delta)$, so $(\gamma \cup \{F_1\}, \{F_2\})^*_{\{d_1, d_2, \ldots\}} \in M^2$ für neue freie Dingvariablen $d_1, d_2, \ldots$

3. Ist $(\gamma, \delta) \in M^2$ und $\wedge\, xA(x) \in \sigma(\gamma \cup \delta)$, $\wedge\, xA(x) \notin \gamma$, so $(\gamma, \{A(d)\})^*_{\{d_1, d_2, \ldots\}} \in M^2$ für neue freie Dingvariablen $d, d_1, d_2, \ldots$

Infolge der Abzählbarkeit der hier gebrauchten Sprachen, kann man M^2 seiner Erzeugung gemäß als Baum schreiben. $\leqq^2$ sei die Folgerelation in diesem Baum vom Ursprung (α^0, β^0) her gesehen. Aus den Lemmata 6,7 folgt, daß $(\gamma, \delta) \in M^2$ $\sigma(\gamma \cup \delta)$-ausgezeichnet ist. γ enthält daher alle intuitionistischen prädikatelogischen Gesetze über $\sigma(\gamma \cup \delta)$. Mit Lemma 0 also

$$(\gamma, \delta) \in M^2 \Rightarrow \delta = \bar{\gamma}, \sigma(\gamma) = \sigma(\gamma \cup \delta)\,.$$

$(\gamma, \delta) \in M^2$ wird daher schon von γ allein festgelegt.

II. Definition von $M, \leqq$:

$$\gamma \in M \Leftrightarrow: (\gamma, \bar{\gamma}) \in M^2$$

$$\gamma \leqq \delta \Leftrightarrow: (\gamma, \bar{\gamma}) \leqq^2 (\delta, \bar{\delta}) \quad \text{für} \quad \gamma, \delta \in M$$

Es gilt: $\gamma \leqq \delta \Rightarrow \gamma \subseteq \delta$ für $\gamma, \delta \in M$.

III. Definition von V, W:

$V(\gamma) =:$ Menge der freien Dingvariablen von γ für $\gamma \in M$

Es gilt: $V(\alpha^0) = \bigcap_{\gamma \in M} V(\gamma)$

$W(\wedge, \gamma) =: f$ für $\gamma \in M$

$$W(v, \gamma) =: \begin{cases} w \text{ falls } v \in \gamma \\ f \text{ falls } v \notin \gamma \end{cases} \quad \text{für } \gamma \in M \text{ und Aussagenvariable } v \in \sigma(\alpha \cup \beta)$$

$W(d) =: d$ für freie Dingvariable $d \in \bigcup_{\gamma \in M} V(\gamma)$

$W(p, \gamma) =: \{p(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1, \ldots, d_n$ freie Dingvariablen, $p(d_1, \ldots, d_n) \in \gamma\}$ für $\gamma \in M$ und n-stellige Prädikatvariable $p \in \sigma(\alpha \cup \beta)$

Man überzeugt sich leicht davon, daß dies ein für $\alpha \cup \beta \neq \emptyset$ zulässiges abzählbares Kripke-Baummodell der intuitionistischen Prädikatelogik mit Ursprung $\alpha^0 \supseteq \alpha (\overline{\alpha^0} = \beta^0 \supseteq \beta)$ ist.

Dieses zu (α, β) gehörige ausgezeichnete Modell hat ferner die folgenden wichtigen Eigenschaften:

(1) Für $\gamma \in M$ ist $(\gamma, \bar{\gamma})$ $\sigma(\gamma)$-ausgezeichnet. γ enthält daher alle intuitionistischen Gesetze und ist gegen modus ponens abgeschlossen.

(2) Ist $\gamma \in M$ und $(\gamma \cup \{F_1\}, \{F_2\})$ konsistent für $F_1, F_2 \in \sigma(\gamma)$, so gibt es $\delta \in M$ mit: $\gamma \leqq \delta, F_1 \in \delta, F_2 \in \bar{\delta}$.

(3) $\gamma \in M$ ist gegen $\vee$-Auflösung abgeschlossen.

(4) Ist $\gamma \in M$, $\wedge\, xA(x) \in \sigma(\gamma)$ und $\wedge\, xA(x) \notin \gamma$, so gibt es $\delta \in M$ und $\zeta \in V(\delta)$ mit: $\gamma \leqq \delta, A(\zeta) \notin \delta$.

Lemma 8: Ist $\gamma \in M$ und $F \in \sigma(\gamma)$, so gilt: $F \in \gamma \Leftrightarrow W(F, \gamma) = w$.

Beweis: Vollständige Induktion nach der Länge von F.

1. F ist Primformel oder das $\curlywedge$:
   Für Primformeln folgt die Behauptung aus der Definition des ausgezeichneten Modells.
   Für $\curlywedge$ gilt nach W-Definition und (1): $W(\curlywedge, \gamma) = f$, $\curlywedge \notin \gamma$.

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ F \equiv A \wedge B \\ 3.\ F \equiv A \vee B \end{array}\right\} \text{Beweise wie in [3], Seite 50 mit Lemma 4, (1).}$$

4. $F \equiv A \to B$. Beweis wie in [3], Seite 51 mit Lemma 4 und (1), (2).

5. $F \equiv \bigvee x A(x)$

$$\begin{array}{llll} W(\bigvee x A(x), \gamma) = w & \Leftrightarrow & \text{Es gibt } \xi \in V(\gamma) \text{ mit } W(A(\xi), \gamma) = w & (W\text{-Definition}) \\ & \Leftrightarrow & \text{Es gibt } \xi \in V(\gamma) \text{ mit } A(\xi) \in \gamma & (\text{Induktionsvoraussetzung, (1)}) \\ & \Rightarrow & \bigvee x A(x) \in \gamma & (1) \\ \bigvee x A(x) \in \gamma & \Rightarrow & \text{Es gibt } \xi \in V(\gamma) \text{ mit } A(\xi) \in \gamma & (3). \end{array}$$

6. $F \equiv \bigwedge x A(x)$

$$\begin{array}{llll} (*)\ W(\bigwedge x A(x), \gamma) = w & \Leftrightarrow & \text{Für jedes } \delta \in M \text{ mit } \gamma \leqq \delta \text{ und jedes } \zeta \in V(\delta) \text{ ist } W(A(\zeta), \delta) = w & (W\text{-Definition}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bigwedge x A(x) \in \gamma, \gamma \leqq \delta, \zeta \in V(\delta) \Rightarrow A(\zeta) \in \delta \text{ für } \delta \in M & (1) \\ \Rightarrow W(A(\zeta), \delta) = w & (\text{Induktionsvoraussetzung, (1)}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Also } \bigwedge x A(x) \in \gamma \Rightarrow W(\bigwedge x A(x), \gamma) = w & (*) \\ \bigwedge x A(x) \notin \gamma \Rightarrow \text{Es gibt } \delta \in M \text{ und } \zeta \in V(\delta), \text{ so daß } \gamma \leqq \delta \text{ und } A(\zeta) \notin \delta & (4) \\ \Rightarrow \text{Es gibt } \delta \in M \text{ und } \zeta \in V(\delta), \text{ so daß } \gamma \leqq \delta \text{ und } W(A(\zeta), \delta) \neq w & (\text{Induktionsvoraussetzung, (1)}) \\ \Rightarrow W(\bigwedge x A(x), \gamma) \neq w & (*) \end{array}$$

Satz 2: (Vollständigkeit)

Jede (intuitionistisch) allgemein-gültige prädikatelogische Formel ist in der intuitionistischen Prädikatelogik beweisbar.

Beweis: Ist eine Formel F unbeweisbar, so ist $(\emptyset, \{F\})$ konsistent. Für das hierzu gehörige und für F zulässige ausgezeichnete Modell $(M, \leqq, V, W)$ gilt nach Lemma 8:

$$F \in \sigma(\alpha^0)\ (\alpha^0 \text{ Ursprung von } M),\ F \notin \alpha^0,\ W(F, \alpha^0) = f.$$

Ein Rückblick zeigt, daß man für die intuitionistische Aussagenlogik allein die Lemmata 5, 6, 7 nicht benötigt und die $\gamma \in M$ auf Teilformelnmengen einschränken kann. Dies führt zu dem Entscheidungsverfahren in [3], Seite 51, für die intuitionistische Aussagenlogik.
Die (intuitionistische) Interpretierbarkeit ist eine Verallgemeinerung der (intuitionistischen) Erfüllbarkeit: α erfüllbar $\Leftrightarrow$ $(\alpha, \emptyset)$ interpretierbar.

Satz 3: (a) Ist (α, β) interpretierbar, so ist (α, β) konsistent.

(b) Ist (α, β) konsistent, so ist (α, β) im Abzählbaren interpretierbar.

Beweis:

Zu (a): Konsistenzsatz.
Zu (b): $(M, \leqq, V, W)$ sei das zu (α, β) gehörige ausgezeichnete Modell. Dieses ist abzählbar und für $\alpha \cup \beta$ zulässig. Für den Ursprung α^0 von M gilt

$$\alpha \subseteq \alpha^0, \beta \subseteq \overline{\alpha^0}\,.$$

Mit Lemma 8 folgt daraus:

$$A \in \alpha \Rightarrow A \in \alpha^0 \Rightarrow W(A, \alpha^0) = w\,,$$

$$B \in \beta \Rightarrow B \notin \alpha^0 \Rightarrow W(B, \alpha^0) = f\,.$$

Damit hat man in einer einheitlichen Zusammenstellung folgendes Kompaktheits- und Löwenheim-Skolem-Resultat:

(α, β) interpretierbar $\Rightarrow$ Für alle endlichen α_0, β_0 mit $\alpha_0 \subseteq \alpha$, $\beta_0 \subseteq \beta$ ist (α_0, β_0) interpretierbar

$\Rightarrow$ Für alle endlichen α_0, β_0 mit $\alpha_0 \subseteq \alpha$, $\beta_0 \subseteq \beta$ ist (α_0, β_0) konsistent (Satz 3 (a))

$\Rightarrow$ (α, β) konsistent

$\Rightarrow$ (α, β) interpretierbar im Abzählbaren (Satz 3 (b)).

Henkin [2], Seite 164—165 folgend kann man in diese Überlegungen noch die Gleichheit und Sprachen mit überabzählbar vielen Ding- und Prädikatvariablen einbeziehen.

LITERATUR

[1] Gödel, K.: Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica **12** (1958), 280–287.
[2] Henkin, L.: The completeness of the first-order functional calculus. Journ. symb. logic **14** (1949), 159–166.
[3] Schütte, K.: Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Springer 1968.
[4] Schütte, K.: Zur Semantik der intuitionistischen Aussagenlogik. Abstract. Journ. symb. logic **32** (1967), 566.

Arch. math. Logik 13 (1970), 60–73.

ÜBER DIE MIT STACKAUTOMATEN BERECHENBAREN FUNKTIONEN*

Von HORST MÜLLER, Hannover

1. Einleitung

Am bekanntesten von den im Laufe der Zeit untersuchten theoretischen „Rechenmaschinen" sind die Turing-Maschinen und die endlichen Automaten. A. M. Turing hat wohl als erster (1936) mit den später nach ihm benannten Maschinen den Berechenbarkeitsbegriff präzisiert. Viele andere Autoren haben später auf ganz verschiedenen Wegen andere Berechenbarkeitsbegriffe definiert, die sich schließlich alle als äquivalent erwiesen haben.

In neuerer Zeit sind von verschiedenen Autoren Teilklassen rekursiver Funktionen untersucht worden. Man kann hier zwei grundlegend verschiedene Wege unterscheiden. Einerseits werden, ausgehend von gewissen Anfangsfunktionen (z. B. Nachfolgerfunktion) und gewissen erlaubten Operationen mit schon erhaltenen Funktionen, neue Funktionen gewonnen. Auf diese Weise hat A. Grzegorczyk in [4] die Klassen $\mathfrak{E}^n$ erhalten. Schon vorher hatte Kalmár (1943) auf ähnliche Art die Klasse $\mathfrak{E}$ der elementaren Funktionen definiert. Bezeichnet man die Klasse der rekursiven Funktionen mit $\mathfrak{R}$, die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen mit $\mathfrak{P}$, so gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\mathfrak{E}^i \subsetneqq \mathfrak{E}^{i+1} (i \in \mathbb{N}),\ \mathfrak{E}^3 = \mathfrak{E},\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{E}^i = \mathfrak{P} \subsetneqq \mathfrak{R}\,.$$

Andererseits kann man vom Begriff der Turing-Maschine ausgehen und Maschinen betrachten, die weniger leisten als Turing-Maschinen. Es gibt schon viele Untersuchungen darüber, welche Bandmengen von diesen Maschinen erkannt werden können, aber wenig über die mit ihnen berechenbaren Funktionen. Ritchie hat in [6] die von endlichen Automaten berechenbaren Funktionen untersucht. Er zeigt, daß die Klasse F dieser Funktionen alle linearen Funktionen enthält und daß alle Funktionen in F durch ihre Argumente beschränkt sind. Die Klasse J der von linear beschränkten Automaten berechenbaren Funktionen ist von Kreider und Ritchie in [5] untersucht worden. Sie konnten zeigen: $F \subsetneqq J \subsetneqq \mathfrak{E}^2$. Ob $\mathfrak{E}^0$ oder $\mathfrak{E}^1$ in J enthalten ist, oder ob die Multiplikation in J liegt, blieb offen. Die vorliegende Arbeit untersucht die Klasse $\mathfrak{S}$ der mit Stackautomaten[1] berechenbaren Funktionen. Es werden zwei verschiedene Berechenbarkeitsbegriffe eingeführt, die sich als äquivalent erweisen. Es wird gezeigt, daß sich Summe, Produkt und Potenz mit Stackautomaten berechnen lassen. Es werden einige Abgeschlossenheitseigenschaften von $\mathfrak{S}$ bewiesen. Unter Verwendung eines Resultates von

* Eingegangen am 17. 1. 69.

[1] stack (engl.): Schober, Stoß, Büchermagazin, Regal.

Ritchie wird gezeigt: $\mathfrak{E}^2 \subsetneqq \mathfrak{S}$. Daß alle stackberechenbaren Funktionen partiell-rekursiv sind, ist leicht zu zeigen. Eine interessante offene Frage ist, ob alle (totalen) stackberechenbaren Funktionen primitiv-rekursiv oder gar elementar sind.
Alle Beweise, die in dieser Arbeit nur skizziert oder gar nicht ausgeführt werden, können in der Dissertation des Autors [7] nachgelesen werden.

2. Definition des Stackautomaten und der Stackberechenbarkeit

Stackautomaten sind zuerst in [3] definiert worden. Sie werden dort im Zusammenhang mit der automatischen Sprachübersetzung (Compiling) untersucht. Sie sind durch Verallgemeinerung von Kellerautomaten (push-down-store-automata) entstanden. Da hier von Stackautomaten Funktionen berechnet werden sollen, geben wir eine unwesentlich von [3] abweichende

Definition 2.1: Ein *Stackautomat* ist ein 7-tupel $M = (X, Y, Z, \&, \S, z_0, \delta)$ mit den Eigenschaften

(1) X, Y, Z sind nichtleere, endliche Mengen; $Z \cap (X \cup Y) = \emptyset$

(2) $\& \neq \S \wedge \& \notin X \cup Y \cup Z \wedge \S \notin X \cup Y \cup Z \wedge z_0 \in Z$.

Zur Abkürzung sei $\overline{X} = X \cup \{\&, \S\}$ und $\overline{Y} = Y \cup \{\&, \S\}$.

(3) δ ist partielle Funktion von $\overline{X} \times \overline{Y} \times Z$ in $\{-1, 0, 1\} \times Z \times \{-1, 0, 1\} \times \overline{Y}^*$, so daß für $\delta(x, y, z) = (d, z', e, w)$ gilt[2]:

(3.1) $x = \& \Rightarrow d \neq -1$,

(3.2) $x = \S \Rightarrow d \neq 1$,

(3.3) $y = \& \Rightarrow e \neq -1$,

(3.4) $y = \S \Rightarrow e \neq 1$,

(3.5) $w \neq \Lambda \Rightarrow \exists w' (w' \in Y^* \wedge w = w' \S) \wedge e = 0 \wedge y = \S$.

X heißt *Eingabealphabet*, Y *Stackalphabet*, Z *Zustandsmenge*, & *Anfangssymbol*, § *Endsymbol*, z_0 *Anfangszustand.*

Einen Stackautomaten kann man sich analog zur Turing-Maschine vorstellen als eine Maschine mit einem aus endlich vielen Zuständen bestehenden (inneren) Gedächtnis und zwei Rechenbändern. Das erste Band (Eingabeband, X-Band), das zur Eingabe der Argumente dient, kann in beiden Richtungen bewegt, aber nur gelesen werden. Das zweite Band (Stackband, Y-Band) kann auch in beiden Richtungen bewegt und gelesen werden. Außerdem kann es am rechten Ende verlängert, verkürzt und bedruckt werden. Die jeweilige Situation, in der sich ein Stackautomat befindet, wird durch eine *Konfiguration* (z, u, w) angegeben, wobei $z \in Z$, $u = \& u_1' u_2 \S$ oder $u = \& u_1 \S'$ mit $u_1, u_2 \in X^*$ und $w = \& w_1' w_2 \S$ oder $w = \& w_1 \S'$ mit $w_1, w_2 \in Y^*$ ist. „′“ kennzeichnet das momentan betrachtete Feld. Das erste Feld (von links nach rechts gezählt) trägt immer das Zeichen &,

---

[2] A^* bezeichnet die Menge aller Wörter über dem Alphabet A (freie Halbgruppe über A), $\emptyset$ leere Menge, Λ leeres Wort.

das letzte immer §. Die Funktion δ gibt das Verhalten des Automaten M an. Betrachtet z. B. M im Zustand z das Symbol x auf dem Eingabeband, das Symbol y auf dem Stackband und ist $\delta(x, y, z) = (d, \tilde{z}, e, w)$, so geht er auf dem Eingabeband d Felder nach rechts (für $d = -1$ also ein Feld nach links) und auf dem Stackband e Felder nach rechts und falls $w \neq \Lambda$ ist, löscht er § und das links von § stehende Symbol (falls dies von & verschieden ist) auf dem Stackband und schreibt dafür w hin. Anschließend geht M in den Zustand $\tilde{z}$ über. Für $w \neq \Lambda$ ist § immer der letzte Buchstabe von w. Ist $w = §$ und das Stackband leer (= & §), so stoppt der Automat, weil keine Folgekonfiguration definiert ist. Dies alles wird formal gefaßt durch die *Ableitbarkeit* von Konfigurationen.

Definition 2.2: Seien

$$K = (z, x_0 \ldots x_i\,'x_{i+1} \ldots x_n, y_0 \ldots y_j\,'y_{j+1} \ldots y_m) \quad \text{und}$$
$$\tilde{K} = (\tilde{z}, \tilde{x}_0 \ldots \tilde{x}_{\tilde{\imath}}\,'\tilde{x}_{\tilde{\imath}+1} \ldots \tilde{x}_{\tilde{n}}, \tilde{y}_0 \ldots \tilde{y}_{\tilde{\jmath}}\,'\tilde{y}_{\tilde{\jmath}+1} \ldots \tilde{y}_{\tilde{m}})$$

Konfigurationen zu M. Dann definieren wir
$K \vdash_{\overline{M}} \tilde{K}$ (gesprochen: Im Automaten M ist $\tilde{K}$ Folgekonfiguration von K): $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\exists d\, \exists e (\delta(x_i, y_j, z) = (d, \tilde{z}, e, \Lambda) \wedge \tilde{n} = n \wedge \tilde{m} = m \wedge \tilde{\imath} = i + d \\
&\wedge \tilde{\jmath} = j + e \wedge \forall i (i \leqq n \Rightarrow \tilde{x}_i = x_i) \wedge \forall j (j \leqq m \Rightarrow \tilde{y}_j = y_j)) \\
&\vee \exists d\, \exists w (\delta(x_i, y_j, z) = (d, \tilde{z}, 0, w§) \wedge \tilde{n} = n \wedge \tilde{m} = m - 1 + l(w) \\
&\wedge \tilde{\imath} = i + d \wedge j = m \wedge y_j = § \wedge \tilde{\jmath} = \tilde{m} \wedge \forall i (i \leqq n \Rightarrow \tilde{x}_i = x_i) \\
&\wedge \forall j (j < m - 1 \Rightarrow \tilde{y}_j = y_j) \wedge (m > 1 \Rightarrow w = \tilde{y}_{m-1} \ldots \tilde{y}_{m+l(w)-2}) \\
&\wedge \big(m = 1 \Rightarrow \exists y (w = y \tilde{y}_m \ldots \tilde{y}_{m+l(w)-2}) \vee \tilde{y}_{m-1} = \&)\big).
\end{aligned}$$

$l(w)$ ist dabei die Anzahl der Buchstaben des Wortes w.

Die Relation $\vdash_{\overline{M}}$ beschreibt vollständig die atomaren Schritte des Automaten M. Durch die Bedingungen (3.1) bis (3.4) aus Definition 2.1 wird sichergestellt, daß der Automat aus Eingabeband und Stackband nicht hinauslaufen kann. (3.5) sichert, daß nur am Ende des Stackbandes geschrieben werden kann.

Definition 2.3: Seien $K, \tilde{K}$ zwei Konfigurationen zu M. Dann heißt $\tilde{K}$ aus K *ableitbar* (geschrieben $K \Vdash_{\overline{M}} \tilde{K}$) genau dann, wenn es eine endliche Folge $(K_i)_{i \leqq n}$ von Konfigurationen gibt mit $K = K_0 \wedge \forall i (i < n \Rightarrow K_i \vdash_{\overline{M}} K_{i+1}) \wedge K_n = \tilde{K}$.

Die Stackberechenbarkeit definiere ich nun in Analogie zur Turing-Berechenbarkeit, wie sie Davis in [1] angegeben hat. Wir verstehen unter einer *Endkonfiguration* eine Konfiguration, zu der es keine Folgekonfiguration gibt und verschlüsseln natürliche Zahlen x und n-tupel natürlicher Zahlen $\mathfrak{x}^{(n)}$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ durch

$$\bar{x} := 1^{x+1} = \underbrace{11 \ldots 1}_{x+1} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{x}^{(n)}} = \overline{(x_1, \ldots, x_n)} := \bar{x}_1 0 \bar{x}_2 0 \ldots \bar{x}_n$$

Da es zu einer Konfiguration K höchstens eine aus K ableitbare Endkonfiguration gibt, sind folgende Definitionen sinnvoll.

Definition 2.4: Jedem Stackautomaten M mit $X = \{0, 1\}$ und $2 \in Y$ werden partielle Funktionen $f_M^{(n)}$ mit Definitionsbereich $D(f_M^{(n)}) \subset \mathbb{N}^n$ und Werten in $\mathbb{N}$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$) zugeordnet.

a) $D(f_M^{(n)}) := \{\mathfrak{x}^{(n)} | \exists K ((z_0, \&' \overline{\mathfrak{x}^{(n)}} \S, \& \S') \Vdash_{\overline{M}} K \wedge K$ ist Endkonfiguration zu $M)\}$

b) Sei $\mathfrak{x}^{(n)} \in D(f_M^{(n)})$ und $K = (a, u, w)$ die Endkonfiguration mit

$$(z_0, \&' \overline{\mathfrak{x}^{(n)}} \S, \& \S') \Vdash_{\overline{M}} K .$$

Dann ist $f_M^{(n)}(\mathfrak{x}^{(n)}) := l_2(w)$. $l_2(w)$ ist die Anzahl der in w vorkommenden Zweien. Für $\mathfrak{x}^{(n)} \notin D(f_M^{(n)})$ bleibt $f_M^{(n)}(\mathfrak{x}^{(n)})$ undefiniert.

Definition 2.5: Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^n$ in $\mathbb{N}$ heißt *stackberechenbar* genau dann, wenn es einen Stackautomaten M gibt mit $f_M^{(n)} = f$.

3. Elementarmaschinen und Kopplung

Es ist nun möglich, genau wie bei Turing-Maschinen, jeden Stackautomaten aus einigen wenigen sehr einfachen Stackautomaten zusammenzusetzen. Zunächst werde ich diese *Elementarmaschinen* angeben.

a) Die *Rechts-X-Maschine* (rx) wird definiert durch

$rx := (X, Y, \{z_0, a\}, \&, \S, z_0, \delta_{rx})$, wobei

$$\delta_{rx}(x, y, z) := \begin{cases} (1, a, 0, \Lambda) , & \text{wenn } x \neq \S \wedge z = z_0 , \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

rx rückt den Kopf des X-Bandes um ein Feld nach rechts, wenn nicht die rechte Endmarke betrachtet wird. Genau genommen, gibt es zu jedem Alphabetpaar X, Y eine solche Maschine. Da diese Abhängigkeit aber unerheblich für das Verhalten der Maschine ist, wird dies nicht mit in die Bezeichnung aufgenommen. Welche Alphabete vorliegen, ist im speziellen Fall immer durch den Zusammenhang gegeben. Entsprechendes gilt auch für alle anderen Elementarmaschinen.

b) Die *Links-X-Maschine* (lx), *Rechts-Y-Maschine* (ry), *Links-Y-Maschine* (ly) werden analog zu rx definiert.

Mit diesen Maschinen lassen sich beide Bänder um je ein Feld nach links oder rechts verschieben. Mit den beiden folgenden lassen sich Prüfungen ausführen.

c) Die *Prüf-X-Maschine* (px) wird definiert durch

$px := (X, Y, \{z_0\} \cup \{a_x | x \in \overline{X}\}, \&, \S, z_0, \delta_{px})$ mit

$$\delta_{px}(x, y, z) := \begin{cases} (0, a_x, 0, \Lambda) , & \text{wenn } z = z_0 , \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

Analog wird die *Prüf-Y-Maschine* (py) definiert.

d) Weiter brauchen wir noch zwei Maschinen (w), wobei $w = \Lambda$ (*Löschmaschine*) oder $w = y_1 y_2 (y_1, y_2 \in Y$, *Schreibmaschine*) ist.

$(w) := (X,\ Y, \{z_0, a\}, \&, \S, z_0, \delta_{(w)})$ mit

$$\delta_{(w)}(x, y, z) := \begin{cases} (0, z_0, 1, \Lambda)\,, & \text{wenn} \quad y \neq \S \wedge z = z_0\,, \\ (0, a, 0, w\S)\,, & \text{wenn} \quad y = \S \wedge z = z_0\,, \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

Diese Maschinen laufen also zum Ende des Stackbandes, lassen dabei das Eingabeband unverändert und verändern das Stackband (falls es nicht leer ist) von $\& w_1 y \S$ zu $\& w_1 w \S$ für beliebiges $y \in Y, w_1 \in Y^*$. Ist das Stackband leer (also gleich $\& \S$) und $w = \Lambda$, so stoppt die Maschine, da es keine Folgekonfiguration gibt (vgl. Definition 2.2). Für $w = y_1 y_2$ wird das Stackband zu $\& y_2 \S$.

Ganz entsprechend wie bei Turing-Maschinen kann man nun den Begriff der Kopplung definieren. Man erhält dabei eine Maschine M aus einer endlichen Folge von Maschinen M_i auf folgende Weise. Zunächst werden alle Zustände der Maschinen M_i so umbenannt, daß die Zustandsmengen Z_i paarweise disjunkt sind. Durch eine Kopplungsfunktion k werden dann gewisse Ausgänge mit Anfangszuständen (i.A. anderer) Maschinen identifiziert. Dabei heißt a Ausgang von M_i, wenn die zugehörige Überführungsfunktion δ_i für kein Tripel der Form (x, y, a) definiert ist. Schießlich sei $z_{0,M} = z_{0,1}$ und $\delta_M = \bigcup_i \delta_{M_i}$. Zu jedem Stackautomaten gibt es einen aus den oben definierten Elementarmaschinen gekoppelten Automaten mit gleicher Leistungsfähigkeit.

4. Hilfsmaschinen

Wir definieren einige Hilfsmaschinen, die im nächsten Abschnitt benötigt werden.
a) $XL\&$ ist eine Maschine, die den Kopf des X-Bandes auf das Anfangssymbol bringt. Sie entsteht durch Kopplung aus $M_1 = px$ und $M_2 = lx$ auf folgende Weise: Seien $z_{0,1}, z_{0,2}$ die Anfangszustände von M_1, M_2, a_2 der Ausgang von M_2, $\{a_{x,1} | x \in X\}$ die Menge der Ausgänge von $M_1, k(a_2) = z_{0,1}, k(a_{x,1}) = z_{0,2}$ für $x \neq \&$, $k(a_{\&,1})$ undefiniert. Alles für die Kopplung wesentliche ist schon aus dem folgenden Diagramm zu erkennen. Bei späteren Definitionen durch Kopplung werden nur noch die Diagramme angegeben, die bis auf die Bezeichnung der Zustände die gekoppelte Maschine eindeutig festlegen.

XL&:

$$\begin{tikzcd} z_0 \arrow[r] & px \arrow[r, "\neq\&"'] \arrow[d, "\&"'] & lx \arrow[l, bend right] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Entsprechend definiert man:

$XR\S$ („gehe auf dem X-Band nach *r*echts bis zum Endsymbol §“),

$XR0$ („gehe auf dem X-Band nach *r*echts bis zur ersten Null“),

$YL0$ („gehe auf dem Y-Band nach *l*inks bis zur ersten Null“),

$YR\S$ („gehe auf dem Y-Band ans *r*echte Ende“).

b) Manchmal ist es unerwünscht, daß bei einem Schreibbefehl das vor dem Endsymbol stehende Symbol gelöscht wird. Das läßt sich vermeiden durch die Maschine $S(y)$, die am Ende des Stackbandes das Symbol $y(\in Y)$ anhängt. Für $Y = \{b_1, \ldots, b_m\}$ wird $S(y)$ definiert durch das folgende Diagramm:

$S(y)$:

$$\begin{tikzcd} & & & & (yy) \arrow[dr] & \\ z_0 \arrow[r] & YR\S \arrow[r] & ly \arrow[r] & py \arrow[ur, "\&"] \arrow[r, "b_1"'] \arrow[dr, "b_m"'] & (b_1 y) \arrow[r] & @ \\ & & & & \cdots & \\ & & & & (b_m y) \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

c) Zur Übertragung von Größen vom X-Band auf das Y-Band und umgekehrt werden die folgenden Maschinen verwendet.

$XLxS(y)$ $(x \in X \cup \{\&\}, y \in Y)$:

$$\begin{tikzcd} z_0 \arrow[r] & px \arrow[r, "\neq x"'] \arrow[d, "x"'] & lx \arrow[r] & S(y) \arrow[ll, bend right] \\ & @ & & \end{tikzcd}$$

$YL\{2, \&\}rx$:

$$\begin{tikzcd} z_0 \arrow[r] & py \arrow[r, "{\neq 2, \neq \&}"'] \arrow[d, "{2, \&}"'] & ly \arrow[r] & rx \arrow[ll, bend right] \\ & @ & & \end{tikzcd}$$

$XLxS(y)$ geht auf dem X-Band nach links bis ein x gefunden wird und fügt bei jedem Schritt auf dem Y-Band ein y an.

$YL\{2, \&\}rx$ geht auf dem Y-Band nach links bis 2 oder & gefunden wird und bei jedem Schritt auf dem X-Band ein Feld nach rechts (falls dies wegen Überschreitung des rechten Endes nicht möglich sein sollte, stoppt die Maschine).

5. Stackberechenbarkeit von Summe, Produkt und Potenz

Nachdem wir nun Elementarmaschinen, Hilfsautomaten und deren Verknüpfung durch Kopplung zur Verfügung haben, lassen sich leicht Beispiele stackberechenbarer Funktionen angeben. Wir wollen die Berechnung so normieren, daß die in Definition 2.4 auftretende Endkonfiguration K die Gestalt $(a,\ \&'\ u\ \S,\ \&\ w\ \S')$ hat. Am Ende der Berechnung wird also das Anfangssymbol auf dem X-Band und das Endsymbol auf dem Y-Band betrachtet.

Als erstes geben wir eine Additionsmaschine an, d.h. einen Stackautomaten, der die Summe $x + y$ für beliebige natürliche Zahlen x, y berechnet.

Sum:

$$z_0 \to XR\S \to z_1 \to lx^4 \to z_2 \to XL\&S(2) \to a$$

Dabei ist lx^4 Abkürzung für $lx \to lx \to lx \to lx$. Wir geben eine Folge von Konfigurationen an, die in der Berechnung vorkommen, wenn $y \geqq 3$ ist.

$$(z_0,\ \&'\ \bar{x}0\ \bar{y}\S,\ \&\S') \Vdash_{\overline{RX\S}} (z_1,\ \&\bar{x}\ 0\bar{y}\ \S',\ \&\S') =: K_1\ ,$$

$$K_1 \Vdash_{\overline{lx^4}} (z_2,\ \&\ \bar{x}0\ 1^{y-3}1'\ 111\ \S,\ \&\S') =: K_2\ .$$

Berücksichtigt man $l(1^{x+1}\ 01^{y-2}) = x + y$, so folgt weiter

$$K_2 \Vdash_{\overline{XL\&S(2)}} (a,\ \&'\ \bar{x}0\ \bar{y}\S,\ \&\ 2^{x+y}\ \S')\ .$$

Man kann sich leicht überlegen, daß auch für $y < 3$ das richtige Resultat geliefert wird.
Einen Produktautomaten anzugeben ist schon schwieriger. Wir definieren den Stackautomaten

Prod:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
z_0 \arrow[r] & rx^2 \arrow[r] & px \arrow[r, "\neq 0"] \arrow[d, "(x=0)"', "0"] & XR0 \arrow[r] & rx^2 \arrow[r] & px \arrow[r, "\neq \S"] \arrow[d, "(y=0)"', "\S"] & lx^2 \arrow[r] & S(0) \arrow[r] & z_1 \\
 & & lx^2 \to a & & & XL\& \to a & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
z_1 \arrow[r] & lx^2 \arrow[r] & XL\&S(2) \arrow[r] & YL0 \arrow[r] & XR0 \arrow[r] & z_2 \arrow[r] & YL\{2,\&\}rx \arrow[r, "{2,\&}"] & rx^2 \arrow[dlllllll, rounded corners] \\
px \arrow[r, "\neq \S"] \arrow[d, "\S"] & z_3 \arrow[r] & lx \arrow[r] & XL0S(0) \arrow[r] & z_1 & & & \\
YR\S \to XL\& \to a & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Es ist nun zu zeigen, daß der Automat *Prod* die Produktfunktion berechnet. Für $x = 0$ oder $y = 0$ prüft die Maschine nur und läßt das Stackband leer. Für $x \cdot y \neq 0$ geben wir wieder eine bei der Berechnung durchlaufene Konfigurationenfolge an:

$$\begin{aligned}
&(z_0,\ \&'\ \bar{x}0\ \bar{y}\S,\ \&\S') \Vdash (z_1,\ \&\ \bar{x}0'\ \bar{y}\S,\ \&\ 0\S') \\
\Vdash\ &(z_2,\ \&\ \bar{x}0'\ \bar{y}\S,\ \&0'\ 2^x\S) \Vdash (z_3,\ \&\ \bar{x}0111'\ 1^{y-2}\ \S,\ \&'\ 02^x\ \S) \quad (\text{wenn } y \geqq 2) \\
\Vdash\ &(z_1,\ \&\ \bar{x}0'\ \bar{y}\S,\ \&\ 02^x\ 00\S') = K_2
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion über y kann man nun zeigen:

$$K_2 \Vdash (z_1, \& \bar{x}0' \, \bar{y}\S, \&02^x \, 002^x \, 0002^x \ldots 2^x \, 0^y \, \S')$$
$$\Vdash (z_2, \& \bar{x}0' \, \bar{y}\S, \& \, 02^x \, 002^x \ldots 2^x \, 0^{y-1} \, 2^x \, 0^{y-1} \, 0' \, 2^x \, \S)$$
$$\Vdash (a, \&' \, \bar{x}0 \, \bar{y}\S, \& \, 02^x \, 002^x \ldots 0^y \, 2^x \, \S')$$

Wie man sieht, ist nun die Anzahl der Zweien genau gleich $x \cdot y$.

Ein Stackautomat, der die Potenzfunktion berechnet, ist natürlich wesentlich komplizierter als *Prod.* Es soll deshalb die Konstruktion hier nur in ihren wesentlichen Teilen angedeutet werden. Ein Teilautomat *H1* prüft zunächst, ob einer der trivialen Fälle $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ oder $y = 1$ vorliegt und gibt in diesen Fällen sofort das Resultat an. Für $x \geqq 2$ und $y \geqq 2$ werden fortgesetzt Blöcke der Form $2^x \, 0^i \, 1^j \, 0$ auf das Stackband geschrieben. Die 2^x-Blöcke dienen zur Darstellung des Funktionswerts. i, j dienen als Zähler, um festzustellen, wieviele Blöcke schon geschrieben wurden (vgl. $2^x \, 0^i$ bei der Berechnung des Produkts). Dabei gilt stets $0 < i \leqq y$ und $0 < j \leqq x$. Ein Wort $0^i \, 1^j \, 0$ bezeichnen wir als Index (i, j). Wir beschreiben die Leistung einiger Hilfsmaschinen. Da alle Hilfsmaschinen so arbeiten, daß sie ausgehend von einer Konfiguration $(z_0, \&' \, \bar{x}0 \, \bar{y}\S, \& \, w_1 \, \S')$ enden mit einer Konfiguration der Form $(a, \&' \, \bar{x}0 \, \bar{y}\S, \& \, w_2 \, \S')$, werden für die einzelnen Hilfsmaschinen nur die Veränderungen des Stackbandes und die jeweiligen Ausgänge (a_i) angegeben.

a) *H2* fügt am rechten Ende (des Stackbandes) $2^x \, 0$ an.

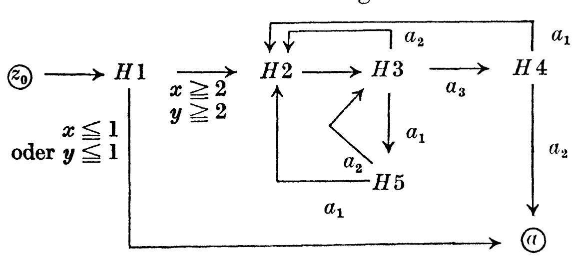
b) *H3* sucht, auf ein Band $w_1 = 2^x (i_1, j_1) \, 2^x (i_2, j_2) \, 2^x \ldots (i_n, j_n) \, 2^x \, 0^k$ angesetzt, den am weitesten rechts gelegenen Index (i_ν, j_ν) mit $i_\nu = k$. *H 3* hat drei Ausgänge:
a_1, falls $i_\nu = k$, mit Resultat $w_2 = w_1 \, 1^{j_\nu + 1} \, 0$,
a_2, falls $i_\nu > k$, mit Resultat $w_2 = w_1 \, 10$,
a_3, falls es kein i_ν mit $i_\nu \geqq k$ gibt, ohne Bandveränderung.

c) *H4* prüft, angesetzt auf $w_1 = w2^x \, 0^k$, ob $k = y$ ist. Wenn $k < y$ ist, so wird Ausgang a_1 mit Resultat $w_2 = w2^x \, 0^k \, 10$ benutzt. Im anderen Falle $(k = y)$ wird Ausgang a_2 ohne Bandveränderung benutzt.

d) *H5* prüft, angesetzt auf $w_1 = w2^x (i, j)$, ob $j = x$ ist. Für $j < x$ wird Ausgang a_1 ohne Bandveränderung, für $j = x$ wird Ausgang a_2 mit Resultat $w_2 = w2^x \, 0^{i+1}$ erreicht.

Alle diese Hilfsmaschinen kann man effektiv konstruieren. Nach folgendem Diagramm werden diese Hilfsmaschinen zusammengesetzt:

Pot:



Pot berechnet nun zu jedem Paar natürlicher Zahlen (x, y) den Wert der Potenz x^y. Um dies klar zu machen, geben wir einige markante Zwischenergebnisse, die verwendeten Hilfsmaschinen, die benutzten Ausgänge, sowie die jeweilige Anzahl Zweien an. Alle in der folgenden Tabelle steckenden Behauptungen lassen sich durch vollständige Induktion beweisen.

Band	Hilfsmaschine Ausgang	Anzahl Zweien
Λ	$H2$	0
2^x0	$H3\ a_3$	x
2^x0	$H4\ a_1$	x
2^x010	$H2$	x
2^x0102^x0	$H3\ a_1$	$2x$
2^x0102^x0110	$H5\ a_1$	$2x$
2^x0102^x0110	$H2$	$2x$
...		
$2^x0102^x0110\ldots2^x01^x0$	$H5\ a_2$	$x \cdot x$
$\underbrace{2^x0102^x0110\ldots2^x}00$	$H3\ a_3$	x^2
$w_2 :=$	$H4\ a_1$	x^2
w_20010	$H2$	x^2
w_200102^x0	$H3\ a_2$	$x^2 + x$
w_200102^x010		
...		
$w_200102^x0102^x0110\ldots2^x01^x0$	$H5\ a_2$	$x^2 + x \cdot x$
$w_20010\ w_200$	$H3\ a_1$	$2x^2$
w_20010w_200110		
...		
$\underbrace{w_20010w_200110\ldots w_200}1^x0$	$H5\ a_2$	$x \cdot x^2$
w_3000	$H3\ a_3$	x^3
w_3000	$H4\ a_1$	x^3
...		
w_y0^y	$H4\ a_2$	x^y

6. Eine andere Charakterisierung der Stackberechenbarkeit

Will man nun untersuchen, ob aus der Stackberechenbarkeit zweier Funktionen $\lambda x f(x)$, $\lambda x g(x)$ die Stackberechenbarkeit von $\lambda x f(g(x))$ folgt, so müßte man in geeigneter Weise einen Stackautomaten A_2 zur Berechnung von f hinter einen Stackautomaten A_1 zur Berechnung von g koppeln. A_1 liefert aber den Funktionswert $g(x)$ auf dem Stackband, und A_2 verlangt das Argument auf dem Eingabeband. Ein Transport von $g(x)$ vom Stack- auf das Eingabeband in der vorgeschriebenen Form ist aber unmöglich. Aus diesem Grunde wird nun ein neuer Berechenbarkeitsbegriff eingeführt. Eine Funktion f (n-stellig) heißt *B-berechenbar* genau dann, wenn es zu jeder positiven natürlichen Zahl k einen Stackautomaten B_k gibt, der angesetzt auf

$(z_0, \&' u \S, \& w_1 0 \mathfrak{x} \S')$ als Ergebnis

$(a, \&' u \S, \& w_1 0 \mathfrak{x} Q w_2 \S')$ liefert mit folgenden Eigenschaften:

u ist ein beliebiges Eingabeband mit $l(u) \geqq \frac{1}{k} \max(x_1, \ldots, x_n, 1)$, w_1 ist ein beliebiges Wort aus Y^*, $w_2 \in Y^*$, $Q \in Y$, Q kommt nicht in w_2 vor, $l_2(w_2) = f(\mathfrak{x})$.

Von der Anfangskonfiguration wird also nur vorausgesetzt, daß sie am Ende des Stackbandes das Argument $\mathfrak{x}$ enthält und ein Eingabeband hat, so daß $k \cdot l(u)$ länger als jedes Argument ist. Als Ergebnis wird nicht mehr die Gesamtanzahl der Zweien auf dem Stackband, sondern nur die Anzahl der Zweien rechts vom letzten Q gewertet. Es läßt sich nun zeigen[3], daß eine Funktion genau dann B-berechenbar ist, wenn sie stackberechenbar ist.

7. Einige Abgeschlossenheitseigenschaften

Mit Hilfe der B-Berechenbarkeit lassen sich nun einige Abgeschlossenheitseigenschaften der Klasse $\mathfrak{S}$ zeigen.

Satz: $\mathfrak{S}$ ist abgeschlossen gegenüber Variablenidentifikation.

Beweis: Sei $\lambda xy f(x, y)$ eine stackberechenbare Funktion. Dann gibt es einen Stackautomaten M_f, der, angesetzt auf das Stackband $\& w_1 0 \bar{x} 0 \bar{y} \S$, mit dem Resultat $\& w_1 0 \bar{x} 0 \bar{y} Q w_2 \S$ $(l(w_2) = f(x, y))$ stoppt. Die Funktion $\lambda x f(x, x)$ läßt sich nun in folgender Weise berechnen. Mit einer Kopiermaschine macht man aus $\& w_1 0 \bar{x} \S$ $\& w_1 0 \bar{x} Q 0 \bar{x} 0 \bar{x} \S$ und setzt dann M^Q_{fG} an. Dabei entsteht M^Q_{fG} aus M_f durch Umbenennung von Q in G (G ein im Stackalphabet von M_f nicht vorkommendes Symbol). M^Q_{fG} liefert dann das Stackband $\& w_1 0 \bar{x} Q 0 \bar{x} 0 \bar{x} G w_2 \S$ mit $l_2(w_2) = l_2(0 \bar{x} 0 \bar{x} G w_2) = f(x, x)$. Ganz entsprechend läßt sich der allgemeine Fall mit n Variablen, von denen $k (k \leqq n)$ identifiziert werden, behandeln.

Eine n-stellige Funktion entsteht durch *beschränkte Substitution* aus f (m-stellig) und $g_i (i = 1, \ldots, m)$ (g_i n-stellig), wenn $h(\mathfrak{x}) = f(g_1(\mathfrak{x}), \ldots, g_m(\mathfrak{x}))$ gilt und es ein $k (0 < k \in \mathbb{N})$ gibt mit $g_i(\mathfrak{x}) \leqq k \cdot \max(x_1, \ldots, x_n, 1)$ für alle $\mathfrak{x}$ und $i = 1, \ldots, m$. Daß die in dieser Weise eingeführte Operation nicht aus $\mathfrak{S}$ hinausführt, besagt der folgende Satz.

Satz: Entsteht h durch beschränkte Substitution aus stackberechenbaren Funktionen f, $g_i (i = 1, \ldots, m)$, so ist auch h in $\mathfrak{S}$.

Den Beweis wollen wir nur führen für einstellige Funktionen. Der allgemeine Fall ist analog. Seien also f, g stackberechenbar und $h(x) = f(g(x))$. Auf das Stackband

[3] Vgl. [7] Satz 6.4, Seite 42.

$\& w_1 0 \bar{x} \S$ setzen wir die g berechnende Maschine an, die $\& w_1 0 \bar{x} Q w_2 \S$ mit $l_2(w_2) = g(x)$ liefert. Nach Voraussetzung gibt es ein k mit $g(x) \leqq k \cdot \max(x, 1)$. Es läßt sich nun eine Maschine konstruieren, die das Stackband „säubert" und als Resultat $\& w_1 0 \bar{x} Q 0 \overline{g(x)} \S$ liefert (dabei ist die Voraussetzung $l_2(w_2) \leqq k \cdot \max(x, 1)$ wesentlich). Hierauf kann nun ein f berechnender Automat (für ein geeignetes k) M^Q_{fG} angesetzt werden mit dem Ergebnis $\& w_1 0 \bar{x} Q 0 \overline{g(x)} G w_3 \S$ mit $l_2(w_3) = f(g(x))$. Damit ist h stackberechenbar.

Eine Funktion f ($(n+1)$-stellig) entsteht durch *stack-beschränkte Rekursion* aus den Funktionen g (n-stellig) und h ($(n+2)$-stellig), wenn gilt:

$$f(\mathfrak{x}, 0) = g(\mathfrak{x}),\ f(\mathfrak{x}, y+1) = h(\mathfrak{x}, y, f(\mathfrak{x}, y)) \quad \text{und}$$
$$\exists k (0 < k \in \mathbb{N} \wedge f(\mathfrak{x}, y) \leqq k \cdot \max(x_1, \ldots, x_n, y, 1)) .$$

Satz: $\mathfrak{S}$ ist gegenüber stackbeschränkter Rekursion abgeschlossen.

Der Beweis wird mit ähnlichen Methoden wie beim vorangehenden Satz erbracht.

Auch beschränkte Summierung und beschränkter μ-Operator (wie in [4] definiert) führen aus $\mathfrak{S}$ nicht hinaus.

8. Stackberechenbarkeit von F_1 und $\mathfrak{E}^2$

Wir wollen zeigen, daß sich alle Funktionen der Klasse $\mathfrak{E}^2$ mit Stackautomaten berechnen lassen. Dies gelingt, indem wir die Berechnungen von Turing-Maschinen, deren Band eine gewisse Länge nicht überschreitet, auf Stackautomaten simulieren. Wir benutzen dazu Turing-Maschinen in der Form, wie sie Ritchie in [6] benutzt. Konfigurationen zu Turing-Maschinen (R-Konfigurationen) werden in der Form (t, z, p) angegeben, wobei t den beschriebenen Anfang des Turing-Bandes, z den augenblicklichen Zustand und p das Arbeitsfeld kennzeichnet ($p \in \mathbb{N}$ und $p \leqq l(t)$). Das Turing-Band ist als links begrenzt und rechts unendlich anzusehen. Die Felder sind von links nach rechts durchnumeriert, mit 1 beginnend. Eine Turing-Maschine T über dem Alphabet $\{0, 1, \beta\}$ *R-berechnet* die Funktion f von $D(f) = \mathbb{N}^n$ in $\mathbb{N}$ genau dann, wenn es für jedes $\mathfrak{x}$ ein p gibt, sodaß die Turing-Maschine, angesetzt auf

$$(B(x_1)\, \beta\, B(x_2)\, \beta \ldots \beta\, B(x_n), z_0, 1) ,$$

stoppt in der R-Konfiguration

$$\big(B(f(\mathfrak{x})), a, p\big) .$$

Dabei ist $B(x)$ die Binärkodierung von x, d.h.

$$B(x) = a_k \ldots a_0 \Leftrightarrow \left(x = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 2^i \wedge a_k \neq 0\right) \vee x = k = a_k = 0 .$$

Bei der Berechnung von $f(\mathfrak{x})$ wird eine R-Konfigurationenfolge $(t_i, z_i, p_i)_{i \leqq m}$ durchlaufen. Daraus ergibt sich die zur Berechnung benötigte (maximale) Bandlänge $a_{f,T}(\mathfrak{x}) := \max\limits_{i \leqq m}\big(l(t_i)\big)$. Ritchie hat nun gezeigt ([6] Lemma 3): Zu jeder

n-stelligen Funktion $f \in F_1$[4] gibt es eine Turing-Maschine T und ein k ($0 < k \in \mathbb{N}$), so daß $f(\mathfrak{x}) < 2^{k \cdot \max(\mathfrak{x}, 1)}$ und $a_{f,T}(\mathfrak{x}) < k \cdot \max(\mathfrak{x}, 1)$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathbb{N}^n$ gilt.
Jeder R-Konfiguration (t, z, p) werden Konfigurationen (von Stackautomaten) zugeordnet. Diese Stackautomaten haben das Eingabealphabet $X = \{0\}$ und ein Stackalphabet, das P und zwei Exemplare von $A = \{0, 1, \beta\}$ in der Form $\{0, 1, \beta, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{\beta}\}$ enthält. $\tilde{x}$ dient zur Kennzeichnung des von der Turing-Maschine betrachteten Symbols. Jede Konfiguration der Form $(z, \&' u \S, \& w P t_1 \tilde{x} t_2 P \S')$ heißt der R-Konfiguration $(t_1 x t_2, z, p)$ mit $l(t_1) = p - 1$ zugeordnet.

Satz: Es gibt einen Stackautomaten $Sim(T)$, der die Berechnung einer Funktion f durch eine Turing-Maschine T mit $a_{f,T}(\mathfrak{x}) < k \cdot \max(\mathfrak{x}, 1)$ simuliert. Wenn T von $(a_1 \ldots a_p \ldots a_r, z_1, p)$ zu $(b_1 \ldots b_q \ldots b_s, z_2, q)$ gelangt und $\max(\mathfrak{x}, 1) \leq l(u)$ gilt, so gelangt $\mathrm{Sim}(T)$ von $(z_1, \&' u \S, \& w_1 P a_1 \ldots \tilde{a}_p \ldots a_r P \S')$ zum Resultat $(z_2, \&' u \S, \& w_2 P b_1 \ldots \tilde{b}_q \ldots b_s P \S')$ mit gewissem w_2.

Beweis: Es ist klar, daß man sich beim Beweis auf einen Elementarschritt der Maschine T beschränken kann. Ist der Beweis für jede Art von Elementarschritt geführt, braucht man die Simulierungen der Elementarschritte nur in geeigneter Weise aneinander zu koppeln. Man konstruiert zunächst eine Kopiermaschine, die

$\& w_1 P a_1 \ldots a_{p-1} \tilde{a}_p a_{p+1} \ldots a_r P \S$ überführt in

$\& w_1 P a_1 \ldots a_{p-1} \tilde{a}_p \ldots a_r P a_1 \ldots a_{p-1} \S$.

Das ist wegen der Voraussetzung $a_{f,T}(\mathfrak{x}) < k \cdot \max(\mathfrak{x}, 1)$ und wegen der Kennzeichnung des beobachteten Feldes durch „$\sim$" möglich. Anschließend simuliert die Maschine den gewünschten Elementarschritt. Sei zum Beispiel folgender Elementarschritt zu simulieren: „Schreibe das Symbol b auf das Arbeitsfeld und gehe einen Schritt nach rechts". In diesem Fall werden die beiden nächsten Symbole $\tilde{a}_p a_{p+1}$ umgewandelt in $b \tilde{a}_{p+1}$. Anschließend wird wieder die Kopiermaschine geschaltet, die den Rest $a_{p+2} \ldots a_r P$ unverändert kopiert. Nach der Simulierung lautet das Stackband also:

$$\& w_1 P a_1 \ldots a_{p-1} \tilde{a}_p a_{p+1} \ldots a_r P a_1 \ldots a_{p-1} b \tilde{a}_{p+1} \ldots a_r P \S \,.$$

Auf diese etwas aufwendige Weise — bei jedem Elementarschritt wird eine neue Kopie des simulierten Bandes angefertigt — kann das Schreiben im Innern des Stackbandes vermieden werden.

Wegen der unterschiedlichen Kodierung der natürlichen Zahlen müssen wir noch zeigen, daß es Stackautomaten gibt, die „Strichzahlen" in „Binärzahlen" umwandeln und umgekehrt. Mit Hilfe einer Maschine kann man beruhend auf der iterierten Division durch 2 aus einer Strichzahl $1^{x+1} = \bar{x}$ die Binärdarstellung $B(x)$ gewinnen, wobei man gleich die für die Simulierung nötige Anfangskonfiguration herstellt. Schließlich muß man noch aus dem Ergebnis $B(f(\mathfrak{x}))$ wieder eine Strichzahl machen. Aber auch dafür gibt es eine Maschine, die man

[4] F_1 ist definiert als die Klasse aller (totalen) rekursiven Funktionen f, für die es eine Turing-Maschine T und eine mit endlichen Automaten berechenbare Funktion g gibt mit $a_{f,T}(\mathfrak{x}) < g(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathbb{N}^n$.

effektiv angeben kann. Sie hat ja im wesentlichen nur die Aufgabe, etliche Potenzen 2^i auszurechnen, wobei wegen $l(B(f(\mathfrak{x}))) < k \cdot \max(\mathfrak{x}, 1)$ keine Schwierigkeiten auftreten.

Mit dem Lemma von Ritchie erhalten wir damit den

Satz: Jede Funktion $f \in F_1$ ist stackberechenbar, also kurz $F_1 \subset S$.

Beweis: Sei f eine n-stellige Funktion aus F_1, dann gibt es nach dem Lemma von Ritchie eine Turing-Maschine T und ein k $(0 < k \in \mathbb{N})$ mit $a_{f,T}(\mathfrak{x}) < k \cdot \max(\mathfrak{x}, 1)$. Daraus folgt die Existenz der Simulierungsmaschine $Sim(T)$, sowie die Existenz der benötigten Umcodiermaschinen. Aus diesen läßt sich nun ein Stackautomat M_f koppeln, der eine B-Berechnung von f liefert.
Wenn man das Ergebnis $\mathfrak{E}^2 \subsetneqq F_1$ von Ritchie ([6] Theorem 4) benutzt, folgt hieraus insbesondere $\mathfrak{E}^2 \subsetneqq \mathfrak{S}$.
Daß F_1 echte Teilklasse von $\mathfrak{S}$ ist, folgt daraus, daß die Potenzfunktion stackberechenbar ist, aber nicht in F_1 liegt.

9. Stackberechenbarkeit und Rekursivität

Da man in naheliegender Weise Stackautomaten auf Turing-Maschinen simulieren kann, gilt:

Satz: Jede stackberechenbare Funktion ist partiell-rekursiv.

Wir wollen nun zeigen, daß $\mathfrak{S}$ eine echte Teilklasse von $\mathfrak{R}$ ist. Ginsburg hat in [3] bewiesen, daß jede von einem Stackautomaten (sogar bei Erweiterung auf nichtdeterministische Stackautomaten) angenommene Bandmenge entscheidbar ist. Hieraus folgt nun, daß der Definitionsbereich einer stackberechenbaren (partiellen) Funktion entscheidbar sein muß. Damit sind also alle Funktionen, deren Definitionsbereich unentscheidbar ist, nicht stackberechenbar. Ginsburg hat in [3] auch die Existenz einer rekursiven Menge nachgewiesen, die von keinem Stackautomaten angenommen wird. Daraus läßt sich folgern: Die (auf ganz $\mathbb{N}$ definierte) charakteristische Funktion dieser Menge ist nicht stackberechenbar.

10. Nichtlöschende Stackautomaten

Ein Stackautomat heißt nichtlöschend (nl), wenn er durch Kopplung von Elementarmaschinen rx, lx, ry, ly, px, py, $S(y)$ entsteht. Er hat also im Unterschied zu normalen Stackautomaten nicht die Fähigkeit, sein Stackband durch Löschen am rechten Ende zu verkürzen. Die in Abschnitt 5 angegebenen Automaten zur Berechnung von Summe und Produkt sind nichtlöschend, wie man leicht nachprüfen kann. Der Potenz-Automat löscht zwar, aber durch geringfügige Änderungen in $H3$ und $H5$ kann das Löschen vermieden werden. Durch leichte Modifizierung der Beweise kann man auch alle weiteren Resultate für nl-Stackautomaten beweisen. Insbesondere sind die verschiedenen Berechenbarkeitsbegriffe für nl-Stackautomaten äquivalent. Die Klasse $\mathfrak{S}_{nl}$ der mit nl-Stackautomaten berechenbaren Funktionen besitzt alle in Abschnitt 7 für $\mathfrak{S}$

angegebenen Abgeschlossenheitseigenschaften. In Abschnitt 8 wurde gezeigt: $F_1 \subsetneqq \mathfrak{S}$. Es gilt sogar: $F_1 \subsetneqq \mathfrak{S}_{nl}$. Trivialerweise gilt: $\mathfrak{S}_{nl} \subset \mathfrak{S}$. Ob diese Inklusion echt ist, ist noch ungelöst.

LITERATUR

[1] M. Davis: Computability and Unsolvability. McGraw-Hill, New York — Toronto — London (1958).

[2] P. C. Fischer: Turing-Machines with restricted Memory Access. Information and Control **9** (1966) pp. 364—379.

[3] S. Ginsburg, S. A. Greibach, M. A. Harrison: Stack Automata and Compiling. JACM, Vol. 14, No. 1 (1967).

[4] A. Grzegorczyk: Some Classes of Recursive Functions. Rozprawy Matematyczne IV, Warszawa (1953).

[5] D. L. Kreider, R. W. Ritchie: A Universal Two-way Automaton. Archiv f. math. Logik u. Grundlagenforschung, 9/3—4 (1966) Seiten 49—58.

[6] R. W. Ritchie: Classes of Predictably Computable Functions. Transact. of the Am. Math. Soc., 106 (1963).

[7] H. Müller: Über die mit Stack-Automaten berechenbaren Funktionen. Dissertation, Techn. Universität Hannover (1968).

Bemerkung bei der Korrektur: (15. 4. 70)

Die am Schluß von Abschnitt 1 aufgeworfene Frage konnte ich inzwischen beantworten: Alle stackberechenbaren Funktionen sind elementar.

Arch. math. Logik 13 (1970), 74—90.

EIN BEZEICHNUNGSSYSTEM FÜR ORDINALZAHLEN*

Von HELMUT PFEIFFER in Hannover

Herrn Prof. Dr. TH. KALUZA zum 60. Geburtstag gewidmet

In der vorliegenden Arbeit wird ein konstruktives Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen definiert. Dazu wird zunächst ein Operator W erklärt, der jeder wohlgeordneten Menge X konstruktiv eine wohlgeordnete Menge $W(X)$ zuordnet, wobei X einem echten Abschnitt von $W(X)$ ähnlich ist. W wird in Verallgemeinerung eines Bezeichnungssystems von Schütte erklärt [2]. Um zu veranschaulichen, in welcher Weise $W(X)$ aus X entsteht, wird gezeigt, daß $W(\mathbb{N})$ gleich der in [1] definierten Menge Σ ist.
Schließlich wird mit Hilfe von W eine Folge W_α von Bezeichnungssystemen erklärt für alle α, die kleiner als die kleinste kritische Zahl einer gewissen Normalfunktion sind. Diese Zahl ist auch die Grenzzahl des beschriebenen Darstellungsverfahrens für Ordinalzahlen.

§ 1. Definition von $W(X)$

Sei X eine wohlgeordnete Menge bezüglich der Relation $<$ und 0 ihr kleinstes Element. Als Variablen für Elemente aus X benützen wir kleine lateinische Buchstaben vom Ende des Alphabets: x, y, z, t, u, v, w.

11. Definition der Terme von $W(X)$

(1.1) *Jedes Element von X ist ein Term von $W(X)$.*

(1.2) *Sind a, b Terme von $W(X)$, so auch (a, b) und $a \# b$.*

Kleine lateinische Buchstaben vom Anfang des Alphabets bezeichnen Terme aus $W(X)$, kleine lateinische Buchstaben aus der Mitte des Alphabets dienen als Variablen für natürliche Zahlen.
Terme, die nicht die Form $a \# b$ haben, heißen *Hauptterme*. Die Menge der Hauptterme sei H. Ist $a \in W(X) - H$, so gibt es p Terme $a_1, \ldots, a_p \in H$ mit $1 < p$ und $a = a_1 \# \cdots \# a_p$. Die Terme $a_1, \ldots, a_p$ heißen *Komponenten* von a.

12. Definition des Grades eines Terms a

(2.1) $\forall x (x \in X \Rightarrow Gx := 0)$.

(2.2) $G(a, b) := Ga + Gb + 1$.

(2.3) $G(a_1 \# \cdots \# a_p) := Ga_1 + \cdots + Ga_p + 1$ *für* $1 < p$ *und* $\{a_1, \ldots, a_p\} \subset H$.

* Eingegangen am 15. 2. 69.

13. Definition der Gleichheit von Termen

(3.1) $\forall x (x \in X \Rightarrow x = x)$.

(3.2) $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \Rightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

(3.3) *Gilt* $\{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p\} \subset H$, $1 < p$ *und ist* π *eine Permutation der Zahlen* $\{1, \ldots, p\}$, *so daß für alle* i *mit* $i \in \{1, \ldots, p\}$ $a_i = b_{\pi i}$ *gilt, so sei* $a_1 \# \cdots \# a_p = b_1 \# \cdots \# b_p$.

Daraus folgt: $a \# b = b \# a$,

$$a = b \Leftrightarrow a \# c = b \# c .$$

Die Gleichheit der Terme ist eine mit den Operationen (,) und $\#$ verträgliche Äquivalenzrelation.

14. Definition der Stufe *Sa* eines Terms *a*

(4.1) $\forall x (x \in X \Rightarrow Sx := x)$.

(4.2) $S(a, b) := Sb$.

(4.3) $1 < p \wedge \{a_1, \ldots, a_p\} \subset H \Rightarrow S(a_1 \# \cdots \# a_p) := \max\limits_{1 \leqq j \leqq p} S a_j$.

15. Definition der *x*-Koeffizientenmengen $K_x a$ eines Terms *a*

(5.1) $x \in X \wedge a \in H \wedge Sa \leqq x \Rightarrow K_x a := \{a\}$.

(5.2) $\{a, x\} \subset X \wedge x < a \Rightarrow K_x a := \emptyset$.

(5.3) $x \in X \wedge a = (a_1, a_2) \wedge Sa > x \Rightarrow K_x a := K_x a_1 \cup K_x a_2$.

(5.4) $x \in X \wedge \{a_1, \ldots, a_p\} \subset H \wedge 1 < p \Rightarrow K_x(a_1 \# \cdots \# a_p) := K_x a_1 \cup \cdots \cup K_x a_p$.

$K_x a$ ist eine höchstens endliche Teilmenge von H. Ist A eine Teilmenge von $W(X)$, so sei $K_x A := \bigcup\limits_{a \in A} K_x a$.

Lemma 1. (1) $c \in K_x a \Rightarrow Gc \leqq Ga$.

(2) $c \in K_x a \Rightarrow Sc \leqq \min\{x, Sa\}$.

(3) $x \leqq y \wedge \{x, y\} \subset X \Rightarrow K_x a = K_x K_y a$.

Beweise durch Induktion über Ga.

Auch wenn X eine unendliche Menge ist, sind für festes a nur endlich viele der Mengen $K_x a$, $x \in X$ verschieden. Dies zu präzisieren ist der Sinn folgender Definition:

16. Definition der Mengen *Ya*

(6.1) $x \in X \Rightarrow Yx := \{0, x\}$.

(6.2) $Y(a, b) := Yb \cup \{x | x \in Ya \wedge x < Sb\}$.

(6.3) $Y(a_1 \# \cdots \# a_p) := Ya_1 \cup \cdots \cup Ya_p$ für $\{a_1, \ldots, a_p\} \subset H$ und $p > 1$.

Ya ist eine endliche Teilmenge von X, die Sa als größtes Element enthält.

Lemma 2. *Sei $x \in X$ und x_0 das größte Element aus Ya mit $x_0 \leqq x$. Dann gilt $K_x a = K_{x_0} a$.*

Beweis durch Induktion über Ga.

Lemma 3. (1) $x \in Ya \Leftrightarrow x = 0 \vee \exists c(c \in K_x a \wedge Sc = x)$

(2) $x < y \Leftrightarrow (x \in Ya \Rightarrow x \in Y(a, y))$

Beweis von (1) durch Induktion über Ga, von (2) durch Ausrechnen unter Verwendung von (1).

17. Definition der <-Relation auf $W(X)$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Ist $a \in W(X)$, $x \in X$, so sei

$$(*) \quad a^x := \begin{cases} a & \text{für } x \geqq Sa \\ (a, x) & \text{für } x < Sa\,. \end{cases}$$

Ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von X, so sei $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ diese Menge, bezüglich der <-Relation absteigend geordnet: $x_i > x_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Ferner verabreden wir folgende Abkürzung: Für eine endliche Teilmenge A von $W(X)$ bedeute $A < b$, daß für alle $a \in A$ $a < b$ gilt, und es bedeute $b \leqq A$, daß es ein a aus A mit $b \leqq a$ gibt. Dann erklären wir die <-Relation auf $W(X)$ induktiv wie folgt:

(7.1) $a < b$ *für* $\{a, b\} \subset H$ *und* $Sa < Sb$,

(7.2) $x < (a, b)$ *für* $x \in X$ *und* $x = Sb$,

(7.3) $a = (a_1, a_2) < b = (b_1, b_2)$, *wenn* $Sa = Sb =: x$ *gilt und mit* $Ya_1 \cup Yb_1 = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$,

$$(**) \quad z := \begin{cases} z_1, & \text{falls } x \geqq z_1 \text{ ist,} \\ z_k, & \text{falls } z_{k+1} \leqq x < z_k \text{ ist,} \end{cases}$$

(1) $[a_1^z < b_1^z \vee (a_1^z = b_1^z \wedge Ga_1 < Gb_1)] \wedge K_x a_1 \cup \{a_2\} < b$ *oder*

(2) $a_1 = b_1 \wedge a_2 < b_2$ *oder*

(3) $[b_1^z < a_1^z \vee (a_1^z = b_1^z \wedge Gb_1 < Ga_1)] \wedge a \leqq K_x b_1 \cup \{b_2\}$ ist.

(7.4) $a_1 \# \cdots \# a_p < b_1 \# \cdots \# b_q$ *für* $\{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q\} \subset H$ *und* $p + q > 2$, *wenn es eine Abbildung f von $P := \{1, \ldots, p\}$ in $\{1, \ldots, q\}$ gibt mit*

(1) $a_i \leqq b_{fi}$ *für alle* $i \in P$ *und*

(2) $i \neq j \wedge fi = fj \Rightarrow a_i < b_{fi}$ *für alle* $i, j \in P$ *und*

(3) $p = q \Rightarrow \exists k(k \in P \wedge a_k < b_{fk})$.

Beispiele: Sind $\{0, 1, 2, 3\} \subset X$, so gilt $(2,0) < ((3,1), 0)$, denn es ist $Y2 \cup Y(3, 1) = \langle 2, 1, 0 \rangle$, mithin $z = 1$ und $2^1 = (2, 1) < (3, 1) = (3, 1)^1$. Das läßt darauf hoffen, daß die im System $\bigcup_{N < \omega} \Sigma(N)$ aus [2] beschriebene absteigende Folge $\lambda n\, \Theta[n, k]$

im System $W(X)$ nicht auftritt. Weiter gilt etwa $(3, 0) < ((3, 1), 0)$: $Y3 \cup Y(3, 1) = \langle 3, 1, 0\rangle$, also ist $z = 1$ und $3^1 = (3, 1) = (3, 1)^1$, $G3 = 0 < G(3, 1) = 1$.
Bemerkung: In (7.3) wird, wenn $Ga_1 + Gb_1 + 2 = Ga + Gb$ ist, $a < b$ durch Induktion wie folgt definiert: Für $x \geqq z_1$ ist nach $(*)$ $a_1^z = a_1$, $b_1^z = b_1$, also nach I.V. über $Ga + Gb$ die $<$-Relation für a_1^z und b_1^z bereits erklärt und die $<$-Relation für (a_1, x) und (b_1, x) angebbar. Weiter definiert man induktiv über $\{1, \ldots, n-1\}$ die $<$-Relation zwischen (a_1, x) und (b, x) für $z_{i+1} \leqq x < z_i$. Nach I.V. ist die $<$-Relation für (a_1, z_k) und (b_1, z_k) erklärt, durch (7.3) wird sie für (a_1, x) und (b_1, x) mit $z_{k+1} \leqq x < z_k$ definiert.
Eine entsprechende, in die Gradinduktion eingeschobene Induktion über $\{1, \ldots, n-1\}$ ist bei vielen der folgenden Beweise notwendig. Die $<$-Relation ist mit der Gleichheit verträglich, wie sich mit einer im eben geschilderten Sinne erweiterten Gradinduktion ergibt.

§ 2. Ordnungseigenschaften

Lemma 4. (1) $0 \leqq a$ *für alle* a *aus* $W(X)$,

(2) $a < a \# b$ für $\{a, b\} \subset W(X)$,

(3) $a < b \Rightarrow a \# c < b \# c$ für $\{a, b, c\} \subset W(X)$.

Beweis von (1) durch Induktion über Ga. (2) und (3) ergibt die Definition.

Lemma 5. $x \in X \Rightarrow$ (1) $x \leqq a \Leftrightarrow x \leqq Sa$,

(2) $a < x \Leftrightarrow Sa < x$.

Beweis durch Induktion über Ga.

Lemma 6. (1) $a < b \Rightarrow Sa \leqq Sb$,

(2) $Sa < Sb \Rightarrow a < b$.

Beweis durch Induktion über $Ga + Gb$.

Satz 1. *$W(X)$ wird durch die Relation $<$ geordnet.*

Beweis durch Induktion über

(1) $m := \max\{Ga + Gb + Gc, Gd + Ge, Gh\}$
für $\{a, b, c, d, e, h\} \subset W(X)$, daß gilt

(2) $h \nless h$,

(3) $d \neq e \Rightarrow d < e \vee e < d$,

(4) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$.

Aus dem sehr umfangreichen Beweis greifen wir den interessantesten Teil heraus. Wir zeigen für $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ mit $Sa = Sb = Sc =: x$ die Behauptung (4). Sei

(5) $Ya_1 \cup Yb_1 = \langle z_1, \ldots, z_k\rangle$, $Yb_1 \cup Yc_1 = \langle y_1, \ldots, y_l\rangle$.

z und y seien definiert gemäß (**). Für $x < z$ und $Ga_2 + Gb_2 = 0$ dürfen wir Induktion über $\{1, \ldots, k\}$ anwenden und voraussetzen:

(6) $m = Ga + Gb + G\bar{c} \wedge S\bar{c} = z \Rightarrow (a_1^z < b_1^z \wedge b_1^z < \bar{c} \Rightarrow a_1^z < \bar{c})$,

(7) $m = Ga + Gb + G\bar{c} \wedge S\bar{c} = z \Rightarrow (b_1^z < a_1^z \wedge \bar{c} < b_1^z \Rightarrow \bar{c} < a_1^z)$.

Entsprechend wenden wir für $x < y$ und $b_2 = c_2 = x$ Induktion über $\{1, \ldots, l\}$ an und setzen voraus:

(8) $m = G\bar{a} + Gb + Gc \wedge S\bar{a} = y \Rightarrow (\bar{a} < b_1^y \wedge b_1^y < c_1^y \Rightarrow \bar{a} < c_1^y)$,

(9) $m = G\bar{a} + Gb + Gc \wedge S\bar{a} = y \Rightarrow (c_1^y < b_1^y \wedge b_1^y < \bar{a} \Rightarrow c_1^y < \bar{a})$.

1. Sei $a < b$ nach (7.3—1). Dann gilt nach I.V.

(10) $K_x a_1 \cup \{a_2\} < c$.

11. Sei $b < c$ nach (7.3—1): $b_1^y < c_1^y \vee (b_1^y = c_1^y \wedge Gb_1 < Gc_1)$.

111. Ist $y = z$ und $a_1^z \neq c_1^z$, so gilt für $x \geqq \min\{y_1, z_1\}$ oder $Ga_2 + Gb_2 + Gc_2 > 0$ nach I.V. über m, für $x < \min\{y_1, z_1\}$ und $a_2 = b_2 = c_2 = x$ nach I.V. über m oder nach (6) oder (8)

(11) $a_1^z < c_1^z$.

Ist $y = z$ und $a_1^z = c_1^z$, so gilt $Ga_1 < Gb_1 < Gc_1$, mithin

(12) $a_1^z = c_1^z \wedge Ga_1 < Gc_1$.

Aus (11) oder (12) ergibt sich mit (10) nach (7.3—1) $a < c$.

112. Sei $y \neq z$ und $x \geqq \max\{y, z\}$. Dann gilt $Sa_1 \leqq z$, $Sb_1 \leqq z$, $Sb_1 \leqq y$, $Sc_1 \leqq y$ und daher $a_1^z = a_1 < b_1^z = b_1$, $b_1^y = b_1 < c_1^y = c_1$, mithin nach I.V. $a_1 < c_1$. Wegen $\max\{Sa_1, Sc_1\} \leqq x$ und (10) ergibt sich mit (7.3—1) $a < c$.

113. Sei $z < y$ und $x < \max\{y, z\}$.

1131. Für $z \leqq x < y$ ist $Sa_1 \leqq z < y \leqq Sc_1$ wegen $Sb_1 \leqq z$, mithin ist $a_1^y = a_1$, $Sc_1^y = y$ und daher

(13) $a_1^y < c_1^y$.

Weil zwischen x und y keine Elemente aus $Ya_1 \cup Yc_1$ liegen, folgt aus (10) und (13) nach (7.3—1) $a < c$.

1132. Sei $y_{i+1} \leqq x < z < y = y_i$. Dann gilt

(14) $b_1^z < c_1^z$:

Für $Sb_1 \leqq y_{i+1} < z$ gilt $Sb_1^z = Sb_1 < Sc_1^z = z$, also haben wir nach Lemma 6—2) (14).

Für $Sb_1 \geqq y$ gilt wegen $b_1^y \leqq c_1^y$ auch $Sc_1 \geqq y$. Dann ist nach (7.3—1) (14) gültig, da für das kleinste Element aus $Yb_1 \cup Yc_1$, das größer als z ist, nämlich y, $b_1^y < c_1^y \vee (b_1^y = c_1^y \wedge Gb_1 < Gc_1)$ gilt und $K_z b_1 \cup \{z\} = K_x b_1 \cup \{z\} \leqq z < c_1^z$ ist nach Lemma 3—4) und (7.2).

Aus (14) folgt nach I.V. über m oder (6) die Ungleichung (11), (10) und (11) liefern mit (7.3—1) $a < c$.

114. Sei $y < z \wedge x < \max\{y, z\}$. Dann kann nicht $y \leqq x < z$ gelten, denn daraus würde $Sb_1 \leqq y < z \leqq Sa_1$ und $Sa_1^z = z > Sb_1 = Sb_1^z$ folgen im Widerspruch zu

$a_1^z \leqq b_1^z$. Also ist $z_{j+1} \leqq x < y < z = z_j$. Dann gilt

(15) $a_1^y < b_1^y$:

Ist $Sa_1 \leqq z_{j+1}$, so gilt $Sb_1 \geqq z$ und daher $a_1^y = a_1 < b_1^y$ nach Lemma 6—2).
Ist $Sa_1 \geqq z$, so ist wegen $a_1^z \leqq b_1^z$ auch $Sb_1 \geqq z$. Dann gilt (15) nach (7.3—1), da z das kleinste Element von $Ya_1 \cup Yb_1$ mit $y < z$ ist und da $a_1^z < b_1^z \vee (a_1^z = b_1^z \wedge Ga_1 < Gb_1)$ gilt sowie $K_y a_1 \cup \{y\} = K_x a_1 \cup \{y\} \leqq y < b_1^y$ nach Lemma 3—4) und (7.2). Aus (15) folgt mit $b_1^y < c_1^y$ nach I.V. über m oder nach (8) (13), (10) und (13) ergeben nach (7.3—1) $a < c$.
12. Sei $b < c$ nach (7.3—2): $b_1 = c_1$ und $b_2 < c_2$. Dann gilt $Ya_1 \cup Yb_1 = Ya_1 \cup Yc_1$, $a_1^z < c_1^z \vee (a_1^z = c_1^z \wedge Ga_1 < Gc_1)$ und (10), also nach (7.3—1) $a < c$.
13. Sei $b < c$ nach (7.3—3): $b \leqq K_x c_1 \cup \{c_2\}$. Nach I.V. ist

(16) $a \leqq K_x c_1 \cup \{c_2\}$.

Sei v das kleinste Element aus $Ya_1 \cup Yc_1$ mit $x < v$ bzw. $v = \max(Ya_1 \cup Yc_1)$, falls $Ya_1 \cup Yc_1 \leqq x$ gilt.
131. Sei $a_1 = c_1$, so gilt nicht $b \leqq K_x c_1$, denn dann gäbe es ein $d \in K_x c_1$ mit $d < b \leqq d$ im Widerspruch zur I.V. (2). Also gilt $a_2 < b \leqq c_2$, nach I.V. $a_2 < c_2$ und nach (7.3—2) $a < c$.
132. Ist $a_1 \neq c_1$, so gilt nach I.V. $a_1 < c_1$ oder $c_1 < a_1$. Ist $x \geqq v$, so gilt $a_1^v = a_1$, $c_1^v = c_1$. Für $a_1 < c_1$ ist wegen (10) und (7.3—1), für $c_1 < a_1$ wegen (16) und (7.3—3) $a < c$. Ist $x < v$ und $a_1^v = c_1^v$, dann ist wegen $a_1 \neq c_1$ genau einer der beiden Terme a_1, c_1 von der Stufe v, und es gilt $a_1 = (c_1, v)$ oder $c_1 = (a_1, v)$. Daraus folgt $Gc_1 < Ga_1$ bzw. $Ga_1 < Gc_1$, was mit (10) bzw. (16) nach (7.3—1) bzw. (7.3—3) $a < c$ liefert. Ist $x < v$ und $a_1^v \neq c_1^v$, dann gilt nach I.V. (3) $a_1^v < c_1^v$ oder $c_1^v < a_1^v$, woraus mit (10) oder (16) nach (7.3—1) oder (7.3—3) $a < c$ folgt.

2. Sei $a < b$ nach (7.3—2): $a_1 = b_1$ und $a_2 < b_2$. Dann gilt

(17) $Ya_1 \cup Yc_1 = Yb_1 = Yc_1$ und $K_x a_1 = K_x b_1$.

21. Sei $b < c$ nach (7.3—1). Dann gilt wegen $a_2 < b_2 < c$ nach I.V. und wegen (17) $K_x a_1 \cup \{a_2\} < c$ und $a_1^y = b_1^y < c_1^y$ oder $a_1^y = b_1^y = c_1^y \wedge Ga_1 = Gb_1 < Gc_1$. Daraus liefert (7.3—1) $a < c$.
22. Ist $b < c$ nach (7.3—2), $b_1 = c_1$ und $b_2 < c_2$, dann gilt $a_1 = c_1$ und nach I.V. $a_2 < c_2$, mithin nach (7.3—2) $a < c$.
23. Sei $b < c$ nach (7.3—3). Aus $b \leqq K_x c_1 \cup \{c_2\}$ ergibt die I.V. $a \leqq K_x c_1 \cup \{c_2\}$. Ferner gilt $c_1^y < b_1^y = a_1^y$ oder $c_1^y = b_1^y = a_1^y$ sowie $Gc_1 < Gb_1 = Ga_1$. Mit (17) folgt daraus nach (7.3—3) $a < c$.

3. Sei $a < b$ nach (7.3—3): $b_1^z < a_1^z \vee (a_1^z = b_1^z \wedge Gb_1 < Ga_1)$ und $a \leqq K_x b_1 \cup \{b_2\}$.
31. Ist $b < c$ nach (7.3—1), dann gilt $K_x b_1 \cup \{b_2\} < c$, und es gibt ein $d \in K_x b_1 \cup \{b_2\}$ mit $a \leqq d < c$, woraus die I.V. $a < c$ ergibt.
32. Sei $b < c$ nach (7.3—2): $b_1 = c_1$ und $b_2 < c_2$. Dann gilt

(18) $Ya_1 \cup Yc_1 = Ya_1 \cup Yb_1$,

$c_1^z < a_1^z \vee (a_1^z = c_1^z \wedge Gc_1 < Ga_1)$ und $a \leqq K_x c_1$ oder $a \leqq b_2$. Im zweiten Falle ergibt die I.V. $a \leqq c_2$, so daß gilt $a \leqq K_x c_1 \cup \{c_2\}$. Damit liefert (7.3—3) wegen (18) $a < c$.

33. Sei $b < c$ nach (7.3—3): $c_1^y < b_1^y \vee (b_1^y = c_1^y \wedge Gc_1 < Gb_1)$ und $b \leqq K_x c_1 \cup \{c_2\}$. Dann gilt nach I.V.

(19) $a \leqq K_x c_1 \cup \{c_2\}$.

331. Ist $y = z$ und $a_1^z \neq b_1^z \vee b_1^z \neq c_1^z$, so gilt unmittelbar, nach I.V. über m oder nach (7) oder (9)

(20) $c_1^z < a_1^z$.

Ist $a_1^z = b_1^z = c_1^z$, so gilt $Gc_1 < Gb_1 < Ga_1$, also

(21) $a_1^z = c_1^z \wedge Gc_1 < Ga_1$.

(19) liefert mit (20) oder (21) nach (7.3—3) die Behauptung.
332. Sei $y \neq z$ und $x \geqq \max\{y, z\}$. Dann gilt $a_1^z = a_1 > b_1^z = b_1$, $b_1^y = b_1 > c_1^y = c_1$. Die I.V. ergibt $c_1 < a_1$. Ist $v = \max Ya_1 \cup Yc_1$, so gilt $x \geqq v$ und $c_1^v < a_1^v$. Mit (19) folgt daraus nach (7.3—3) die Behauptung.
333. $x < y$ und $z < y$.
3331. $z \leqq x < y$ ergibt einen Widerspruch zu der Voraussetzung $c_1^y \leqq b_1^y$, weil daraus $Sb_1 \leqq z < y \leqq Sc_1$ folgt.
3332. Sei $y_{i+1} \leqq x < z < y = y_i$. Dann gilt

(22) $c_1^z < b_1^z$:

Ist $Sc_1 \leqq y_{i+1}$, so gilt $Sb_1 \geqq y$ und daher nach Lemma 6—2) $c_1^z = c_1 < b_1^z$.
Ist $Sc_1 \geqq y$, so ist wegen $c_1^y < b_1^y$ auch $Sb_1 \geqq y$ und deshalb $c_1^z = (c_1, z) < b_1^z = (b_1, z)$ nach (7.3—1), weil nach Lemma 3—4) und (7.2) $K_z c_1 \cup \{z\} = K_x c_1 \cup \{z\} \leqq z < (b_1, z)$ gilt.
Aus (22) und $b_1^z < a_1^z$ folgt nach I.V. über m oder nach (7) $c_1^z < a_1^z$, woraus sich mit (19) nach (7.3—3) $a < c$ ergibt.
334. $y < z$ und $x < z$.
3341. Sei $y \leqq x < z$. Dann gilt wegen $Sb_1 \leqq y$, $Sc_1 \leqq y < z \leqq Sa_1$. Mithin haben wir nach Lemma 6—2) $c_1^z = c_1 < a_1^z$, und daraus liefert (7.3—3) wegen (19) $a < c$.
3342. Sei $z_{j+1} \leqq x < y < z = z_j$. Dann gilt $b_1^y < a_1^y$: Ist $Sb_1 \leqq z_{j+1}$, so gilt $Sa_1 \geqq z$ und daher nach Lemma 6—2) $b_1^y = b_1 < a_1^y$.
Ist $Sb_1 \leqq z$, so gilt wegen $b_1^z < a_1^z$ auch $Sa_1 \geqq z$. Dann ist nach (7.3—1) $b_1^y = (b_1, y) < a_1^y = (a_1, y)$, da $b_1^z < a_1^z$ und nach Lemma 3—4) sowie (7.2) $K_y b_1 \cup \{y\} = K_x b_1 \cup \{y\} \leqq y < (a_1, y)$ ist.
Aus $c_1^y < b_1^y$ und $b_1^y < a_1^y$ folgt nach I.V. über m oder nach (9) $c_1^y < a_1^y$, und daraus erhält man mit (19) nach (7.3—3) $a < c$. Damit ist der hier ausgewählte Teil des Beweises von Satz 1 gezeigt.

Lemma 7. $Sb_2 = x \wedge a \leqq K_x b_1 \cup \{b_2\} \Rightarrow a < (b_1, b_2)$

Beweis durch Induktion über Ga.
Aus Lemma 7 ergibt sich sofort

Lemma 8. (1) $a_2 < (a_1, a_2)$,

(2) $x = Sa_2 \Rightarrow K_x a_1 < (a_1, a_2)$.

Lemma 9. $a \leqq b < c < a \# b \Rightarrow \exists \bar{a} \exists \bar{b} (\bar{a} \leqq a \wedge \bar{b} \leqq b \wedge c = \bar{a} \# \bar{b})$.

Beweis wie in [2].

Lemma 10. $\{x, x_1, x_2\} \subset X \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1, x) < (x_2, x)$.

Lemma 11. $x < (a_1, a_2) < (y, x) \wedge \{x, y\} \subset X \wedge Y a_1 \cup \{y\} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle \wedge z_{k+1} \leqq x < z_k \Rightarrow a_1^{z_k} < y^{z_k}$.

Lemma 10 und Lemma 11 werden durch Anwendung der Definition der $<$-Relation bewiesen.

Lemma 12. $x < (a_1, x) < (y, x) \Rightarrow S a_1 < y$.

Beweis durch Induktion über die Anzahl der Elemente von $Y a_1 \cup \{y\}$, die größer als x sind.

Mit Hilfe einer ähnlichen Induktion beweist man

Lemma 13. $a_2 < y < S a_1 \Rightarrow (a_1, a_2) < ((a_1, y), a_2)$.

Sei x' der Nachfolger von x in X.

Lemma 14. $\forall a\, [a \in W(X) \wedge S a = x$

$$\Rightarrow a < (x', x) \vee \exists x_0 (x_0 \in X \wedge x < x_0 \wedge (x_0, x) \leqq a < (x_0', x)]\,.$$

Beweis durch Induktion über $G a$. Für $a = x$ gilt die Behauptung. Wir setzen voraus:

(1) $G b < G a \vee y \leqq b < y' \Rightarrow b < (y', y) \vee \exists y_0 (y < y_0 \wedge (y_0, y) \leqq b < (y_0', y))$.

Sei $a = (a_1, a_2)$ und $(x', x) < (a_1, a_2)$.

1. $a_1 < x'$. Nach (7.3—3) ist wegen $(x', x) < a$ $(x', x) \leqq K_x a_1 \cup \{a_2\}$. Nach (1) gibt es ein $x_0 > x$ mit $(x_0, x) \leqq K_x a_1 \cup \{a_2\} < (x_0', x)$. Nach Lemma 7 ist $(x_0, x) < (a_1, a_2)$ und nach (7.3—1) ist wegen $z = x_0'$ und $a_1^z = a_1 < x' < x_0' = x_0'^z$ $(a_1, a_2) < (x_0', x)$.
2. $a_1 \leqq x'$. Sei $Y a_1 = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ und $z_{k+1} \leqq x < z_k =: z$.

Dann gilt für $G a_2 > 0 \vee z = S a_1$ nach (1), für $a_2 = x \wedge z < S a_1$ nach I.V. über k

(2) $z \leqq a_1^z < (z', z)$ oder

(3) $\exists x_1 (z < x_1 \wedge (x_1, z) \leqq a_1^z < (x_1', z))$.

Weiter liefert die I.V. (1)

(4) $x \leqq K_x a_1 \cup \{a_2\} < (x', x)$ oder

(5) $\exists x_2 (x < x_2 \wedge (x_2, x) \leqq K_x a_1 \cup \{a_2\} < (x_2', x))$

Sei

$$(6)\quad x_0 := \begin{cases} z, & \text{falls (2) und (4) gelten,} \\ x_1, & \text{falls (3) und (4) gelten,} \\ \max\{z, x_2\}, & \text{falls (2) und (5) gelten,} \\ \max\{x, x_2\}, & \text{falls (3) und (5) gelten.} \end{cases}$$

Dann gilt $z_{k+1} \leqq x < z \leqq x_0$, also liegt kein Element von $Ya_1 \cup \{x_0\}$ und von $Ya_1 \cup \{x'_0\}$ zwischen x und z. Wegen $x_0^z \leqq a_1^z$ für $x_0 \in \{x_1, z\}$ und $K_x x_0 \cup \{x\} = \{x\} < a$ sowie $x \leqq a_2$ gilt nach (7.3—1) oder (7.3—2) $(x_0, x) \leqq a$. Ist $x_0 = x_2 \notin \{x_1, z\}$, so ist nach (5) und Lemma 8 $(x_0, x) \leqq K_x a_1 \cup \{a_2\} < a$. Nach (2), (3), (6) und Lemma 10 ist $a_1^z < x_0'^z$, wegen (4), (5), (6) und Lemma 10 ist $K_x a_1 \cup \{a_2\} < (x'_0, x)$, also nach (7.3—1) $a < x_0'^x$. Ist a kein Hauptterm, zeigt man die Behauptung mit Hilfe der I.V. und Lemma 4—2).

§ 3. Beweis der Wohlordnung von $W(X)$

Wir definieren für alle Elemente $y \in X$ durch Induktion über X *Mengen* M_y und *Prädikate* $\mathfrak{W}_y$:

(8.1) $M_0 := W(X)$.

(8.2) $\mathfrak{W}_y a :\Leftrightarrow a \in M_y \wedge \{b | b \in M_y \wedge b < a\}$ ist wohlgeordnet.

(8.3) $\mathfrak{W}_y K_y a :\Leftrightarrow \forall c (c \in K_y a \Rightarrow \mathfrak{W}_y c)$.

(8.4) $M_{y'} := \{a | a \in M_y \wedge \mathfrak{W}_y K_y a\}$.

(8.5) $M_y := \bigcap_{x<y} M_x$, wenn y Limeselement von X ist.

(8.6) $M_y^x := \{a | a \in M_y \wedge Sa = x\}$.

Lemma 15. (1) $a \# b \in M_y \Leftrightarrow a \in M_y \wedge b \in M_y$,

(2) $\mathfrak{W}_y (a \# b) \Leftrightarrow \mathfrak{W}_y a \wedge \mathfrak{W}_y b$.

Beweis durch Induktion über y. Für $y = 0$ gilt (1). Sind (1) und (2) bewiesen für y, so gilt (1) für y':

$$\begin{aligned} a \# b \in M_{y'} &\Leftrightarrow a \# b \in M_y \wedge \mathfrak{W}_y K_y (a \# b) \\ &\Leftrightarrow a \in M_y \wedge b \in M_y \wedge \mathfrak{W}_y K_y\, a \wedge \mathfrak{W}_y K_y b \\ &\Leftrightarrow a \in M_{y'} \wedge b \in M_{y'}. \end{aligned}$$

Ist y Limeselement von X und gelten (1) und (2) für alle $z \in X$ mit $z < y$, so gilt

$$\begin{aligned} a \# b \in M_y &\Leftrightarrow \forall z (z \in X \wedge z < y \Rightarrow a \# b \in M_z) \\ &\Leftrightarrow \forall z (z \in X \wedge z < y \Rightarrow a \in M_z \wedge b \in M_z) \\ &\Leftrightarrow \forall z (z \in X \wedge z < y \Rightarrow a \in M_z) \\ &\qquad \wedge \forall z (z \in X \wedge z < y \Rightarrow b \in M_z) \\ &\Leftrightarrow a \in M_y \wedge b \in M_y. \end{aligned}$$

Ist (1) für ein gewisses y bewiesen, so zeigt man (2) für dasselbe y. $\mathfrak{W}_y (a \# b) \rightarrow \mathfrak{W}_y a \wedge \mathfrak{W}_y b$ ergibt sich sofort aus Lemma 4—2). Der Beweis der anderen Richtung von (2) verläuft wie der Beweis von Lemma 15 in [2].

Lemma 16. $a \in M_y \wedge y \leqq x \Rightarrow K_x a \subset M_y$.

Lemma 17. $y \leqq Sa \wedge a = (a_1, a_2) \in M_y \Rightarrow a_1 \in M_y \wedge a_2 \in M_y$.

Beweise für Lemma 16 und Lemma 17 durch transfinite Induktion über y.

Lemma 18. $Sa \leqq y \leqq z \wedge \mathfrak{W}_y a \Rightarrow \mathfrak{W}_z a$.

Beweis durch Induktion über z. Ist die Behauptung richtig für $z \geqq y$, dann gilt $\mathfrak{W}_z a$, also $a \in M_z$, und wegen $Sa \leqq y \leqq z$ ist für $a = a_1 \# \cdots \# a_p$ mit $p \geqq 1$ und $\{a_1, \ldots, a_p\} \subset H\ K_z a = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Nach Lemma 15—2) ist $\mathfrak{W}_z\, K_z a$ und nach (8.4) $a \in M_{z'}$. Es ist $B := \{b | b < a \wedge b \in M_{z'}\} \subset C := \{b | b < a \wedge b \in M_z\}$ und wegen $\mathfrak{W}_z a$ ist C wohlgeordnet. Dann ist auch B wohlgeordnet, und es gilt wegen $a \in M_{z'}$ nach (8.2) $\mathfrak{W}_{z'} a$.
Ist z Limeselement von X und gilt für alle w mit $y \leqq w < z$ $\mathfrak{W}_w a$, so ist $a \in M_w$ und nach (8.5) $a \in M_z$. Weiter ist für $y \leqq w < z$ $B_w := \{b | b < a \wedge b \in M_w\}$ wohlgeordnet. Dann ist auch $B := \{b | b < a \wedge b \in M_z\}$ wegen $B = \bigcap_{y \leqq w < z} B_w$ wohlgeordnet und nach (8.2) $\mathfrak{W}_z a$.

Lemma 19. $a \in M_y \wedge Sa < y \Rightarrow \mathfrak{W}_y a$.

Beweis durch Induktion über y.

Lemma 20. $a \in M_x^x \Rightarrow \mathfrak{W}_x a$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für alle $a \in M_x^x$ mit $x \leqq a < (x', x)$. Dann schließen wir induktiv über $-x + x_0$, daß für alle a mit $(x_0, x) \leqq a < (x_0', x)$ die Behauptung gilt. Nach Lemma 14 ist sie damit für alle a aus $W(X)$ bewiesen. Nach Lemma 15 genügt es, $a \in H$ zu betrachten.
Bemerkung zu der Bedeutung von „$-x + x_0$“: Die wohlgeordnete Menge X kann man ähnlich auf einen Abschnitt der Klasse aller Ordinalzahlen abbilden. Die für Ordinalzahlen erklärte Addition überträgt sich dabei auf die Elemente von X. Mit $-x + x_0$ bezeichnen wir das Element x^* von X, für das mit der durch die Addition auf X induzierten Operation „+“ $x + x^* = x_0$ gilt.

1. $x \leqq a < (x', x)$. Dafür verläuft der Beweis wie in [2], da im Falle $a = (a_1, a_2)$ nach Lemma 12 $Sa_1 \leqq x$ ist.

2. Die Behauptung sei bewiesen für alle $\bar{a}$ wie folgt:

(1) Vor.: $\forall y_0\, \forall y\, \forall \bar{a}\, (\bar{a} \in M_y^y \wedge \bar{a} < (y_0, y) \wedge -y + y_0 = -x + x_0 \Rightarrow \mathfrak{W}_y \bar{a})$.

Wir schließen nun induktiv über Ga, daß für alle $a \in M_x^x$ mit $(x_0, x) \leqq a < (x_0', x)$ und $-x + x_0 = x^*$ $\mathfrak{W}_x a$ gilt.
21. Für $Ga = 1$, d.h. $a = (x_0, x) \in M_x^x$ ist dies richtig: Ist $d \in M_x$ und $d < a$, so gilt $\mathfrak{W}_x d$; für $d < x$ folgt das aus Lemma 19, für $d \in M_x^x$ gilt es nach (1).
22. Wir setzen voraus

(2) Vor.: $\forall y\, (\bar{a} \in M_y^y \wedge y_0^y \leqq \bar{a} < y_0'^y \wedge -y + y_0 = x^* \wedge G\bar{a} < Ga \Rightarrow \mathfrak{W}_y \bar{a})$

und

$$\text{Vor.: } a = (a_1, a_2) \in M_x^x \wedge (x_0, x) < a < (x_0', x) \wedge x^* = -x + x_0 > 0 \,.$$

Lemma 16 und Lemma 17 ergeben daraus

$$\{a_1, a_2\} \cup K_x a_1 \subset M_x \,,$$

und daraus liefert Lemma 19 oder Lemma 8 mit (1) oder (2)

(3) $\mathfrak{W}_x K_x a_1 \wedge \mathfrak{W}_x a_2$.

221. Für $a_2 \in X$ schließt man induktiv über die Anzahl der Elemente z_i von $Y a_1 \cup \{x_0'\}$, die größer als x sind und für die $-z_i + x_0 = x^*$ gilt. Ist $z_{i+1} \leqq x = a_2 < z_i =: z$, so setzen wir voraus

(4) $-z + x_0 = x^* \wedge z < S a_1 \wedge (a_1, z) \in M_z \Rightarrow \mathfrak{W}_z (a_1, z)$.

Für $S a_1 \leqq z$ ergibt sich aus (3), Lemma 15 und Lemma 18

(5) $\mathfrak{W}_z a_1^z$,

für $z < S a_1$ folgt aus (3), (8.4), (8.5), Lemma 2 und Lemma 18

$a_1^z \in M_z^z$

und daraus mit (4) die Aussage (5).

Wegen (5) wenden wir Induktion über M_z bis a_1^z an.

Jeder Term $b_1 < z'$ kann mit Hilfe der durch $(*)$ gegebenen Schreibweise auf genau eine — von y abhängige — Weise in der Form $b_1 = b_y^{y_y}$ mit geeigneten Termen b_y und y_y dargestellt werden, daß $y < y_y \leqq z \wedge (S b_1 > y \Rightarrow S b_1 = y_y) \wedge \neg \exists c (Gc < G b_y \wedge b_1 = c^{y_y})$ gilt: Für $S b_1 \leqq y \vee [S b_1 > y \wedge b_1 = (c, S b_1) \Rightarrow S c \leqq S b_1]$ sei $b_y := b_1$ und $y_y := \max\{S b_1, y'\}$; für $b_1 = (c, S b_1)$ mit $y < S b_1 < S c$ sei $b_y := c$ und $y_y := S b_1$.

Damit formulieren wir die I.V. für die Induktion über M_z bis a_1^z:

(6) $\forall y \{z_{i+1} \leqq y < z \wedge -y + x_0 = x^* \wedge b_1 \in M_z \wedge b_1 < a_1^z \wedge b_1 = b_y^{y_y}$
$\wedge \mathfrak{W}_y b_2 \wedge b := (b_y, b_2) \in M_y^y \wedge b < (x_0', y) \Rightarrow \mathfrak{W}_y b\}$.

2211. Hat a_1 die Form $a_1 = (a_1^*, z)$ mit $S a_1^* > z$, so ist zunächst zu zeigen

(7) $\forall y \{-y + x_0 = x^* \wedge z_{i+1} \leqq y < z \wedge a^* := (a_1^*, a_2^*) \wedge \mathfrak{W}_y a_2^* \wedge a^* < (a_1, y)$
$\wedge a^* \in M_y^y \Rightarrow \mathfrak{W}_y a^*\}$.

Der Beweis dafür verläuft ähnlich wie der folgende für $\mathfrak{W}_x (a_1, x)$:

2212. Wir zeigen durch Induktion über Gd

(8) $d \in M_x^x \wedge d < (a_1, x) \Rightarrow \mathfrak{W}_x d$.

Wir setzen voraus

(9) $\forall y \{e \in M_y^y \wedge e < (a_1, y) \wedge z_{i+1} \leqq y < z \wedge -y + x_0 = x^* \wedge Ge < Gd \Rightarrow \mathfrak{W}_y e\}$.

Es genügt, die Behauptung (8) für $d = (d_1, d_2)$ zu zeigen. Dafür gilt

(10) $\mathfrak{W}_x K_x d_1 \wedge \mathfrak{W}_x d_2$.

Es sei $Y d_1 \cup Y a_1 = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$. Dann haben wir

(11) $u := u_1 \leqq x < z$ oder

(12) $u_{s+1} \leqq x < u_s =: u \leqq z$.

22121. $d < (a_1, x)$ nach (7.3—1). Dann gilt

(13) $d_1^u < a_1^u$ oder

(14) $a_1 = (d_1, u)$ mit $S d_1 > u = z$.

(11) und (14) schließen einander aus. Gelten (11) und (13), so ergibt sich $\mathfrak{W}_x d_1$ und nach Lemma 18 $d_1 \in M_z$. (6) liefert $\mathfrak{W}_x d$.

(12) und (14) ergeben nach (7) $\mathfrak{W}_x d$.

(12) und (13) liefern für $u = z$ nach (6) $\mathfrak{W}_x d$. Für $u < z$ gilt $z \in Y a_1$; wir betrachten die endliche Folge $\langle u_r = z, u_{r+1}, \ldots, u_s = u \rangle$. Man zeigt durch Induktion über $s - j$

$$d_1^{u_j} < a_1^{u_j} \quad \text{für} \quad r \leqq j \leqq s \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{W}_{u_j} K_{u_j} d_1 \quad \text{für} \quad r < j \leqq s\,.$$

Daraus folgt $d_1^z < a_1^z$ und $d_1^z \in M_z$, was mit (6), (10) $\mathfrak{W}_x d$ ergibt.
22122. $(d_1, d_2) < (a_1, x)$ kann nicht nach (7.3—2) gelten, weil daraus $d_2 < x$ im Widerspruch zu $S d_2 = x$ folgen würde.
22123. Ist $(d_1, d_2) < (a_1, x)$ nach (7.3—3), so gilt $(d_1, d_2) \leqq K_x a_1$, und nach (3) und (8) ist $\mathfrak{W}_x (d_1, d_2)$.
222. Ist $a_2 > x$, so wendet man transfinite Induktion über M_x^x bis a_2 an. Im übrigen schließt man wie unter 221. Es genügt, (9) für $x = y$ und $e < (a_1, a_2)$ vorauszusetzen.
Der Induktionsschluß, der zu (6) führt, wird im wesentlichen wie die Aussage $\mathfrak{W}_x (a_1, a_2)$ bewiesen. Man hat aber die Voraussetzung (2) für (b_y, y) nicht zur Verfügung. Sie wird angewendet, um im Abschnitt 2211. $\mathfrak{W}_y (a_1^*, y)$ zu zeigen. Beim Beweis von $\mathfrak{W}_y (d_1, d_2)$ für $(d_1, d_2) < (b_y, y)$ tritt der Fall $b_y = (d_1, t)$ mit $S d_1 > t$ jedoch nur für $S b_1 < t_k$ auf (wobei t_k das kleinste Element von $Y d_1 \cup Y b_y$ mit $y < t_k$ ist) und ist mit dieser zusätzlichen Bedingung leicht zu erledigen, ohne daß man Überlegungen wie in 2211. braucht.

Lemma 21. $\forall x\, [x \in X \Rightarrow M_x = W(X)]\,.$

Beweis durch transfinite Induktion über X. Für $x = 0$ gilt die Behauptung nach (8.1). Ist $M_x = W(X)$, so ist jedes a aus $W(X)$ Element von $M_{x'}$: Nach I.V. ist $K_x a \subset M_x$. Für jedes c aus $K_x a$ ist $\mathfrak{W}_x c$; für $Sc < x$ gilt dies nach Lemma 19, für $Sc = x$ gilt es nach Lemma 20. Also ist $\mathfrak{W}_x K_x a$ und nach (8.4) $a \in M_{x'}$. Ist x Limeselement von X und $M_y = W(X)$ für alle $y < x$, so gilt nach (8.5) $M_x = \bigcap_{y<x} M_y = W(X)$.

Satz 2. *$W(X)$ ist bezüglich der Relation $<$ wohlgeordnet.*

Beweis. Für jedes $a \in W(X)$ ist $B := \{b | b \in W(X) \wedge b < a\}$ wohlgeordnet: Mit $x := Sa$ ist nach Lemma 21 $a \in M_x^x$, also gilt nach Lemma 20 $\mathfrak{W}_x a$, das bedeutet, $B_x := \{b | b \in M_x \wedge b < a\}$ ist wohlgeordnet. Wegen Lemma 21 ist $B = B_x$, daher ist B und damit auch $W(X)$ wohlgeordnet.

§ 4 Beziehung zwischen dem System Σ und dem System $W(\mathbb{N})$

Man kann W als einen *Operator* auffassen, der aus jeder wohlgeordneten Menge X konstruktiv eine umfassendere Wohlordnung $W(X)$ zu erzeugen gestattet. Wendet

man W insbesondere auf die Menge $\mathbb{N}$ aller endlichen Ordinalzahlen an, so erhält man eine zu dem System Σ aus [1] ähnliche Wohlordnung. Um dies zu zeigen, definieren wir eine Funktion σ, die Σ ähnlich auf $W(\mathbb{N})$ abbildet.
Wir bezeichnen die Elemente von $W(\mathbb{N})$ wie bisher mit kleinen lateinischen, die Elemente von Σ wie in [1] mit kleinen griechischen Buchstaben. Die beiden Operationen (,) und $\#$ werden in Σ und in $W(\mathbb{N})$ durch dieselben Symbole bezeichnet. Ebenso seien $S\alpha$ und $K_i\alpha$ die Stufe und die i-Koeffizientenmenge von α in Σ, Sa und $K_i a$ die Stufe und die i-Koeffizientenmenge von a in $W(\mathbb{N})$. H_α sei die Menge der Hauptterme von Σ, H_a die Menge der Hauptterme von $W(\mathbb{N})$.

Wir vereinbaren zur Abkürzung:

Ist $\alpha \in \Sigma$ und $n \in \mathbb{N}$, so sei

(9.1) $\alpha + 0 := \alpha$,

(9.2) $\alpha + (n+1) := (\alpha + n) \# 1$.

Ist $a \in W(\mathbb{N})$ und $n \in \mathbb{N}$, so sei

(9.3) $a + 0 := a$,

(9.4) $a + (n+1) := (a + n) \# 0$.

Zur Unterscheidung von dieser Schreibweise bezeichnen wir den Nachfolger von n in $\mathbb{N}$ mit n'.

Definition der Funktion $\sigma : \Sigma \to W(\mathbb{N})$

(10.1) $\sigma 1 := 0$,

(10.2) $\sigma \Omega_i := i$,

(10.3) $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Sigma \wedge [\alpha_1 = (\beta_1, \Omega_j) + n \wedge S\beta_1 = j' \Rightarrow j \leqq S\alpha_2] \Rightarrow \sigma(\alpha_1, \alpha_2) := (\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2)$,

(10.4) $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Sigma \wedge S\alpha_2 =: i \wedge \alpha_1 = (\beta_1, \Omega_{i'}) \wedge S\beta_1 > i' \wedge$
$\wedge\, \sigma\alpha_1 = (b_1, i') \Rightarrow \sigma(\alpha_1, \alpha_2) := (b_1, \sigma\alpha_2)$,

(10.5) $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Sigma \wedge S\alpha_2 =: i \wedge \alpha_1 = (\beta_1, \Omega_{i'}) + n + 1 \wedge S\beta_1 > i'$
$\wedge\, \sigma(\beta_1, \Omega_{i'}) = b \Rightarrow \sigma(\alpha_1 . \alpha_2) := (b + n, \sigma\alpha_2)$,

(10.6) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subset H_\alpha \wedge p > 1 \Rightarrow \sigma(\alpha_1 \# \cdots \# \alpha_p) := \sigma\alpha_1 \# \cdots \# \sigma\alpha_p$.

Lemma 22. σ *ist eine Funktion:* $\{\alpha, \beta\} \subset \Sigma \wedge \alpha = \beta \Rightarrow \sigma\alpha = \sigma\beta$.

Lemma 23. $\alpha \in \Sigma \Rightarrow S\alpha = S\sigma\alpha$.

Beweise von Lemma 22 und Lemma 23 durch Induktion über $G\alpha$.

Lemma 24. (1) $\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = (a_1, a_2) \wedge Sa_1 > Sa_2 \Rightarrow S\alpha_1 > S\alpha_2$,

(2) $\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = (a_1, a_2) \Rightarrow Sa_1 \geqq S\alpha_1$.

Beweis von (1) mit Hilfe der Definition und Lemma 23, von (2) durch Induktion über $G(\alpha_1, \alpha_2)$.

Lemma 25. *σ ist injektiv:* $\sigma\alpha = \sigma\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Beweis durch Induktion über $\min\{G\alpha, G\beta\}$ unter Verwendung von Lemma 24.

Lemma 26. *σ ist bijektiv.*

Zum Beweis dafür, daß σ surjektiv ist, zeigt man durch Induktion über Ga, daß jedes $a \in W(\mathbb{N})$ Bild eines Terms aus Σ ist.
Nun ist noch zu beweisen, daß σ Σ ähnlich auf $W(\mathbb{N})$ abbildet. Wir bezeichnen mit $\sigma K_i\alpha$ die Menge $\{b | b = \sigma\beta \wedge \beta \in K_i\alpha\}$. Dann gilt

Lemma 27. $i \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in \Sigma \Rightarrow K_i\,\sigma\alpha \subset \sigma K_i\alpha \subset K_i\sigma\alpha \cup \{0\}$.

Beweis durch Induktion über $G\alpha$.

Lemma 28. $\alpha < \beta \Rightarrow \sigma\alpha < \sigma\beta$.

Beweis durch Induktion über $G\alpha + G\beta$. Wir schildern den Beweis für den Fall, daß $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ und $S\alpha = S\beta = i$ ist. Sei $\sigma\alpha = (a_1, a_2)$, $\sigma\beta = (b_1, b_2)$.

1. Sei $\alpha_1 < \beta_1$ und $K_i\alpha_1 \cup \{\alpha_2\} < \beta$. Dann gilt nach Lemma 27 und der I.V.

(1) $K_i\,\sigma\alpha_1 \cup \{a_2\} < \sigma\beta$.

Sei $Ya_1 \cup Yb_1 = \langle z_1, \ldots, z_n\rangle$ und z das durch (**) erklärte Element von $\{z_1, \ldots, z_n\}$.
11. $i \geqq z = z_1$. Nach Lemma 24—2) sind $\sigma\alpha$ und $\sigma\beta$ nach (10—3) gebildet. Die Behauptung folgt aus der I.V. für α_1 und β_1, aus (1) und (7.3—1).
12. $z_{k+1} \leqq i < z_k = z$.
1211. Seien $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$ gebildet nach (10.3). Dann ergibt die Stufenbedingung für Klammerterme aus Σ $Sa_1 = S\sigma\alpha_1 = S\alpha_1 \leqq i'$ und $Sb_1 \leqq i'$, also ist $k = 1$ und $z = i'$. Die I.V. liefert aus $\alpha_1 < \beta_1$ $a_1^z = a_1 = \sigma\alpha_1 < \sigma\beta_1 = b_1 = b_1^z$. Daraus ergibt (1) nach (7.3—1) $\sigma\alpha = (\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2) < \sigma\beta = (\sigma\beta_1, \sigma\beta_2)$.
1212. Sei $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.3), $\sigma\beta$ gebildet nach (10.4), so ist für $z = i'$ $\sigma\beta_1 = \sigma(\beta_{11}, \Omega_{i'}) = (b_1, i') = b_1^z$ wegen $Sb_1 \geqq S\beta_{11} > i'$. Aus $\alpha_1 < \beta_1$ folgt wegen $G\alpha_1 + G\beta_1 < G\alpha + G\beta$ nach I.V. $a_1 = a_1^z = \sigma\alpha_1 < \sigma\beta_1 = b_1^z$; für $i' < z$ ist $S\alpha_1 \leqq i$ und $Sa_1 \leqq i < z = Sb_1^z$, also gilt $a_1^z < b_1^z$; daraus folgt mit (1) und (7.3—1) $a = (\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2) < b = (b_1, \sigma\beta_2)$.
1213. Sei $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.3), $\sigma\beta$ gebildet nach (10.5). Dann ist $\beta_1 = (\beta_{11}, \Omega_{i'}) + m + 1$, $\sigma\beta_1 = (b_{11}, i') + m + 1$ und $b_1 = (b_{11}, i') + m$. Es gilt $z = i'$ und aus $\alpha_1 < \beta_1$ folgt nach I.V. $a_1 = a_1^z = \sigma\alpha_1 < \sigma\beta_1 = b_1 + 1$. Wäre $\sigma\alpha_1 = b_1$, so hätten wir $\alpha_1 = (\beta_{11}, \Omega_{i'}) + m$; für $m = 0$ wäre dann $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.4), für $m > 0$ wäre $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.5) im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $a_1^z < b_1^z$ und damit nach (7.3—1) wegen (1) $a < b$.
1221. Sei $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.4), $\sigma\beta$ nach (10.3). Dann gilt wegen $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \Omega_{i'}) < \beta_1$ $S\alpha_1 = S\beta_1 = i'$ und $Sb_1 = S\sigma\beta_1 = i' = z$. Mit $\sigma\alpha_1 = (a_1, i')$ ist $Sa_1 \geqq S\alpha_{11} > i'$ und nach I.V. $a_1^z = (a_1, z) = \sigma\alpha_1 < \sigma\beta_1 = b_1 = b_1^z$ und wegen (1) nach (7.3—1) $a = (a_1, \sigma\alpha_2) < b = (\sigma\beta_1, \sigma\beta_2)$, da $K_i\,\sigma\alpha_1 = K_i(a_1, i') = K_ia_1$ ist.
1222. Seien $\sigma\alpha$ und $\sigma\beta$ nach (10.4) gebildet. Dann ist $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \Omega_{i'})$, $\beta_1 = (\beta_{11}, \Omega_{i'})$ und nach Lemma 24—2) ist $i' < S\alpha_{11} \leqq Sa_1$ und $i' < S\beta_{11} \leqq Sb_1$ und

(2) $\sigma\alpha_1 = (a_1, i')$ und $\sigma\beta_1 = (b_1, i')$.

Nach I.V. haben wir wegen $\alpha_1 < \beta_1$ und $G\alpha_1 + G\beta_1 < G\alpha + G\beta$

(3) $(a_1, i') < (b_1, i')$.

Nach Lemma 3—2) ist $i < z$.
12221. Ist $z = i'$, so gilt nach (3) $a_1^z < b_1^z$ und wegen $K_i a_1 = K_i\, \sigma\alpha_1$, (1) und (7.3—1) $a = (a_1, \sigma\alpha_2) < b = (b_1, \sigma\beta_2)$.
12222. Ist $i' < z$, so gilt

(4) $a_1^z < b_1^z \vee b_1 = (a_1, z) = a_1^z$:

Wäre $a_1^z = b_1^z \wedge Ga_1 = Gb_1$, so folgte $a_1 = b_1$ im Widerspruch zu (3). Wäre $b_1^z < a_1^z \vee (a_1^z = b_1^z \wedge Gb_1 < Ga_1)$, so müßte (3) nach (7.3—3) gelten; weil nach Lemma 3—4) $K_{i'}\, b_1 = K_i\, b_1 < i'$ ist, wäre dann $(a_1, i') \leqq K_{i'}\, b_1 \cup \{i'\} \leqq i'$ im Widerspruch zu (7.2). Aus (4) und (1) ergibt (7.3—1) wegen $K_i\, a_1 = K_i\, \sigma\alpha_1$ $a < b$.
1223. Ist $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.4), $\sigma\beta$ nach (10.5), so gilt $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \Omega_{i'})$ und $\sigma\alpha_1 = (a_1, i')$ mit $i' < S\alpha_{11} \leqq Sa_1$. Weiter gilt $\sigma\beta_1 = b_1 + 1$. Daher haben wir $z = i'$ und nach I.V. $a_1^z = \sigma\alpha_1 < \sigma\beta_1 = b_1 + 1$. Für $a_1^z = b_1$ gilt wegen $Ga_1 < Gb_1$ und $K_i a_1 = K_i\, \sigma\alpha_1$ sowie (1) nach (7.3—1) $a < b$. Für $a_1^z < b_1$ ist wegen (1), $K_i\, a_1 = K_i\, \sigma\alpha_1$ und (7.3—1) $a < b$.
1231. Sei $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.5), $\sigma\beta$ nach (10.3) oder (10.5). Dann gilt $\sigma\alpha_1 = a_1 + 1$ und $\sigma\beta_1 = b_1$ bzw. $\sigma\beta_1 = b_1 + 1$. Es gilt $z = i'$ und nach I.V. $a_1 < \sigma\alpha_1 = a_1 + 1 < \sigma\beta_1 = b_1$ bzw. $= b_1 + 1$. Daraus folgt $a_1 = a_1^z < b_1 = b_1^z$ und mit $K_i\, a_1 \subset K_i\, \sigma\alpha_1$ und (1) gilt nach (7.3—1) $a < b$.
1232. Sei $\sigma\alpha$ gebildet nach (10.5), $\sigma\beta$ nach (10.4). Dann gilt $z = i'$, da $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \Omega_{i'}) + m + 1$ ist, und nach I.V. $\sigma\alpha_1 = a_1 + 1 < \sigma\beta_1 = (b_1, i') = b_1^z$. Daraus folgt $a_1^z = a_1 < b_1^z$ und wegen (1) nach (7.3—1) $a < b$.

2. Sei $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 < \beta_2$. Nach I.V. ist $\sigma\alpha_2 < \sigma\beta_2$. Aus $\alpha_1 = \beta_1$ folgt $a_1 = b_1$ und damit nach (7.3—2) $a < b$.

3. Ist $\beta_1 < \alpha_1$, so gilt $\alpha \leqq K_i\, \beta_1 \cup \{\beta_2\}$. Nach I.V. und Lemma 27 ist $\sigma\alpha \leqq K_i\, \sigma\beta_1 \cup \{\sigma\beta_2\}$. Die Definition von σ liefert $K_i\, b_1 \subset K_i\, \sigma\beta_1 \subset K_i\, b_1 \cup \{0\}$. Nach Lemma 8 gilt $a \leqq K_i\, b_1 \cup \{b_2\} < b$.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen:

Satz 3. *Das System Σ aus* [1] *und das System $W(\mathbb{N})$ sind zueinander ähnlich.*

§ 5. Definition einer Folge W_α von wohlgeordneten Mengen

Sei U ein Abschnitt der Klasse aller Ordinalzahlen. Wir definieren eine Folge $\{W_\alpha\}_{\alpha \in U}$ von wohlgeordneten Mengen W_α durch transfinite Induktion über U.

(11.1) $W_0 := \mathbb{N}$.

(11.2) $W_{\alpha'} := W(W_\alpha)$, *wenn α' der Nachfolger von α ist.*

(11.3) *Ist λ Limeszahl und für jedes $\beta < \lambda$ W_β erklärt, so sei*
$W_\lambda := \langle \bigcup_{\beta < \lambda} (W_\beta \times \{\beta\}), < \rangle$,

wobei die Relation $<$ auf $\bigcup_{\beta<\lambda}(W_\beta\times\{\beta\})$ wie folgt definiert ist:

$$(a,\beta_1)<(b,\beta_2):\Leftrightarrow \beta_1<\beta_2 \vee [\beta_1=\beta_2\wedge a\mathrel{\dot{<}} b]\,.$$

$\dot{<}$ sei die Ordnungsrelation auf W_{β_1}.

Wir bezeichnen mit $\varphi\alpha$ den *Ordnungstyp von* W_α.
Die Definition (11.3) ergibt, daß für Limeszahlen λ gilt:

(i) $\varphi\lambda=\sum_{\alpha<\lambda}\varphi\alpha$.

Lemma 29. $\alpha<\beta\Rightarrow\varphi\alpha<\varphi\beta$.

Beweis durch transfinite Induktion über β. Für $\beta=\alpha'$ gilt die Behauptung: Die Funktion $h: W_\alpha\to W_{\alpha'}=W(W_\alpha)$, die gegeben ist durch $hx:=(x,0)$ ($\{0,x\}\subset W_\alpha$), bildet W_α nach Lemma 10 ordnungstreu in den echten Abschnitt der Terme nullter Stufe aus $W_{\alpha'}$ ab. — Ist die Behauptung bewiesen für alle $\bar\beta$ mit $\alpha<\bar\beta<\beta$ und ist β isoliert, $\beta-1$ der Vorgänger von β, so gilt $\varphi\alpha<\varphi(\beta-1)<\varphi\beta$. — Ist β Limeszahl, so gibt es ein β^* mit $\alpha<\beta^*<\beta$, und es ist $\varphi\alpha<\varphi\beta^*\leqq\varphi\beta$, letzteres weil die Abbildung $g: W_{\beta^*}\to W_\beta$ mit $ga=(a,\beta^*)$ W_{β^*} ähnlich in W_β abbildet.

Um auch die Stetigkeit von φ zu zeigen, brauchen wir für alle $\alpha\in U$ die Beziehung $\varphi\alpha+\varphi(\alpha')=\varphi(\alpha')$. Wir definieren dafür zunächst eine Funktion f von $W_{\alpha'}$ in $W_{\alpha'}$, die $W_{\alpha'}$ in die Menge $\{a|a\in W_{\alpha'}\wedge Sa>0\}$ abbildet, wobei 0 das kleinste Element von W_α ist.

Sei N der Abschnitt von W_α, der durch das kleinste Limeselement ω von W_α gegeben ist. Wir bezeichnen die Elemente von N mit i, j, k, m, n.

Definition von $f: W_{\alpha'}\to W_{\alpha'}$

(12.1) $fn:=n'$ *für alle* $n\in N$,

(12.2) $fx:=x$ *für alle* $x\in W_\alpha\setminus N$,

(12.3) $f(a,b):=(fa,fb)$ *für* $(a,b)\in W_{\alpha'}$,

(12.4) $f(a_1\#\cdots\# a_p):=fa_1\#\cdots\# fa_p$ *für* $p>1$ *und* $\{a_1,\ldots,a_p\}\subset W_{\alpha'}\cap H$.

Lemma 30. Die Abbildung f ist eine Funktion. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

(1) $Sa<\omega\Rightarrow Sfa=(Sa)'$,

(2) $Sa\geqq\omega\Rightarrow Sfa=Sa$,

(3) $i<\omega\Rightarrow f(K_i\,a)=K_{i'}\,fa$,

(4) $x\geqq\omega\Rightarrow f(K_x a)=K_x fa$,

(5) $i<\omega\Rightarrow(i\in Ya\Leftrightarrow i'\in Yfa)$,

(6) $a<b\Leftrightarrow fa<fb$.

Beweise von (1) bis (4) durch Induktion über Ga. (5) folgt aus der Definition von Ya und aus (1) bis (4). (6) erhält man durch Induktion über $Ga + Gb$, in die für $Sa = Sb < \omega$ und $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ eine Induktion über die Elemente von $Ya_1 \cup Yb_1$, absteigend geordnet, eingefügt ist, wie wir sie schon mehrfach angewendet haben.

Sei $W^* := \{\langle a, 0\rangle | a \in W_\alpha\} \cup \{\langle a, 1\rangle | a \in W_{\alpha'}\}$.

W^* sei wie folgt wohlgeordnet:

$\langle a, i\rangle < \langle b, j\rangle :\Leftrightarrow i < j \vee (i = j \wedge a < b)$.

Dann hat W^* den Ordnungstyp $|W^*| = \varphi\alpha + \varphi\alpha'$. Wir definieren eine Abbildung σ der wie beschrieben wohlgeordneten Menge W^* in $W_{\alpha'}$:

$$\sigma \langle a, i\rangle := \begin{cases} (a, 0) & \text{für} \quad i = 0\,, \\ fa & \text{für} \quad i = 1\,. \end{cases}$$

σ ist eine Funktion, die W^* injektiv und ähnlich in $W_{\alpha'}$ abbildet. Daraus folgt

(ii) $\varphi\alpha + \varphi(\alpha') \leqq \varphi(\alpha')$.

Lemma 31. *φ ist eine Normalfunktion auf U.*

Beweis. Wegen Lemma 29 genügt es, die Stetigkeit von φ zu zeigen. Aus (i) und (ii) folgt nach bekannten Sätzen über Funktionen von Ordinalzahlen für jede Limeszahl λ $\varphi\lambda = \lim_{\alpha<\lambda} \varphi\alpha$.
Aus der Stetigkeit von φ ergibt sich sofort

Lemma 32. *Ist $\alpha > 0$ und gilt für alle $\bar\beta \leqq \alpha$ $\varphi\bar\beta > \bar\beta$, so gibt es ein $\beta < \alpha$ derart, daß α im System W_β dargestellt werden kann, d.h. daß $\alpha < \varphi\beta$ ist.*

Beweis. Ist α isoliert, so ist die Behauptung trivial. Ist α Limeszahl, so gibt es wegen der Stetigkeit von φ zu $\alpha < \varphi\alpha$ ein $\beta < \alpha$ mit $\alpha < \varphi\beta$.
Die kleinste Ordinalzahl, für die die Voraussetzung von Lemma 32 nicht gilt, ist $\alpha^* := \sup_{i<\omega} \varphi^i 0$, wobei φ^i die i-te Iterierte von φ ist. α^* kann man in keinem System W_β mit $\beta < \alpha^*$ darstellen. Ohne zusätzliche Definition ist φ nicht über α^* hinaus erklärbar. α^* *ist die Grenzzahl unseres Darstellungsverfahrens.*

ZITIERTE LITERATUR

[1] H. Pfeiffer: Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen, diese Zeitschrift, Band **12**, pp. 12—17.

[2] K. Schütte: Ein konstruktives System von Ordinalzahlen, diese Zeitschrift, Band **11**, pp. 126—137 und Band **12**, pp. 3—11.

Arch. math. Logik 13 (1970), 91—96.

SUBSTITUTION ALGEBRAS IN THEIR RELATION TO CYLINDRIC ALGEBRAS*

By Anne Preller**

In this article we shall follow the terminology and symbolism of the forthcoming book of Henkin, Monk and Tarski on cylindric algebras [1]. The numerical expressions such as "1.1.1" used in this article refer to definitions, theorems and numerated remarks in [1].

We recall that a cylindric algebra of dimension α (where α is an arbitrary ordinal), for brevity, a CA_α, is an algebraic structure $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1, c_\varkappa, d_{\varkappa\lambda}\rangle_{\varkappa,\lambda<\alpha}$ formed by a non empty set A, two binary operations $+$ and $\cdot$, a unary operation $-$, two distinguished elements 0 and 1, a sequence of unary operations $c_\varkappa$ with $\varkappa < \alpha$, and a double sequence of distinguished elements $d_{\varkappa\lambda}$ with $\varkappa, \lambda < \alpha$; the operations $c_\varkappa$ are called cylindrifications and the elements $d_{\varkappa\lambda}$ referred to as diagonal elements. In what follows, the elements of the algebra $\mathfrak{A}$ (or, more precisely, of its universe A) will be represented by $x, y, z, \ldots$ and ordinals smaller than α by $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$. The class of cylindric algebras of dimension α is characterized by the following postulates which are assumed to be satisfied by any x, y and any $\varkappa$, λ, μ (see 1.1.1)

(c_0) the structure $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ is a boolean algebra,
(c_1) $c_\varkappa 0 = 0$,
(c_2) $x \leqq c_\varkappa x$,
(c_3) $c_\varkappa(x \cdot c_\varkappa y) = c_\varkappa x \cdot c_\varkappa y$,
(c_4) $c_\varkappa c_\lambda x = c_\lambda c_\varkappa x$,
(c_5) $d_{\varkappa\varkappa} = 1$,
(c_6) if $\varkappa \neq \lambda, \mu$, then $d_{\lambda\mu} = c_\varkappa(d_{\lambda\varkappa} \cdot d_{\varkappa\mu})$,
(c_7) if $\varkappa \neq \lambda$, then $c_\varkappa(d_{\varkappa\lambda} \cdot x) \cdot c_\varkappa(d_{\varkappa\lambda} \cdot - x) = 0$.

A CA_α is called dimension complemented (see 1.11.1), if the following condition holds:

(D) for every x there is $\varkappa$ such that $c_\varkappa x = x$.

Since by the dimension set Δx of an element x we understand the set of all $\varkappa$ such that $c_\varkappa x \neq x$ (see 1.6.1), (D) obviously expresses the fact that for every element x there is a $\varkappa$ which does not belong to Δx.

---

* Eingegangen am 3. 3. 1969.

** The results of this paper were obtained when the author was working on a research project at the University of California, Berkeley, directed by Professors Henkin and Tarski and sponsored by the National Science Foundation (Grant No. NSF GP-6232X).
I wish to express my indebtedness to Professor Alfred Tarski in preparing this paper and his consistently stimulating questions and remarks.

For any $\varkappa$, λ a unary operation called substitution and denoted by $S^\varkappa_\lambda$ is defined in the theory of cylindric algebras by the following formula (see 1.5.1)

(E) $S^\varkappa_\lambda x = x$ if $\varkappa = \lambda$; $S^\varkappa_\lambda x = c_\varkappa(d_{\varkappa\lambda} \cdot x)$ if $\varkappa \neq \lambda$.

Various familiar notions concerning boolean algebras are introduced in the theory of cylindric algebras in the usual way. Thus we assume it to be understood what is meant by the (boolean) inclusion $\leqq$, by the least element satisfying a certain condition and by the sum (the least upper bound) $\sum_{i \in I} x_i$ of a system of elements x_i indexed by elements $i \in I$.

The following two theorems are proved in [1] (see 1.5.7 and 1.11.6)

(F) $d_{\varkappa\lambda}$ is the least element x such that $S^\varkappa_\lambda x = 1$,

(G) If α is infinite and if the CA_α $\mathfrak{A}$ is dimension complemented, then for any x and $\varkappa$, $c_\varkappa x = \sum_{\lambda < \alpha} S^\varkappa_\lambda x$.

(F) clearly shows that the diagonal elements are definable in terms of substitutions (and boolean notions). Similarly (G) implies that in dimension complemented cylindric algebras the operations of cylindrification are also definable in the same terms, provided that α is infinite, Hence, we see that for infinite α the dimension complemented CA_α's can be construed as algebraic structures in which the operation $S^\varkappa_\lambda$ are included in the list of fundamental operations, while the operations $c_\varkappa$ and the distinguished elements $d_{\varkappa\lambda}$ are eliminated from this list. The problem naturally arises of characterizing the new algebras intrinsically, by means of a simple postulate system; see remarks following 1.11.6. We shall outline here a solution of this problem. For a related work see [2], [3].

By a substitution algebra of dimension α, for brevity SA_α, we shall understand an algebraic structure $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, 0, 1, S^\varkappa_\lambda \rangle_{\varkappa, \lambda < \alpha}$ with binary operations $+$ and $\cdot$, an unary operation $-$ distinguished elements 0 and 1 and a system of unary operations $S^\varkappa_\lambda$ satisfying the following postulates for any $x, y \in A$ and any $\varkappa, \lambda, \mu, \nu < \alpha$

(S_0) $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ is a boolean algebra,

(S_1) $S^\varkappa_\lambda (x + y) = S^\varkappa_\lambda x + S^\varkappa_\lambda y$,

(S_2) $S^\varkappa_\lambda (-x) = -S^\varkappa_\lambda x$,

(S_3) $S^\varkappa_\varkappa x = x$,

(S_4) $S^\mu_\lambda S^\varkappa_\mu x = S^\mu_\lambda S^\varkappa_\lambda x$,

(S_5) if $\lambda \neq \varkappa$, then $S^\varkappa_\mu S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\lambda x$,

(S_6) if $\varkappa \neq \mu, \nu$ and $\mu \neq \lambda$, then $S^\varkappa_\lambda S^\mu_\nu x = S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x$,

(S_7) $\sum_{\lambda < \alpha} S^\varkappa_\lambda x$ exists (i.e., there is a y such that $y + S^\varkappa_\lambda x = y$ for all $\lambda < \alpha$, and $z + y = z$ whenever $z + S^\varkappa_\lambda x = z$ for all $\lambda < \alpha$),

(S_8) there is a least x such that $S^\varkappa_\lambda x = 1$ (i.e., there is a x such that $S^\varkappa_\lambda x = 1$, and $y + x = y$ whenever $S^\varkappa_\lambda y = 1$).

As is easily seen, postulates (S_1) and (S_2) together express the fact that each of the operations $S^\varkappa_\lambda$ is an endomorphism of the boolean algebra $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$.

A SA_α is called dimension complemented, if it satisfies the condition

(T) For every x, y there exists $\varkappa$ such that $S^\varkappa_\lambda x = x$ and $S^\varkappa_\lambda y = y$ for all $\lambda < \alpha$.

Since in a SA_α we understand by the base Δx of an element x the set of all ordinals $\varkappa < \alpha$ such that $S^\varkappa_\lambda x \neq x$ for some λ, (T) expresses the fact that for every element x and every element y there is a $\varkappa$ which does not belong to the base of x and not belong to the base of y. The condition which would exactly correspond to (D) reads as follows:

(T′) For every x there exists $\varkappa$ such that $S^\varkappa_\lambda x = x$ for all $\lambda < \alpha$.

(T) obviously implies (T′). We do not know, however, whether (T) can be derived from (T′) and (S_0)–(S_8) and whether therefore (T′) is sufficiently strong for the purposes of the subsequent discussion.

The notions of cylindrification and diagonal elements are introduced in the theory of SA_α's by means of the following definitions:

(U) $c_\varkappa x = \sum\limits_{\lambda<\alpha} S^\varkappa_\lambda x$,

(V) $d_{\varkappa\lambda}$ is the least element x such that $S^\varkappa_\lambda x = 1$.

(U) can be accepted as a definition since the element $\sum\limits_{\lambda<\alpha} S^\varkappa_\lambda x$ exists by (S_7) (and is unique by the theory of boolean algebras). A similar remark applies to (V) in view of postulate (S_8).

THEOREM: (i) If $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1, c_\varkappa, d_{\varkappa\lambda}\rangle_{\varkappa,\lambda<\alpha}$ is a dimension complemented CA_α and if $S^\varkappa_\lambda x$ is defined by means of (E) (for any $x \in A$, any $\varkappa, \lambda < \alpha$), then $\mathfrak{A}' = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1, S^\varkappa_\lambda\rangle_{\varkappa,\lambda<\alpha}$ is a dimension complemented SA_α, and conditions (U) and (V) hold.

(ii) Conversely, if $\mathfrak{A}' = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1, S^\varkappa_\lambda\rangle_{\varkappa,\lambda<\alpha}$ is a dimension complemented SA_α and if $c_\varkappa x$ and $d_{\varkappa\lambda}$ are defined by means of (U) and (V) (for any $x \in A$, any $\varkappa, \lambda < \alpha$), then $\mathfrak{A}' = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1, c_\varkappa, d_{\varkappa\lambda}\rangle_{\varkappa,\lambda<\alpha}$ is a dimension complemented CA_α and condition (E) holds.

Proof. First remark that the assumption of both (i) and (ii) imply that $\alpha \geqq 1$. (i) has been essentially established in various results of [1]. (S_0) is nothing else than (C_0), (S_1)–(S_6) are proved in 1.5.3 and 1.5.10, (S_8) and (V) follows from 1.5.7. In case that $\alpha \geqq \omega$, (S_7) and (U) are consequences of 1.11.6 and (T) is implied by 1.11.4 and by the following property (which holds for every CA_α provided $\alpha \geqq 2$): $S^\varkappa_\lambda x = x$ for all $\lambda < \alpha$ if and only if $c_\varkappa x = x$. In case that $\alpha < \omega$, the dimension complemented CA_α $\mathfrak{A}$ is discrete. From this we conclude that $S^\varkappa_\lambda x = x$ for all $\varkappa, \lambda < \alpha$ and clearly (S_7), (U) and (T) hold.

To prove (ii), we assume in agreement with the hypothesis of (ii) that the algebra $\mathfrak{A}' = \langle A, +, \cdot, -, S^\varkappa_\lambda\rangle_{\varkappa,\lambda<\alpha}$ satisfies conditions (S_0)–(S_8) and (T), and that the operations $c_\varkappa$ and the elements $d_{\varkappa\lambda}$ have been respectively defined by (U) and (V). From these assumptions we derive successively the following properties of $\mathfrak{A}'$.

(1) $S^\varkappa_\lambda S^\mu_\lambda x = S^\mu_\lambda S^\varkappa_\lambda x$.

In fact, (1) is obvious in case $\varkappa = \mu$. It follows from (S_3), if $\varkappa = \lambda$ or $\mu = \lambda$; finally it is a particular case of (S_6), if $\varkappa \neq \mu$, $\varkappa \neq \lambda$ and $\mu \neq \lambda$.

(2) $S^\mu_\lambda S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\lambda S^\mu_\varkappa x$.

We have indeed: $S^\mu_\lambda S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\lambda S^\mu_\lambda x$ by (1) and $S^\varkappa_\lambda S^\mu_\lambda x = S^\varkappa_\lambda S^\mu_\varkappa x$ by (S_4).

(3) $S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\nu S^\mu_\varkappa S^\varkappa_\lambda x$ provided $\varkappa \neq \lambda$. In particular $S^\mu_\nu x = S^\varkappa_\nu S^\mu_\varkappa x$, for $\varkappa$ not belonging to the base of x.

To show it, notice that
$$\begin{aligned} S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x &= S^\mu_\nu S^\varkappa_\nu S^\varkappa_\lambda x \text{ by } (S_5)\\ &= S^\varkappa_\nu S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x \text{ by } (1)\\ &= S^\varkappa_\nu S^\mu_\varkappa S^\varkappa_\lambda x \text{ by } (S_4)\end{aligned}$$

(4) $S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\pi S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x$ provided $\varkappa \neq \lambda, \nu$.

Indeed, if $\mu = \varkappa$, this follows from (S_5); if $\mu = \lambda$, we have
$$\begin{aligned} S^\varkappa_\pi S^\mu_\nu S^\varkappa_\mu x &= S^\varkappa_\pi S^\varkappa_\nu S^\mu_\nu x \text{ by } (2)\\ &= S^\varkappa_\nu S^\mu_\nu x \quad \text{by } (S_5)\\ &= S^\mu_\nu S^\varkappa_\mu x \quad \text{by } (2);\end{aligned}$$

if finally, $\mu \neq \varkappa$ and $\mu \neq \lambda$, we obtain:
$$\begin{aligned} S^\varkappa_\pi S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x &= S^\varkappa_\pi S^\varkappa_\lambda S^\mu_\nu x \text{ by } (S_6)\\ &= S^\varkappa_\lambda S^\mu_\nu x \quad \text{by } (S_5)\\ &= S^\mu_\nu S^\varkappa_\lambda x \quad \text{by } (S_6)\end{aligned}$$

(5) If $\varkappa$ does not belong to the base of x, then $\varkappa$ does not belong to the base of $S^\mu_\nu x$ provided $\nu \neq \varkappa$.

This follows immediately from (4).

(6) If $\varkappa \in \Delta_x$, $\lambda \notin \Delta_x$, then $\lambda \in \Delta_{S^\varkappa_\lambda x}$. In particular if $\alpha \geqq 2$ then for every x there are at least two distinct ordinals $< \alpha$, which do not belong to Δ_x.

Suppose $\varkappa \in \Delta_x$, $\lambda \notin \Delta_x$. If we had $\lambda \notin \Delta_{S^\varkappa_\lambda x}$ we would obtain $S^\varkappa_\mu x = S^\lambda_\mu S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\lambda x = S^\lambda_\varkappa S^\varkappa_\lambda x = x$ which is impossible.

Now if $\alpha \geqq 2$, then for x such that $\Delta_x = \emptyset$ we certainly have two distinct ordinals $< \alpha$ which do not belong to Δ_x. For x such that $\Delta_x \neq \emptyset$, let $\varkappa \in \Delta_x$. By (T) there is $\lambda \notin \Delta_x$. Again by (T) there is $\nu \notin (\Delta_x \cup \Delta_{S^\varkappa_\lambda x})$. As $\lambda \in \Delta_{S^\varkappa_\lambda x}$ we have $\nu \neq \lambda$.

(7) If $S^\varkappa_\lambda x \geqq x$ for all λ, then $S^\varkappa_\mu x = x$ for all μ.

Notice that this is obvious if $\varkappa$ does not belong to the base of x. Suppose now that $\varkappa$ belongs to the base of x but λ does not belong to it. Such a λ exists by (T). Then $\lambda \neq \varkappa$ and we have $S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\mu S^\varkappa_\lambda x$ by (S_5) and $S^\varkappa_\mu S^\varkappa_\lambda x \geqq S^\varkappa_\mu x$ for all $\mu < \alpha$. Now we conclude, using (3), (S_3) and (5), that $x = S^\lambda_\varkappa S^\varkappa_\lambda x \geqq S^\lambda_\varkappa S^\varkappa_\mu x = S^\varkappa_\mu x$ provided $\mu \neq \lambda$. Now if $\alpha = 1$, (7) trivially holds. If $\alpha \geqq 2$, by (6) there is $\nu \neq \lambda$ which does not belong to Δ_x, so we also have $x \geqq S^\varkappa_\mu x$ for $\mu \neq \nu$. In particular $x \geqq S^\varkappa_\lambda x$ and finally $x \geqq S^\varkappa_\mu x$ for all $\mu < \alpha$.

(8) $\varkappa \notin \Delta_x$ if and only if $c_\varkappa x = x$. Indeed, if $\varkappa \notin \Delta_x$, then $c_\varkappa x = \sum_{\lambda<\alpha} S^\varkappa_\lambda x = x$. Conversely if $x = c_\varkappa x$, then $x \geqq S^\varkappa_\lambda x$ for all $\lambda < \alpha$ and by (7) $x = S^\varkappa_\lambda x$ for all $\lambda < \alpha$, i.e. $\varkappa \notin \Delta_x$.

(9) $S^\varkappa_\mu c_\varkappa x = c_\varkappa x$.

To establish this, notice that (9) trivially holds if $\varkappa \notin \Delta_x$. So we suppose $\varkappa \in \Delta_x$. Then for $\mu < \alpha$ $S^\varkappa_\mu c_\varkappa x \geqq S^\varkappa_\mu S^\varkappa_\lambda x = S^\varkappa_\lambda x$ for $\lambda \neq \varkappa$. Now let $\lambda \notin (\Delta_{S^\varkappa_\mu c_\varkappa x} \cup \Delta_x)$. Then $\lambda \neq \varkappa$ and we conclude $S^\varkappa_\mu c_\varkappa x = S^\lambda_\varkappa S^\varkappa_\mu c_\varkappa x \geqq S^\lambda_\varkappa S^\varkappa_\lambda x = x$. Then $S^\varkappa_\mu c_\varkappa x \geqq \sum_{\lambda<\alpha} S^\varkappa_\lambda x = c_\varkappa x$ and (9) follows from (7).

(10) $c_\varkappa(x \cdot c_\varkappa y) = c_\varkappa x \cdot c_\varkappa y$.

Indeed, $c_\varkappa(x \cdot c_\varkappa y) = \sum_{\lambda<\alpha} S^\varkappa_\lambda x \cdot S^\varkappa_\lambda c_\varkappa y = \sum_{\lambda<\alpha} S^\varkappa_\lambda x \cdot c_\varkappa y$ by (9) and $\sum_{\lambda<\alpha} S^\varkappa_\lambda x \cdot c_\varkappa y = c_\varkappa x \cdot c_\varkappa y$.

(11) $\Delta_{c_\varkappa x} \subset \Delta_x$.

To show this, let $\mu \notin \Delta_x$. Then $S^\mu_\nu c_\varkappa x \geqq S^\mu_\nu x = x$ for all $\nu < \alpha$ and if $\nu \neq \varkappa$, as $\varkappa \notin \Delta_{c_\varkappa x}$ by (9), then $\varkappa \notin \Delta_{S^\mu_\nu c_\varkappa x}$ by (5). This implies that $S^\mu_\nu c_\varkappa x \geqq S^\varkappa_\lambda x$ for all $\lambda < \alpha$, i.e., $S^\mu_\nu c_\varkappa x \geqq c_\varkappa x$ for all $\nu \neq \varkappa$. By (6), there is $\nu \neq \varkappa$ which does not belong to $\Delta_{c_\varkappa x}$, provided that $\alpha \geqq 2$. We then have $S^\mu_\varkappa c_\varkappa x = S^\nu_\varkappa S^\mu_\nu c_\varkappa x \geqq S^\nu_\varkappa c_\varkappa x = c_\varkappa x$. Finally $S^\mu_\lambda c_\varkappa x \geqq c_\varkappa x$ for all $\lambda < \alpha$ and we conclude by (7). If $\alpha = 1$, clearly (11) also holds so it is established for any $\alpha \geqq 1$.

(12) $d_{\varkappa\lambda} \leqq -x + S^\varkappa_\lambda x$.

This follows from (V) and the equalities:

$$S^\varkappa_\lambda(-x + S^\varkappa_\lambda x) = -S^\varkappa_\lambda x + S^\varkappa_\lambda S^\varkappa_\lambda x = -S^\varkappa_\lambda x + S^\varkappa_\lambda x = 1 .$$

(13) If $x \leqq d_{\varkappa\lambda}$, then $x \leqq S^\varkappa_\lambda x$.

Indeed, by (12) we decuce from $x \leqq d_{\varkappa\lambda}$ that $x \leqq -x + S^\varkappa_\lambda x$. Therefore $x = x(-x + S^\varkappa_\lambda x) = x \cdot S^\varkappa_\lambda x$, i.e. $x \leqq S^\varkappa_\lambda x$.

(14) If $\lambda \neq \varkappa$, then $S^\varkappa_\lambda x = c_\varkappa(d_{\varkappa\lambda} \cdot x)$.

To see this, notice that $d_{\varkappa\lambda} \cdot x \leqq S^{\varkappa}_{\lambda}(d_{\varkappa\lambda} \cdot x) = S^{\varkappa}_{\lambda} x$ by (13). Therefore $S^{\varkappa}_{\mu}(d_{\varkappa\lambda} x) \leqq S^{\varkappa}_{\mu} S^{\varkappa}_{\lambda} x$ for all $\mu, \lambda < \alpha$. We conclude that for $\lambda \neq \varkappa$ $S^{\varkappa}_{\lambda} x \geqq c_{\varkappa}(d_{\varkappa\lambda} \cdot x)$. On the other hand $S^{\varkappa}_{\lambda} x = S^{\varkappa}_{\lambda}(d_{\varkappa\lambda} \cdot x) \leqq c_{\varkappa}(d_{\varkappa\lambda} \cdot x)$.

(15) If $\mu \neq \varkappa, \lambda$, then $S^{\mu}_{\nu} d_{\varkappa\lambda} = d_{\varkappa\lambda}$ for all $\nu < \alpha$.

Suppose $\mu \neq \varkappa, \lambda$ and that $x \geqq d_{\varkappa\lambda}$. Then $S^{\varkappa}_{\lambda} S^{\mu}_{\varkappa} x = S^{\varkappa}_{\lambda} S^{\mu}_{\lambda} x = S^{\mu}_{\lambda} S^{\varkappa}_{\lambda} x = 1$; i.e. $d_{\varkappa\lambda} \leqq S^{\mu}_{\varkappa} x$. If, in addition $\nu \neq \varkappa$, then $S^{\varkappa}_{\lambda} S^{\mu}_{\nu} x = S^{\mu}_{\nu} S^{\varkappa}_{\lambda} x = 1$, i.e. $d_{\varkappa\lambda} \leqq S^{\mu}_{\nu} x$, In particular $d_{\varkappa\lambda} \leqq S^{\mu}_{\nu} d_{\varkappa\lambda}$ for all $\nu < \alpha$. (15) follows by (7).

(16) $S^{\lambda}_{\mu} d_{\varkappa\lambda} = d_{\varkappa\mu}$ provided $\varkappa \neq \lambda$.

To see it, consider $x \geqq d_{\varkappa\lambda}$. Then $S^{\varkappa}_{\mu} S^{\lambda}_{\mu} x = S^{\lambda}_{\mu} S^{\varkappa}_{\lambda} x = 1$ by (2), i.e. $S^{\lambda}_{\mu} x \geqq d_{\varkappa\mu}$. In particular $S^{\lambda}_{\mu} d_{\varkappa\lambda} \geqq d_{\varkappa\mu}$. By interchanging λ and μ we also have $S^{\mu}_{\lambda} d_{\varkappa\mu} \geqq d_{\varkappa\lambda}$. Therefore $S^{\lambda}_{\mu} S^{\mu}_{\lambda} d_{\varkappa\mu} \geqq S^{\lambda}_{\mu} d_{\varkappa\lambda}$. If $\mu = \lambda$, (16) clearly holds. If $\mu \neq \lambda$, then $\lambda \notin \Delta_{d_{\varkappa\mu}}$ by (15) and we obtain $d_{\varkappa u} \geqq S^{\lambda}_{\mu} d_{\varkappa\lambda}$ which proves (16).
We are now ready to show that $(C_0)-(C_7)$, (D) and (E) hold.
(C_0), (C_1), (C_2), (C_5) follow immediately. (C_3) has been proved in (10). We obtain (C_6) using (14) and (16): If $\mu \neq \varkappa, \lambda$ then $c_{\mu}(d_{\varkappa\mu} \cdot d_{\mu\lambda}) = c_{\mu}(d_{\mu\lambda} \cdot d_{\varkappa\mu}) = S^{\mu}_{\lambda} d_{\varkappa\mu} = d_{\varkappa\lambda}$. (C_7) is an immediate consequence of (14) and (S_2). (D) holds because of (8) and (T). (E) is implied by (S_3) and (14). Finally, it remains to prove (C_4), i.e. $c_{\varkappa} c_{\lambda} x = c_{\lambda} c_{\varkappa} x$. First we remark that the operations $c_{\varkappa}$ are self-conjugate, i.e. $(c_{\varkappa} x) \cdot y = 0$ implies $x(c_{\varkappa} y) = 0$. This is easily seen using (9): $-y \geqq c_{\varkappa} x$ implies $-S^{\varkappa}_{\lambda} y \geqq S^{\varkappa}_{\lambda} c_{\varkappa} x = c_{\varkappa} x \geqq x$ for all $\lambda < \alpha$. i.e. $c_{\varkappa} y \leqq -x$. From 1.2.6 it follows that $c_{\varkappa} c_{\lambda} x$ $c_{\varkappa} \sum_{\nu<\alpha} S^{\lambda}_{\nu} x = \sum_{\nu<\alpha} c_{\varkappa} S^{\lambda}_{\nu} x = \sum_{\mu,\nu<\alpha} S^{\varkappa}_{\mu} S^{\lambda}_{\nu} x$. Hence it suffices to show that $\sum_{\mu,\nu<\alpha} S^{\varkappa}_{\mu} S^{\lambda}_{\nu} x = \sum_{\mu,\nu<\alpha} S^{\lambda}_{\nu} S^{\varkappa}_{\mu} x$. In order to establish this, let $y = c_{\varkappa} c_{\lambda} x$, $z = c_{\lambda} c_{\varkappa} x$. We have $\lambda \notin \Delta_y$ by (9) and (11) and $y \geqq S^{\varkappa}_{\mu} S^{\lambda}_{\nu} x$ for all μ, ν. In particular $y \geqq S^{\varkappa}_{\mu} S^{\lambda}_{\lambda} x = S^{\varkappa}_{\mu} x$ for all μ and consequently $y = S^{\lambda}_{\nu} y \geqq S^{\lambda}_{\nu} S^{\varkappa}_{\mu} x$ for all μ, ν, i.e. $y \geqq z$. Similarly $z \geqq y$ which establishes (C_4) and with it our theorem.

BIBLIOGRAPHY

[1] Henkin, Monk, Tarski: Cylindric Algebras. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (forthcoming).

[2] Le Blanc: Transformation Algebras. Canadian Journal of Mathematics 1961.

[3] Preller: La Catégorie des Algèbres Quantifiées. Pub. Dep. Math. Lyon, T 3–I 1967.

ARCHIV FÜR MATHEMATISCHE LOGIK
UND GRUNDLAGENFORSCHUNG

13/3-4 **Dezember 1970**

HIERARCHIES OF NUMBER-THEORETIC FUNCTIONS II.*

By M. H. Löb and S. S. Wainer

Herrn Professor Dr. Kurt Schütte zum 60. Geburtstag gewidmet

3. Hierarchies of Recursive Functions

In this section we shall consider initial segments of the hierarchies $\{\mathfrak{E}_\alpha\}$ obtained by restricting α to range over the constructive ordinals.

Let o be the set of notations for the constructive ordinals, defined by Church and Kleene ([2]), and let ω_1 denote the least non-constructive ordinal.

If $a \in$ o, $|a|$ will denote the ordinal represented by a.

For each n, let $\lambda e x_1 \ldots x_n \cdot \Phi(e, x_1, \ldots, x_n)$ be the partial recursive function, constructed by Kleene, which enumerates all the n-ary partial recursive functions (see [6]).

Clearly, each path P through o determines uniquely, for each limit ordinal $\alpha < \omega_1$, a fundamental sequence, defined as follows:

$$\{\alpha\}(n) = |\Phi(a, n)|,$$

where 3.5^a is the notation for α in P.

Hence, by the results of Section 2, it is clear that for each path P through o, we can obtain an extension of the Grzegorczyk hierarchy, of length ω_1, which we shall denote by $\{\mathfrak{E}_\alpha^P\}_{\alpha < \omega_1}$.

We now show that such hierarchies are, in fact, hierarchies of recursive functions.

Let $(x)_i$ be the exponent of the $i + 1 - st.$ prime number in the prime factorization of x.

For each $a \in$ o we define a function $\lambda n x \cdot M_a(n, x)$ as follows:

$$\begin{cases} M_a(n, x) & = (n+1) \cdot (x+1) \text{ if } a = 1. \\ M_a(0, x) & = M_{(a)_0}(x, x) \text{ if } a = 2^{(a)_0} \text{ and } a > 1. \\ M_a(0, x) & = M_{\Phi((a)_2, x)}(0, r_a(x)) \text{ if } a = 3.5^{(a)_2}. \\ M_a(n+1, x) & = M_a(0, M_a(n, x)) \end{cases}$$

where, if $a = 3.5^{(a)_2}$, $r_a(0) = 0$ and, for every z,

$r_a(z+1) = \mu y\big(y > r_a(z)\ \&\ (i)_{\leq z}(M_{\Phi((a)_2, z+1)}(0, y) > M_{\Phi((a)_2, i)}(0, y))\big)$.

Now define a partial recursive function J by the following:

$$\begin{aligned} J(z, 1, n, x) &= 2^{(n+1)\cdot(x+1)} \\ J(z, 2^a, 0, x) &= 2^{(\Phi(z, a, x, x))_0} \text{ if } a > 0 \\ J(z, 3 \cdot 5^e, 0, 0) &= 2^{(\Phi(z, \Phi(e, 0), 0, 0))_0} \\ J(z, 3 \cdot 5^e, 0, x+1) &= 2^{(\Phi(z, \Phi(e, x+1), 0, s))_0} \cdot 3^s, \end{aligned}$$

* Eingegangen am 3. 12. 68. Teil I findet sich auf pp. 39—51 dieses Bandes.

where

$$s = \mu y\Big(y > (\Phi(z, 3\cdot 5^e, 0, x))_1 \\ \& (i)_{\leq x}\big((\Phi(z, \Phi(e, x+1), 0, y))_0 > (\Phi(z, \Phi(e, i), 0, y))_0\big)\Big)$$

$$J(z, b, n+1, x) = 2^{(\Phi(z,b,0,(\Phi(z,b,n,x))_0))_0} \text{ if } b > 1.$$

Since J is partial recursive, we can apply the Recursion Theorem of Kleene [6] in order to obtain a number k such that

$$\Phi(k, a, n, x) \simeq J(k, a, n, x)\,.$$

It can now be proved, by induction, that

$$(\Phi(k, a, n, x))_0 \simeq M_a(n, x)\,,$$

and hence the function $\lambda a n x \cdot M_a(n, x)$ is partial recursive.
Now take any path P through $\circ$, and for each limit ordinal $\alpha < \omega_1$ use the fundamental sequence defined by

$$\{\alpha\}(n) = |\Phi(a, n)|$$

where $3\cdot 5^a$ is the notation for α in P, in order to define the functions $\lambda n x \cdot F^n_\beta(x)$ for $\beta < \omega_1$.
Then, by induction, it can be proved that, for each $p \in P$, the following holds for all n and x,

$$M_p(n, x) = F^n_{|p|}(x)\,.$$

Hence, for every $\alpha < \omega_1$, $\lambda n x \cdot F^n_\alpha(x)$ is recursive.
Thus, for each $\alpha < \omega_1$, $\mathfrak{E}^P_\alpha$ is a class of recursive functions.
Therefore, for each path P through $\circ$, $\{\mathfrak{E}^P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ is a hierarchy of recursive functions properly extending the Grzegorczyk hierarchy.

4. A Hierarchy below ε_0

This section will be concerned with a particular choice of fundamental sequences for limit ordinals less than the first epsilon number.
Recall that, in the definition of $\lambda n x \cdot F^n_\alpha(x)$ for α a limit, we made use of the following "diagonalization":

$$F^0_\alpha(x) = F^0_{\{\alpha\}(x)}(\varrho_\alpha(x))\,.$$

This is certainly more complicated, and apparently stronger, than the usual from of diagonalization, in which "$\varrho_\alpha(x)$" is simply replaced by "x".
However, we shall now define, for each limit ordinal $\alpha < \varepsilon_0$, a fundamental sequence for which we can prove that $\varrho_\alpha = \lambda x \cdot x$.

Definition 4.0

Take any limit ordinal $\alpha < \varepsilon_0$.
Then α can be written as a polynomial in ω as follows:

$$\alpha = \omega^{\alpha_1}\cdot a_1 + \omega^{\alpha_2}\cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_r}\cdot a_r\,,$$

where

(i) $\alpha_r < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha$, and $\alpha_r > 0$.

(ii) for each $i = 1, \ldots, r$, $a_i \in N$, and $a_r > 0$.

Now, by transfinite induction, define, for each such α, a function $\{\alpha\}$, mapping N into α, as follows:

(1) If $\alpha_r < \omega$ then for each n,
$\{\alpha\}(n) = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{r-1}} \cdot a_{r-1} + \omega^{\alpha_r} \cdot (a_r - 1) + \omega^{\alpha_r^{-1}} \cdot n + \cdots + \omega^1 \cdot n + 2n.$

(2) If α_r is a successor ordinal $> \omega$ then for each n,
$\{\alpha\}(n) = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{r-1}} \cdot a_{r-1} + \omega^{\alpha_r} \cdot (a_r - 1) + \omega^{\alpha_r^{-1}} \cdot n.$

(3) If α_r is a limit ordinal, and $\{\alpha_r\}$ has already been defined, then for each n,

$$\{\alpha\}(n) = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{r-1}} \cdot a_{r-1} + \omega^{\alpha_r} \cdot (a_r - 1) + \omega^{\{\alpha_r\}(n)}.$$

It is clear that, for each limit ordinal $\alpha < \varepsilon_0$, the sequence $\{\alpha\}(n)$, $n \in N$, defined above is a fundamental sequence to α.
Throughout this, and the following, sections we will be solely concerned with the fundamental sequences defined in 4.0, and the resulting hierarchy $\{\mathfrak{E}_\beta\}_{\beta < \varepsilon_0}$.
First we note some trivial consequences of Def. 4.0.

(a) If $0 < \alpha_r < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \varepsilon_0$ then for each n

$$\begin{aligned} &\{\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot (a_r + 1)\}(n) \\ &= \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_{r-1}} \cdot a_{r-1} + \{\omega^{\alpha_r} \cdot (a_r + 1)\}(n) \end{aligned}$$

(b) For every ordinal $\beta < \varepsilon_0$, $\{\omega^{\beta+1}\}(0) = 0$, and hence, for every a we have, by (a),
$\{\omega^{\beta+1} \cdot (a + 1)\}(0) = \omega^{\beta+1} \cdot a + \{\omega^{\beta+1}\}(0) = \omega^{\beta+1} \cdot a.$

Now we shall prove a sequence of Lemmas leading up to the main result of this section, that for every limit ordinal $\alpha < \varepsilon_0$, ϱ_α is the identity function.

Lemma 4.1

For all x, $\varrho_\omega(x) = x$.

Proof

By definition of ϱ_ω, $\varrho_\omega(0) = 0$.
Assume that $\varrho_\omega(n) = n$.
Now for each $i \leqq n$, $F^0_{2n+2}(n + 1) > F^0_{2i}(n + 1)$.
But $\{\omega\}(x) = 2 \cdot x$ for all x, by Def. 4.0.
Hence for each $i \leqq n$, $F^0_{\{\omega\}(n+1)}(n + 1) > F^0_{\{\omega\}(i)}(n + 1)$.
Thus we have the following:

$$\begin{aligned} \varrho_\omega(n + 1) &= \mu y\big(y > \varrho_\omega(n) \;\&\; (i)_{\leqq n}\,(F^0_{\{\omega\}(n+1)}(y) > F^0_{\{\omega\}(i)}(y))\big) \\ &= \mu y\big(y > n \;\&\; (i)_{\leqq n}\,(F^0_{\{\omega\}(n+1)}(y) > F^0_{\{\omega\}(i)}(y))\big) \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

Hence, by induction, $\varrho_\omega = \lambda x \cdot x$.

Lemma 4.2

Suppose α is a limit ordinal of the form

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^{k+1} \cdot (a + 1)$$

where $\varepsilon_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_r > k + 1$, and $k < \omega$.
Suppose, also, that for every limit ordinal $\beta < \alpha$, ϱ_β is the identity function.
Then ϱ_α is the identity function.

Proof

For brevity, we denote by γ the ordinal

$$\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^{k+1} \cdot a.$$

Then, for all x, $\{\alpha\}(x) = \gamma + \{\omega^{k+1}\}(x)$.
It is clear from the definition of ϱ_α that, in order to prove that $\varrho_\alpha(x) = x$ for every x, all we have to do is to show that for every n,

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n + 1) > F^0_{\{\alpha\}(i)}(n + 1)$$

for each $i \leqq n$.
We consider two cases:

(a) Suppose $k = 0$, so that $\{\alpha\}(x) = \gamma + 2x$, for all x.
Then it is obvious that for every n,

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n + 1) > F^0_{\{\alpha\}(i)}(n + 1)$$

for each $i \leqq n$; since, whenever $p < q$,

$$F^0_{\gamma+q}(n + 1) > F^0_{\gamma+p}(n + 1).$$

(b) Suppose $k > 0$, so that, for all x, we have

$$\{\alpha\}(x) = \gamma + \omega^k \cdot x + \cdots + \omega^1 \cdot x + 2x.$$

Then

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n + 1) &= F^0_{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)+\cdots+\omega\cdot(n+1)+2(n+1)}(n + 1) \\ &= F^0_{\gamma+\{\omega^k\cdot(n+2)\}(n+1)}(n + 1), \end{aligned}$$

by Def. 4.0.
Hence $F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n + 1) = F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+2)\}(n+1)}(n + 1)$ ... A.
But $\gamma + \omega^k \cdot (n + 2) < \alpha$, and so, by assumption,

$$\varrho_{\gamma+\omega^k\cdot(n+2)}(n + 1) = n + 1.$$

Therefore, by the definition of $\varrho_{\gamma+\omega^k\cdot(n+2)}$ we have

$$\begin{aligned} F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+2)\}(n+1)}(n + 1) &> F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+2)\}(0)}(n + 1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)}(n + 1) \qquad \text{... B.} \end{aligned}$$

Now, again by assumption, $\varrho_{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)}(n + 1) = n + 1$, and so, by the definition of $\varrho_{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)}$, we have

$$\begin{aligned} F^0_{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)}(n + 1) &= F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)\}(n+1)}(n + 1) \\ &> F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)\}(n)}(n + 1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^k\cdot n+\cdots+\omega^1\cdot n+2n}(n + 1) \\ &= F^0_{\{\alpha\}(n)}(n + 1) \qquad \text{... C.} \end{aligned}$$

Hence we have $F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1)$, by A, B, and C.
Suppose, now, that $0 \leqq i < n$.
Then by using the definition of the ϱ-function, together with the assumption that ϱ_β is the identity function, for every $\beta < \alpha$, we have, by A and B,

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &= F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+2)\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)}(n+1) \\ &= F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(n+1)\}(0)}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^k\cdot n}(n+1). \end{aligned}$$

Thus we get

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &> F^0_{\gamma+\omega^k\cdot n}(n+1) \\ &= F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot n\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot n\}(0)}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^k\cdot(n-1)}(n+1), \end{aligned}$$

and we can clearly continue this process, until we reach the stage

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &> F^0_{\gamma+\omega^k\cdot(i+1)}(n+1) \\ &= F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(i+1)\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\{\gamma+\omega^k\cdot(i+1)\}(i)}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^k\cdot i+\cdots+\omega^1\cdot i+2i}(n+1) \\ &= F^0_{\{\alpha\}(i)}(n+1). \end{aligned}$$

This completes (b).
Hence for every n, and each $i \leqq n$,

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(i)}(n+1).$$

Therefore $\varrho_\alpha(x) = x$ for every x, and the Lemma is proved.

Lemma 4.3

Suppose α is a limit ordinal, of the form

$$\alpha = \omega^{\alpha_1}\cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r}\cdot a_r + \omega^{\beta+1}\cdot(a+1),$$

where $\varepsilon_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_r > \beta+1$, and $\beta \geqq \omega$.
Suppose also, that for every limit ordinal $\delta < \alpha$, ϱ_δ is the identity function.
Then ϱ_α is the identity function.

Proof

Denote $\omega^{\alpha_1}\cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r}\cdot a_r + \omega^{\beta+1}\cdot a$ by γ, so that, for all x,

$$\{\alpha\}(x) = \gamma + \{\omega^{\beta+1}\}(x) = \gamma + \omega^\beta\cdot x.$$

Again, all we have to do is to show that, for all n, and each $i \leqq n$,

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(i)}(n+1).$$

Take any n, and any $i \leqq n$.
Then we have

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &= F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot(n+1)}(n+1) \\ &= F^0_{\{\gamma+\omega^\beta\cdot(n+1)\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\{\gamma+\omega^\beta\cdot(n+1)\}(0)}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\{\omega^\beta\}(0)}(n+1), \end{aligned}$$

by the definition of $\varrho_{\gamma+\omega^\beta\cdot(n+1)}$, and the assumption that $\varrho_{\gamma+\omega^\beta\cdot(n+1)}$ is the identity function.
Now, if β is a successor, $\{\omega^\beta\}(0) = \omega^{\beta-1}\cdot 0 = 0$, and so we have

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n}(n+1) = F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1).$$

If β is a limit ordinal, $\{\omega^\beta\}(0) = \omega^{\{\beta\}(0)}$, and we have

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^{\{\beta\}(0)}}(n+1) \\ &= F^0_{\{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^{\{\beta\}(0)}\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^{\{\beta\}(0)}\}(0)}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\{\omega^{\{\beta\}(0)}\}(0)}(n+1), \end{aligned}$$

by the definition and assumption concerning the function $\varrho_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^{\{\beta\}(0)}}$.
Now if $\{\beta\}(0)$ is a successor, $\{\omega^{\{\beta\}(0)}\}(0) = 0$, and so again we have

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1).$$

If $\{\beta\}(0)$ is a limit, $\{\omega^{\{\beta\}(0)}\}(0) = \omega^{\{\{\beta\}(0)\}(0)}$, and we have

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^{\{\{\beta\}(0)\}(0)}}(n+1).$$

Thus we are led to consider the descending chain

$$\beta > \{\beta\}(0) > \{\{\beta\}(0)\}(0) > \cdots.$$

This chain must lead, after a finite number of steps, to an ordinal σ, which is either a successor ordinal, or zero.
Then we have

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^{\{\{\beta\}(0)\}(0)}}(n+1) \\ &> \cdots\cdots \\ &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^\sigma}(n+1). \end{aligned}$$

If $\sigma = 0$, we thus have

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+1}(n+1) \\ &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n}(n+1) \\ &= F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1). \end{aligned}$$

If σ is a successor, we have

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^\sigma}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\{\omega^\sigma\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\{\omega^\sigma\}(0)}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n}(n+1) \\ &= F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1), \end{aligned}$$

since, by assumption, $\varrho_{\gamma+\omega^\beta\cdot n+\omega^\sigma}(n+1) = n+1$.
Thus we have proved that, for all n,

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1).$$

But if $n > 0$,

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1) &= F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot n}(n+1) \\ &= F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot(n-1)+\{\omega^\beta\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\gamma+\omega^\beta\cdot(n-1)+\{\omega^\beta\}(0)}(n+1) \end{aligned}$$

and so it is clear that the process can be repeated in order to get

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(i)}(n+1)$$

for each $i \leqq n$.
This completes the proof of Lemma 4.3.

Lemma 4.4

Suppose α is a limit ordinal of the form

$$\alpha = \omega^{\alpha_1}\cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r}\cdot a_r + \omega^\beta\cdot(a+1)$$

where $\varepsilon_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_r > \beta$, and β is a limit.
Suppose also that for every limit ordinal $\eta < \alpha$, ϱ_η is the identity function.
Then ϱ_α is the identity function.

Proof

As in Lemmas 4.2 and 4.3, we need only prove that, for every n, and each $i \leqq n$,

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(i)}(n+1).$$

Let γ denote the ordinal $\omega^{\alpha_1}\cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r}\cdot a_r + \omega^\beta\cdot a$.
Since $\beta < \varepsilon_0$, it can be written in the form

$$\beta = \nu_1 + \omega^{\beta_1}\cdot b_1 + \omega^{\left(\nu_2 + \omega^{\beta_2}\cdot b_2 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\left(\nu_s + \omega^{\beta_s}\cdot b_s + \omega^{(\nu_{s+1} + \omega^{\delta+1}\cdot b_{s+1} + \omega^{\delta+1})}\right)}}}}\right)}$$

where $\delta + 1 = \beta_{s+1}$ and ν_{s+1} is a polynomial in powers of ω greater than $\delta + 1$; and where, for each j such that $1 \leqq j \leqq s$, $\beta_j = \nu_{j+1} + \omega^{\beta_{j+1}} \cdot b_{j+1} + \omega^{\beta_{j+1}}$ and ν_j is a polynomial in powers of ω greater than β_j.

Now let γ_{s+1} denote the ordinal $\nu_{s+1} + \omega^{\delta+1} \cdot b_{s+1}$, and for each $j = 1, \ldots, s$, let γ_j denote the ordinal $\nu_j + \omega^{\beta_j} \cdot b_j$.
Then

$$\alpha = \gamma + \omega^{\left(\gamma_1 + \omega^{\left(\gamma_2 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\left(\gamma_s + \omega^{(\gamma_{s+1} + \omega^{\delta+1})}\right)}}}}\right)}\right)}$$

In the following we shall omit the brackets. It should be clear to the reader which convention we are using.
Hence, by the definition of $\{\alpha\}$ in 4.0, we have, for every n,

$$\{\alpha\}(n+1) = \gamma + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\gamma_s + \omega^{\gamma_{s+1} + \{\omega^{\delta+1}\}(n+1)}}}}}}$$

since, for any limit ordinal σ, $\{\omega^\sigma\}(x) = \omega^{\{\sigma\}(x)}$.
Two cases now arise:

(i) $\delta < \omega$, so that $\{\omega^{\delta+1}\}(x) = \omega^\delta \cdot x + \cdots + \omega \cdot x + 2x$

(ii) $\delta \geqq \omega$, so that $\{\omega^{\delta+1}\}(x) = \omega^\delta \cdot x$.

We will only carry out the proof for case (ii). It should then be clear how to proceed in case (i).
So, assuming that $\delta \geqq \omega$, we have

$$\{\alpha\}(n+1) = \gamma + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\gamma_s + \omega^{\gamma_{s+1} + \omega^\delta \cdot n + \omega^\delta}}}}}}$$

Now $\{\alpha\}(n+1)$ is a limit ordinal $< \alpha$, and so, by assumption, $\varrho_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) = n + 1$.
Therefore, by definition of $\varrho_{\{\alpha\}(n+1)}$, we have

$$\begin{aligned} F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) &= F^0_{\{\{\alpha\}(n+1)\}(n+1)}(n+1) \\ &> F^0_{\{\{\alpha\}(n+1)\}(0)}(n+1). \end{aligned}$$

But, by Def. 4.0,

$$\{\{\alpha\}(n+1)\}(0) = \gamma + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\gamma_s + \omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n + \{\omega^{\delta}\}(0)}}}}}}$$

Hence, if δ is a successor, $\{\omega^{\delta}\}(0) = 0$, and we have

$$\{\{\alpha\}(n+1)\}(0) = \{\alpha\}(n).$$

Therefore $F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1)$.
If δ is a limit, $\{\omega^{\delta}\}(0) = \omega^{\{\delta\}(0)}$, so that

$$\{\{\alpha\}(n+1)\}(0) = \gamma + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\gamma_s + \omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n + \omega^{\{\delta\}(0)}}}}}}}$$

Then, by definition of $\varrho_{\{\{\alpha\}(n+1)\}(0)}$, we have

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\{\alpha\}(n+1)\}(0)}(n+1) > F^0_{\{\{\{\alpha\}(n+1)\}(0)\}(0)}(n+1).$$

Now, if $\{\delta\}(0)$ is a successor, $\{\omega^{\{\delta\}(0)}\}(0) = 0$, and so we have

$$\{\{\{\alpha\}(n+1)\}(0)\}(0) = \{\alpha\}(n),$$

and hence

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\{\alpha\}(n)}(n+1).$$

If $\{\delta\}(0)$ is a limit, $\{\omega^{\{\delta\}(0)}\}(0) = \omega^{\{\{\delta\}(0)\}(0)}$ and so we have

$$\{\{\{\alpha\}(n+1)\}(0)\}(0) = \gamma + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\gamma_s + \omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n + \omega^{\{\{\delta\}(0)\}(0)}}}}}}}$$

Now we repeat the process, and look at $\{\{\delta\}(0)\}(0)$.
Thus we are led to consider a descending chain of limit ordinals

$$\delta > \{\delta\}(0) > \{\{\delta\}(0)\}(0) > \cdots$$

This chain must terminate, after a finite number of steps, with an ordinal ξ, which is either a successor, or 0.
At this stage we have, using the definition and assumption concerning the functions ϱ_η for limit ordinals $\eta < \alpha$,

$$F^0_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^0_{\xi}(n+1)$$

where ζ is of the form $\{\cdots\{\{\{\alpha\}\,(n+1)\}\,(0)\}\,(0)\cdots\}\,(0)$, and

$$\zeta = \gamma + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\gamma_s + \omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n + \omega^{\xi}}}}}}}$$

Now, if ξ is a successor, $\{\omega^{\xi}\}\,(0) = 0$.
If $\xi = 0$, we have the following:
$\omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n + \omega^{\xi}} = \omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n + 1}$, and hence
$\{\omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n + \omega^{\xi}}\}\,(1) = \omega^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n}$.
Hence, if ξ is a successor, $\{\zeta\}\,(0) = \{\alpha\}\,(n)$, and if $\xi = 0$, $\{\zeta\}\,(1) = \{\alpha\}\,(n)$.
But $\zeta < \alpha$, and so $\varrho_{\zeta}(n+1) = n+1$ by the assumption.
Hence, by definition of ϱ_{ζ}, we have

$$\begin{aligned} F^{\varrho}_{\zeta}(n+1) &= F^{\varrho}_{\{\zeta\}(n+1)}(n+1) \\ &\geqq \max\left(F^{\varrho}_{\{\zeta\}(1)}(n+1),\, F^{\varrho}_{\{\zeta\}(0)}(n+1)\right) \\ &\geqq F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n)}(n+1), \end{aligned}$$

since either $\{\zeta\}\,(1) = \{\alpha\}\,(n)$ or $\{\zeta\}\,(0) = \{\alpha\}\,(n)$.
But $F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^{\varrho}_{\zeta}(n+1)$.
Therefore $F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n)}(n+1)$.
Now it is clear that we can repeat the entire process, starting with the ordinal

$$\{\alpha\}\,(n) = \gamma + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\gamma_{s+1} + \omega^{\delta}\cdot n}}}}}$$

instead of $\{\alpha\}\,(n+1)$.
In this way, if $n > 0$, we obtain

$$F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n)}(n+1) > F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n-1)}(n+1),$$

and then $F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n)}(n+1) > F^{\varrho}_{\{\alpha\}(i)}(n+1)$ for each $i < n$.
Thus we have proved that for every n, and each $i \leqq n$,

$$F^{\varrho}_{\{\alpha\}(n+1)}(n+1) > F^{\varrho}_{\{\alpha\}(i)}(n+1).$$

This completes the proof for case (ii).
Note that in case (i), δ must be either a successor or 0, and so the proof is a little easier than the one we have just given for case (ii).

Theorem 4.5

For every limit ordinal $\alpha < \varepsilon_0$, $\varrho_{\alpha} = \lambda x \cdot x$.

Proof

By transfinite induction.

We know, by Lemma 4.1, that $\varrho_\omega = \lambda x \cdot x$.

Assume that α is a limit ordinal such that $\omega < \alpha < \varepsilon_0$, and that, for every limit ordinal, $\beta < \alpha$, $\varrho_\beta = \lambda x \cdot x$.

Then, since α must have one of the forms covered by Lemmas 4.2, 4.3 and 4.4, we know that $\varrho_\alpha = \lambda x \cdot x$.

This completes the proof.

5. A Characterization of Péter's k-recursive Functions

Péter, in [9], defines, for each positive integer k, a class $\mathfrak{R}_k$ of recursive functions, which are called k-recursive.

She proves that $\mathfrak{R}_1 = \mathscr{P}$, and that for each k, $\mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{R}_{k+1}$.

Robbin, in [12], constructs a Grzegorczyk-type hierarchy $\{E_\alpha\}_{\alpha < \omega^\omega}$ such that, for each positive integer k,

$$\mathfrak{R}_k = \bigcup_{\alpha < \omega^k} E_\alpha .$$

In this section we shall prove a similar result for the hierarchy $\{\mathfrak{E}_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ based on the fundamental sequences of 4.0.

First of all, we know, by the work of Grzegorczyk and the results of Section 2 that

$$\bigcup_{\alpha < \omega} \mathfrak{E}_\alpha = \mathscr{P} = \mathfrak{R}_1 .$$

This result can easily be extended, in order to yield the following:

Theorem 5.0

For any countable ordinal β,

$$\bigcup_{\alpha < \omega} \mathfrak{E}_{\beta + \alpha} = P(\mathfrak{E}_\beta) .$$

Now, for each positive integer k, $\mathfrak{R}_k$ is the smallest class of functions which contains $\mathscr{P}$ and is closed under the operations of substitution and nested recursion (with or without parameters) over the lexicographical well-ordering of N^k.

Suppose, now, that $k \geqq 2$, and define for each z, a function $\lambda y_1 \ldots y_{k-1} n x \cdot F_z(y_1, \ldots, y_{k-1}, n, x)$ as follows:

$$\begin{cases} F_0(0, \ldots, 0, n, x) = (n+1) \cdot (x+1) \\ F_0(y_1, \ldots, y_{k-2}, y_{k-1}+1, 0, x) = F_0(y_1, \ldots, y_{k-2}, y_{k-1}, x, x) \\ F_0(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i + 1, 0, \ldots, 0, 0, x) = F_0(y_1, \ldots, y_i, x, \ldots, x, 2x, 0, x) \\ F_0(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + 1, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, n+1, x) = \\ = F_0(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + 1, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, 0, F_0(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + 1, y_{j+1}, \ldots, \\ \quad y_{k-1}, n, x)) \end{cases}$$

where $1 \leqq i \leqq k-2$, and $1 \leqq j \leqq k-1$.

$$\begin{cases} F_{z+1}(0, \ldots, 0, 0, x) = F_z(x, \ldots, x, 2x, 0, x) \\ F_{z+1}(y_1, \ldots, y_{k-2}, y_{k-1}+1, 0, x) = F_{z+1}(y_1, \ldots, y_{k-2}, y_{k-1}, x, x) \\ F_{z+1}(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i+1, 0, \ldots, 0, 0, x) = F_{z+1}(y_1, \ldots, y_i, x, \ldots, x, 2x, 0, x) \\ F_{z+1}(y_1, \ldots, y_{k-1}, n+1, x) = F_{z+1}(y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, F_{z+1}(y_1, \ldots, y_{k-1}, n, x)) \end{cases}$$

where $1 \leqq i \leqq k-2$.

It is clear from this definition that for each z, $\lambda y_1 \ldots y_{k-1} n x \cdot F_z(y_1, \ldots, y_{k-1}, n, x)$ is k-recursive.

Now take any ordinal $\alpha = \omega^{k-1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^1 \cdot a_{k-1} + a_k$ and define $\lambda n x \cdot F^n_\alpha(x)$ using the fundamental sequences of Def. 4.0.

Then it can easily be proved that for all n, x,

$$F^n_\alpha(x) = F_{a_1}(a_2, \ldots, a_k, n, x),$$

since ϱ_σ is the identity, for every $\sigma < \varepsilon_0$.

Hence, for every $\alpha < \omega^k$, $\lambda n x \cdot F^n_\alpha(x) \in \mathfrak{R}_k$.

Therefore, for every $\alpha < \omega^k$, $\mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathfrak{R}_k$, and so we have

Theorem 5.1

For every positive integer k, $\bigcup_{\alpha < \omega^k} \mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathfrak{R}_k$.

We now turn our attention to the converse of Theorem 5.1.

First, however, we require another monotonicity property of the functions $\lambda n x \cdot F^n_\alpha(x)$ based on the fundamental sequences of Def. 4.0.

Lemma 5.2

For every positive integer m, if $\gamma < \omega^\omega$ is expressible as a polynomial in ω, with powers of ω all greater than m, then for all p and all $x \geqq 1$,

$$F^0_{\gamma + \omega^m \cdot (p+1)}(x) > F^0_{\gamma + \omega^m \cdot p}(x).$$

Proof

By induction on m,
If $m = 1$ we have, for all p and all $x \geqq 1$,

$$\begin{aligned} F^0_{\gamma + \omega^1 \cdot (p+1)}(x) &= F^0_{\gamma + \omega^1 \cdot p + 2x}(x) \text{ by 4.0 and 4.5} \\ &> F^0_{\gamma + \omega^1 \cdot p}(x) \text{ since } x \geqq 1. \end{aligned}$$

Suppose that $n \geqq 1$ and that the result holds for every $m \leqq n$.

Then for all p and all $x \geqq 1$ we have

$$\begin{aligned} F^0_{\gamma + \omega^{n+1}\cdot(p+1)}(x) &= F^0_{\gamma + \omega^{n+1}\cdot p + \omega^n \cdot x + \cdots + \omega^1 \cdot x + 2x}(x) \text{ by 4.0, 4.5.} \\ &> F^0_{\gamma + \omega^{n+1}\cdot p + \omega^n \cdot x + \cdots + \omega^1 \cdot x}(x) \text{ since } x \geqq 1 \\ &> F^0_{\gamma + \omega^{n+1}\cdot p + \omega^n \cdot x + \cdots + \omega^2 \cdot x}(x) \\ &> F^0_{\gamma + \omega^{n+1}\cdot p + \omega^n \cdot x + \cdots + \omega^3 \cdot x}(x) \\ &> \cdots\cdots\cdots \\ &> F^0_{\gamma + \omega^{n+1}\cdot p + \omega^n \cdot x}(x) \\ &> F^0_{\gamma + \omega^{n+1}\cdot p}(x), \end{aligned}$$

by repeated applications of the induction hypothesis.
Hence the result also holds for $m = n + 1$.
Thus, by induction, the proof is complete.
Now, for each $k > 0$, Péter has obtained the following characterization of $\mathfrak{R}_k$ (see [9]):
$\mathfrak{R}_k$ is the smallest class of functions which contains $\mathscr{P}$ and is closed under the operations of substitution and k-recursion, where, by "k-recursion" we mean the following scheme:

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_k) = 0 \text{ if } x_1 = 0 \text{ or } x_2 = 0 \text{ or} \ldots \text{or } x_k = 0. \\ f(x_1 + 1, \ldots, x_k + 1) = g(x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_k) \end{cases}$$

where $f_k = f(x_1 + 1, \ldots, x_{k-1} + 1, x_k)$ and for each i such that $1 \leqq i \leqq k - 1$,
$f_i = f(x_1 + 1, \ldots, x_{i-1} + 1, x_i, h^i_1(x_1, \ldots, x_k, f_k), \ldots, h^i_{k-i}(x_1, \ldots, x_k, f_k))$.
We shall use this characterization of $\mathfrak{R}_k$ in order to show that, for every k-recursive function f, there is an ordinal $\alpha < \omega^k$ such that $f \in \mathfrak{E}_\alpha$.

Lemma 5.3

Suppose the functions $g; h^1_1, \ldots, h^1_{k-1}, \ldots, h^{k-1}_1$, all belong to $\mathfrak{E}_\alpha$, where $\alpha < \omega^k$. Then if f is defined from these functions by k-recursion, there is an ordinal β such that $\alpha < \beta < \omega^k$ and for all $x_1, \ldots, x_k$,

$$f(x_1, \ldots, x_k) < F^0_\beta(\max(x_1, \ldots, x_k)).$$

Proof

We shall sketch the proof for the case $k = 3$. It should then be clear how to proceed in general.
Suppose f is defined by 3-recursion as follows,

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \text{ if } x = 0 \text{ or } y = 0 \text{ or } z = 0. \\ f(x + 1, y + 1, z + 1) = \\ = g\big(x, y, z, f(x, h_1(x, y, z, f(x + 1, y + 1, z)), h_2(x, y, z, f(x + 1, y + 1, z))), \\ \quad f(x + 1, y, h_3(x, y, z, f(x + 1, y + 1, z))), f(x + 1, y + 1, z)\big), \end{cases}$$

where $g \in \mathfrak{E}_\alpha$, $h_1 \in \mathfrak{E}_\alpha$, $h_2 \in \mathfrak{E}_\alpha$, $h_3 \in \mathfrak{E}_\alpha$, and $\alpha < \omega^3$.

Since $\alpha < \omega^3$ we know, by Lemma 2.4 and Theorem 2.11, that there are numbers p and q such that

$g(\boldsymbol{y}) < F^0_{\omega^2\cdot p}(\max(\boldsymbol{y}))$ whenever $\max(\boldsymbol{y}) \geqq q$, and for each $i = 1, 2, 3$,

$h_i(\boldsymbol{x}) < F^0_{\omega^2\cdot p}(\max(\boldsymbol{x}))$ whenever $\max(\boldsymbol{x}) \geqq q$, where $\alpha < \omega^2 \cdot p$.

Clearly, there must also be a number r such that

$g(\boldsymbol{y}) < r$ whenever $\max(\boldsymbol{y}) < q$, and for each $i = 1, 2, 3$, $h_i(\boldsymbol{x}) < r$ whenever $\max(\boldsymbol{x}) < q$.

Now, by Lemma 5.2, $F^0_{\omega^2\cdot(p+r)}(x) > r$ if $x \geqq 1$.

Hence $g(\boldsymbol{y}) < F^0_{\omega^2\cdot(p+r)}(\max(\boldsymbol{y}))$ whenever $\max(\boldsymbol{y}) \geqq 1$ and for each $i = 1, 2, 3$, $h_i(\boldsymbol{x}) < F^0_{\omega^2\cdot(p+r)}(\max(\boldsymbol{x}))$ whenever $\max(\boldsymbol{x}) \geqq 1$.

Let $d = \max(p + r, g(0, 0, 0, 0, 0, 0,))$.

We shall now show that for all x, y, z,

$$f(x, y, z) < F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2y}(z).$$

Let $\prec$ be the lexicographical well-ordering of N^3.

Then we proceed by transfinite induction over $\prec$.

First, it can easily be shown that if $\max(x, y, z) \leqq 1$, then $f(x,y,z) < F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2y}(z)$.

Suppose, now, that $\max(x, y, z) > 1$, and assume that for all u, v, w such that $\langle u, v, w\rangle \prec \langle x, y, z\rangle$,

$$f(u, v, w) < F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot u+2\cdot v}(w).$$

If $x = 0$ or $y = 0$ or $z = 0$, $f(x, y, z) = 0$, and so we trivially have

$$f(x, y, z) < F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot y}(z).$$

Suppose, then, that $x > 0, y > 0$, and $z > 0$. Then, since $\max(x, y, z) > 1$, we know that $\max(x - 1, y - 1, z - 1) \geqq 1$.

Hence, by the induction hypothesis, we obtain from the 3-recursion scheme, the following:

$$f(x, y, z) < F^0_{\omega^2\cdot d}\left(F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(F^0_{\omega^2\cdot d}(m))\right),$$

where $m = \max(x - 1, y - 1, z - 1, f(x, y, z - 1))$.

Now we consider two cases:

(a) If $z = 1$, $m = \max(x - 1, y - 1)$ since $f(x, y, 0) = 0$.

But $F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(1) \geqq m$.

Hence we have

$$f(x, y, z) < F^0_{\omega^2\cdot d}\left(F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}\left(F^0_{\omega^2\cdot d}(F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(1))\right)\right).$$

But, for all n,

$$\begin{aligned} &F^0_{\omega^2\cdot d}(F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(n)) \\ &\qquad\leqq F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(F^0_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(n)) \\ &\qquad= F^1_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(n) \text{ by Def. 4.} \end{aligned}$$

Hence $f(x, y, z) < F^1_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(F^1_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(1))$

But $F^1_{\omega^2\cdot d+\omega\cdot x+2\cdot(y-1)}(1) = F^0_{\omega^2\cdot d+w\cdot x+2y-1}(1)$ by Def. 2.

Thus we obtain the following:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &< F^1_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot (y-1)}\,(F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(1)) \\ &< F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}\,(F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(1)) \text{ by Def. 2,} \\ &\quad \text{since } F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(1) > 1. \\ &= F^1_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(1) \text{ by Def. 4} \\ &= F^0_{\omega^2 \cdot d + w \cdot x + 2 \cdot y}(1) \text{ by Def. 2} \\ &= F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y}(z) \text{ since } z = 1. \end{aligned}$$

(b) If $z > 1$, $z - 1 \geqq 1$, and so we have

$$\begin{aligned} m &\leqq F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y}(z - 1) \\ &= F^{z-1}_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(z - 1) \text{ by Def. 2.} \end{aligned}$$

Now, for all n, $F^0_{\omega^2 \cdot d}(n) \leqq F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot (y-1)}(n)$, and so we have

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &< F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot (y-1)}\big(F^0_{\omega^2 \cdot d + w \cdot x + 2 \cdot (y-1)}\big(F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot (y-1)}(m)\big)\big) \\ &= F^2_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot (y-1)}(m) \text{ by Def. 4.} \end{aligned}$$

Hence, $f(x, y, z) < F^2_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot (y-1)}\,(F^{z-1}_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(z - 1))$.
Since $z - 1 \geqq 1$, $F^{z-1}_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(z - 1) \geqq 2$ and so, by Def. 2,

$$\begin{aligned} &F^2_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot (y-1)}\,(F^{z-1}_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(z - 1)) \\ &\qquad \leqq F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}\,(F^{z-1}_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(z - 1)) \\ &\qquad = F^z_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(z - 1) \text{ by Def. 4} \\ &\qquad < F^z_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y - 1}(z) \\ &\qquad = F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot x + 2 \cdot y}(z) \text{ by Def. 2.} \end{aligned}$$

Therefore, $f(x, y, z) < F^0_{\omega^2 \cdot d + w \cdot x + 2 \cdot y}(z)$, and this completes case (b).
(a) and (b) together complete the induction step, and so, by transfinite induction over $\prec$, we have proved that for all x, y and z,

$$f(x, y, z) < F^0_{\omega^2 \cdot d + w \cdot x + 2 \cdot y}(z).$$

It is now easy to show that for all x, y, z,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &< F^0_{\omega^2 \cdot d + \omega \cdot \max(x,y,z) + 2 \cdot \max(x,y,z)}(\max(x, y, z)) \\ &= F^0_{\omega^2 \cdot (d+1)}(\max(x, y, z)). \end{aligned}$$

Hence $\beta = \omega^2 \cdot (d + 1)$ is the required ordinal, and the proof of Lemma 5.3 is complete.

Theorem 5.4

For every positive integer k, $\mathfrak{N}_k \subseteq \bigcup_{\alpha < \omega^k} \mathfrak{E}_\alpha$.

Proof

We know, by a result of Grzegorczyk [5], that for every primitive recursive function f, there is an ordinal $\alpha < \omega$ such that $f \in \mathfrak{E}_\alpha$.
Suppose f is defined by substitution from functions $g_0, g_1, \ldots, g_n$, where, for each $i \leqq n$, $g_i \in \mathfrak{E}_{\alpha_i}$, and $\alpha_i < \omega^k$.
Let $\alpha = \max(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Then $\alpha < \omega^k$ and for each $i \leqq n$, $g_i \in \mathfrak{E}_\alpha$.
Hence f is defined by substitution from functions belonging to $\mathfrak{E}_\alpha$.
Therefore $f \in \mathfrak{E}_\alpha$.

Finally, suppose f is defined by k-recursion from functions $g_0, g_1, \ldots, g_n$ where, for each $i \leqq n$, $g_i \in \mathfrak{E}_{\alpha_i}$ and $\alpha_i < \omega^k$.
Let $\alpha = \max(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Then $\alpha < \omega^k$ and for each $i \leqq n$, $g_i \in \mathfrak{E}_\alpha$.
Hence, by Lemma 5.3, there is an ordinal β such that $\alpha < \beta < \omega^k$ and for all $x_1, \ldots, x_k$

$$f(x_1, \ldots, x_k) < F^0_\beta(\max(x_1, \ldots, x_k)).$$

Now, by a result of Péter in [9], bounded k-recursion is reducible to primitive recursion.

Therefore f is primitive recursive in the functions $g_0, g_1, \ldots, g_n$ and $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$.
But, since $\alpha < \beta$, $g_i \in \mathfrak{E}_\beta$ for each $i \leqq n$.
Also, $\lambda x \cdot F^0_\beta(x) \in \mathfrak{E}_\beta$.
It follows that $f \in P(\mathfrak{E}_\beta)$.

Hence, by Theorem 5.0, there is an ordinal $\gamma < \omega$ such that $f \in \mathfrak{E}_{\beta+\gamma}$.
Therefore, putting $\delta = \beta + \gamma$, we have $\delta < \omega^k$ and $f \in \mathfrak{E}_\delta$.

We have now considered all possible ways of defining k-recursive functions.
Hence, for every $f \in \mathfrak{N}_k$ there is an ordinal $\alpha < \omega^k$ such that $f \in \mathfrak{E}_\alpha$.
This completes the proof.

Theorems 5.1 and 5.4 together provide the following characterization of the class of k-recursive functions.

Theorem 5.5

For each positive integer k, $\bigcup_{\alpha < \omega^k} \mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{N}_k$.
Thus, if we let $\mathfrak{M} = \bigcup_{0 < k < \omega} \mathfrak{N}_k$, we have

Theorem 5.6

$$\bigcup_{\alpha < \omega^\omega} \mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{M}.$$

It follows, from Lemma 2.4 and Theorem 2.11, that the function $\lambda x \cdot F_{\omega^\omega}(x)$ eventually majorizes every unary function belonging to $\mathfrak{M}$.
Therefore, $\lambda x \cdot F^0_{\omega^\omega}(x)$ is a function which is not k-recursive, for any k.

6. Open Problems

A. For the hierarchy $\{\mathfrak{E}_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ considered in sections 4 and 5, it is possible to adapt Robbin's "Honesty Lemma" (see [12] p. 61) in order to prove that whenever $\alpha < \beta < \omega^\omega$, $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is "elementary in" $\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$.
Hence, for every ordinal $\alpha < \omega^\omega$, it is clear that $\mathfrak{E}_\alpha$ can be re-defined as follows:

$$\mathfrak{E}_\alpha = E(\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x + y, \lambda \boldsymbol{x} \cdot x_i, \lambda x \cdot F^0_\alpha(x)).$$

Thus we are led to ask whether there are ordinals $\delta > \omega^\omega$ and fundamental sequences to all limit ordinals $< \delta$, for which it can be proved that whenever $\alpha < \beta < \delta$, $\lambda x \cdot F^0_\alpha(x)$ is "elementary in "$\lambda x \cdot F^0_\beta(x)$.
We conjecture that this result holds for ε_0, together with the fundamental sequences (to all limit ordinals $< \varepsilon_0$) defined in 4.0.

B. By Theorem 4.5 we know that there are fundamental sequences to all limit ordinals $< \varepsilon_0$ for which $\varrho_\alpha = \lambda x \cdot x$ for every limit ordinal $\alpha < \varepsilon_0$.
Is there an upper bound on the ordinals β for which there are fundamental sequences to all limit ordinals $< \beta$ such that $\varrho_\alpha = \lambda x \cdot x$ for every limit ordinal $\alpha < \beta$?
Furthermore, for each such β, what conditions must the fundamental sequences to all limit ordinals $< \beta$ satisfy, in order to ensure that $\varrho_\alpha = \lambda x \cdot x$ for every limit ordinal $\alpha < \beta$?

C. Is there a choice of fundamental sequences to all countable limit ordinals such that, if $\{\mathfrak{E}_\alpha\}$ is the hierarchy based on these fundamental sequences, then, for every totally defined numerical function f, which is "constructible" in the sense of Gödel [4], there is a countable ordinal α such that $f \in \mathfrak{E}_\alpha$?

REFERENCES

Siehe Teil I, p. 51

Arch. math. Logik 13 (1970), 114—133.

HIERARCHIEN PRIMITIV-REKURSIVER FUNKTIONEN IM TRANSFINITEN* **

Von M. E. Schröder, Koblenz

Übersicht

ZF sei das System der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre und ZF^- sei ZF ohne Potenzmengenaxiom. Wir setzen die Existenz einer Menge M voraus, die natürliches Modell der Axiome von ZF^- ist; On_M sei die Menge der Ordinalzahlen aus M. Entsprechend dem Begriff der primitiv-rekursiven (p.r.) Funktion über der Menge ω der natürlichen Zahlen definieren wir den Begriff der p.r. Mengenfunktion über M (p.r.(M)) und den des p.r. ordinalen Funktionals über On_M (p.r.(On_M)). In beiden Fällen nehmen wir die konstanten Funktionen bzw. Funktionale mit dem Wert ω zu den p.r. Anfangsfunktionen bzw. -funktionalen.
Entsprechend der Klassifikation von A. Grzegorczyk [1] der p.r. Funktionen über ω definieren wir eine Hierarchie $MG = \langle MG^n | n < \omega \rangle$ für die p.r.(M) Funktionen und eine Hierarchie $OG = \langle OG^n | n < \omega \rangle$ für die p.r.(On_M) Funktionale, die die betreffenden Funktionen nach ihrem Wachstumsverhalten klassifizieren; als „Maß" ihres Wachstums benutzen wir eine Folge von Funktionen $A_n : On_M \mapsto On_M$ $(n < \omega)$, die analog zu einer von W. Ackermann für die natürlichen Zahlen eingeführten Folge von Funktionen definiert werden.
Eine weitere Möglichkeit der Klassifikation ist wie bei den p.r. Funktionen über ω die nach der Zahl der benutzten Rekursionen bei der Definition einer p.r.(M) Funktion oder eines p.r.(On_M) Funktionals; dies führt zu den Hierarchien $MR = \langle MR^n | n < \omega \rangle$ für die p.r.(M) Funktionen und $OR = \langle OR^n | n < \omega \rangle$ für die p.r.(On_M) Funktionale.
Bei allen vier Hierarchien werden wir die spezielle Rekursion der ω-fachen Iteration einer Funktion oder eines Funktionals nicht als Rekursion zählen.
In den Kapiteln III—V wird gezeigt, daß diese Hierarchien von der vierten Stufe an gleichwertig sind; I—II dienen der Vorbereitung.

I. Vorbereitendes

1. Das System ZF

Die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre ZF wird in der ZF-Sprache, einer Sprache erster Stufe formalisiert, deren Formeln sich aus den folgenden *Grundzeichen* zusammensetzen.

---

* Eingegangen am 22.12.1968.
** Eine frühere Fassung dieser Arbeit ist von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn als Dissertation angenommen worden. Die Arbeit entstand unter Anleitung von Dr. R. B. Jensen, dem ich zu größtem Dank verpflichtet bin; ebenso danke ich Prof. G. Hasenjaeger für die Unterstützung, die er mir zuteil werden ließ.

Mengenvariablen: v_i $(i < \omega)$; logische Prädikate: ε, $=$; Junktoren: $\neg$, $\wedge$; Allquantor: Δ; Komprehensionsoperator: E. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ (evtl. mit Indizes) bezeichnen im folgenden Mengenvariablen.
Die *Formeln* von *ZF* sind rekursiv definiert mit $\mathfrak{x}\varepsilon\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ als Primformeln (klammerfreie Schreibweise); $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ bezeichnen im folgenden Formeln.
Klassenterme sind Mengenvariablen oder Zeichenreihen der Gestalt $E\mathfrak{x}\mathfrak{A}$ (Komprehensionsterme); $A, B, C, \ldots$ bezeichnen im folgenden Klassenterme.
Zur besseren Lesbarkeit sei: $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) =_{\mathrm{Df}} \wedge \mathfrak{A}\mathfrak{B}$; die Abkürzungen $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B})$ und $\nabla\mathfrak{x}\mathfrak{A}$ führen wir in der üblichen Weise ein.
Die *ZF*-Sprache werden wir vielfach durch Hinzunahme gewisser Mengenkonstanten $\boldsymbol{x}$ erweitern; dann sind auch $\boldsymbol{x}\varepsilon\boldsymbol{z}$, $\mathfrak{x}\varepsilon\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x}\varepsilon\mathfrak{z}$ und entsprechende für $=$ Primformeln und die Konstanten $\boldsymbol{x}$ Klassenterme.
Die *mengentheoretischen Axiome* von *ZF* sind die in [2] und [3] angegebenen: Extensionalitätsaxiom, Nullmengenaxiom, Paarmengenaxiom, Vereinigungsmengenaxiom, Potenzmengenaxiom, Ersetzungsaxiome, Unendlichkeitsaxiom und Fundierungsaxiom.
ZF^- sei *ZF* ohne Potenzmengenaxiom.

2. *Die Metasprache*

Alle metasprachlichen Argumente werden in der *ZF*-Sprache formalisierbar sein. Die Mengenvariablen der Metasprache sind $a, b, \ldots$ (auch indiziert), die Quantoren sind $\bigwedge$, $\bigvee$, und bei der Bildung von Komprehensionstermen benutzen wir $\{\ |\ \}$, $\in$ bezeichnet die Elementbeziehung und $=$ die logische Identität. Im übrigen benutzen wir die in 1. angegebenen Zeichen der *ZF*-Sprache auch in der Metasprache.
Wir nehmen die Gültigkeit der Axiome von *ZF* an; außerdem werden wir die Existenz eines natürlichen Modells der ZF^--Axiome voraussetzen.
Wir benutzen die üblichen mengentheoretischen Bezeichnungen und Definitionen, wie sie in [3] und vor allem in [2] angegeben sind, insbesondere also: *geordnete n-Tupel* $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ nach Kuratowski; $A \times B$, A^n für das cartesische Produkt; und für *Relationen* R: $R''A$ (R-Bild von A), $R \upharpoonright A$ (Beschränkung von R auf A), R^{-1} (Inverse von R), $D(R)$, $W(R)$ (Definitions- und Wertebereich von R).
Die üblichen ordinalen Begriffe sind [2] zu entnehmen; On ist die Klasse der v. Neumannschen *Ordinalzahlen*; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu, \varkappa$ benutzen wir als Variable für Ordinalzahlen; den *Rang* von Mengen definieren wir durch: $|x| =_{\mathrm{Df}} \sup\{|z| + 1 \mid z \in x\}$.

3. *Syntax und Semantik*

Endliche Folgen sind Funktionen f mit $D(f) < \omega$. Die *Zusammensetzung* endlicher Folgen a, b definieren wir durch $ab =_{\mathrm{Df}} a \cup \{\langle b_i, i + D(a)\rangle \mid i < D(b)\}$.
Die Formeln der Objektsprache identifizieren wir mit endlichen Folgen; dazu wählen wir für die Grundzeichen die Festsetzungen aus [2] oder [3]. Dabei nehmen wir für Mengen x eine Konstante $\boldsymbol{x}$ hinzu.
M sei eine Menge; dann definieren wir $Kst_M =_{\mathrm{Df}} \{\boldsymbol{x} \mid x \in M\}$ als die Menge der *M-Konstanten* und dann weiter die üblichen *syntaktischen Begriffe:*

1. $\mathfrak{A}$ ist eine *M-Formel*, wenn die in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Konstanten M-Konstanten sind. Fml_M sei die Menge der M-Formeln.
2. Die *Ersetzung* $\mathfrak{A}(v/\boldsymbol{x})_M$ der freien Vorkommen der Variablen v in der M-Formel $\mathfrak{A}$ durch solche der Konstanten $\boldsymbol{x}$.
3. Die Menge der *freien Variablen* einer M-Formel $\mathfrak{A}$:
   $Fr(\mathfrak{A})_M =_{\mathrm{Df}} \{x \mid x \in Vbl \wedge \mathfrak{A}(x/\boldsymbol{x})_M \neq \mathfrak{A}\}$ mit $Vbl =_{\mathrm{Df}} \{v_i \mid i < \omega\}$.
4. Die Mengen der *M-Aussagen*:
   $Aus_M =_{\mathrm{Df}} \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in Fml_M \wedge Fr(\mathfrak{A})_M = \emptyset\}$
5. Die Menge der *konstanten M-Terme*:
   $T_M =_{\mathrm{Df}} Kst_M \cup \{Ex\mathfrak{A} \mid x \in Vbl \wedge \mathfrak{A} \in Fml_M \wedge Fr(\mathfrak{A})_M = \{x\}\}$

Ein *natürliches Modell* für die *ZF*-Sprache ist ein Tripel $\langle M, \in \upharpoonright M, = \upharpoonright M\rangle$, wobei M eine transitive Menge ist; in diesem Zusammenhang werden wir im folgenden $\langle M, \in \upharpoonright M, = \upharpoonright M\rangle$ mit M identifizieren.

Dann definieren wir die üblichen *semantischen Begriffe*:

6. Die *M-Wahrheit* von M-Aussagen ($\models_M \mathfrak{A}$) in der üblichen Weise rekursiv über den Formelbau.
7. Die *M-Bewertung* der konstanten M-Terme:
   $M[t] =_{\mathrm{Df}} \{x \mid x \in M \wedge \models_M \boldsymbol{x} \varepsilon t\}$
8. Die Menge der *M-definierbaren* Teilmengen von M:
   $Def(M) =_{\mathrm{Df}} \{M[t] \mid t \in T_M\}$.

U sei ein Klassenterm der M-Sprache; dann definieren wir auf U beschränkte Quantoren durch:

$$\Delta \mathfrak{x} : \varepsilon U \mathfrak{A} =_{\mathrm{Df}} \Delta \mathfrak{x} (\mathfrak{x} \varepsilon U \rightarrow \mathfrak{A}),$$
$$\nabla \mathfrak{x} : \varepsilon U \mathfrak{A} =_{\mathrm{Df}} \nabla \mathfrak{x} (\mathfrak{x} \varepsilon U \wedge \mathfrak{A}).$$

Wenn U eine Mengenvariable oder Konstante ist, sprechen wir von *beschränkten Quantoren.* Entsprechend führen wir auch in der Metasprache beschränkte Quantoren ein.

Nach A. Lévy [5] definieren wir weiter:

Eine Formel $\mathfrak{A}$ ist eine *Σ_0-Formel* ($\mathfrak{A} \in \Sigma_0$), wenn alle in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Quantoren beschränkt sind; $\mathfrak{A}$ ist eine *Σ_1-Formel* ($\mathfrak{A} \in \Sigma_1$), wenn es eine Σ_0-Formel $\mathfrak{A}_0$ gibt, so daß $\mathfrak{A} = \nabla \mathfrak{x}\, \mathfrak{A}_0$. Eine Relation $R \subset M^n$ (M nat. Modell) heißt *Σ_0-definierbar*, wenn es eine *ZF*-Formel $\mathfrak{A}(u_1, \ldots, u_n) \in \Sigma_0$ gibt mit keinen freien Variablen außer $u_1, \ldots, u_n$, so daß:

$$Rx_1 \ldots x_n \leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in M \wedge \models_M \mathfrak{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

Wenn $\mathfrak{A}$ eine M-Formel ist und nicht notwendig aus Σ_0, heißt die Relation R *M-definierbar.*

Im folgenden benutzen wir vielfach die *Absolutheit von Σ_0-Formeln* für transitive Mengen:

U, M seien natürliche Modelle mit $U \subset M$ und $\mathfrak{A}(u_1, \ldots, u_n)$ eine U-Formel aus Σ_0 mit keinen freien Variablen außer $u_1, \ldots, u_n$; dann gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in U$:

$$\models_U \mathfrak{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \leftrightarrow \models_M \mathfrak{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

Für U-Formeln $\mathfrak{B}$ mit $\vdash_{ZF} \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A}$ für ein $\mathfrak{A} \in \Sigma_0$ gilt das gleiche, wenn U und M natürliche Modelle der ZF-Axiome sind, die beim Beweis von $\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A}$ notwendig sind.

Von nun an setzen wir voraus:

$\langle M, \in \upharpoonright M, = \upharpoonright M \rangle$ sei ein natürliches Modell der ZF^--Axiome.

On_M sei die Menge der Ordinalzahlen aus M; da wir im folgenden keine anderen Ordinalzahlen betrachten, schreiben wir statt On_M kurz On.
In den metasprachlichen Formeln sind im folgenden alle Quantoren als auf M beschränkte anzusehen, entsprechend ist bei Komprehensionen über M $\{x \mid \mathfrak{A}\}$ für $\{x \mid x \in M \vee \mathfrak{A}\}$ benutzt. Unter Funktionen und Relationen über M oder On verstehen wir im folgenden stets M-definierbare Funktionen und Relationen, ohne dies jeweils hervorzuheben; mit [2] erhält man insbesondere, daß alle p.r. Funktionen und Relationen über M oder On (s. II) M-definierbar sind.

4. *Relationen und Funktionen über M*

Ω sei die Menge der einstelligen Funktionen $A\colon On \mapsto On$; die ordinalen Relationale bzw. Funktionale sind dann die Relationen $R \subset \Omega^k \times On^m$ bzw. Funktionen $F\colon \Omega^k \times On^m \mapsto On$; für $k = 0$ erhält man die ordinalen Relationen und Funktionen. Für ordinale Relationale und Funktionale über On und für Relationen und Funktionen über M benutzen wir die übliche Church'sche λ-Notation. Für n-Tupel $x_1, \ldots, x_n$ schreiben wir dabei vielfach $\overset{n}{x}$ oder auch $\vec{x}$, wenn die Stellenzahl n dem Zusammenhang zu entnehmen ist.
Außerdem sei für $\beta \subset D(\lambda\nu \cdot F(\vec{A}; \nu, \vec{\alpha}))$:

$$\lambda\nu < \beta \cdot F(\vec{A}; \nu, \vec{\alpha})(\gamma) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} F(\vec{A}; \gamma, \vec{\alpha}) & \text{falls } \gamma < \beta\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Die *Iteration* F^α definieren wir für $F\colon M \mapsto M$ oder $F\colon On \mapsto On$ rekursiv durch:

$$F^0(x) =_{\mathrm{Df}} x\,,$$
$$F^{\alpha+1}(x) =_{\mathrm{Df}} F(F^\alpha(x))\,,$$
$$F^\alpha(x) =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{\nu<\alpha} F^\nu(x) \qquad \text{für } \mathrm{Lim}(\alpha)\,.$$

Für $F\colon M^{m+1} \mapsto M$ oder $G\colon \Omega^k \times On^{m+1} \mapsto On$ definieren wir dann die Iteration F^α bzw. G^α als Iteration von $\lambda y \cdot F(y, \vec{x})$ bzw. $\lambda\beta \cdot G(\vec{A}; \beta, \vec{\alpha})$.
Die *charakteristische Funktion* χ_R einer Relation $R \subset M^m$ ist definiert durch:

$$\chi_R(\vec{x}) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} 0 & \text{falls } Rx_1 \ldots x_m\,, \\ 1 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Entsprechend definiert man für ordinale Relationale $R \subset \Omega^k \times On^m$ das *charakteristische ordinale Funktional* χ'_R, so daß für $k = 0$: $\chi'_R = \chi_R \upharpoonright On^m$; wenn der Zusammenhang es erlaubt, schreiben wir für χ'_R kurz χ_R.

II. Primitiv-rekursive Mengenfunktionen und ordinale Funktionale

1. *Definition*

$\mathbb{P}(M)$ sei die kleinste Menge von Mengenfunktionen über M, die die *Anfangsfunktionen*

$$\lambda x \cdot \emptyset,\ \lambda \overset{m}{x} \cdot x_i \text{ für } 1 \leqq i \leqq m,\ \lambda xy \cdot \{x, y\},\ \lambda xy \cdot x \backslash y,\ \lambda x \cdot \omega$$

enthält, und die unter den *Definitionsschemata*

(1) *Einsetzung* mit $H : M^k \mapsto M$, $G_i : M^m \mapsto M$ $(i = 1, \ldots, k) : F(\vec{x}) = H(\overset{k}{G}(\vec{x}))$

(2) *Limesbildung* mit $G : M^{m+1} \mapsto M : F(y, \vec{x}) = \bigcup_{z \in y} G(z, \vec{x})$

(3) *Rekursion* mit $H : M^{m+2} \mapsto M : F(y, \vec{x}) = H(\langle F(z, \vec{x}) \,|\, z \in y\rangle, y, \vec{x})$

abgeschlossen ist.

Die Funktionen aus $\mathbb{P}(M)$ heißen *primitiv-rekursiv* (p.r.(M)). Eine Relation $R \subset M^m$ heißt p.r.(M), wenn ihre charakteristische Funktion χ_R p.r.(M) ist.

$\mathbb{P}(On)$ sei die kleinste Menge ordinaler Funktionale über On, die die *Anfangsfunktionale*

$$\boldsymbol{\lambda}\vec{A}; \vec{\alpha} \cdot 0, \quad \boldsymbol{\lambda}\vec{A}; \overset{m}{\alpha} \cdot \alpha_i \text{ und } \boldsymbol{\lambda}\overset{k}{A}; \overset{m}{\alpha} \cdot A_j(\alpha_i) \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq m \quad \text{und} \quad 1 \leqq j \leqq k,$$

$$\boldsymbol{\lambda}\vec{A}; \alpha \cdot \alpha + 1, \quad \boldsymbol{\lambda}\vec{A}; \alpha\beta \cdot \chi_{=}(\alpha, \beta), \quad \boldsymbol{\lambda}\vec{A}; \vec{\alpha} \cdot \omega$$

enthält, und die unter den *Definitionsschemata*

(1) *Einsetzung* mit $G_i : \Omega^k \times On^m \mapsto On$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $H : \Omega^k \times On^n \mapsto On$:

$$F(\vec{A}; \vec{\alpha}) = H(\vec{A}; \overset{n}{G}(\vec{A}; \vec{\alpha}))$$

(2) *Limesbildung* mit $G : \Omega^k \times On^{m+2} \mapsto On$

$$F(\vec{A}; \vec{\alpha}, \beta, \gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{falls} \quad \beta = 0 \\ \sup\limits_{\nu < \beta} G(\vec{A}; \vec{\alpha}, \nu, \gamma) & \text{sonst} \end{cases}$$

(3) *Rekursion* mit $H : \Omega^{k+1} \times On^{m+1} \mapsto On$

$$F(\vec{A}; \beta, \vec{\alpha}) = H(\vec{A}, \boldsymbol{\lambda}\nu < \beta \cdot F(\vec{A}; \nu, \vec{\alpha}); \beta, \vec{\alpha})$$

abgeschlossen ist.

Die Funktionale aus $\mathbb{P}(On)$ heißen *primitiv-rekursiv* (p.r. (On)). Ein ordinales Relational heißt p.r.(On), wenn sein charakteristisches ordinales Funktional p.r.(On) ist.

2. *Abgeschlossenheiten*

Die folgenden Abgeschlossenheiten von $\mathbb{P}(M)$ und $\mathbb{P}(On)$ zeigt man in naheliegender Weise.

2.1 (a) Für $j : \{1, \ldots, m\} \mapsto \{1, \ldots, k\}$ $(m, k < \omega)$ ist mit $F : M^m \mapsto M$ auch $\boldsymbol{\lambda}\overset{k}{x} \cdot F(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$ p.r.(M).

(b) analog für die Ordinalzahlstellen von p.r.(On) Funktionalen

2.2 (a) wie 2.1 für die Funktionsstellen von p.r.(On) Funktionalen

(b) Mit $F : \Omega^k \times On^m \mapsto On$ und $G_i : \Omega^n \times On^{r+1} \mapsto On$ $(i = 1, \ldots, k)$ ist auch $\boldsymbol{\lambda}\vec{A}; \vec{\beta}\vec{\alpha} \cdot F(\boldsymbol{\lambda}\nu \cdot \vec{G}(\vec{A}; \nu, \vec{\beta}); \vec{\alpha})$ p.r.(On).

Im Hinblick auf III sei hier schon folgendes bemerkt:

Die Beweise von 2.2 (a) und (b) erfolgen durch Induktion über die Schemata von p.r.(On); dabei erfordert jeweils nur der Rekursionsschritt die Anwendung des Rekursionsschemas im Beweis, in den speziellen Fällen der ω-Iteration bzw. der beschränkten Rekursion (Def. später in II.2 bzw. in III) genügen jeweils diese zum Beweis.

Mit einer bzw. zwei Rekursionen folgt:

Addition und Multiplikation von Ordinalzahlen sind p.r. (On) Funktionen.

2.3 Die Menge der p.r. (M) Relationen und die der p.r. (On) Relationale sind unter Booleschen Operationen abgeschlossen.

2.4 $\mathbb{P}(M)$ und $\mathbb{P}(On)$ sind unter Definition durch Fallunterscheidung mittels p.r. (M) Relationen bzw. p.r. (On) Relationalen abgeschlossen.

2.5 Alle Σ_0-definierbaren Relationen über M sind p.r. (M), und alle ordinalen Σ_0-definierbaren Relationen $R \subset On^m$ sind p.r. (On).

2.6 $F : M^{m+1} \mapsto M$ sei p.r. (M) und $R \subset M^{m+1}$ eine p.r. (M) Relation; dann ist auch $\boldsymbol{\lambda} \vec{x} y \cdot \{F(\vec{x}, z) \mid z \in y \vee R\vec{x}z\}$ p.r. (M).

Definition: beschränkter $\boldsymbol{\iota}$-Operator

$$\boldsymbol{\iota} z : \in y\, \mathfrak{A} =_{\mathrm{Df}} \cap \{z \mid \{z\} = \{z \mid z \in y \wedge \mathfrak{A}\}\}\,,$$

außerdem: $\overset{\leqq 1}{\bigvee} z \mathfrak{A} \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \neg \bigvee z \mathfrak{A} \vee \{z\} = \{z \mid \mathfrak{A}\}$

beschränkter $\boldsymbol{\mu}$-Operator

$$\boldsymbol{\mu} \alpha : \leqq \beta\, \mathfrak{A} =_{\mathrm{Df}} \sup_{\alpha < \beta + 1} J_{\mathfrak{A}}(\alpha)\,,$$

wobei $J_{\mathfrak{A}}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \alpha & \text{falls} \quad \mathfrak{A}(\alpha) \wedge \neg \bigvee \nu : < \alpha\, \mathfrak{A}(\nu)\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$

2.7 (a) $R \subset M^{m+1}$ sei eine p.r. (M) Relation mit $\bigwedge \vec{x} \overset{\leqq 1}{\bigvee} z R\vec{x}z$; dann ist die durch

$$F(\vec{x}, y) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \boldsymbol{\iota} z : \in y\, R\vec{x}z & \text{falls} \quad \boldsymbol{\iota} z : \in y\, R\vec{x}z \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion F p.r. (M).

(b) $R \subset \Omega^k \times On^{m+1}$ sei ein p.r. (On) Relational; dann ist $\boldsymbol{\lambda} \vec{A}; \vec{\alpha}\beta \cdot \boldsymbol{\mu}\nu : \leqq \beta\, R\vec{A}; \vec{\alpha}\nu$ p.r. (On).

Im Hinblick auf III sei darauf hingewiesen, daß man nur in den Beweisen von 2.2 und von $+, \cdot \in \mathbb{P}(On)$ ein Rekursionsschema benötigt.

Durch Rekursion erhält man:

Für p.r. (M) $F : M^{m+1} \mapsto M$ ist die Iteration $\boldsymbol{\lambda} y \vec{x} \alpha \cdot F^{\alpha}(y, \vec{x})$ von F die Beschränkung einer p.r. (M) Funktion.

Die Iteration eines p.r. (On) Funktionals ist ein p.r. (On) Funktional.

Durch Einsetzen von ω folgt dann:

2.8 *ω-Iteration*

Mit F ist auch F^{ω} eine p.r. (M) Funktion bzw. ein p.r. (On) Funktional.

Für die transitive Hülle $C(x)$ einer Menge x und die Menge $V_{\omega} = \{x \mid |x| < \omega\}$ folgt mit ω-Iteration:

$\boldsymbol{\lambda} x \cdot C(x)$ und $\boldsymbol{\lambda} x \cdot V_{\omega}$ sind p.r. (M),

und aus der V_{ω}-Definierbarkeit von $+ \restriction \omega^2$:

$+ \restriction \omega^2$ ist die Beschränkung einer p.r. (M) Funktion.

3. *Die konstruktible Hierarchie*

Mit dem Voraufgegangenen folgt, daß die üblichen syntaktischen und semantischen Funktionen und Relationen aus I.3 p.r. (M) sind oder Beschränkungen von solchen. Beim Beweis benötigt man außer ω-Iterationen keine Anwendungen des Rekursionsschemas.

Die Hierarchie der *t-konstruktiblen* Mengen ist durch folgende Rekursion definiert:

$$\begin{aligned} L_0^t &=_{\mathrm{Df}} C(t) \\ L_{\alpha+1}^t &=_{\mathrm{Df}} Def(L_\alpha^t) \\ L_\alpha^t &=_{\mathrm{Df}} \bigcup_{\nu<\alpha} L_\nu^t \quad \text{für } \mathrm{Lim}(\alpha) \end{aligned}$$

Für $t = \emptyset$ erhält man die *konstruktible Hierarchie* $\langle L_\alpha \mid \alpha \in On\rangle$ und in $L =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{\alpha\in On} L_\alpha$ das *konstruktible Modell.*

Mit einmaliger Anwendung des Rekursionsschemas – von ω-Iterationen abgesehen – folgt dann aus dem Voraufgegangenen:

3.1 $\langle L_\alpha^t \mid \alpha \in On \wedge t \in M\rangle$ ist die Beschränkung einer p.r. (M) Funktion.

Insbesondere ist dann auch $\lambda\alpha \cdot L_\alpha$ die Beschränkung einer p.r. (M) Funktion.

III. Hierarchien

1. *Vorbereitendes*[1]

Zunächst definieren wir die Folge der *Ackermannschen Funktionen*

$$\begin{aligned} &A_n : On \mapsto On \ (n < \omega): \\ &A_0(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \alpha + 1\,, \\ &A_{n+1}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} A_n^{\alpha+1}(\alpha+1) \end{aligned}$$

und damit die Mengenfunktionen $A_n' : M \mapsto M$:

$$A_n'(x) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} A_n(x) & \text{falls} \quad x \in On\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Unmittelbar aus der Definition folgt:

LEMMA

(a) $\alpha < A_n(\alpha)$,

(b) $\alpha < \alpha' \to A_n(\alpha) < A_n(\alpha')$,

(c) $A_n(\alpha) < A_{n+1}(\alpha)$.

Die Definitionsschemata der *beschränkten Rekursion* sind:

(a) für *Mengenfunktionen*
mit $H : M^{m+2} \mapsto M$ und $G : M \mapsto M$:
$F(y, \vec{x}) = H(\langle F(z, \vec{x}) \mid z \in y\rangle, y, \vec{x})$
$|F(y, \vec{x})| \leqq G(\max(|y|, |\vec{x}|))$

(b) für *ordinale Funktionale*
mit $H : \Omega^{k+1} \times On^{m+1} \mapsto On$ und $G : \Omega^k \times On \mapsto On$:
$F(\vec{A}; \beta, \vec{\alpha}) = H(\vec{A}, \lambda\nu < \beta \cdot F(\vec{A}; \nu, \vec{\alpha}); \beta, \vec{\alpha}) \leqq G(\vec{A}; \max(\beta, \vec{\alpha}))$.

[1] Vgl. [1].

2. *Definition der Hierarchien*

Für $n < \omega$ definieren wir:

MG^n sei die kleinste Menge von Mengenfunktionen über M, die die p.r.(M) Anfangsfunktionen und A'_n enthält, und die unter Einsetzung, Limesbildung, ω-Iteration und beschränkter Rekursion abgeschlossen ist.

OG^n sei die kleinste Menge ordinaler Funktionale über On, die die p.r.(On) Anfangsfunktionale und A_n enthält, und die unter Einsetzung, Limesbildung, ω-Iteration und beschränkter Rekursion abgeschlossen ist.

$\overline{MR}^0$ sei die Menge der p.r.(M) Anfangsfunktionen.

MR^n sei die Abschliessung von $\overline{MR}^n$ unter Einsetzung, Limesbildung und ω-Iteration.

MR^{n+1} sei die Menge der Mengenfunktionen, die zu MR^n gehören oder mit solchen durch einmalige Rekursion definiert sind.

$\overline{OR}^0$ sei die Menge der p.r.(On) Anfangsfunktionale.

OR^n sei die Abschliessung von $\overline{OR}^n$ unter Einsetzung, Limesbildung und ω-Iteration.

$\overline{OR}^{n+1}$ sei die Menge der ordinalen Funktionale, die zu OR^n gehören oder mit solchen durch einmalige Rekursion definiert sind.

Die Funktionen aus MG^n heißen *MG^n-Funktionen*, und die *OG^n-Funktionale* sind die Funktionale aus OG^n.

Die *MG^n-Relationen* sind die Relationen über M, deren charakteristische Funktion eine MG^n-Funktion ist; die *OG^n-Relationale* sind die ordinalen Relationale, deren charakteristisches Funktional ein OG^n-Funktional ist.

Entsprechend die Bezeichnungen für MR^n und OR^n.

3. *Folgerungen*

Den Hinweisen in II.2 über die Benutzung des Rekursionsschemas ist zu entnehmen:

3.1 SATZ

(a) II. 2.1–2.8 gelten für MG^n und MR^n mit $n \geqq 0$ an Stelle von p.r.(M).

(b) II. 2.1, 2.2 und 2.8 gelten für OG^n und OR^n mit $n \geqq 0$ und II. 2.3–2.7 für OG^n und OR^n mit $n \geqq 2$ an Stelle von p.r.(On).

Durch Induktion über die Schemata von MG^n beweist man:

3.2 SATZ

Zu jeder MG^n-Funktion $F : M^m \mapsto M$ gibt es eine Zahl $\gamma_F < \omega^\omega$, so daß:

$|F(x)| < A_n^{\gamma_F}(\max(|\vec{x}|))$

3.3 SATZ

(a) Jede OG^n-Funktion ist die Beschränkung einer MG^n-Funktion.

(b) Jede OR^n-Funktion ist die Beschränkung einer MR^n-Funktion.

Beweis:

Für $b \in M$ definieren wir eine Funktion $\widetilde{B}: On \mapsto On$:

$$\widetilde{B}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} b(\alpha) & \text{falls} \quad \mathrm{Funk}(b) \wedge \alpha \in D(b) \wedge b(\alpha) \in On\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgen die Behauptungen des Satzes aus dem folgenden Lemma.

LEMMA

(a) Zu jedem OG^n-Funktional $F : \Omega^k \times On^m \mapsto On$ gibt es eine MG^n-Funktion $F^* : M^{k+m} \mapsto M$, so daß:

$$F^*(\overset{k}{b}, \overset{m}{x}) = \begin{cases} F(\overset{k}{\tilde{B}}; \overset{m}{x}) & \text{falls} \quad x_1, \ldots, x_m \in On \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Das gleiche wie (a) für OR^n und MR^n.

Der Beweis des Lemmas erfolgt in naheliegender Weise durch Induktion über die Schemata von OG^n.

3.4 SATZ

(a) $OG^n \subset OG^{n+1}$

(b) $MG^n \subset MG^{n+1}$.

Beweis:

Zum Beweis von (a) zeigt man: $A_i \in OG^n$ für $i \leqq n$ durch Induktion über $i \leqq n$. (b) folgt dann aus (a) mit Satz 3.3 und 3.1.

3.5 SATZ

(a) Sei $F(y, \vec{x}) = H(\langle F(z, \vec{x}) \,|\, z \in y \rangle, y, \vec{x})$ und $H \in MG^n$ mit $n > 0$; dann gilt $F \in MG^{n+1}$.

(b) Sei $F(\beta, \vec{\alpha}) = H(\boldsymbol{\lambda} \nu < \beta \cdot F(\nu, \vec{\alpha}); \beta, \vec{\alpha})$ und $H \in OG^n$ mit $n > 0$; dann gilt $F \in OG^{n+1}$.

Beweis von (a):

Wegen $H \in MG^n$ existiert ein $\gamma' < \omega^\omega$, so daß:

$$|H(u, y, \vec{x})| < A_n^{\gamma'}(\max(|u|, |y|, |\vec{x}|))$$

o.B.d.A. nehmen wir $\gamma' \geqq 3$ an, so daß $A_n^{\gamma'}(\alpha) \geqq \alpha + 3$.

Dann folgt durch Mengeninduktion über y:

(*) $|F(y, \vec{x})| < A_n^{(\gamma' + \gamma') \cdot (|y|+1)}(\max(|y|, |\vec{x}|))$.

Aus (*) folgt dann weiter:

(**) Falls $n > 0$, gibt es ein $\delta < \omega^\omega$, so daß:

$$|F(y, \vec{x})| < A_{n+1}^{\delta}(\max(|y|, |\vec{x}|))$$

Wegen $\delta < \omega^\omega$ können wir in (**) o.B.d.A. $\delta = \omega^j$ für ein $j < \omega$ annehmen, so daß mit ω-Iteration A_{n+1}^{δ} die Beschränkung einer MG^{n+1}-Funktion ist, woraus (a) durch beschränkte Rekursion folgt.

Beweis von (b):

Wegen $H \in OG^n$ existiert nach dem Lemma zum Beweis von Satz 3.3 ein $H^* \in MG^n$, so daß:

$$H^*(b, \beta, \vec{\alpha}) = H(\tilde{B}; \beta, \vec{\alpha})$$

Wegen $\boldsymbol{\lambda} \nu < \beta \cdot F(\nu, \vec{\alpha}) = \widehat{\langle F(\nu, \vec{\alpha}) \,|\, \nu < \beta \rangle}$ folgt:

$$F(\beta, \vec{\alpha}) = H^*(\langle F(\nu, \vec{\alpha}) \,|\, \nu < \beta \rangle, \beta, \vec{\alpha})$$

Damit erfolgt dann der Beweis analog zu dem von (a). q.e.d.

In IV wird folgendes Lemma nützlich sein:

LEMMA

(a) $MR^2 \subset MG^2$.

(b) Für ordinale Funktionen $F : On \mapsto On$ gilt:
$F \in OR^2 \to F \in OG^2$.

Beweis von (a):

Aus $\overline{MR}^0 \subset MG^0$ folgt sofort:

(1) $MR^0 \subset MG^0$.

Durch Induktion über die Schemata von MR^1 folgt:

(2) Zu jeder MR^1-Funktion $F : M^m \mapsto M$ gibt es eine Zahl γ mit $\lambda\alpha \cdot \gamma \in OG^2$, so daß:

$$|F(\vec{x})| < A_1^\gamma (\max(|\vec{x}|)).$$

Beweis:

Anfangsfunktionen: $F \in \overline{MR}^1$

Sei $F(y, \overset{m}{x}) = H(\langle F(z, \overset{m}{x}) | z \in y\rangle, y, \overset{m}{x})$ mit $H \in MR^0$.

Wie im Beweis von Satz 3.5 erhält man dann ein $\gamma < \omega^\omega$ mit:

$$|F(y, \vec{x})| < A_0^{\gamma \cdot (|y|+1)} (\max(|y|, |\vec{x}|)).$$

Wegen $\gamma \cdot \beta \leqq \beta \cdot \gamma^\omega$ folgt daraus:

$$|F(y, \vec{x})| < A_1^{\gamma^\omega} (\max(|y|, |\vec{x}|))$$

Die restlichen Induktionsschritte sind trivial.

Damit erhält man $MR^1 \subset MG^2$ und dann mit (2) weiter $\overline{MR}^2 \subset MG^2$ und daraus die Behauptung.

Den Beweis von (b) erhält man dann mittels (a) ähnlich wie beim Beweis von Satz 3.5 (b). q.e.d.

IV. Der Zusammenhang zwischen *MG* und *MR*

1. SATZ *(L^t-Stabilität)*[2]

Zu jeder MR^n-Funktion $F : M^m \mapsto M$ mit $n \geqq 2$ gibt es eine ZF-Formel $\nabla \mathfrak{z} \mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}, \overset{m}{\mathfrak{x}}) \in \Sigma_1$ mit keinen freien Variablen außer $\mathfrak{y}, \overset{m}{\mathfrak{x}}$ und eine Funktion $\varphi : On \mapsto On$ mit $\varphi \in OR^n$ und $\varphi \in OG^n$, so daß:

(a) $\alpha \leqq \varphi(\alpha)$, $\mathrm{Lim}(\varphi(\alpha))$, $\alpha < \beta \to \varphi(\alpha) \leqq \varphi(\beta)$ und für $\alpha \geqq |t|$:

(b) $L^t_{\varphi(\alpha)}$ ist unter F abgeschlossen.

(c) für $x_1, \ldots, x_m \in L^t_{\varphi(\alpha)}$ und transitives $v \supset L^t_{\varphi(\alpha)}$:
$y = F(\vec{x}) \leftrightarrow \vee z : \in v \models_v \mathfrak{A}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \vec{\boldsymbol{x}})$.

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Schemata von MR^n; dabei benutzen wir insbesondere die U-Absolutheit von Σ_0-Formeln für transitives $U \subset M$ (s. I.3). Außerdem nehmen wir im folgenden o.B.d.A. verschieden bezeichnete Variablen als verschieden an.

---

[2] Vgl. [4].

(A) $F \in MR^2$

Für $F \in \overline{MR}^0$ ist der Beweis trivial; weil mit ω-Iteration $\lambda\alpha \cdot \alpha + \omega$ eine OR^0-Funktion ist, erhält man dabei $\varphi \in OR^0$. Daraus folgt die Behauptung für $F \in MR^1$ mit $\varphi \in OR^1$ und für $F \in MR^2$ mit $\varphi \in OR^2$ und damit nach dem Lemma in III.3 auch mit $\varphi \in OG^2$ wie in den folgenden Induktionsschritten (B) und (C).

(B) Gilt die Behauptung für alle $F \in \overline{MR}^n$, so auch für alle $F \in MR^n$

Die Induktion über die Schemata erfolgt in naheliegender Weise; zur Definition von φ benötigt man außer ω-Iteration keine Rekursion.

(C) Gilt die Behauptung für alle $F \in MR^n$, so auch für $F \in \overline{MR}^{n+1}$.

Sei $F(u, \overset{m}{x}) = H(\langle F(r, \overset{m}{x}) \mid r \in u\rangle, u, \overset{m}{x})$ mit $H \in MR^n$;
H erfülle mit $\nabla \mathfrak{z}\mathfrak{A}$ und φ die Behauptungen des Satzes.

Sei $\tilde{\varphi}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \varphi(\alpha) + 1$,
$\tau(\alpha, \nu) =_{\mathrm{Df}} \tilde{\varphi}^{\omega \cdot \nu}(\tilde{\varphi}^{\omega}(\alpha))$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat τ folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
(1)\quad & \nu < \nu' \to \tau(\alpha, \nu) < \tau(\alpha, \nu') , \\
& \alpha < \alpha' \to \tau(\alpha, \nu) \leqq \tau(\alpha', \nu) , \\
& \varphi(\alpha) < \tau(\alpha, \nu) , \\
& \tau(\alpha, \nu) + \omega \leqq \tau(\alpha, \nu + 1) = \tilde{\varphi}^{\omega}(\tau(\alpha, \nu)) , \\
& \mathrm{Lim}(\tau(\alpha, \nu)) , \\
& \beta \leqq \tau(\alpha, \nu) \to \varphi(\beta) < \tau(\alpha, \nu) .
\end{aligned}$$

Damit folgt dann:

(2) Für $\alpha \geqq |t|$ ist $L^t_{\tau(\alpha,\nu)}$ unter H abgeschlossen.

Sei im folgenden:

$$u, x_1, \ldots, x_m \in L^t_\alpha,\ \alpha \geqq |t| \text{ und } |u| < \nu .$$

Mit $\mathfrak{B}(f, s, y, u, \vec{x}, v)$

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}\ & \mathrm{Funk}(f) \wedge \cup D(f) \subset D(f) \wedge u \subset D(f) \wedge y = f \restriction u \wedge \\
& \wedge a : \in D(f) \vee bz : \in s\big(b = f \restriction a \wedge \models_v \mathfrak{A}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \vec{\boldsymbol{x}})\big)
\end{aligned}$$

folgt dann wegen $L^t_{\tau(\alpha,\nu)+k} \in L^t_{\tau(\alpha,\nu+1)}$ für $k < \omega$ durch Induktion über ν (vgl. [2]):

$$\begin{aligned}
(3)\quad & \langle F(r, \vec{x}) | r \in u\rangle \in L^t_{\tau(\alpha,\nu)} \quad \text{und für transitives } v \supset L^t_{\tau(\alpha,\nu)}: \\
& y = \langle F(r, \vec{x}) | r \in u\rangle \leftrightarrow \vee fs : \in v\, \mathfrak{B}(f, s, y, u, \vec{x}, v) .
\end{aligned}$$

Da $L^t_{\tau(\alpha,\nu)}$ unter Paarmengen- und Vereinigungsmengenbildung abgeschlossen ist, erhält man aus obigem in der üblichen Weise eine ZF-Formel $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{b}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u}, \overset{m}{\mathfrak{x}}) \in \Sigma_0$ mit keinen freien Variablen außer den angegebenen, so daß nach (3):

$$y = \langle F(r, \vec{x}) | r \in u\rangle \leftrightarrow \vee b : \in v \models_v \mathfrak{B}^*(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \vec{\boldsymbol{x}})$$

und dann mit $\mathfrak{A}^* =_{\mathrm{Df}} \mathfrak{B}^*(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \mathfrak{u}, \vec{\mathfrak{x}}) \wedge \mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{u}, \vec{\mathfrak{x}})$:

$$y = F(u, \vec{x}) \leftrightarrow \vee z^* : \in v \vee pbz : \in z^* \models_v \mathfrak{A}^*(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \vec{\boldsymbol{x}}) .$$

Sei $\zeta(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \tau(\alpha, \alpha + \alpha)$; wegen $u \in L^t_\alpha \to |u| < |t| + \alpha$ haben dann $\nabla\mathfrak{z}^* \nabla \mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{z} : \varepsilon\mathfrak{z}^*\ \mathfrak{A}^*$ und ζ^ω die verlangten Eigenschaften. q.e.d.

Für $t = 0$ erhält man aus dem gerade bewiesenen Satz den wichtigen Spezialfall der *L-Stabilität* der MR^n-Funktionen.

Mit Satz 1 erhält man eine Normaldarstellung der p.r.(M) Funktionen durch MR^0-Funktionen.

2. SATZ *(Normaldarstellung)*[3]
Zu $m < \omega$ gibt es eine MR^0-Funktion $U_m : M^{m+2} \mapsto M$, so daß folgendes gilt: Wenn $F : M^m \mapsto M$ eine MR^n-Funktion ist und $\nabla\mathfrak{z}\mathfrak{A}$, φ die in Satz 1 verlangten Eigenschaften haben, dann gilt für $x_1, \ldots, x_m \in L^t_{\varphi(\alpha)}$, $\alpha \geqq |t|$ und transitives $v \supset L^t_{\varphi(\alpha)}$:
$F(\vec{x}) = U_m(\nabla\mathfrak{z}\mathfrak{A}, v, \vec{x})$

Beweis:
Wir definieren (vgl. I.3):

$$U_m(f, v, \vec{x}) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \iota y : \in v \models_v f(y, \vec{x}) & \text{falls } \iota y : \in v \models_v f(y, \vec{x}) \in M, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach II.3 und III.3 ist U_m eine MR^0-Funktion; die restlichen Eigenschaften folgen aus Satz 1. q.e.d.

3. SATZ
$MG^n = MR^n$ für $n \geqq 2$.

Zunächst beweisen wir das folgende Lemma.

LEMMA[4]
Für $n \geqq 2$ ist MR^n unter beschränkter Rekursion abgeschlossen.

Beweis:
Sei $F(y, \overset{m}{x}) = H(\langle F(z, \overset{m}{x}) \mid z \in y\rangle, y, \overset{m}{x})$,

$|F(y, \overset{m}{x})| \leqq G(\max(|y|, |\overset{m}{x}|))$ mit $H, G \in MR^n$ und $n \geqq 2$;

H erfülle mit $\mathfrak{A}$ und φ die Behauptungen von Satz 1; aus Satz 2 folgt dann für $r, y, x_1, \ldots, x_m \in L^t_{\varphi(|t|)}$ und transitives $v \supset L^t_{\varphi(|t|)}$:
$H(r, y, \vec{x}) = U_{m+2}(\mathfrak{A}, v, r, y, \vec{x})$.

Dann definieren wir:

$$F^*(\beta, r, y, \vec{x}) =_{\mathrm{Df}} U_{m+2}(\mathfrak{A}, L_\beta^{\{r, y, \vec{x}\}}, r, y, \vec{x}).$$

Nach III.3 ist $\lambda x \cdot \mathfrak{A}$ für ZF-Formeln $\mathfrak{A}$ eine MR^0-Funktion und $\langle L^t_\beta \mid \beta \in On \wedge t \in M\rangle$ die Beschränkung einer MR^1-Funktion. Daher ist auch F^* die Beschränkung einer MR^1-Funktion. Wegen $r, y, x_1, \ldots, x_m \in L_\beta^{\{r, y, \vec{x}\}}$ folgt außerdem:

(1) $F(y, \vec{x}) = F^*(\beta, \langle F(z, \vec{x}) \mid z \in y\rangle, y, \vec{x})$ für $\beta \geqq \varphi(|\{\langle F(z, \vec{x}) \mid z \in y\rangle, y, \vec{x}\}|)$.

Da $\lambda\vec{\alpha} \cdot \max(\vec{\alpha})$ die Beschränkung einer MR^0-Funktion ist, erhält man aus der Beschränktheit von F eine MR^n-Funktion G^* mit:

$$|\langle F(z, \vec{x}) \mid z \in y\rangle| \leqq G^*(|y|, |\vec{x}|),$$
$$\alpha < \alpha' \to G^*(\alpha, |\vec{x}|) \leqq G^*(\alpha', |\vec{x}|).$$

[3] Nach einer Mitteilung von R. B. Jensen.
[4] Nach einer Mitteilung von R. B. Jensen.

Da φ nach III.3 die Beschränkung einer MR^n-Funktion ist, erhält man dann wegen der Monotonie von φ eine MR^n-Funktion σ mit

$$\varphi(|\{\langle F(z, \vec{x}) \mid z \in y\rangle, y, \vec{x}\}|) \leqq \sigma(|y|, |\vec{x}|),$$
$$\alpha < \alpha' \to \sigma(\alpha, |\vec{x}|) \leqq \sigma(\alpha', |\vec{x}|).$$

Aus (1) folgt dann:

$$(2)\ F(y, \vec{x}) = F^*(\beta, \langle F(z, \vec{x}) \mid z \in y\rangle, y, \vec{x}) \quad \text{für} \quad \beta \geqq \sigma(|y|, |\vec{x}|).$$

Dann definieren wir rekursiv:

$$F'(\beta, y, \vec{x}) =_{\mathrm{Df}} F^*(\beta, \langle F'(\beta, z, \vec{x}) \mid z \in y\rangle, y, \vec{x}).$$

Da F^* die Beschränkung einer MR^1-Funktion ist, ist F' die einer MR^2-Funktion. Mit der Monotonie von σ folgt aus (2) durch Mengeninduktion über y:

$$F(y, \vec{x}) = F'(\beta, y, \vec{x}) \quad \text{für} \quad \beta \geqq \sigma(|y|, |\vec{x}|)$$

und damit speziell

$$F(y, \vec{x}) = F'(\sigma(|y|, |\vec{x}|), y, \vec{x}).$$

Da die Rangfunktion eine MR^1-Funktion ist und σ eine MR^n-Funktion, folgt daraus: $F \in MR^n$. q.e.d.

Mittels III.3 erhält man damit dann den Beweis von Satz 3.

V. Der Zusammenhang zwischen *MG* (*MR*) und *OG* (*OR*) und der zwischen *OG* und *OR*

1. SATZ[5]

Es gibt eine Funktion $P : On \xrightarrow{1-1,\,\text{auf}} L$ und eine Normalfunktion $Q : On \mapsto On$ so daß:

(a) P ist die Beschränkung einer MR^2-Funktion.

(b) $Q \in OR^4 \cap OG^2$.

(c) $\boldsymbol{\lambda}\alpha\beta \cdot P(\alpha) \in P(\beta)$ ist eine OR^4- bzw. OG^2-Relation.

(d) $P(\alpha) \in P(\beta) \to \alpha < \beta$.

(e) $P^{-1} \restriction On \in OR^4 \cap OG^2$.

(f) $L_\alpha = P''\, Q(\alpha)$.

Beweis:

(A) Endliche Folgen von Ordinalzahlen

$<^n_{\mathrm{lex}}$ sei die lexikographische Ordnung von On^n; damit definieren wir eine Wohlordnung R von On^2:

$$R\,\langle\alpha, \beta\rangle\langle\alpha', \beta'\rangle$$
$$\leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \langle\max(\alpha, \beta), \alpha, \beta\rangle <^3_{\mathrm{lex}} \langle\max(\alpha', \beta'), \alpha', \beta'\rangle.$$

Mit $\sigma(\alpha, \beta) =_{\mathrm{Df}} \sigma''\, R''\, \{\langle\alpha, \beta\rangle\}$

erhält man dann einen Isomorphismus

$$\sigma : \langle On^2, R\rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle On, <\rangle$$

[5] Teilweise in [4]; der Beweis erfolgt hier nach einer anderen, von R. B. Jensen mitgeteilten Methode. Vgl. Entsprechendes für ω und V_ω in [6].

$$\text{mit: } \sigma(\alpha, \beta) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu<\beta} (\nu + \nu + 1) + \alpha & \text{falls } \alpha < \beta\,, \\ \sum\limits_{\nu<\beta} (\nu + \nu + 1) + \alpha + \beta & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $\alpha, \beta \leqq \sigma(\alpha, \beta)$ erhält man für die Umkehrfunktionen:

$$\sigma_1(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\mu}\gamma : \leqq \alpha \bigvee \beta : \leqq \alpha(\alpha = \sigma(\gamma, \beta)),$$
$$\sigma_2(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\mu}\gamma : \leqq \alpha \bigvee \beta : \leqq \alpha(\alpha = \sigma(\beta, \gamma)).$$

Wegen $+ \in OR^1 \cap OG^1$ folgt dann nach III.3:

(1) $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in OR^2 \cap OG^2$.

Mit diesen Paarfunktionen erhält man dann durch ω-Iteration:

LEMMA ($<\omega$-*Iteration*)

$F : \Omega^k \times On^{m+1} \mapsto On$ sei ein Funktional aus $OR^n \cap OG^n$ mit $n \geqq 2$; dann gilt $F^{<\omega} \in OR^n \cap OG^n$, wobei

$$F^{<\omega}(\vec{A}; i, \beta, \vec{\alpha}) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} F^i(\vec{A}; \beta, \vec{\alpha}) & \text{falls } i < \omega\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Darstellung endlicher Folgen von Ordinalzahlen wird in der Weise erfolgen, daß 1 die leere Folge vertritt und $\sigma(\ldots\sigma(1, \alpha_0)\ldots\alpha_n)$ die Folge $\langle\alpha_0, \ldots, \alpha_n\rangle$; Folgenzahlen nennen wir dann die Zahlen α, die eine endliche Folge vertreten. Dazu definieren wir:

$$X(A; n) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0\,, \\ \sigma(X(A; i), A(i)) & \text{falls } n = i + 1 < \omega\,, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\|\alpha\| =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\mu} n : < \omega(\sigma_1^n(\alpha) = 1)\,,$$
$$((\alpha))_i =_{\mathrm{Df}} \sigma_2(\sigma_1^{\|\alpha\| \dot{-} (i+1)}(\alpha))\,,$$
$$Flg =_{\mathrm{Df}} \{\alpha \mid \sigma_1^{\|\alpha\|}(\alpha) = 1\}\,.$$

Flg ist die Menge der *Folgenzahlen*; für Folgenzahlen α ist $\|\alpha\|$ die *Länge* der zugehörigen Folge und $((\alpha))_i$ für $i < \|\alpha\|$ deren i-te *Komponente*, die wir auch kurz mit α_i bezeichnen, wenn der Zusammenhang es zuläßt. Mit $\langle\!\langle\beta_0, \ldots, \beta_n\rangle\!\rangle$ bezeichnen wir die Folgenzahl α mit $\|\alpha\| = n + 1$ und $\alpha_i = \beta_i$ für $i \leqq n$. Für Folgenzahlen α gilt: $\alpha = X(\boldsymbol{\lambda} i \cdot \alpha_i; \|\alpha\|)$.

Die *Zusammensetzung* $\alpha\beta$ von Folgenzahlen α, β definieren wir durch:

$$\alpha\beta =_{\mathrm{Df}} X(\boldsymbol{\lambda} i \cdot G(i, \alpha, \beta); \|\alpha\| + \|\beta\|)$$

$$\text{wobei: } G(i, \alpha, \beta) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \alpha_i & \text{falls } i < \|\alpha\| \\ \beta_{i \dot{-} \|\alpha\|} & \text{sonst} \end{cases}$$

so daß die Folgenzahlen bezüglich Zusammensetzung eine *freie Halbgruppe* bilden mit freien Erzeugenden der Gestalt $\sigma(1, \alpha)$. Die *Teilbeziehung* definieren wir durch:

$$\alpha \lhd \beta \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \alpha, \beta \in Flg \wedge \alpha \neq \beta \wedge \bigvee \gamma\delta(\gamma\alpha\delta = \beta)\,.$$

Außerdem erhält man:

(2) $X \in OR^2 \cap OG^2$.

Beweis:

Sei $H(A;\sigma(\alpha,\beta)) =_{\mathrm{Df}} \sigma\big(\sigma(\alpha, A(\beta+1)), \beta+1\big)$.

Nach (1) ist H die Beschränkung eines Funktionals aus $OR^2 \cap OG^2$, und für $n < \omega$ folgt durch Induktion über $n < \omega$:

$$H^n\big(A;\sigma(\sigma(1, A(0)), 0)\big) = \sigma(X(A;n+1), n),$$

woraus mit (1) und $< \omega$-Iteration die Behauptung folgt.

(*B*) *Die verzweigte Sprache RL*

Nach [2] und [3] ist L die konstruktible Abschliessung von $\langle On, \emptyset\rangle$, zu deren Definition wir nach [3] eine verzweigte Sprache RL einführen, wobei wir jedoch anders als in [3] nur „beschränkte", d.h. indizierte Quantoren und Komprehensionsoperatoren zulassen; nach [3] ist diese Sprache ausreichend zur Definition der konstruktiblen Abschliessung von $\langle On, \emptyset\rangle$.

Teilweise benutzen wir die gleichen Zeichen wie in I.3; Verwechslungen schließt der jeweilige Zusammenhang aus. Als *Grundzeichen* der RL-Sprache nehmen wir die folgenden Folgenzahlen:

$$\begin{aligned}
w_i &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle i, 1\rangle\!\rangle \quad \text{für } \imath < \omega,\\
\varepsilon &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle 0, 2\rangle\!\rangle,\\
= &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle 1, 2\rangle\!\rangle,\\
\dot{\neg} &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle 2, 2\rangle\!\rangle,\\
\dot{\wedge} &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle 3, 2\rangle\!\rangle,\\
\underset{\alpha}{\triangle} &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle \alpha, 3\rangle\!\rangle,\\
\underset{\alpha}{E} &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle \alpha, 5\rangle\!\rangle,\\
\utilde{\alpha} &=_{\mathrm{Df}} \langle\!\langle \alpha, 4\rangle\!\rangle.^{6}
\end{aligned}$$

Damit definieren wir weiter:

1. $Rv =_{\mathrm{Df}} \{w_i \mid i < \omega\}$ (RL-Variablen),
   $Rk =_{\mathrm{Df}} \{\utilde{\alpha} \mid \alpha \in On\}$ (RL-Konstanten);
2. rekursiv die Menge Qf der Quasiformeln: $x \varepsilon y$ und $x = y$ sind Quasiformeln für $x, y \in Rv \cup Rk$. Mit f, h sind auch $\dot{\neg} f$, $\dot{\wedge} fh$, $\underset{\alpha}{\triangle} xf$, $t\varepsilon t'$ und $t = t'$ Quasiformeln für $t, t' \in \{z, \underset{\alpha}{E} xf, \underset{\gamma}{E} yh\}$, $x, y \in Rv$ und $z \in Rv \cup Rk$;
3. die Ersetzung $f(x/\varkappa)$ der freien Vorkommen von $x \in Rv$ in $f \in Qf$ durch solche der Zahl $\varkappa$ in der üblichen Weise rekursiv über den Aufbau der Quasiformeln, wobei x durch $\underset{\alpha}{\triangle}$ und $\underset{\alpha}{E}$ gebunden wird;
4. die Menge der freien Variablen von $f \in Qf$:
   $Fr(f) =_{\mathrm{Df}} \{x \mid x \in Rv \wedge f(x/1) \neq f\}$;
5. die Menge der Quasiaussagen:
   $Qa =_{\mathrm{Df}} \{f \mid f \in Qf \wedge Fr(f) = \emptyset\}$;
6. die Menge der (konstanten) Quasiterme:
   $Qt =_{\mathrm{Df}} Rk \cup \{\underset{\alpha}{E} xf \mid \alpha \in On \wedge x \in Rv \wedge \underset{\alpha}{\triangle} xf \in Qa\}$.

[6] In (*D*) wird $\utilde{\alpha} < \underset{\alpha}{E}$ nützlich sein.

Mit $\mathfrak{A}(t, f, \alpha, x) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} t \in Qt \wedge t = \underset{\alpha}{E} xf \wedge \bigwedge\gamma(\underset{\gamma}{\Delta} \lhd f \rightarrow \gamma \leqq \alpha) \wedge \bigwedge\gamma(\underset{\gamma}{E} \lhd f \vee \underset{\sim}{\gamma} \lhd f \rightarrow \gamma < \alpha)$

definieren wir dann die Mengen der:

7. RL-Formeln
$Rf =_{\mathrm{Df}} \{f \mid f \in Qf \wedge \bigwedge t : \in Qt(t \lhd f \rightarrow \bigvee g\alpha x\, \mathfrak{A}(t, g, \alpha, x))\}$;
RL-Aussagen
$A =_{\mathrm{Df}} Rf \cap Qa$;
RL-Terme
$T =_{\mathrm{Df}} Rk \cup \{t \mid \bigvee f\alpha x(f \in Rf \vee \mathfrak{A}(t, f, \alpha, x))\}$.

Mittels (A) zeigt man:

(1) Die Ersetzung $f(x/\varkappa)$ ist die Beschränkung einer Funktion aus $OR^2 \cap OG^2$. Rf, A und T sind OR^2- bzw. OG^2-Relationen.

Zum Beweis benötigt man außer $< \omega$-Iterationen keine Anwendung des Rekursionsschemas. Außerdem benutzt man die durch

$$\eta'(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \sup_{n<\omega} X(\boldsymbol{\lambda}\beta \cdot \alpha; n),$$

$$\eta(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \sigma(\eta'(\alpha), \alpha)$$

definierte Funktion η, die folgende Eigenschaften hat:

(2) $\eta \in OR^2 \cap OG^2$,
$\alpha < \eta(\alpha)$, $\alpha < \beta \rightarrow \eta(\alpha) < \eta(\beta)$.

Den *Rang* von RL-Termen definieren wir durch:

$\varrho(\underset{\sim}{\alpha}) =_{\mathrm{Df}} \alpha \quad \varrho(\underset{\alpha}{E} xf) =_{\mathrm{Df}} \alpha$

und für RL-Aussagen:

$\varrho(a) =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\mu}\alpha(\bigvee\gamma(\underset{\gamma}{\Delta} \lhd a \rightarrow \gamma \leqq \alpha) \wedge \bigwedge\gamma(\underset{\gamma}{E} \lhd a \vee \underset{\sim}{\gamma} \lhd a \rightarrow \gamma < \alpha))$.

Dann folgt nach Definition:

(3) $x \in T \cup A \rightarrow x < \eta(\omega \cdot \varrho(x))$.

Weiter erhalten wir eine *Hierarchie von RL-Termen:*

$T_\alpha =_{\mathrm{Df}} \{t \mid t \in T \wedge \varrho(t) < \alpha\}$.

Wegen $x \in T \cup A \rightarrow \varrho(x) \leqq x$ folgt:

(4) ϱ ist die Beschränkung einer Funktion aus $OR^2 \cap OG^2$, und $\boldsymbol{\lambda}\alpha\beta \cdot (\beta \in T_\alpha)$ ist eine OR^2- bzw. OG^2-Relation.

(C) *Die konstruktible Abschliessung von* $\langle On, \emptyset\rangle$

Im Gegensatz zu I bezeichnen wir hier im folgenden mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ RL-Aussagen und mit $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$ RL-Terme.

Für RL-Formeln f, h definieren wir $(f \dot{\wedge} h) =_{\mathrm{Df}} \dot{\wedge} fh$; die Abkürzungen $(f \dot{\vee} h)$, $(f \dot{\rightarrow} h)$, $(f \dot{\leftrightarrow} h)$ und $\underset{\alpha}{\nabla} xf$ führen wir in der üblichen Weise ein (vgl. I).

Für RL-Aussagen definieren wir eine Komponentenrelation K:

1. falls $\varrho(\mathfrak{t}) < \alpha \wedge \mathfrak{t} \in T \backslash Rk$
$K\mathfrak{a}, \mathfrak{t}\varepsilon\underset{\sim}{\alpha} \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{a} = \underset{\alpha}{\nabla} w_0(w_0 = \mathfrak{t} \dot{\wedge} w_0 \varepsilon \underset{\sim}{\alpha})$[7],

[7] Nach Def. enthalten RL-Terme keine freien Variablen.

2. falls $\varrho(\mathfrak{t}) < \alpha$
$K\mathfrak{a}, \mathfrak{t}\varepsilon \underset{\alpha}{E} x \mathfrak{b} \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{a} = \mathfrak{b}(x/\mathfrak{t})$;
3. falls $\alpha = \varrho(\mathfrak{t}') \leqq \varrho(\mathfrak{t})$
$K\mathfrak{a}, \mathfrak{t}\varepsilon\mathfrak{t}' \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{a} = \underset{\alpha}{\nabla} w_0(w_0 = \mathfrak{t} \mathbin{\dot\wedge} w_0\varepsilon\mathfrak{t}')$;
4. falls $\alpha = \max(\varrho(\mathfrak{t}), \varrho(\mathfrak{t}'))$
$K\mathfrak{a}, \mathfrak{t} = \mathfrak{t}' \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{a} = \underset{\alpha}{\Delta} w_0(w_0\varepsilon\mathfrak{t} \mathbin{\dot\leftrightarrow} w_0\varepsilon\mathfrak{t}')$;
5. und für logische Zusammensetzungen
$K\mathfrak{a}, \dot\neg\, \mathfrak{b} \quad \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,
$K\mathfrak{a}, \dot\wedge\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2 \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{b}_2$,
$K\mathfrak{a}, \underset{\alpha}{\Delta} x \mathfrak{b} \quad \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \bigvee t : \in T_\alpha(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(x/t))$.

Zum Beweis, daß K fundiert ist, geben wir eine Funktion ϑ an, für die:

$K\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \to \vartheta(\mathfrak{a}) < \vartheta(\mathfrak{b})$; dazu definieren wir:

$\gamma(\mathfrak{a}) =_{\mathrm{Df}} \omega \cdot \varrho(\mathfrak{a}) + \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$

wobei $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ die Zahl der in $\mathfrak{a}$, aber nicht im Innern von RL-Termen vorkommenden Zeichen $\dot\neg$, $\dot\wedge$, $\underset{\alpha}{\Delta}$ ist; mit $< \omega$-Iteration folgt, daß $\mathfrak{z}$ die Beschränkung einer Funktion aus $OR^2 \cap OG^2$ ist.

Mit $\mathfrak{B}(f, n, a) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} f \in Flg \wedge \|f\| = n + 1 \wedge f_0 = \varepsilon \wedge a \in A \wedge$
$\bigwedge i : < n(Kf_{i+1}, f_i \wedge \gamma(f_{i+1}) \geqq \gamma(a))$

folgt dann nach [3]:

$\bigwedge a : \in A \bigvee n : < \omega \neg \bigvee f\, \mathfrak{B}(f, n, a)$.

Für RL-Aussagen definieren wir dann:

$\xi(\mathfrak{a}) =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\mu} n : < \omega \neg \bigvee f\, \mathfrak{B}(f, n, \mathfrak{a})$,

$\vartheta(\mathfrak{a}) =_{\mathrm{Df}} \omega \cdot \varrho(\mathfrak{a}) + \xi(\mathfrak{a})$.

Dann erhält man:

$K\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \to \vartheta(\mathfrak{a}) < \vartheta(\mathfrak{b})$.

ϑ ist die Beschränkung einer Funktion aus $OR^2 \cap OG^2$.

Dann definieren wir weiter:

$$\pi(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \sigma\big(\eta(\vartheta(\alpha)), \alpha\big) & \text{falls } \alpha \in A, \\ \sigma\big(\eta(\omega \cdot \varrho(\alpha)), \alpha\big) & \text{falls } \alpha \in T, \\ \sigma(1, \alpha) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus den Eigenschaften von σ, η und ϑ folgt:

(1) $\alpha < \pi(\alpha)$,
$\pi(\alpha) = \pi(\beta) \to \alpha = \beta$,
$\vartheta(\mathfrak{a}) < \vartheta(\mathfrak{b}) \to \pi(\mathfrak{a}) < \pi(\mathfrak{b})$,
$\varrho(\mathfrak{t}) < \varrho(\mathfrak{r}) \to \pi(\mathfrak{t}) < \pi(\mathfrak{r})$,
$\alpha \leqq \varrho(\mathfrak{t}) \to \pi(\underset{\sim}{\alpha}) \leqq \pi(\mathfrak{t})$,

wobei das letzte wegen $\alpha \leqq \varrho(\mathfrak{t}) \to \underset{\sim}{\alpha} \leqq \mathfrak{t}$ gilt, was mit $\alpha < \underset{\alpha}{E}$ folgt.

Mit $\alpha < \pi(\alpha)$ folgt aus (A) und (B):

(2) $\pi, \pi^{-1} \in OR^2 \cap OG^2$,
$\pi'' A$ und $\pi'' T$ sind OR^2- bzw. OG^2-Relationen.

Die Wahrheit $\models \mathfrak{a}$ von RL-Aussagen $\mathfrak{a}$ wird in der üblichen Weise (vgl. [3]) rekursiv über K definiert.

Für $\alpha \in \pi'' A$ definiert man durch (beschränkte) Rekursion über $<$ eine Funktion $\chi^* \in OR^3 \cap OG^2$ mit:

$$\chi^*(\pi(\mathfrak{a})) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \models \mathfrak{a}, \\ 1 & \text{sonst}, \end{cases}$$

so daß:

(3) $\models$ ist eine OR^3- bzw. OG^2-Relation.

Nach III ist $\models$ dann auch eine MR^2-Relation.

Rekursiv über $\{\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t}' \rangle \mid \varrho(\mathfrak{t}) < \varrho(\mathfrak{t}')\}$ definieren wir die *Bewertung* von RL-Termen:

$$L(\mathfrak{t}) =_{\mathrm{Df}} \{L(\mathfrak{t}') \mid \varrho(\mathfrak{t}') < \varrho(\mathfrak{t}) \wedge \models \mathfrak{t}' \varepsilon \mathfrak{t}\}.$$

Man erhält dann:

(4) Die Bewertungsfunktion $\langle L(\mathfrak{t}) \mid \mathfrak{t} \in T\rangle$ ist die Beschränkung einer MR^2-Funktion.

Beweis:

Für $\alpha \in \pi'' T$ definiert man rekursiv über $<$ eine Funktion G mit:

$$G(\alpha) = L(\pi^{-1}(\alpha)).$$

Wegen $L(\mathfrak{t}) \in L_{\varrho(t)+1}$ folgt $|G(\alpha)| \leqq \varrho(\pi^{-1}(\alpha))$ und so mit IV durch beschränkte Rekursion, daß G die Beschränkung einer MR^2-Funktion ist.

(D) *Die Funktionen P und Q*

Für RL-Terme definieren wir:

$$\mathfrak{t}^* =_{\mathrm{Df}} \pi^{-1}(\boldsymbol{\mu}\alpha : \leqq \pi(\mathfrak{t}) \models \pi^{-1}(\alpha) = \mathfrak{t}),$$
$$T^* =_{\mathrm{Df}} \{\mathfrak{t}^* \mid \mathfrak{t} \in T\}.$$

Nach C.6 ist $\mathfrak{t}^*$ der RL-Term mit minimalem $\pi(\mathfrak{t}^*)$, für den $L(\mathfrak{t}) = L(\mathfrak{t}^*)$ gilt; es folgt dann:

(1) $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{r}^* \leftrightarrow L(\mathfrak{t}^*) = L(\mathfrak{r}^*)$,
$L_\alpha = \{L(\mathfrak{t}) \mid \mathfrak{t} \in T^* \cap T_\alpha\}$,
$\models \mathfrak{t}^* \varepsilon\, \mathfrak{r}^* \rightarrow \pi(\mathfrak{t}^*) < \pi(\mathfrak{r}^*)$,
$\underset{\sim}{\alpha} \in T^*$,

wobei das letzte aus $\alpha \leqq \varrho(\mathfrak{t}) \rightarrow \pi(\underset{\sim}{\alpha}) \leqq \pi(\mathfrak{t})$ und $L(\underset{\sim}{\alpha}) = \alpha$, $\alpha \notin L_\alpha$ folgt.

Durch $\tau^*(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\mu}\beta(\beta \in \pi'' T^* \wedge \beta \subset \tau^{*''} \alpha)$ definieren wir rekursiv eine Abzählung

$$\tau^* : \langle On, < \rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle \pi'' T^*, < \rangle$$

und mit $\tau(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \pi^{-1}(\tau^*(\alpha))$ eine Abzählung:

$$\tau : \langle On, < \rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle T^*, \{\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{r} \rangle \mid \pi(\mathfrak{t}) < \pi(\mathfrak{r})\}\rangle.$$

Man erhält: $\tau(\alpha) < \eta(\omega \cdot \alpha)$,

$$\alpha < \zeta\big(\varrho(\tau(\alpha)) + 1\big) \quad \text{mit} \quad \zeta(\beta) =_{\mathrm{Df}} \eta(\omega \cdot \beta) \cdot \beta$$

und damit weiter:

(2) $\tau \in OR^4 \cap OG^2$,

$\tau^{-1} \restriction T^*$ ist die Beschränkung einer Funktion aus $OR^4 \cap OG^2$.

Von P und Q mit: $P(\alpha) =_{\mathrm{Df}} L(\tau(\alpha))$,

$$Q(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \tau^{-1}(\underset{\sim}{\alpha})$$

zeigt man dann, daß sie die verlangten Eigenschaften haben q.e.d.

Durch Induktion über den Formelaufbau von ZF-Formeln aus Σ_0 folgt aus (c) obigen Satzes:

KOROLLAR

$\mathfrak{A}(\overset{m}{\mathfrak{x}})$ sei eine ZF-Formel aus Σ_0 mit keinen freien Variablen außer $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$; dann ist $\boldsymbol{\lambda}\vec{\alpha} \cdot \models_L \mathfrak{A}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_m))$ eine OR^4- bzw. OG^2-Relation.

Aus dem Stabilitätssatz in IV folgt, daß L unter allen p.r.(M) Funktionen abgeschlossen ist; damit definieren wir für p.r.(M) Funktionen $F: M^m \mapsto M$:

$$P^{-1} F P =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\lambda}\vec{\alpha} \cdot P^{-1}\big(F(P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_m))\big).$$

2. SATZ

Für MR^n-Funktionen F gilt:

(a) $P^{-1} F P \in OR^n$ für $n \geqq 4$,

(b) $P^{-1} F P \in OG^n$ für $n \geqq 2$.

Beweis:[8]

$F: M^m \mapsto M$ sei eine MR^n-Funktion, die mit $\nabla\mathfrak{z}\mathfrak{A}$ und φ die Behauptungen des Stabilitätssatzes IV.1 für $t = 0$ erfülle. Für $\gamma =_{\mathrm{Df}} \max(\overset{m}{\alpha}) + 1$ gilt dann nach obigem Satz:

$$F(P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_m)) \in P'' Q(\varphi(\gamma)).$$

Wegen der U-Absolutheit von Σ_0-Formeln für transitives U folgt dann weiter:

$$P^{-1} F P(\vec{\alpha})$$
$$= \boldsymbol{\mu}\beta : < Q(\varphi(\gamma)) \vee \delta : < Q(\varphi(\gamma)) \models_L \mathfrak{A}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\delta}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_m))$$

und daraus nach obigem die Behauptung. q.e.d.

3. SATZ

Für MR^n-Funktionen $F: M^m \mapsto M$ mit $\wedge\vec{\alpha}(F(\vec{\alpha}) \in On)$ gilt:

(a) $F \restriction On^m \in OR^n$ für $n \geqq 4$,

(b) $F \restriction On^m \in OG^n$ für $n \geqq 2$.

Beweis:

Nach Satz 1 gilt $P^{-1} \restriction On \in OR^4 \cap OG^2$, wobei nach dem Beweis von Satz 1:

$P^{-1}(\alpha) = \tau^{-1}(\underset{\sim}{\alpha})$ mit $\tau \in OR^4 \cap OG^2$. Mit $H(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \boldsymbol{\mu}\beta : < \alpha(\alpha = \underset{\sim}{\beta})$

---

[8] Vgl. [4].

folgt dann nach Voraussetzung über F:

$$F(\vec{\alpha}) = H\big(\tau\big(P^{-1} F P(P^{-1}(\alpha_1), \ldots, P^{-1}(\alpha_m))\big)\big).$$

Wegen $H \in OR^2 \cap OG^2$ folgt die Behauptung nach Satz 2. q.e.d.

Weil OR^n- bzw. OG^n-Funktionen Beschränkungen von MR^n- bzw. MG^n-Funktionen sind, und wegen $MG^n = MR^n$ für $n \geqq 2$ folgt aus Satz 3 der folgende Satz.

4. SATZ

Für ordinale Funktionen $F : On^m \mapsto On$ gilt:

(a) $F \in OG^n \to F \in OR^n$ für $n \geqq 4$,

(b) $F \in OR^n \to F \in OG^n$ für $n \geqq 2$.

LITERATUR

[1] Grzegorczyk, A.: Some classes of recursive functions; Rozprawy Matematyczne IV, Warszawa 1953.

[2] Jensen, R. B.: Modelle der Mengenlehre; Berlin, Heidelberg, New York 1967.

[3] — Concrete Models of Set Theory; in: Sets, Models and Recursion Theory, ed. J. N. Crossley, Amsterdam 1967.

[4] — Karp, C.: Primitive Recursive Set Functions; erscheint in den Proc. of Symp. in Pure Math. der Am. Math. Soc.

[5] Lévy, A.: A Hierarchy of Formulas in Set Theory; Memoirs of the Am. Math. Soc., Nr. **57** (1965).

[6] Rödding, D.: Primitiv — Rekursive Funktionen über einem Bereich endlicher Mengen; Archiv f. Math. Logik und Grundlagenforschung **10/1—2**, S. 13—29.

Arch. math. Logik **13** (1970), 134–135.

KRIPKE-SEMANTIK DER DERIVATIVEN PRÄDIKATELOGIK*

Von HORST LUCKHARDT, Marburg/Lahn

In dieser Note soll kurz auf die sich aus der Kripke-Semantik der intuitionistischen Prädikatelogik (siehe z. B. Schütte [3], 44–53) ergebende Kripke-Semantik der derivativen Prädikatelogik (= Johansson-Minimalkalkül) hingewiesen werden.
Die freie Negationsreduzierte A^v einer Prädikateform A entsteht aus A, wenn man in ihr alle Teile der Gestalt $\neg B$ durch $B \to v$ mit einer neuen Aussagenvariablen v ersetzt (Schmidt [1], 280).

Satz: Eine Prädikateform A ist genau dann derivativ, wenn A^v intuitionistisch ist.

Beweis:

1. Induktion nach der Beweislänge zeigt, daß für derivatives A auch A^v derivativ ist.
2. Aus den „aufschichtenden" Kodifikationen der derivativen und intuitionistischen Logik in Schmidt [1], 376–396, und Schütte [2], 62–65, folgt, daß eine ($\neg$, $\bigwedge$-freie) intuitionistische Prädikateform A^v schon derivativ ist. Setzt man für v $\neg(a \to a)$ ein, so ergibt eine Umsetzung mit $[B \to \neg(a \to a)] \leftrightarrow \neg B$ einen derivativen Beweis für A.

Auf Grund dieser Beziehung induziert die Kripke-Semantik der intuitionistischen Prädikatelogik die folgende Kripke-Semantik der derivativen Prädikatelogik.
Modell- und W-Festsetzung erfolgen wie im intuitionistischen Fall (siehe Schütte [3] l.c.) mit der Ausnahme, daß eine Negation nun wie folgt zu behandeln ist:

(*) $W(\neg F', \alpha) = \mathrm{w} \Leftrightarrow \bigwedge \beta \in M\ [\alpha R \beta \Rightarrow W(F', \beta) = \mathrm{f} \vee W(v, \beta) = \mathrm{w}]$ für $\alpha \in M$, Prädikateform F und eine markierte Aussagenvariable v.

Für $\alpha, \beta, \in M$ gilt wieder: $W(F', \alpha) = \mathrm{w} \wedge \alpha R \beta \Rightarrow W(F', \beta) = \mathrm{w}$.
Ein Modell (M, R, V, W) heißt für die Prädikateform F zulässig, wenn 1. für alle freien Dingvariablen u aus F $W(u) \in \bigcap_{\alpha \in M} V(\alpha)$, und 2. die oben aufgeführte Aussagenvariable v nicht aus F ist. Gültigkeit und Allgemeingültigkeit sind nun wieder wie im intuitionistischen Fall zu nehmen. – Ein Modell ist für eine Formelnmenge zulässig, wenn es für jede Formel dieser Menge zulässig ist. Für Mengen S, T von Prädikateformen ist (S, T) konsistent, wenn für alle endlichen Teilmengen $S_0 \subseteq S$, $T_0 \subseteq T$ $S_0 \to T_0$ nicht derivativ ist, und interpretierbar (im Abzählbaren), wenn es ein für $S \cup T$ zulässiges (abzählbares) Modell (M, R, V, W) und ein $\alpha \in M$ gibt, so daß $W(F, \alpha) = \mathrm{w}$ für alle $F \in S$ und $W(G, \alpha) = \mathrm{f}$ für alle $G \in T$.

* Eingegangen am 6. 12. 68.

Satz:

(a) Eine Prädikateform ist genau dann derivativ, wenn sie (derivativ) allgemeingültig ist.

(b) Für Mengen S, T von Prädikateformen gilt:
(S, T) ist interpretierbar

$\Rightarrow$ Für alle endlichen $S_0 \subseteq S$, $T_0 \subseteq T$ ist (S_0, T_0) interpretierbar

$\Rightarrow$ Für alle endlichen $S_0 \subseteq S$, $T_0 \subseteq T$ ist (S_0, T_0) konsistent

$\Rightarrow$ (S, T) ist konsistent

$\Rightarrow$ (S, T) ist interpretierbar im Abzählbaren.

Bemerkung: In $(*)$ muß die W-Festsetzung von v sowohl von α wie auch von R abhängen. Festsetzungen wie

(1) $W(\neg F', \alpha) = \mathrm{w} \Leftrightarrow \bigwedge \beta \in M\ [\alpha R \beta \Rightarrow W(F', \beta) = \mathrm{f} \vee W(v, \alpha) = \mathrm{w}]$

(2) $W(\neg F', \alpha) = \mathrm{w} \Leftrightarrow \bigwedge \beta \in M\ [\alpha R \beta \Rightarrow W(F', \beta) = \mathrm{f} \vee v]$ $\qquad (v \equiv \curlyvee, \curlywedge)$

führen nicht zum Ziel.

Zu (1): Man zeigt leicht, daß nicht einmal $a \rightarrow \neg\neg a$ in der Semantik (1) allgemeingültig ist.

Zu (2): Alle in der Semantik (2) allgemeingültigen Prädikateformen sind intuitionistisch $(v \equiv \curlywedge)$. – Alle derivativen Prädikateformen sind (2)-allgemeingültig. – $a \wedge \neg a \rightarrow b$ ist nicht (2)-allgemeingültig $(v \equiv \curlyvee)$. – Die intuitionistische, aber nicht derivative Form $\neg(a \rightarrow b) \rightarrow \neg\neg a$ (Schmidt [1], 314) ist (2)-allgemeingültig.

Also liegt die Menge der in der Semantik (2) allgemeingültigen Prädikateformen echt zwischen den Mengen der derivativen und intuitionistischen Prädikateformen.

LITERATUR

[1] H. Arnold Schmidt: Mathematische Gesetze der Logik I. Springer 1960.
[2] K. Schütte: Schlußweisen-Kalküle der Prädikatenlogik. Math. Annalen **122** (1950), 47–65.
[3] K. Schütte: Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Springer 1968.

Arch. math. Logik 13 (1970), 136–153.

A CLASSIFICATION OF THE ORDINAL RECURSIVE FUNCTIONS*

By S. S. WAINER**

Introduction

In [7] a framework was developed, within which various hierarchies of number-theoretic functions can be generated.

Particular attention was paid to a hierarchy $\{\mathfrak{E}_\alpha\}$ obtained by restricting α appropriately to the ordinals below ε_0, and it was conjectured that this hierarchy provides a classification of the ordinal recursive functions.

The main purpose of this paper is to give an affirmative answer to this conjecture. In addition, a method of Robbin [9] is extended, in Section 4, in order to simplify further the definition of the classes $\mathfrak{E}_\alpha$, thus providing an affirmative answer to Problem A of [7]. An alternative characterization of the classes $\mathfrak{E}_\alpha$, in terms of computational complexity, is also obtained.

The notation is the same as that used in [7]. N denotes the set of non-negative integers, and lower-case italics $a, b, \ldots, x, y, z$, with or without subscripts, denote members of N. k-tuples $x_1, \ldots, x_k$ are denoted by $\underline{x}$. With the exception of λ and μ, lower-case Greek letters denote ordinals below ε_0.

1. Preliminary Definitions and Results

Let α be a limit ordinal. Then a fundamental sequence for α is a strictly increasing ω-sequence of ordinals, whose limit is α.

For each limit ordinal $\alpha < \varepsilon_0$, a fundamental sequence $\{\alpha\}(n)$, $n \in N$, is provided by the following inductive definition:

(I) If $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^{k+1} \cdot (a_{r+1} + 1)$,
where $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r > k + 1$, then for every $n \in N$,
$\{\alpha\}(n) = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^{k+1} \cdot a_{r+1} + \omega^k \cdot n + \cdots + \omega \cdot n + 2 \cdot n.$

(II) If $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^{\beta+1} \cdot (a_{r+1} + 1)$,
where $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r > \beta + 1 > \omega$, then for every $n \in N$,
$\{\alpha\}(n) = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^{\beta+1} \cdot a_{r+1} + \omega^\beta \cdot n$.

(III) If $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^\sigma \cdot (a_{r+1} + 1)$,
where $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r > \sigma$, and σ is a limit ordinal, then for every $n \in N$,
$\{\alpha\}(n) = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + \omega^\sigma \cdot a_{r+1} + \omega^{\{\sigma\}(n)}$.

* Eingegangen am 13. 3. 69.
** The author wishes to express his sincere thanks to Professor M. H. Löb for invaluable help and encouragement during the preparation of this work.

Now, for every ordinal $\alpha < \varepsilon_0$, define a function $F^n_\alpha(x)$ by recursion, as follows:

$$\begin{aligned} F^n_0(x) &= (n+1)\cdot(x+1)\,. \\ F^0_{\beta+1}(x) &= F^x_\beta(x)\,. \\ F^0_\sigma(x) &= F^0_{\{\sigma\}(x)}(x)\,,\ \sigma \text{ a limit ordinal.} \\ F^{n+1}_\gamma(x) &= F^0_\gamma(F^n_\gamma(x)),\ \gamma > 0\,. \end{aligned}$$

It is clear, from this definition, that for each $\alpha < \varepsilon_0$, $F^n_\alpha(x)$ is defined for every n and x.

In [7] various "monotonicity" properties of the functions $F^n_\alpha(x)$ were obtained. The following Theorem gives a summary of these results.

Theorem 1.1

(i) For each $\alpha < \varepsilon_0$ and all n, x, $F^n_\alpha(x) > \max(n, x)$.

(ii) For each $\alpha < \varepsilon_0$ and all n, x, y, if $x > y$ then $F^n_\alpha(x) > F^n_\alpha(y)$.

(iii) For each $\alpha < \varepsilon_0$ and all m, n, x, if $m > n$ then $F^m_\alpha(x) > F^n_\alpha(x)$.

(iv) For each $\alpha < \varepsilon_0$ and all n, x, $F^n_{\alpha+1}(x) \geqq F^n_\alpha(x)$, with equality holding only when $n = x = 0$.

(v) If $\alpha < \beta < \varepsilon_0$, then F^0_α is eventually majorized by F^0_β.

(vi) If σ is a limit ordinal $< \varepsilon_0$ and $x > 0$, then $F^0_{\{\sigma\}(x)}(x) > F^0_{\{\sigma\}(i)}(x)$ for every $i < x$.

These "monotonicity" results are of basic importance to the work contained in this paper, and they will often be used without explicit reference.

For each $\alpha < \varepsilon_0$, let $\mathfrak{E}_\alpha$ be the smallest class of functions which contains

$$\{\lambda x\,.\,0,\ \lambda x y\,.\,x + y,\ \lambda \underline{x}\,.\,x_i\} \cup \{\lambda x\,.\,F^0_\beta(x) \mid \beta \leqq \alpha\}\,,$$

and which is closed under the operations of Substitution and Limited Recursion. Clearly, if $\alpha < \beta < \varepsilon_0$, then $\mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathfrak{E}_\beta$.

The following results, concerning the hierarchy $\{\mathfrak{E}_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$, are proved in [7].

Theorem 1.2

Let α be any ordinal such that $0 < \alpha < \varepsilon_0$.

Then for every function $f \in \mathfrak{E}_\alpha$ there is a number p such that, for all $\underline{x}$,

$$f(\underline{x}) < F^p_\alpha(\max(\underline{x}))\,.$$

Corollary

Suppose $0 < \alpha < \beta < \varepsilon_0$.

Then every function in $\mathfrak{E}_\alpha$ is eventually majorized by F^0_β, and hence $\mathfrak{E}_\alpha \subset \mathfrak{E}_\beta$.

Theorem 1.3

$\{\mathfrak{E}_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ is a proper extension of the Grzegorczyk hierarchy, and for each $k \in N$, $\bigcup_{\alpha < \omega^k} \mathfrak{E}_\alpha$ is the class of Péter's k-recursive functions.

Now for each $n \in N$, define an ordinal $\omega(n)$ by

$$\omega(0) = 1 \, ,$$
$$\omega(n+1) = \omega^{\omega(n)} \, .$$

Clearly, $\{\omega(n) | \, n \in N\}$ is a fundamental sequence for ε_0.
For each $n > 0$, we construct a primitive recursive well-ordering $<_n$ of N, of order-type $\omega(n)$, as in Tait [10].
Functions ord_n and num_n will be defined along with $<_n$, such that $\mathrm{ord}_n(x)$ is the ordinal represented by x in the well-ordering $<_n$, and $\mathrm{num}_n(\alpha)$ is the number representing $\alpha < \omega(n)$ in the well-ordering $<_n$.

(i) $<_1$ is the natural well-ordering of N, and for every x, $\mathrm{ord}_1(x) = x$ and $\mathrm{num}_1(x) = x$.

(ii) Suppose $<_n$, ord_n. num_n have been defined so that $<_n$ is of order-type $\omega(n)$, for every x, $\mathrm{num}_n(\mathrm{ord}_n(x)) = x$, and for every $\alpha < \omega(n)$, $\mathrm{ord}_n(\mathrm{num}_n(\alpha)) = \alpha$.
Then if $\beta = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r$, where $\omega(n) > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots \cdots > \alpha_r \geqq 0$, define

$$\mathrm{num}_{n+1}(\beta) = (\mathrm{p}^{a_1}_{\mathrm{num}_n(\alpha_1)} \cdot \mathrm{p}^{a_2}_{\mathrm{num}_n(\alpha_2)} \cdot \cdots \cdot \mathrm{p}^{a_r}_{\mathrm{num}_n(\alpha_r)}) - 1$$

where $\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ is the primitive recursive enumeration of prime numbers in increasing order.
Conversely, if $z_r <_n \cdots <_n z_2 <_n z_1$, and $z = (\mathrm{p}^{a_1}_{z_1} \cdot \mathrm{p}^{a_2}_{z_2} \cdots \mathrm{p}^{a_r}_{z_r}) - 1$, define

$$\mathrm{ord}_{n+1}(z) = \omega^{\mathrm{ord}_n(z_1)} \cdot a_1 + \omega^{\mathrm{ord}_n(z_2)} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\mathrm{ord}_n(z_r)} \cdot a_r \, .$$

Finally, define $<_{n+1}$ by

$$x <_{n+1} y \equiv \mathrm{ord}_{n+1}(x) < \mathrm{ord}_{n+1}(y) \, .$$

It is clear that every ordinal $\beta < \omega(n+1)$ has a unique representation $\mathrm{num}_{n+1}(\beta)$, and that every number "represents" some ordinal $< \omega(n+1)$.
Hence $<_{n+1}$ is a well-ordering, of order-type $\omega(n+1)$.
Thus, for every $n > 0$; $<_n$ is a well-ordering of N, of order-type $\omega(n)$; $\mathrm{num}_n(\mathrm{ord}_n(x)) = x$ every x, and $\mathrm{ord}_n(\mathrm{num}_n(\alpha)) = \alpha$ for every $\alpha < \omega(n)$.
Notice also, that for every $n > 0$, 0 is the least element with respect to $<_n$.

Definition 1.4

For each $n > 0$, $U(<_n)$ is the smallest class of functions which contains the primitive recursive functions and which is closed under the operations of substitution, primitive recursion, and unnested ordinal recursion over the well-ordering $<_n$.
Functions belonging to $U(<_n)$ are called $<_n$*-recursive.*

Definition 1.5

A function f is said to be defined by $<_n$*-annihilation* from a function g if

$$\begin{cases} f(0, \underline{a}) = 0 \\ f(x+1, \underline{a}) = 1 + f(g(x+1, \underline{a}), \underline{a}) \end{cases}$$

where $g(0, \underline{a}) = 0$ and $g(x+1, \underline{a}) <_n x+1$ for all x.

Definition 1.6

For each $n > 0$, $A(<_n)$ is the smallest class of functions which contains the primitive recursive functions and which is closed under the operations of substitution, primitive recursion, and $<_n$-annihilation.

Theorem 1.7 (Robbin)

For each $n > 0$, $U(<_n) = A(<_n)$.

Definition 1.8

A function is called *ordinal recursive* if and only if it is $<_n$-recursive for some $n > 0$. The class of all ordinal recursive functions will be denoted by OR.
It follows immediately from Theorem 1.7 and Definition 1.8, that $\mathrm{OR} = \bigcup_{n \in N} A(<_n)$.

2. A Hierarchy of Ordinal Recursive Functions

The aim of this section is to show that, for every $\alpha < \varepsilon_0$, there is an r such that F_α^0 is $<_r$-recursive. It then follows that every function belonging to $\mathfrak{E}_\alpha (\alpha < \varepsilon_0)$ is $<_r$-recursive, for some r.
First, suppose that $n > 0$ is fixed, and suppose that the definition of the functions $F_\alpha^n(x)$ is restricted to just those ordinals $\alpha < \omega(n)$.
Suppose also, that a function G is defined so that

$$G(x+1, a) = (m+1) \cdot (a+1) \text{ if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^0 + m = m+1 .$$

$$G(x+1, a) = G(\mathrm{num}_{n+1}(\omega^\alpha + a), a) \text{ if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^{\alpha+1} + 0 .$$

$$G(x+1, a) = G(\mathrm{num}_{n+1}(\omega^{\{\sigma\}(a)}), a) \text{ if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^\sigma + 0 \ (\sigma \text{ a limit})$$

$$G(x+1, a) = G\big(\mathrm{num}_{n+1}(\omega^\beta), G(\mathrm{num}_{n+1}(\omega^\beta + m), a)\big)$$
$$\text{if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^\beta + m + 1 \ (\beta > 0) .$$

Then it can easily be proved, by induction over the ordinals $< \omega(n)$, that for every $\alpha < \omega(n)$, and all m, a,

$$F_\alpha^m(a) = G(\mathrm{num}_{n+1}(\omega^\alpha + m), a) .$$

We now show that such a function G can be defined, from primitive recursive functions, by nested recursion over the well-ordering $<_{n+1}$.
Recall the definition of the fundamental sequences $\{\sigma\}(i)$, $i \in N$, for limit ordinals $\sigma < \varepsilon_0$.
If σ is a limit ordinal $< \omega^\omega$, then for each $i \in N$, $\{\sigma\}(i)$ is defined explicitly by clause (I).
Thus it is clear, from the way in which the well-ordering $<_2$ (of order-type ω^ω) is constructed, that there is a primitive recursive function fs_2 such that

$$\mathrm{fs}_2(z, i) = \mathrm{num}_2(\{\sigma\}(i)) \text{ if } \mathrm{ord}_2(z) \text{ is the limit } \sigma.$$

Now suppose that $m \geqq 2$ and that there is a primitive recursive function fs_m such that

$$\mathrm{fs}_m(z, i) = \mathrm{num}_m(\{\sigma\}(i)) \text{ if } \mathrm{ord}_m(z) \text{ is the limit } \sigma.$$

If δ is a limit ordinal $< \omega(m+1)$ then either δ is of the form $\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r + 1} \cdot a_r$ where $\alpha_1 > \cdots > \alpha_r + 1$, in which case $\{\delta\}(i)$ is defined explicitly by clause (I) or clause (II); or else δ is of the form $\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_s} \cdot a_s$ where $\omega(m) > \alpha_1 > \cdots > \alpha_s$ and where α_s is a limit ordinal, in which case $\{\delta\}(i)$ is defined (inductively) from $\{\alpha_s\}(i)$.

Hence, using the "arithmetization" of ordinals below $\omega(m+1)$ provided by the function num_{m+1}, it is possible to define a function fs_{m+1}, which is primitive recursive in fs_m, such that

$$\mathrm{fs}_{m+1}(z, i) = \mathrm{num}_{m+1}(\{\delta\}(i)) \text{ if } \mathrm{ord}_{m+1}(z) \text{ is the limit } \delta.$$

Since fs_m is primitive recursive, fs_{m+1} must be also.

It is clear, therefore, that for each $k \geqq 2$, there is a primitive recursive function fs_k such that

$$\mathrm{fs}_k(z, i) = \mathrm{num}_k(\{\sigma\}(i)) \text{ if } \mathrm{ord}_k(z) \text{ is the limit } \sigma.$$

Hence if $\mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^\sigma$ where σ is a limit, then we have

$$\mathrm{fs}_{n+1}(x+1, a) = \mathrm{num}_{n+1}(\{\omega^\sigma\}(a)) = \mathrm{num}_{n+1}(\omega^{\{\sigma\}(a)}).$$

Now the predicates P_1, P_2, P_3, P_4 defined as follows:

$$P_1(y) \equiv \mathrm{ord}_{n+1}(y) \text{ is of the form } \omega^0 + m,$$

$$P_2(y) \equiv \mathrm{ord}_{n+1}(y) \text{ is of the form } \omega^{\alpha+1},$$

$$P_3(y) \equiv \mathrm{ord}_{n+1}(y) \text{ is of the form } \omega^\sigma, \text{ where } \sigma \text{ is a limit},$$

$$P_4(y) \equiv \mathrm{ord}_{n+1}(y) \text{ is of the form } \omega^\beta + m + 1, \text{ where } \beta > 0$$

can all be decided primitive recursively, and furthermore, there are primitive recursive functions g_1, g_2, g_3, g_4 such that

$$g_1(x+1, a) = (m+1) \cdot (a+1) \text{ if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^0 + m.$$

$$g_2(x+1, a) = \mathrm{num}_{n+1}(\omega^\alpha + a) \text{ if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^{\alpha+1} + 0.$$

$$g_3(x+1, a) = \mathrm{num}_{n+1}(\omega^\beta) \text{ if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^\beta + m + 1.$$

$$g_4(x+1, a) = \mathrm{num}_{n+1}(\omega^\beta + m) \text{ if } \mathrm{ord}_{n+1}(x+1) = \omega^\beta + m + 1.$$

Hence the function G can be defined as follows:

$$G(0, a) = 0$$

$$G(x+1, a) = \begin{cases} g_1(x+1, a) & \text{if } P_1(x+1) \\ G(g_2(x+1, a), a) & \text{if } P_2(x+1) \\ G(\mathrm{fs}_{n+1}(x+1, a), a) & \text{if } P_3(x+1) \\ G\big(g_3(x+1, a), G(g_4(x+1, a), a)\big) & \text{if } P_4(x+1) \\ 0 \text{ otherwise.} & \end{cases}$$

Since $\mathrm{fs}_{n+1}(x+1, a) <_{n+1} x+1$ for all x, and for each $i = 2, 3, 4$, $g_i(x+1, a) <_{n+1} x+1$, it is clear that G is defined, from primitive recursive functions, by a nested recursion over $<_{n+1}$.

Now Tait has shown in [10] that nested recursion over $<_{n+1}$ is reducible to unnested ordinal recursion over $<_{n+2}$.
Hence G is $<_{n+2}$ – recursive.
But for each $\alpha < \omega(n)$, and all a,

$$F^0_\alpha(a) = G(\mathrm{num}_{n+1}(\omega^\alpha), a)\,,$$

and so F^0_α is $<_{n+2}$ – recursive.
Thus, if $\alpha < \omega(n)$, all the initial functions of $\mathfrak{E}_\alpha$ are $<_{n+2}$-recursive, and hence every function belonging to $\mathfrak{E}_\alpha$ is $<_{n+2}$-recursive.
We have therefore proved

Theorem 2.1

For each $n > 0$, $\bigcup\limits_{\alpha < \omega(n)} \mathfrak{E}_\alpha \subseteqq U\,(<_{n+2})$.

Corollary

$\bigcup\limits_{\alpha < \varepsilon_0} \mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathrm{OR}$.

3. A Complete Classification of the Ordinal Recursive Functions

In this section it is proved that every $<_n$-recursive function belongs to $\mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ for some k. It follows that the hierarchy $\{\mathfrak{E}_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ exhausts the class of ordinal recursive functions, and so the following characterization of OR is obtained:

$$\mathrm{OR} = \bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathfrak{E}_\alpha\,.$$

These results depend on a strengthened form of the monotonicity property of the functions F^n_α stated in part (V) of Theorem 1.1, and this in turn depends upon a further analysis of the fundamental sequences $\{\sigma\}(i)$, $i \in N$, for limit ordinals $\sigma < \varepsilon_0$.

Lemma 3.1

For each $n > 0$, and every limit ordinal $\sigma < \omega(n)$, if $\alpha < \sigma$ and $\mathrm{num}_n(\alpha) < x$, then

$$\alpha < \{\sigma\}(x)\,.$$

Proof

We proceed by induction on n.
The result is vacuously true for $n = 1$.
Suppose that the result holds for any $n \geqq 1$, and let σ be a limit ordinal $< \omega(n+1)$.
If $\alpha < \sigma$ we can write α and σ in the forms

$$\alpha = \delta + \omega^{\alpha_1}\cdot a_1 + \omega^{\alpha_2}\cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_s}\cdot a_s\,,$$
$$\sigma = \delta + \omega^{\sigma_1}\cdot b_1 + \omega^{\sigma_2}\cdot b_2 + \cdots + \omega^{\sigma_r}\cdot b_r\,,$$

where

(i) $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_s \geqq 0$;

(ii) $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r > 0$, and $b_1 > 0$;

(iii) either $\sigma_1 > \alpha_1$, or else $\sigma_1 = \alpha_1$ and $b_1 > a_1$;

(iv) δ is a polynomial in powers of ω greater than σ_1.

From the definition of $\{\sigma\}(x)$, it is clear that

$$\{\sigma\}(x) \geqq \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot (b_1 - 1) + \{\omega^{\sigma_1}\}(x) .$$

We must now consider two cases:

(a) Suppose that $\sigma_1 > \alpha_1$.
Suppose also, that $x > \mathrm{num}_{n+1}(\alpha)$.
Now $\mathrm{num}_{n+1}(\alpha) \geqq \mathfrak{p}^{a_1}_{\mathrm{num}_n(\alpha_1)} - 1$.
Hence $x > a_1$, and $x > \mathrm{num}_n(\alpha_1)$ if $a_1 \neq 0$.
Thus, if σ_1 is a successor ordinal, we have

$$\begin{aligned}\{\sigma\}(x) &\geqq \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot (b_1 - 1) + \{\omega^{\sigma_1}\}(x)\\ &\geqq \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot (b_1 - 1) + \omega^{\sigma_1 - 1} \cdot x\\ &\geqq \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot (b_1 - 1) + \omega^{\alpha_1} \cdot x \text{ since } \sigma_1 - 1 \geqq \alpha_1\\ &\geqq \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot (b_1 - 1) + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_1} \text{ since } x > a_1\\ &> \alpha.\end{aligned}$$

If σ_1 is a limit ordinal, and $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 0$, so that $\alpha = \delta$, we have

$$\{\sigma\}(x) > \{\sigma\}(0) \geqq \delta = \alpha, \text{ since } x > 0 .$$

If σ_1 is a limit ordinal, and $\alpha > \delta$, then we can assume, without loss of generality, that $a_1 > 0$, and hence $x > \mathrm{num}_n(\alpha_1)$.
Therefore, by the induction hypothesis, we have $\{\sigma_1\}(x) > \alpha_1$, since $\sigma_1 > \alpha_1$; and so

$$\begin{aligned}\{\sigma\}(x) &\geqq \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot (b_1 - 1) + \{\omega^{\sigma_1}\}(x)\\ &= \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot (b_1 - 1) + \omega^{\{\sigma_1\}(x)}\\ &> \alpha .\end{aligned}$$

This completes case (*a*).

(b) Suppose that $\sigma_1 = \alpha_1$ and $b_1 > a_1$.
Then we have

$$\begin{aligned}\{\sigma\}(x) &\geqq \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot (b_1 - 1) + \{\omega^{\sigma_1}\}(x)\\ &\geqq \delta + \omega^{\sigma_1} \cdot a_1 + \{\omega^{\sigma_1}\}(x) \text{ since } b_1 > a_1\\ &= \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \{\omega^{\alpha_1}\}(x) \text{ since } \sigma_1 = \alpha_1 .\end{aligned}$$

Suppose also, that $x > \mathrm{num}_{n+1}(\alpha)$.
Now $\mathrm{num}_{n+1}(\alpha) \geqq (\mathfrak{p}^{a_2}_{\mathrm{num}_n(\alpha_2)}) - 1$.
Hence $x > a_2$ and $x > \mathrm{num}_n(\alpha_2)$ if $a_2 \neq 0$.
If α_1 is a successor ordinal, we have

$$\begin{aligned}\{\sigma\}(x) &\geqq \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \{\omega^{\alpha_1}\}(x)\\ &\geqq \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_1 - 1} \cdot x\\ &\geqq \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \omega^{\alpha_2} \text{ since } \alpha_1 > \alpha_2,\ x > a_2\\ &> \alpha.\end{aligned}$$

If α_1 is a limit ordinal and $a_2 = a_3 = \cdots = a_s = 0$, then since $x > 0$, we have

$$\{\sigma\}(x) \geqq \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \{\omega^{\alpha_1}\}(x) > \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 = \alpha .$$

If α_1 is a limit ordinal and $\alpha > \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1$, we may assume, without loss of generality, that $a_2 \neq 0$, so that $x > \mathrm{num}_n(\alpha_2)$.

Then, by the induction hypothesis, $\{\alpha_1\}(x) > \alpha_2$, since $\omega(n) > \alpha_1 > \alpha_2$; and so

$$\begin{aligned}\{\sigma\}(x) &\geqq \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \{\omega^{\alpha_1}\}(x) \\ &= \delta + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\{\alpha_1\}(x)} \\ &> \alpha .\end{aligned}$$

This completes case (b).

(a) and (b) together show that if σ is a limit ordinal, $\alpha < \sigma < \omega(n+1)$, and $\mathrm{num}_{n+1}(\alpha) < x$, then $\alpha < \{\sigma\}(x)$.

This completes the induction step, and so Lemma 3.1 is proved.

Lemma 3.2

For each $n > 0$ and every $\beta < \omega(n)$, if $\alpha < \beta$ and $\mathrm{num}_n(\alpha) < x$, then for every k,

$$F^0_{\omega(n)\cdot k + \alpha}(x) < F^0_{\omega(n)\cdot k + \beta}(x) .$$

Proof

Suppose $n > 0$ is fixed.

We proceed by transfinite induction over the ordinals below $\omega(n)$.

The result is trivial when $\beta = 0$.

Suppose the result holds for all ordinals $< \beta$, where $\beta > 0$.

Let α be any ordinal $< \beta$, and suppose that $\mathrm{num}_n(\alpha) < x$.

Then if β is a successor ordinal, we have

$$\begin{aligned}F^0_{\omega(n)\cdot k + \beta}(x) &> F^0_{\omega(n)\cdot k + \beta - 1}(x) \text{ since } x > 0 \\ &\geqq F^0_{\omega(n)\cdot k + \alpha}(x) \text{ by induction hypothesis.}\end{aligned}$$

If β is a limit ordinal, $\alpha < \{\beta\}(x)$ by Lemma 3.1, and so

$$\begin{aligned}F^0_{\omega(n)\cdot k + \beta}(x) &= F^0_{\omega(n)\cdot k + \{\beta\}(x)}(x) \\ &> F^0_{\omega(n)\cdot k + \alpha}(x) \text{ by induction hypothesis.}\end{aligned}$$

Hence the result holds for β.

This completes the induction step, and so Lemma 3.2 is proved.

Now, for any $\alpha > 0$, $F^p_\alpha(x)$ is just the $(p+1)$th. iterate of F^0_α, applied to x.

Thus it is a simple matter to extend Lemma 3.2 in order to obtain.

Lemma 3.3

For each $n > 0$ and every $\beta < \omega(n)$, if $\alpha < \beta$ and $\mathrm{num}_n(\alpha) < x$, then for every k and every p,

$$F^p_{\omega(n)\cdot k + \alpha}(x) < F^p_{\omega(n)\cdot k + \beta}(x) .$$

Lemma 3.4

If $g \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ and f is defined from g by $<_n$-annihilation (as in Definition 1.5), then there is a function $h \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ such that for all x, $\underline{a}$,

$$f(x, \underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(x)}(h(x, \underline{a})) .$$

Proof

If $g \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$, then it is clear that the function $\max(g(x, \underline{a}),\ 2 \cdot g(g(x, \underline{a}), \underline{a}), \underline{a})$ also belongs to $\mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$.

Hence, by Theorem 1.2, there is a number $p \geqq 2$ such that for all x, $\underline{a}$, $\max(g(x, \underline{a}),$ $2 \cdot g(g(x, \underline{a}), \underline{a}), \underline{a}) < F^p_{\omega(n)\cdot k}(\max(x, \underline{a}))$.

Define $h(x, \underline{a}) = \max(x, 2 \cdot g(x, \underline{a}), \underline{a}) + p$.

Then $h \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ and for all x, $\underline{a}$ we have

(i) $h(x, \underline{a}) > x$.

(ii) $h(x, \underline{a}) > 2 \cdot g(x, \underline{a}) + 1$.

Now f is defined by $<_n$-annihilation from g, so that

$$\begin{cases} f(0, \underline{a}) = 0 \\ f(x+1, \underline{a}) = 1 + f(g(x+1, \underline{a}), \underline{a}) \end{cases}$$

where $g(0, \underline{a}) = 0$ and $g(x+1, \underline{a}) <_n x + 1$ for every x.

We proceed by induction over the well-ordering $<_n$.

First, it is clear that

$$f(0, \underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(0)}(h(0, \underline{a}))\,.$$

Assume, now, that

$$f(g(x+1, \underline{a}), \underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(g(x+1, \underline{a}), \underline{a})).$$

Then $f(x+1, \underline{a}) \leqq F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(g(x+1, \underline{a}), \underline{a}))$.

But
$$\begin{aligned} h(g(x+1, \underline{a}), \underline{a}) &= \max(g(x+1, \underline{a}), 2 \cdot g(g(x+1, \underline{a}), \underline{a}), \underline{a}) + p \\ &< F^p_{\omega(n)\cdot k}(\max(x+1, \underline{a})) + p \\ &\leqq F^p_{\omega(n)\cdot k}(\max(x+1, \underline{a}) + p) \\ &\leqq F^p_{\omega(n)\cdot k}(h(x+1, \underline{a}))\,. \end{aligned}$$

Also, $\mathrm{ord}_n(0) = 0 < h(x+1, \underline{a})$, and so by Lemma 3.3,

$$F^p_{\omega(n)\cdot k}(h(x+1, \underline{a})) \leqq F^p_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(x+1, \underline{a}))\,.$$

Therefore,

$$h(g(x+1, \underline{a}), \underline{a}) < F^p_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(x+1, \underline{a}))\,.$$

Thus we have the following:

$$\begin{aligned} f(x+1, \underline{a}) &\leqq F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(g(x+1, \underline{a}), \underline{a})) \\ &< F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}\, F^p_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(x+1, \underline{a})) \\ &= F^{p+1}_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(x+1, \underline{a})) \\ &\leqq F^{h(x+1, \underline{a})}_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a}))}(h(x+1, \underline{a})) \text{ since } h(x+1, \underline{a}) > p \\ &= F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a})) + 1}(h(x+1, \underline{a}))\,. \end{aligned}$$

Now $g(x+1, \underline{a}) <_n x + 1$, and so $\mathrm{ord}_n(g(x+1, \underline{a})) + 1 \leqq \mathrm{ord}_n(x+1)$.

Also, it follows, from the way in which the ordinals below $\omega(n)$ are arithmetized, that

$$\mathrm{num}_n\big(\mathrm{ord}_n(g(x+1,\underline{a}))+1\big) \leqq 2\cdot(g(x+1,\underline{a})+1)-1\,,$$

(with equality holding whenever $n > 1$).
Hence $\mathrm{num}_n\big(\mathrm{ord}_n(g(x+1,\underline{a}))+1\big) < h(x+1,\underline{a})$.
Therefore, by Lemma 3.2, we have
$F^0_{\omega(n)\cdot k+\mathrm{ord}_n(g(x+1,\underline{a}))+1}\big(h(x+1,\underline{a})\big) \leqq F^0_{\omega(n)\cdot k+\mathrm{ord}_n(x+1)}\big(h(x+1,\underline{a})\big)$.
Hence, $f(x+1,\underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot k+\mathrm{ord}_n(x+1)}\big(h(x+1,\underline{a})\big)$.
This completes the induction step.
It follows that for all x, $\underline{a}$,

$$f(x,\underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot k+\mathrm{ord}_n(x)}\big(h(x,\underline{a})\big)\,.$$

Lemma 3.5

For each $n > 0$, and every x,

$$\mathrm{ord}_n(x) \leqq \{\omega(n)\}(x)\,.$$

Proof

By induction on n.
First of all we have, for every x,

$$\mathrm{ord}_1(x) = x \leqq 2x = \{\omega\}(x) = \{\omega(1)\}(x)\,.$$

Now suppose that $n \geqq 1$, and that for every x,

$$\mathrm{ord}_n(x) \leqq \{\omega(n)\}(x)\,.$$

Clearly, $\mathrm{ord}_{n+1}(0) = 0 \leqq \{\omega(n+1)\}(0)$.
Suppose, then, that $x > 0$, and that

$$x = (\mathfrak{p}_{x_1}^{a_1}\cdot\mathfrak{p}_{x_2}^{a_2}\cdot\cdots\cdot\mathfrak{p}_{x_r}^{a_r})-1$$

where $x_r <_n \cdots <_n x_2 <_n x_1$, and $a_1 > 0$.
Then $x > x_1$, so that $\{\omega(n)\}(x) > \{\omega(n)\}(x_1)$.
But, by the induction hypothesis, $\{\omega(n)\}(x_1) \geqq \mathrm{ord}_n(x_1)$.
Hence $\{\omega(n)\}(x) > \mathrm{ord}_n(x_1)$, and we have

$$\mathrm{ord}_{n+1}(x) = \omega^{\mathrm{ord}_n(x_1)}\cdot a_1 + \omega^{\mathrm{ord}_n(x_2)}\cdot a_2 + \cdots + \omega^{\mathrm{ord}_n(x_r)}\cdot a_r\,,$$

where $\mathrm{ord}_n(x_1) > \mathrm{ord}_n(x_2) > \cdots > \mathrm{ord}_n(x_r)$.

$$\begin{aligned}\text{Thus, } \mathrm{ord}_{n+1}(x) &< \omega^{\{\omega(n)\}(x)}\\ &= \{\omega^{\omega(n)}\}(x)\\ &= \{\omega(n+1)\}(x)\,.\end{aligned}$$

This completes the induction step, and so Lemma 3.5 is proved.

Lemma 3.6

If $g \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ and f is defined by $<_n$-annihilation from g, then there is a function $h \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ such that for all x, $\underline{a}$,

$$f(x,\underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot(k+1)}\big(h(x,\underline{a})\big)\,.$$

Proof

Given $g \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$, let h be the function defined in Lemma 3.4.
Then for all x, $\underline{a}$, we have

$$f(x, \underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(x)}(h(x, \underline{a})) .$$

Now, by Lemma 3.5, $\mathrm{ord}_n(x) \leqq \{\omega(n)\}(x)$.
But $\mathrm{num}_n(\mathrm{ord}_n(x)) = x < h(x, \underline{a})$.
Hence, by Lemma 3.2,
$F^0_{\omega(n)\cdot k + \mathrm{ord}_n(x)}(h(x, \underline{a})) \leqq F^0_{\omega(n)\cdot k + \{\omega(n)\}(x)}(h(x, \underline{a})) = F^0_{\{\omega(n)\cdot(k+1)\}(x)}(h(x, \underline{a}))$.
Also, for every y, and each $i < y$,
$F^0_{\{\omega(n)\cdot(k+1)\}(i)}(y) < F^0_{\{\omega(n)\cdot(k+1)\}(y)}(y) = F^0_{\omega(n)\cdot(k+1)}(y)$.
Thus we have the following; for all x, $\underline{a}$,

$$\begin{aligned} f(x, \underline{a}) &< F^0_{\{\omega(n)\cdot(k+1)\}(x)}(h(x, \underline{a})) \\ &< F^0_{\omega(n)\cdot(k+1)}(h(x, \underline{a})) . \end{aligned}$$

This completes the proof.

Theorem 3.7

For each $n > 0$, $A(<_n) \subseteqq \bigcup_{k \in N} \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$.

Proof

Clearly, all the primitive recursive functions belong to $\mathfrak{E}_{\omega(n)}$, and, by definition, each class $\mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ is closed under substitution.
If a function f is defined by primitive recursion from functions belonging to $\mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$, then it can easily be shown that $f \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k + \omega}$, and hence $f \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot(k+1)}$.
Finally ,suppose f is defined from $g \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ by $<_n$-annihilation.
Then, by Lemma 3.6, there is a function $h \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$ such that for all x, $\underline{a}$,

$$f(x, \underline{a}) < F^0_{\omega(n)\cdot(k+1)}(h(x, \underline{a})) .$$

Define a function g' as follows:

$$\begin{cases} g'(0, x, \underline{a}) = x \\ g'(z+1, x, \underline{a}) = g(g'(z, x, \underline{a}), \underline{a}) . \end{cases}$$

Then g' is primitive recursive in g, and so $g' \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot(k+1)}$.
Now it can easily be proved that for all x, $\underline{a}$,

$$f(x, \underline{a}) = \mu_z(g'(z, x, \underline{a}) = 0) .$$

Hence f can be defined as follows:

$$f(x, \underline{a}) = \mu_{z < F^0_{\omega(n)\cdot(k+1)}(h(x,\underline{a}))}[g'(z. x, \underline{a}) = 0] .$$

Thus, f is "elementary" in the functions $F^0_{\omega(n)\cdot(k+1)}$, h, and g', all three of which belong to $\mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot(k+1)}$.
But, for every $\alpha \geqq 2$, $\mathfrak{E}_\alpha$ is closed under the "elementary" operations.
Hence $f \in \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot(k+1)}$.
It follows that $A(<_n) \subseteqq \bigcup_{k \in N} \mathfrak{E}_{\omega(n)\cdot k}$.
Now $\mathrm{OR} = \bigcup_{n \in N} A(<_n)$ and so we have

Corollary

$\mathrm{OR} \subseteq \bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathfrak{E}_\alpha$.

Hence, from the Corollary to Theorem 2.1, we get

Theorem 3.8

$\mathrm{OR} = \bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathfrak{E}_\alpha$.

Now let Prov R be the class of all functions which are provably recursive in (classical) first-order arithmetic.

Then it follows from the work of Kreisel in [5] that OR = Prov R. (For related results, see Kino [4]).

Let $\mathrm{PR}^{(0,0)}$ be the class of all primitive recursive functionals of type (0, 0), defined by Gödel in [2].

Gödel has proved that $\mathrm{OR} \subseteq \mathrm{PR}^{(0,0)}$, and the converse, that $\mathrm{PR}^{(0,0)} \subseteq \mathrm{OR}$, has been established by Kreisel (see [6]) and, more directly, by Tait [11].

Also, let NR be the smallest class of functions which contains the primitive recursive functions, and which is closed under the operations of substitution, primitive recursion, and nested recursion over $<_n$, for any n.

Then OR = NR, since for any $n > 0$, nested recursion over $<_n$ is reducible to unnested ordinal recursion over $<_{n+1}$ (Tait [10]).

Hence we have

Theorem 3.9

$\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathfrak{E}_\alpha = \mathrm{OR} = \mathrm{Prov\,R} = \mathrm{PR}^{(0,0)} = \mathrm{NR}$.

Finally, suppose we define a function $F^0_{\varepsilon_0}$ by

$$F^0_{\varepsilon_0}(x) = F^0_{\omega(x)}(x) .$$

Then it can be shown that every function belonging to $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathfrak{E}_\alpha$ is eventually majorized by $F^0_{\varepsilon_0}$, and hence, $F^0_{\varepsilon_0} \notin \bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathfrak{E}_\alpha$.

4. A Simplified Definition of $\mathfrak{E}_\alpha$

In this section, Robbin's Honesty Lemma [9] is adapted in order to show that whenever $\alpha < \beta < \varepsilon_0$, F^0_α is "elementary" in F^0_β.

It follows from this result that if $2 \leqq \alpha < \varepsilon_0$, then $\mathfrak{E}_\alpha$ is the class of all functions which are "elementary" in F^0_α.

An alternative characterization of $\mathfrak{E}_\alpha (2 \leqq \alpha < \varepsilon_0)$, in terms of computational complexity, is also obtained.

The first step is to show that, for each $\alpha < \varepsilon_0$, there is a number k such that $F^n_\alpha(x)$ can be computed by a Turing machine in such a way that the number of tape-squares used in the computation is less than $F^n_\alpha(x + k)$.

For the basic results concerning Turing machines, see Davis [1].

Now let $n > 0$ be fixed.

Each ordinal $\alpha < \omega(n)$ will be represented, on the tape of a Turing machine, by a word $\boldsymbol{\alpha}$ which is built up from the tape-symbols

$$/, [1, 1], [2, 2], \ldots, [n-1, n-1],$$

in the following way:

(i) If $r \in N$ then $\boldsymbol{r}$ is the word consisting of $r+1$ $/$'s.
Hence $\mathbf{0} = /$, $\mathbf{1} = //$, $\mathbf{2} = ///, \ldots, \boldsymbol{m}+\mathbf{1} = \boldsymbol{m}\ /$, etc.

(ii) If $\omega(i) \leqq \beta < \omega(i+1) < \omega(n)$, and $\boldsymbol{\beta}$ has already been defined, denote by $\exp(\beta)$ the word

$$[i+1 \quad \boldsymbol{\beta} \quad i+1].$$

Suppose that $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_r} \cdot a_r + a_{r+1}$, where $0 < \alpha_r < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \omega(n-1)$, and where $\boldsymbol{\alpha}_r, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1$ have already been defined.
Then

$$\boldsymbol{\alpha} = \underbrace{\exp(\alpha_1) \ldots \exp(\alpha_1)}_{a_1 \text{ times}} \ \underbrace{\exp(\alpha_2) \ldots \exp(\alpha_2)}_{a_2 \text{ times}} \ \ldots \ \underbrace{\exp(\alpha_r) \ldots \exp(\alpha_r)}_{a_r \text{ times}} \boldsymbol{a}_{r+1}.$$

Thus, for example, the ordinal $\omega^{\omega \cdot 2} + \omega \cdot 3 + 1$ would be represented on tape by the word

$$[2\ [1\ //\ 1]\ [1\ //\ 1]\ /\ 2]\ [1\ //\ 1]\ [1\ //\ 1]\ [1\ //\ 1]\ //.$$

The triple α, m, x, where $\alpha < \omega(n)$, will be represented on the tape of a Turing machine by the word $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{m} * \boldsymbol{x}$.
We now construct a Turing machine Z which, when presented with a word $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{m} * \boldsymbol{x}$ $(\alpha < \omega(n))$, computes $F_\alpha^m(x)$.
Z has a tape which is infinite to the right.
The tape-symbols of Z include

$$/, [1, 1], [2, 2], \ldots, [n-1, n-1], *.$$

(Additional tape-symbols will also be required. These are to be used as markers in the course of a computation.)
In order to compute $F_\alpha^m(x)$, the word $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{m} * \boldsymbol{x}$ is written at the left-hand end of the tape, and the reading-head of Z is positioned at the right-hand end of this word.
Z then reacts according to the following scheme, where $W_1 \xrightarrow{Z} W_2$ means that Z converts word W_1 into word W_2, and positions its reading-head at the right-hand end of word W_2, in readiness for the next operation.

$$\mathbf{0} * \boldsymbol{m} * \boldsymbol{x} \xrightarrow{Z} (\boldsymbol{m} + \mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{x} + \mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{1} * \mathbf{0} * \boldsymbol{x} \xrightarrow{Z} \boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{x} * \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{\sigma} * \mathbf{0} * \boldsymbol{x} \xrightarrow{Z} \{\boldsymbol{\sigma}\}(\boldsymbol{x}) * \mathbf{0} * \boldsymbol{x}, \ \sigma \text{ a limit.}$$

$$\boldsymbol{\beta} * \boldsymbol{m} + \mathbf{1} * \boldsymbol{x} \xrightarrow{Z} \boldsymbol{\beta} * \mathbf{0} * \boldsymbol{\beta} * \boldsymbol{m} * \boldsymbol{x}, \ \beta > 0.$$

The computation stops when there are no more occurrences of * left on the tape. Now let $\overline{Z}(\alpha, m, x)$ be the number of tape-squares used in the computation of $F^m_\alpha(x)$ by Z. Also, for any $\alpha < \omega(n)$, let $L(\alpha)$ be the length of the word $\boldsymbol{\alpha}$.
Then Z can be "programmed" in such a way that the following inequalities hold:

$$\overline{Z}(0, m, x) \leqq (m + 1) \cdot (x + 6) + 1 ;$$

$$\overline{Z}(\alpha + 1, 0, x) \leqq \max[L(\alpha + 1) + (x + 1) + 5, 2 + \overline{Z}(\alpha, x, x)] ;$$

$$\overline{Z}(\sigma, 0, x) \leqq \max[L(\sigma) + (x + 1) + 5, 2 + \overline{Z}(\{\sigma\}(x), 0, x)], \text{ if } \sigma \text{ is a limit ordinal;}$$

$$\overline{Z}(\beta, m + 1, x) \leqq \max[L(\beta) + \overline{Z}(\beta, m, x) + 5, \overline{Z}(\beta, 0, F^m_\beta(x))], \text{ if } \beta > 0 .$$

Now it can easily be proved, by induction, that for every limit ordinal $\sigma < \omega\ (n)$, and all x,

$$L(\{\sigma\}(x)) < L(\sigma) + x \cdot L(\sigma)^2 .$$

Also, by methods similar to those used in the proof of Theorem 4.5 of [7], it is possible to obtain the following result, concerning the functions F^0_σ where σ is a limit ordinal $< \varepsilon_0$.

Lemma 4.1

For each limit ordinal $\sigma < \varepsilon_0$, all x, and all $y \geqq 2$,

$$F^0_{\{\sigma\}(x)+1}(x + y) \leqq F^0_\sigma(x + y) .$$

From these results, we obtain

Theorem 4.2

For each $\alpha < \omega(n)$, all m, and all x,

$$\overline{Z}(\alpha, m, x) \leqq F^m_\alpha(x + L(\alpha) + 5) .$$

Proof

We proceed by induction over the ordinals $< \omega(n)$.
First, it is clear that

$$\overline{Z}(0, m, x) \leqq (m + 1) \cdot (x + 6) + 1 \leqq F^m_0(x + L(0) + 5) .$$

Now suppose that $\alpha > 0$, and that for every $\delta < \alpha$,

$$\overline{Z}(\delta, m, x) \leqq F^m_\delta(x + L(\delta) + 5) .$$

We consider three cases:

(i) If α is a successor ordinal, then

$$\overline{Z}(\alpha, 0, x) \leqq \max[L(\alpha) + (x + 1) + 5, 2 + \overline{Z}(\alpha - 1, x, x)] .$$

But $L(\alpha) + (x+1) + 5 \leqq F^0_\alpha(x + L(\alpha) + 5)$, and by the induction hypothesis, we have

$$\begin{aligned} 2 + \overline{Z}(\alpha - 1, x, x) &\leqq 2 + F^x_{\alpha-1}(x + L(\alpha-1) + 5) \\ &\leqq 2 + F^{x+L(\alpha)+3}_{\alpha-1}(x + L(\alpha) + 5) \\ &\leqq F^{x+L(\alpha)+5}_{\alpha-1}(x + L(\alpha) + 5) \\ &= F^0_\alpha(x + L(\alpha) + 5)\,. \end{aligned}$$

Hence $\overline{Z}(\alpha, 0, x) \leqq F^0_\alpha(x + L(\alpha) + 5)$.

(ii) If α is a limit ordinal, then
$\overline{Z}(\alpha, 0, x) \leqq \max[L(\alpha) + (x+1) + 5, 2 + \overline{Z}(\{\alpha\}(x), 0, x)]\,.$

Clearly, $L(\alpha) + (x+1) + 5 \leqq F^0_\alpha(x + L(\alpha) + 5)$.
If $\{\alpha\}(x) = 0$, then $x = 0$, and we have

$$2 + \overline{Z}(0, 0, 0) \leqq 9 \leqq F^0_\alpha(L(\alpha) + 5), \text{ since } L(\alpha) \geqq 3\,.$$

Now suppose that $\{\alpha\}(x) > 0$.
Then by the induction hypothesis, we have

$$2 + \overline{Z}(\{\alpha\}(x), 0, x) \leqq 2 + F^0_{\{\alpha\}(x)}\big(x + L(\{\alpha\}(x)) + 5\big)\,.$$

But $L(\{\alpha\}(x)) < L(\alpha) + x \cdot L(\alpha)^2$, and so

$$\begin{aligned} 2 + \overline{Z}(\{\alpha\}(x), 0, x) &\leqq 2 + F^0_{\{\alpha\}(x)}(x + L(\alpha) + x \cdot L(\alpha)^2 + 5) \\ &\leqq F^0_{\{\alpha\}(x)}(x + L(\alpha) + x \cdot L(\alpha)^2 + 7) \\ &\leqq F^0_{\{\alpha\}(x)}\big(((x + L(\alpha) + 5 + 1)^2 + 1)^2\big) \\ &= F^0_{\{\alpha\}(x)} F^0_1 F^0_1 (x + L(\alpha) + 5) \\ &\leqq F^0_{\{\alpha\}(x)} F^0_{\{\alpha\}(x)} F^0_{\{\alpha\}(x)}(x + L(\alpha) + 5) \\ &= F^2_{\{\alpha\}(x)}(x + L(\alpha) + 5)\,. \\ &< F^0_{\{\alpha\}(x)+1}(x + L(\alpha) + 5) \\ &\leqq F^0_\alpha(x + L(\alpha) + 5) \text{ by Lemma 4.1}\,. \end{aligned}$$

Hence $\overline{Z}(\alpha, 0, x) \leqq F^0_\alpha(x + L(\alpha) + 5)$ if α is a limit ordinal.

(iii) Finally suppose α is any ordinal > 0.

Then we have

$$\overline{Z}(\alpha, m+1, x) \leqq \max[L(\alpha) + \overline{Z}(\alpha, m, x) + 5, \overline{Z}(\alpha, 0, F^m_\alpha(x))]$$

Now, by (i) and (ii) we have

$$\begin{aligned} \overline{Z}(\alpha, 0, F^m_\alpha(x)) &\leqq F^0_\alpha(F^m_\alpha(x) + L(\alpha) + 5) \\ &\leqq F^0_\alpha F^m_\alpha(x + L(\alpha) + 5) \\ &= F^{m+1}(x + L(\alpha) + 5)\,. \end{aligned}$$

Also, if we assume (inductively) that

$$\overline{Z}(\alpha, m, x) \leqq F^m_\alpha(x + L(\alpha) + 5)\,,$$

then we have the following:

$$\begin{aligned} L(\alpha) + \bar{Z}(\alpha, m, x) + 5 &\leqq L(\alpha) + F_\alpha^m(x + L(\alpha) + 5) + 5 \\ &\leqq 2 \cdot F_\alpha^m(x + L(\alpha) + 5) \\ &\leqq F_\alpha^0 F_\alpha^m(x + L(\alpha) + 5) \text{ since } \alpha > 0 . \\ &= F_\alpha^{m+1}(x + L(\alpha) + 5) . \end{aligned}$$

Hence, $\bar{Z}(\alpha, m + 1, x) \leqq F_\alpha^{m+1}(x + L(\alpha) + 5)$.
This completes the induction step, and so for every $\alpha < \omega(n)$, and all m, x,

$$\bar{Z}(\alpha, m, x) \leqq F_\alpha^m(x + L(\alpha) + 5) .$$

Now it is well-known that the functions used in the arithmetization of Turing machine computations are elementary.
Thus it can be shown that if f is computable by a Turing machine in such a way that, for every $\underset{\sim}{x}$, the number of tape-squares used in the computation of $f(\underset{\sim}{x})$ is less than $g(\underset{\sim}{x})$, then f is elementary in g.
From this result we obtain the following:

Theorem 4.3

If $\alpha < \beta < \varepsilon_0$, then F_α^0 is elementary in F_β^0.

Proof

First we construct a Turing machine Z_α, which computes F_α^0.
Suppose that $\alpha < \omega(n)$, where $n > 0$.
Z_α has an infinite tape (to the right), and the same tape-symbols as Z.
Given any "input" x, Z_α writes the word $\boldsymbol{\alpha} * \mathbf{0} * \boldsymbol{x}$ at the left-hand end of its tape, and positions its reading-head at the right-hand end of this word. It then computes in exactly the same way as the machine Z.
It is clear that Z_α computes F_α^0.
Now let $\bar{Z}_\alpha(x)$ be the number of tape-squares used in the computation of $F_\alpha^0(x)$ by Z_α.
Then $\bar{Z}_\alpha(x) = \bar{Z}(\alpha, 0, x)$ for x, and so, by Theorem 4.2 $\bar{Z}_\alpha(x) \leqq F_\alpha^0(x + L(\alpha) + 5)$ for all x.
But if $\alpha < \beta$, F_α^0 is eventually majorized by F_β^0, and so there is a number p such that, for every x,

$$\bar{Z}_\alpha(x) \leqq F_\alpha^0(x + L(\alpha) + 5) < F_\beta^0(x + L(\alpha) + 5 + p) .$$

Hence F_α^0 is elementary in F_β^0.

Corollary

For each α such that $2 \leqq \alpha < \varepsilon_0$, $\mathfrak{E}_\alpha$ is the class of all functions which are elementary in F_α^0.

Proof

From Theorem 4.3, it follows that every function in $\mathfrak{E}_\alpha$ is elementary in F^0_α. Now it can easily be proved that the function $\lambda xy \cdot x^y$ belongs to $\mathfrak{E}_\alpha$, for every $\alpha \geqq 2$.

Therefore, since $\mathfrak{E}_\alpha$ contains
$\{\lambda x.\, 0, \lambda x\, y.\, x + y, \lambda \underline{x}.\, x_i, \lambda x\, y.\; x^y, \lambda x.\, F^0_\alpha(x)\}$ and is closed under substitution and limited recursion, it is clear that $\mathfrak{E}_\alpha$ contains all the functions which are elementary in F^0_α.
This completes the proof.
The number of tape-squares used in the course of a Turing machine computation can be regarded as a measure of the complexity of the computation.
Theorem 4.2 leads us to a characterization of $\mathfrak{E}_\alpha$ in terms of computational complexity, as follows:
For each $\alpha < \varepsilon_0$, call a function f *α-complex* if there is a number p such that f is computable by a Turing machine Z_f in such a way that for every $\underline{x}$, the number of tape-squares used in the computation of $f(\underline{x})$ by Z_f is less than $F^p_\alpha(\max(x))$.
For each $\alpha < \varepsilon_0$, let $\mathfrak{C}_\alpha$ be the class of all α-complex functions.
Clearly, if $\alpha \leqq \beta < \varepsilon_0$, then $\mathfrak{C}_\alpha \subseteqq \mathfrak{C}_\beta$.

Theorem 4.4

For each α such that $2 \leqq \alpha < \varepsilon_0$, $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{E}_\alpha$.

Proof

Suppose f is α-complex, where $2 \leqq \alpha < \varepsilon_0$.
Then, by the remarks preceding Theorem 4.3, f is elementary in F^p_α, for some fixed p.
But F^p_α is defined by substitution from F^0_α, and so f is elementary in F^0_α.
Hence, by the Corollary to Theorem 4.3, $f \in \mathfrak{E}_\alpha$.
Conversely, suppose that $f \in \mathfrak{E}_\alpha$ $(2 \leqq \alpha < \varepsilon_0)$, so that f is elementary in F^0_α.
Let Z_α be the Turing machine, constructed in the proof of Theorem 4.3, which computes F^0_α, and let $\overline{Z}_\alpha(x)$ be the number of tape-squares used in the computation of $F^0_\alpha(x)$ by Z_α.
Then there is a number k such that, for all x, $\overline{Z}_\alpha(x) < F^0_\alpha(x + k)$.
Now, since f is elementary in F^0_α, it can be shown that there is a Turing machine Z_f, and a function g which is elementary in F^0_α, such that for all $\underline{x}$, the number of tape-squares used in the computation of $f(\underline{x})$ by Z_f is less than $g(\underline{x})$.
Since g is elementary in F^0_α, $g \in \mathfrak{E}_\alpha$, and so, by Theorem 1.2, there is a number p such for all $\underline{x}$, $g(\underline{x}) < F^p_\alpha(\max(\underline{x}))$.
Hence f is α-complex.
This completes the proof.

Corollary

$\mathrm{OR} = \bigcup_{\alpha < \varepsilon_0} \mathfrak{C}_\alpha$.

REFERENCES

[1] Davis, M., Computability and Unsolvability, McGraw-Hill (1958).

[2] Gödel, K., Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des Finiten Standpunktes, Dialectica **12** (1958), pp. 280–287.

[3] Grzegorczyk, A., Some Classes of Recursive Functions, Rozprawy Matematyczne No. 4, Warsaw (1953).

[4] Kino, A., On Provably Recursive Functions and Ordinal Recursive Functions, J. Math. Soc. Japan, Vol. 20, No. 3, (1968), pp. 456–476.

[5] Kreisel, G., On the Interpretation of Non-Finitist Proofs, J. Symbolic Logic **17** (1952), pp. 43–58.

[6] Kreisel, G., Inessential Extensions of Heyting's Arithmetic by means of Functionals of Finite Types, abstract, J. Symbolic Logic, **24** (1959), p. 284.

[7] Löb, M. H., and Wainer, S. S., Hierarchies of Number-Theoretic Functions, this vol.

[8] Péter, R., Recursive Functions, Academic Press (1967).

[8] Robbin, J. W., Ph. D. Dissertation, Princeton University (1965).

[10] Tait, W. W., Nested Recursion, Math. Annalen, **143** (1961), pp. 236–250.

[11] Tait, W. W., A Characterization of Ordinal Recursive Functions, abstract, J. Symbolic Logic, **24** (1959), p. 325.

The University, Leeds, England.

Arch. math. Logik 13 (1970), 154—157.

REMARKS ON LIMITULTRAPOWERS*

Von Halldor Guðjónsson**

1. The concepts and terminology used in this note were first introduced and investigated by E. Engeler [1—3]. The reader is refered to those papers for further elucidation of the few definitions and results which will be quoted here.

Definition: Let A and B be two infinite sets and let P be a set of maps $p: B \to A$, further let D be an ultrafilter on P, then a map (P, D) from the set of all relations on A into the set of all relations on B can be defined in the following manner: for any n-ary relation R on A and any n elements $b_1, \ldots, b_n$ of B let: $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in (P, D)(R)$ iff

$$\{p \in P : \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in R\} \in D .$$

Such maps (P, D) will be called ultrafiltermaps from A to B. If the map (P, D) satisfies the following three conditions it is called functionally complete,

i) for any pair of finite and equinumerous sets $F \subseteqq A$ and $E \subseteqq B$ there is a map $p \in P$ such that $pE = F$,

ii) for all $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, $\{p \in P : pb_1 \neq pb_2\} \in D$,

iii) for every binary operation $f: A \times A \to A$ there is a binary operation $g: B \times B \to B$ such that for all $b_1, b_2 \in B$

$$\{p \in P : f(pb_1, pb_2) = pg(b_1, b_2)\} \in D .$$

If $\mathfrak{A} = \langle A, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots \rangle_{\xi < \eta}$ and $\mathfrak{B} = \langle B, B_1, \ldots, B_\xi, \ldots \rangle_{\xi < \eta}$ are similar infinite relational structures and (P, D) is a functionally complete ultrafiltermap from A to B such that $(P, D)(A_\xi) = B_\xi$ for all $\xi < \eta$ then $\mathfrak{B}$ is said to be the ultrafilterimage of $\mathfrak{A}$ by means of (P, D).

If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are similar infinite relational structures with the common first order language L and (P, D) is an ultrafiltermap from A to B satisfying conditions i) and ii) above and the further condition that for all formulas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ of L and for all $b_1, \ldots, b_n \in B$ $\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$ iff $\{p \in P : \mathfrak{A} \models \varphi(pb_1, \ldots, pb_n)\} \in D$, then the map (P, D) is called an elementary filtermap from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{B}$.

Theorem ([1], Thm.2.1): A relational structure $\mathfrak{B}$ is elementarily equivalent to a relational structure $\mathfrak{A}$ if and only if there is an elementary ultrafiltermap (P, D) from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{B}$.

Theorem ([1], Thm.3.4 and Thm.3.5): $\mathfrak{B}$ is the image of $\mathfrak{A}$ by means of a functionally complete ultrafiltermap (P, D) if and only if $\mathfrak{B}$ is isomorphic to a limitultrapower of $\mathfrak{A}$.

---

* Eingegangen am 9.4.1969.

** While the author wrote this paper he was supported by funds from the Icelandic Science Foundation.

2. It is easily verified that the restriction q of a functionally complete ultrafiltermap (P, D), from a relational structure $\mathfrak{A}$ to a relational structure $\mathfrak{B}$, to the singleton unary relations on A is an elementary embedding of $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$. It can hence be assumed that the p's in P map B into a subset A of B itself and that further $pa = a$ for all $p \in P$ and for all $a \in A$. By a similar remark one obtains the following modification of the first theorem quoted above:

Proposition: A relational structure $\mathfrak{A}$ is an elementary substructure of a relational structure $\mathfrak{B}$ if and only if there is an elementary ultrafiltermap (P, D) from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{B}$ such that for all $p \in P$ and for all $a \in A$ $pa = a$.

We will assume throughout that all elementary embeddings have been effected so that we can use above proposition and the remark preceeding it without further mention.

Let there be given an infinite relational structure $\mathfrak{A}$ and a directed set Δ and for each element α of Δ a relational structure $\mathfrak{A}_\alpha$ and a functionally complete ultrafiltermap (P_α, D_α) from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{A}_\alpha$, let there further for any $\alpha, p \in \Delta, \alpha < \beta$, be given an elementary embedding $(P_{\alpha,\beta}, D_{\alpha,\beta})$ of $\mathfrak{A}_\alpha$ into $\mathfrak{A}_\beta$ such that $(P_\beta, D_\beta) = (P_{\alpha,\beta}, D_{\alpha,\beta})\,(P_\alpha, D_\alpha)$ for all $\alpha, \beta \in \Delta, \alpha < \beta$. Then a relational structure $\mathfrak{A}_\Delta = \langle A_\Delta, A_{\Delta,1}, \ldots, A_{\Delta,\xi}, \ldots\rangle_{\xi < \eta}$ can be defined as follows:

$$A_\Delta = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$$

$\langle a_1, \ldots, a_{\nu(\xi)}\rangle \in A_{\Delta,\xi}$ if and only if $\langle a_1, \ldots, a_{\nu(\xi)}\rangle \in A_{\alpha,\xi}$ for some $\alpha \in \Delta$ such that $a_1, \ldots, a_{\nu(\xi)} \in A_\alpha$; for all $\xi < \eta$.

The relational structure $\mathfrak{A}_\Delta$ will be called the direct limit of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A}_\alpha, \alpha \in \Delta$.

It is our purpose to prove that each such direct limit is a functionally complete ultrafilterimage of $\mathfrak{A}$, that is by the theorem quoted in 1. we want to show that:

Proposition: The direct limit of limitultrapowers is a limitultrapower.

Proof: Let P_Δ be the set of maps $p : A_\Delta \to A$ such that for all $\alpha \in \Delta$ the restriction $p \upharpoonright A_\alpha$ of p to the subset A_α of A is an element of P_α, further let in general $P_{\Delta,\alpha}$ be the set of all maps $p : A_\Delta \to A_\alpha$ such that for all $\beta < \alpha$ the restriction $p \upharpoonright A_\beta$ is an element of $P_{\alpha,\beta}$.

Let D_Δ be the family of subsets of P_Δ defined as follows: if $Q \subseteq P_\Delta$ then $Q \in D_\Delta$ if and only if there is a $\alpha \in \Delta$ such that $Q = \{pq : q \in P_{\Delta,\alpha}, p \in Q_\alpha$ for some $Q_\alpha \in D_\alpha\}$. Since Δ is directed it follows easily that D_Δ is a filter on P_Δ. If $F \subseteq A$ and $E \subseteq A$ are finite and equinumerous sets then there is an element α of Δ such that $E \subseteq A_\alpha$ and hence by the functional completeness of (P_α, D_α) there is a map $p \in P_\alpha$ such that $pE = F$, but then $qpE = F$ for all $q \in P_{\Delta,\alpha}$ so P_Δ satisfies i). Condition ii) and the fact that $(P_\alpha, D_\alpha)\,(A_\xi) = A_{\alpha,\xi}$ can be verified in the same fashion. If $f(x, y)$ is a binary operation on A then for every $\alpha \in \Delta$ there is a binary operation $g_\alpha(x, y)$ on A_α such that for all $b_1, b_2 \in A_\alpha$ $\{p \in P : f(pb_1, pb_2) = pg_\alpha(b_1, b_2)\} \in D$. By virtue of the directedness of Δ and the relation $(P_\beta, D_\beta) = (P_{\alpha,\beta}, D_{\alpha,\beta})\,(P_\alpha, D_\alpha)$ it follows that where two such operations $g_\alpha(x, y)$ and $g_\beta(x, y)$, $\alpha, \beta \in \Delta$, overlap they coincide, hence one can define an operation $g(x, y)$ on A_Δ by taking the union $\bigcup_{\alpha \in \Delta} g_\alpha$. It is easily verified that this operation $g(x, y)$ satisfies iii).

The filter D_Δ can be refined to an ultrafilter D'_Δ on P_Δ. The map (P_Δ, D'_Δ) is then a functionally complete ultrafiltermap from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{A}_\Delta$.
The above proposition is a genalization of a proposition in [5] which states that the strong limitultrapowers of Kochen are limitultrapowers in the sense of Keisler.

3. The purpose of this paragraph is to prove a converse to the second proposition of Paragraph 2, namely:

Proposition: Every functionally complete ultrafilterimage of a relational structure $\mathfrak{A}$ is the direct limit of a directed set of ultrapowers of $\mathfrak{A}$. (A similar result was announced without proof in [5].)

Proof: It is easily verified that if $\mathfrak{B}$ is a functionally complete ultrafilterimage of a structure $\mathfrak{A}$ by means of a map (P, D) which is such that for any map $h : P \to A$ there exists a $b \in B$ such that $\{p \in P : pb = h(p)\} \in D$ then $\mathfrak{B}$ is isomorphic to the ultrapower $\mathfrak{A}^P_D$.
If (P, D) is a functionally complete ultrafiltermap from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{B}$ and G is a filter on $P \times P$, let the subset $B|G$ of B be defined as follows: if $b \in B$ then $b \in B|G$ if and only if there is a map $h : P \to A$ such that $\{p \in P : pb = h(p)\} \in D$ and such that $P(h) = \{\langle p, q\rangle \in P \times P : h(p) = h(q)\} \in G$. We will denote the restriction of the structure $\mathfrak{B}$ to the domain $B|G$ by $\mathfrak{B}|G$. It is easily verified that $\mathfrak{B}|G$ is an elementary substructure of $\mathfrak{B}$ and that $\mathfrak{B}|G$ is in fact a functionally complete ultrafilterimage of $\mathfrak{A}$ by means of (P, D) where the elements $p \in P$ are considered only as maps of $B|G$ into A. (It is conversely also true that if (P, D) is a functionally complete ultrafiltermap from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ is an elementary substructure of $\mathfrak{B}$ such that (P, D) is also a functionally complete ultrafiltermap from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{C}$ then there is a filter G on $P \times P$ such that $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}|G$.) Let the map $h_0 : P \to A$ be such that there is an element $b_0 \in B$ with the property that $\{p \in P : pb_0 = h_0(p)\} \in D$, and let G_0 be the principal filter on $P \times P$ generated by the set $P(h_0) = \{\langle p, q\rangle \in P \times P : h_0(p) = h_0(q)\}$, then the relational structure $\mathfrak{B}|G_0$ is an ultrapower of $\mathfrak{A}$. In fact let P' be the quotientset of P by means of the equivalence relation $P(h_0)$, where P is considered as acting on $B|G_0$ alone, and let D' be the family of quotient sets of the elements of the filter D, then D' is obviously an ultrafilter on P'. The elements $p' \in P'$ can be considered as maps $p' : B|G_0 \to A$ by setting $p'b = pb$ for all $b \in B|G_0$ and an arbitrary representative $p \in p'$.

It is easily verified that (P', D') is a functionally complete ultrafiltermap from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{B}|G_0$ and that (P', D') coincides with (P, D) when the latter is restricted in range to the set $B|G_0$, further (P', D') satisfies the condition mentioned at the beginning of the proof and hence $\mathfrak{B}|G_0$ is an ultrapower of $\mathfrak{A}$.

Let Δ be the set of substructures $\mathfrak{B}|G_0$ of $\mathfrak{B}$ for all maps $h_0 : P \to A$ such that there is an element $b_0 \in B$ with the property that $\{p \in P : pb_0 = h_0(p)\} \in D$. The set Δ is direceted by inclusion, namely: let $\mathfrak{B}|G_1$ and $\mathfrak{B}|G_2$ be elements of Δ corresponding to the functions h_1 and h_2, then one can find a function $h_3 : P \to A$ such that $P(h_3) = P(h_1) \cap P(h_2)$. It follows by the functional completeness of (P, D) (see [1] Thm 3.1) that there is an element $b_3 \in B$ such that $\{p \in P : pb_3 = h_3(p)\} \in D$. Since $P(h_1) \geqq P(h_3)$ and $P(h_2) \geqq P(h_3)$ it follows

that both $\mathfrak{B}|G_1$ and $\mathfrak{B}|G_2$ are elementarily contained $\mathfrak{B}|G_3$, where G_3 is the principal filter generated by $P(h_3)$.
$\mathfrak{B}$ is obviously the direct limit of the directed set Δ of ultrapowers of $\mathfrak{A}$.

REFERENCES

[1] Engeler, E.: On Structures Defined by Mapping Filters, Math. Annalen **167**, 112—172 (1966).
[2] — Categories of Mapping Filters, Proceedings of Conference on Categorical Algebra La Jolla 1965, 247—253.
[3] — On the Structure of Elementary Maps, Zeitsch. für math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. **13**, 323—328 (1967).
[4] Frayne, T., Morel, A. C., Scott, D.: Reduced Direct Products, Fundamenta Mathematicae, Vol. **51** (1962) pp. 195—228.
[5] Keisler, H. J.: Limitultrapowers, Transactions AMS, Vol. **107** (1963) pp. 382—408.
[6] — Limitultraproducts, Journal of Symbolic Logic, Vol. **30** (1965) pp. 212—234.
[7] Kochen, S.: Ultraproducts in the Theory of Models, Annals of Mathematics, Vol. **74** (1961) pp. 221—261.

Arch. math. Logik 13 (1970), 158—167.

HARMONISCHE ANALYSIS BEI AUSSAGENKALKÜLEN* **

Von Roman Liedl in Innsbruck

Herrn Prof. Wolfgang Gröbner zum 70. Geburtstag gewidmet.

Einleitung

Der Zweck dieser Arbeit ist es, in die Aussagenlogik die Methoden der abstrakten harmonischen Analysis einzuführen. Dabei werden wir folgenden Weg einschlagen. Wir gehen von einem Aussagenkalkül $\mathfrak{T}$, dessen Sätze aus den Aussagenvariablen $T_0, T_1, \ldots$ mittels der Junktoren $\wedge$ und $\neg$ aufgebaut sind, aus. Die Menge der Sätze von $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$. Auf der Menge $\mathfrak{M}$ aller Bewertungen φ der Sätze von $\mathfrak{S}$, welche äquivalent der Menge aller Abbildungen von $\{T_0, T_1, \ldots\}$ in $\{w, f\}$ ist, führen wir sodann ein Wahrscheinlichkeitsmaß in einer sehr natürlichen Weise ein, sodaß auf $\mathfrak{M}$ eine damit kompatible kompakte Gruppenstruktur definiert werden kann, deren Charaktergruppe $\hat{\mathfrak{M}}$ uns den Kern für eine Fouriertransformation liefert. Zu jedem Satz S aus $\mathfrak{S}$ gehört die Menge S^* aller Bewertungen, welche S auf w abbilden. Die Fouriertransformierte $\hat{S}$ der charakteristischen Funktion e_{S^*} von S^* wollen wir Variablenspektrum nennen. Zur Wahl des Namens sei vorausgeschickt, daß jeder Klasse $[S]$ von aussagenlogisch äquivalenten Sätzen aus $\mathfrak{S}$ eineindeutig ein Variablenspektrum $\hat{S}$ entspricht. Diese eineindeutige Zuordnung ist konstruktiv. Aus dem Variablenspektrum ist unter anderem sofort ersichtlich, welche Aussagenvariablen in einer ausgezeichneten Normalform von $[S]$ auftreten. Auf der Menge $\mathfrak{N} = \{\hat{S} \mid S \in \mathfrak{S}\}$ aller Variablenspektren läßt sich in natürlicher Weise die Struktur einer Wahrscheinlichkeitsalgebra einführen, welche eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation unseres Vorgehens gestattet. Wir beschränken uns aber im Folgenden nicht auf den Aussagenkalkül $\mathfrak{T}$, sondern gehen zum Aussagenkalkül $\mathfrak{T}_\infty$ über, welcher noch die abzählbar unendliche Konjunktion enthält. Dadurch werden unsere Betrachtungen einfacher und weitreichender.

§ 1 Die Aussagenkalküle $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_\infty$ und deren Modellraum

$\mathfrak{T}$ sei der Aussagenkalkül, dessen Sätze aus den Aussagenvariablen $T_0, T_1, \ldots$ und den Junktoren $\wedge$ und $\neg$ bebildet sind.
$\mathfrak{T}_\infty$ bezeichne den Aussagenkalkül, der dieselben Aussagenvariablen und Junktoren wie $\mathfrak{T}$ und noch den Junktor $\bigwedge_{i=1}^{\infty}$ (abzählbare Konjunktion) enthält. Die Menge

* Eingegangen am 7.5.1969.
** Diese Arbeit wurde im Rahmen eines Alexander v. Humboldtstipendiums verfaßt. Herrn Prof. Kurt Schütte sei für seine beratende Tätigkeit und sein Interesse an dieser Arbeit herzlichster Dank ausgesprochen.

der Sätze von $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$ und die der Sätze von $\mathfrak{T}_\infty$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_\infty$. Um eine heuristische Vorstellung unseres Vorgehens zu geben, beschränken wir uns zuerst auf den Fall, daß nur eine Aussagenvariable, etwa T_j, vorliegt. Demnach bezeichnen wir die Menge aller Sätze aus $\mathfrak{S}$, in denen nur die Aussagenvariable T_j vorkommt, mit $\mathfrak{S}_j$.

A. Das Variablenspektrum von $\mathfrak{S}_j$.

Die Menge $\mathfrak{S}_j$ hat nur zwei Bewertungen nämlich die Bewertung φ_w, die T_j auf w abbildet, und die Bewertung φ_f, die T_j auf f abbildet. Wir setzen $\mathfrak{M}_j = \{\varphi_w, \varphi_f\}$. Der einfachste Fall eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathfrak{M}_j$ ist das normierte Zählmaß μ_j, das durch

(1) $$\mu_j(\{\varphi_w\}) = \mu_j(\{\varphi_f\}) = \tfrac{1}{2}$$

gegeben ist. Wir versehen die zweielementige Menge $\mathfrak{M}_j$ mit der diskreten Topologie und einer Gruppenstruktur, für die nur die zyklische Zweiergruppe in Betracht kommen kann. Die Gruppenverknüpfung auf $\mathfrak{M}_j$ bezeichnen wir mit „*" und es soll gelten

(2) $$\varphi_i * \varphi_k = \varphi_w \Leftrightarrow i = k \qquad (i, k \in \{w, f\})$$

Wir haben also die Multiplikationstabelle

$*$	φ_w	φ_f
φ_w	φ_w	φ_f
φ_f	φ_f	φ_w

Mit C_1 bezeichnen wir die multiplikative Gruppe $\{e^{i\alpha} \mid \alpha \in [0,2\pi)\}$, also den komplexen Einheitskreis, mit ihrer gewöhnlichen Topologie. Es gibt genau zwei stetige Homomorphismen (Charaktere von $\mathfrak{M}_j$) von $\mathfrak{M}_j$ in C_1, nämlich ψ_0 und ψ_1 wobei

(3) $$\psi_0(\varphi_w) = \psi_0(\varphi_f) = 1, \psi_1(\varphi_w) = 1 \text{ und } \psi_1(\varphi_f) = -1 .$$

Wir führen auf der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die übliche dyadische Addition „$\oplus$" ein. Dazu setzen wir für $m, n \in \mathbb{N}$

(4) $$\begin{aligned} m &= m_0 2^0 + m_1 2^1 + \cdots + m_\mu 2^\mu \qquad m_k \in \{0, 1\} , \\ n &= n_0 2^0 + n_1 2^1 + \cdots + n_\nu 2^\nu \qquad n_k \in \{0, 1\} , \end{aligned}$$

wobei wir diese Darstellung so wählen, daß $\mu = \nu$.
Sodann ist

(5) $$\begin{aligned} m \oplus n &= p_0 2^0 + p_1 2^1 + \cdots + p_\mu 2^\mu \text{ mit} \\ p_k &= m_k + n_k \bmod (2) \in \{0, 1\} . \end{aligned}$$

Wir setzen nun $\widehat{\mathfrak{M}}_j = \{\psi_0, \psi_1\}$. Die Charaktere ψ_0 und ψ_1 können als reelle Funktionen auf $\mathfrak{M}_j$ aufgefaßt und als solche miteinander multipliziert werden. Es gilt dann

$$(6) \qquad \psi_n \cdot \psi_m = \psi_{n \oplus m} \qquad n, m \in \{0, 1\},$$

also $\psi_0^2 = \psi_1^2 = \psi_0 \equiv 1$ und $\psi_0\,\psi_1 = \psi_1$. Die Menge $\widehat{\mathfrak{M}}_j$ bildet also auch eine Gruppe, die sogenannte Charaktergruppe von $\mathfrak{M}_j$.

Die Menge aller reeller Funktionen auf $\mathfrak{M}_j$ bildet einen zweidimensionalen Vektorraum $V^{(j)}$, für den $\widehat{\mathfrak{M}}_j = \{\psi_0, \psi_1\}$ eine orthogonale Basis liefert. Falls $\varphi \in \mathfrak{M}_j$ eine Bewertung ist, die einen Satz $S \in \mathfrak{S}_j$ auf w abbildet, so schreiben wir $\varphi(S) = w$. Weiters setzen wir

$$(7) \qquad S_j^* = \{\varphi \,|\, \varphi \in \mathfrak{M}_j, \varphi(S) = w\}.$$

Es ist $\{S_j^* \,|\, S \in \mathfrak{S}_j\} = \{\emptyset, \{\varphi_w\}, \{\varphi_f\}, \{\varphi_w, \varphi_f\}\}$.

Für $F, G \in \mathfrak{S}_j$ ist $F \leftrightarrow G$ genau dann eine Tautologie, wenn $F_j^* = G_j^*$. Für ein $S \in \mathfrak{S}_j$ ist die charakteristische Funktion $e_{S_j^*}$ von S_j^* auf $\mathfrak{M}_j$ durch

$$(8) \qquad e_{S_j^*}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(S) = w \\ 0 & \text{falls } \varphi(S) = f \end{cases}$$

gegeben. Es ist natürlich $e_{S_j^*} \in V^{(j)}$ und damit als Linearkombination von ψ_0 und ψ_1 eindeutig in der Form

$$(9) \qquad e_{S_j^*}(\varphi) = s(0)\,\psi_0(\varphi) + s(1)\,\psi_1(\varphi)$$

darstellbar.

Wegen der Orthogonalität der Basis $\widehat{\mathfrak{M}}_j$ von $V^{(j)}$ berechnet man die reellen Zahlen $s(0)$ und $s(1)$ durch

$$(10) \qquad \begin{aligned} s(0) &= \tfrac{1}{2}\,\psi_0(\varphi_w) \cdot e_{S_j^*}(\varphi_w) + \tfrac{1}{2}\,\psi_0(\varphi_f) \cdot e_{S_j^*}(\varphi_f), \\ s(1) &= \tfrac{1}{2}\,\psi_1(\varphi_w) \cdot e_{S_j^*}(\varphi_w) + \tfrac{1}{2}\,\psi_1(\varphi_f) \cdot e_{S_j^*}(\varphi_f). \end{aligned}$$

Um den Zusammenhang von (10) mit den späteren Ausführungen klarer werden zu lassen, schreiben wir $\psi(0, \varphi)$ und $\psi(1, \varphi)$ anstatt $\psi_0(\varphi)$ und $\psi_1(\varphi)$. Wegen (1) können wir das Gleichungssystem (10) als Fouriertransformation mit Kern $\psi(.\,,.)$ schreiben

$$(11) \qquad s(k) = \int_{\mathfrak{M}_j} \psi(k, \varphi) \cdot e_{S_j^*}(\varphi)\, d\varphi \qquad k \in \{0, 1\}.$$

Transformiert wird dabei die Funktion $e_{S_j^*}$, das Ergebnis ist der Vektor $\hat{S}_j = (s(0), s(1))$, für den gilt $e_{S_j^*}(\varphi) = s(0)\,\psi(0, \varphi) + s(1)\,\psi(1, \varphi)$.

Wir setzen $\mathfrak{N}_j = \{\hat{S}_j \,|\, S \in \mathfrak{S}_j\} = \{(0, 0), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), (1, 0)\}$, wobei etwa $\langle T_j \wedge \neg T_j\rangle\hat{}_j = (0,0)$, $\langle T_j\rangle\hat{}_j = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$, $\langle \neg T_j\rangle\hat{}_j = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$ und $\langle \neg(T_j \wedge \neg T_j)\rangle\hat{}_j = (1, 0)$. Wir bemerken nun, daß für $S = F \wedge G \in \mathfrak{S}_j$ und $H = \neg F \in \mathfrak{S}_j$ gilt

$$(12) \qquad \left.\begin{aligned} e_{S_j^*}(\varphi) &= e_{F_j^*}(\varphi) \cdot e_{G_j^*}(\varphi) \\ e_{H_j^*}(\varphi) &= 1 - e_{F_j^*}(\varphi) \end{aligned}\right\} \varphi \in \mathfrak{M}_j.$$

Mit $\hat{F}_j = (f(0), f(1))$, $\hat{G}_j = (g(0), g(1))$, $\hat{S}_j = (s(0), s(1))$ und $\hat{H}_j = (h(0), h(1))$ und (6) berechnen wir

$$\begin{aligned} e_{S_j^*}(\varphi) &= (f(0)\,\psi(0,\varphi) + f(1)\,\psi(1,\varphi)) \cdot (g(0)\,\psi(0,\varphi) + g(1)\,\psi(1,\varphi)) \\ &= (f(0)\,g(0) + f(1)\,g(1))\,\psi(0,\varphi) + (f(0)\,g(1) + f(1)\,g(0))\,\psi(1,\varphi) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e_{H_j^*}(\varphi) &= 1 - e_{F_j^*}(\varphi) = \psi(0,\varphi) - (f(0)\,\psi(0,\varphi) + f(1)\,\psi(1,\varphi)) \\ &= (1 - f(0))\,\psi(0,\varphi) - f(1)\,\psi(1,\varphi)\,. \end{aligned}$$

Es ist also

$$(13)\qquad \begin{aligned} s(k) &= \sum_{i\in\{0,1\}} f(i)\,g(i\oplus k) \qquad k\in\{0,1\}\,, \\ h(0) &= 1 - f(0) \text{ und } h(1) = -f(1)\,. \end{aligned}$$

Wegen (13) können wir Boolesche Operationen auf $\mathfrak{N}_j$ erklären, indem wir für $(a(0), a(1)), (b(0), b(1)) \in \mathfrak{N}_j$ setzen

$$(14)\qquad \begin{aligned} (a(0), a(1)) \wedge (b(0), b(1)) &= (a(0)\,b(0) + a(1)\,b(1),\, a(0)\,b(1) + a(1)\,b(0))\,, \\ \neg\,(a(0), a(1)) &= (1 - a(0), a(1))\,. \end{aligned}$$

Für $F, G \in \mathfrak{S}_j$ gilt dann natürlich

$$(12)\qquad \begin{aligned} \langle F \wedge G\rangle^{\wedge} &= \hat{F} \wedge \hat{G}\,, \\ \langle \neg F\rangle^{\wedge} &= \neg\,\hat{F}\,. \end{aligned}$$

B. Die Variablenspektren von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_\infty$

Der Modellraum von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_\infty$ kann als Cartesisches Produkt $\mathfrak{M} = \prod_{j=0}^{\infty} \mathfrak{M}_j$ aufgefaßt werden. Das Produktmaß $\mu = \prod_{j=0}^{\infty} \mu_j$ auf $\mathfrak{M}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{M}$. Sei $S \in \mathfrak{S}_\infty$, so bezeichne S^* die Menge aller Bewertungen $\varphi \in \mathfrak{M}$, für die S wahr ist. Es ist also $S^* = \{\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{M}, \varphi(S) = w\}$. Es gilt für jedes T_k, daß $\mu(T_k^*) = \frac{1}{2}$. Die Produkttopologie auf $\mathfrak{M} = \prod_{j=0}^{\infty} \mathfrak{M}_j$ hat das Mengensystem $\{S^* \mid S \in \mathfrak{T}\}$ als Basis der offenen Mengen.

Es ist wohlbekannt, daß diese Topologie kompakt und hausdorffsch ist. Die Produktgruppenstruktur auf $\mathfrak{M} = \prod_{j=0}^{\infty} \mathfrak{M}_j$ ist so definiert, daß für $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{M}$ gilt

$$(\varphi * \varphi')\,(T_j) = w \Leftrightarrow \varphi(T_j) = \varphi'(T_j) \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Gruppenverknüpfung „$*$" ist kompatibel mit dem Maß μ und der Produkttopologie auf $\mathfrak{M}$, denn μ ist bezüglich „$*$" das normierte Haarsche Maß auf $\mathfrak{M}$. Die Menge aller stetigen Homomorphismen (Charaktere von $\mathfrak{M}$) von $\mathfrak{M}$ in C_1 ist abzählbar. Spezielle Charaktere sind der Charakter $\chi_0 : \mathfrak{M} \to C_1$, für den $\chi_0(\varphi) = 1$ für alle $\varphi \in \mathfrak{M}$ gilt, und die Charaktere $\chi_{2^j} : \mathfrak{M} \to C_1$, die durch

$$\chi_{2^j}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(T_j) = w \\ -1 & \text{falls } \varphi(T_j) = f \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

definiert sind.

Wiederum bilden alle Charaktere von $\mathfrak{M}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, die sogenannte Charaktergruppe $\hat{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$. Da $(\chi_{2^j})^2 = \chi_0 \equiv 1$ für $j = 0, 1, 2, \ldots$ kann man sämtliche Produkte von Charakteren der Art χ_{2^j} folgendermaßen aufzählen.

(1) $\chi(0, \varphi) = \chi_0(\varphi)$,

(2) $\chi(2^j, \varphi) = \chi_{2^j}(\varphi)$,

(3) Hat n die Darstellung von A(4), so ist

$$\chi(n, \varphi) = \chi(2^{n_1}, \varphi) \cdot \chi(2^{n_2}, \varphi) \cdot \cdots \cdot \chi(2^{n_\nu}, \varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Es ist bekannt, daß diese Aufzählung schon sämtliche Charaktere von $\mathfrak{M}$, also die ganze Charaktergruppe $\hat{\mathfrak{M}}$ liefert.

Mit der Definition aus A(5) ist dann

$$\chi(n \oplus m, \varphi) = \chi(n, \varphi) \cdot \chi(m, \varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathfrak{M}$$

und da die Charaktere Homomorphismen sind, gilt

$$\chi(n, \varphi * \varphi') = \chi(n, \varphi) \cdot \chi(n, \varphi') \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun wieder für jedes $S \in \mathfrak{S}_\infty$ die charakteristische Funktion von e_S^* auf $\mathfrak{M}$ durch

$$e_S^*(\varphi) = \begin{cases} 1 \text{ falls } \varphi(S) = w \\ -1 \text{ falls } \varphi(S) = f \end{cases} \qquad \varphi \in \mathfrak{M}.$$

Die Funktion e_S^* ist für jedes $S \in \mathfrak{S}_\infty$ meßbar und es gilt für $F, G \in \mathfrak{S}_\infty$, daß $e_F^* \equiv e_G^*$ genau dann, wenn $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie ist. Falls $F \leftrightarrow G$ keine Tautologie ist, kann es aber sein, daß sich e_{F^*} und e_{G^*} nur auf einer Menge von Bewertungen vom Maß 0 unterscheiden.

In Analogie zu A(11) definieren wir für $S \in \mathfrak{S}_\infty$ das Variablenspektrum $\hat{S} = (s(0), s(1), \ldots)$ durch

$$s(k) = \int_{\mathfrak{M}} \chi(k, \varphi) \cdot e_{S^*}(\varphi)\, d\varphi \qquad k \in \mathbb{N}.$$

In Analogie zu A(9) gilt, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} s(k)\,\chi(k, \varphi)$ fast überall auf $\mathfrak{M}$ gegen $e_{S^*}(\varphi)$ konvergiert. Wir bemerken, daß $\widehat{T_j} = (t(0), t(1), \ldots)$ mit $t(0) = t(2^j) = \frac{1}{2}$ und $t(k) = 0$ für $k \notin \{0, 2^j\}$ ist.

§ 2. Die Maßalgebren $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_\infty$.

Wir setzen $\mathfrak{N} = \{\hat{S} \mid S \in \mathfrak{S}\}$ und $\mathfrak{N}_\infty = \{\hat{S} \mid S \in \mathfrak{S}_\infty\}$.

Es ist $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_\infty$. Für $\hat{F} = (f(0), f(1), \ldots)$ und $\hat{G} = (g(0), g(1), \ldots)$ aus $\mathfrak{N}_\infty$ definieren wir in Analogie zu A(14)

(1) $\hat{F} \wedge \hat{G} = (d(0), d(1), \ldots)$ mit $d(k) = \sum_{l=0}^{\infty} f(l)\, g(l \oplus k)$,

(2) $\neg \hat{F} = (e(0), e(1), \ldots)$ mit $e(0) = 1 - f(0)$, $e(k) = -f(k)$ für $k = 1, 2, \ldots$.

Wir werden noch zeigen, daß die hier eingeführten Operationen nicht aus $\mathfrak{N}_\infty$ hinausführen.

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 1: $\mathfrak{N}_\infty$ ist mit den Operationen von (1) und (2) eine vollständige Boolesche Algebra.

Satz 2: Die Abbildung $\tilde{\mu}: \mathfrak{N}_\infty \to R$, für die $\tilde{\mu}(s(0), s(1), \ldots) = s(0)$ ist, ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß für die Boolesche Algebra $\mathfrak{N}_\infty$, das heißt $(\mathfrak{N}_\infty, \tilde{\mu})$ ist eine Wahrscheinlichkeitsalgebra.

Satz 3: Die Wahrscheinlichkeitsalgebra $(\mathfrak{N}_\infty, \tilde{\mu})$ ist separiert und nicht atomisch.

Satz 4: Die Teilmenge $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_\infty$ ist ebenfalls eine Boolesche Algebra, welche durch die Elemente $\hat{T}_0, \hat{T}_1, \ldots$ erzeugt wird und nicht vollständig ist.

Satz 5: $\mathfrak{N}$ liegt dicht in $\mathfrak{N}_\infty$, das heißt zu jedem $\hat{S} \in \mathfrak{N}_\infty$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\hat{F} \in \mathfrak{N}$, sodaß $\tilde{\mu}(\hat{S} \triangle \hat{F}) < \varepsilon$.

Satz 6: Ein reellkomponentiger Vektor $(s(0), s(1), \ldots)$ liegt genau dann in $\mathfrak{N}_\infty$, wenn $s(k) = \sum_{l=0}^{\infty} s(l)\, s(l \oplus k)$ für $k = 0, 1, \ldots$.

Satz 7: Ein Element $(s(0), s(1), \ldots) \in \mathfrak{N}_\infty$ ist genau dann ein Element von $\mathfrak{N}$, wenn fast alle $s(k)$ gleich null sind.

Satz 8: Für zwei Sätze $S, T \in \mathfrak{S}$, ist $S \leftrightarrow T$ genau dann eine Tautologie, wenn $\hat{S} = \hat{T}$.

Satz 9: Kommen im Satz $S \in \mathfrak{S}$ genau n Aussagenvariable vor, so ist $2^n \cdot \tilde{\mu}(\hat{S})$ die Anzahl der Bewertungen dieser Aussagenvariablen, für die S wahr wird.

Satz 10: Interpretiert man $T_0, T_1, \ldots$ als eine Folge statistisch unabhängiger Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, so ist für jedes $S \in \mathfrak{S}_\infty$ die Zahl $\tilde{\mu}(\hat{S})$ gleich der Wahrscheinlichkeit von S.

Satz 11: Zu jedem $\hat{S} \in \mathfrak{N}_\infty$ gibt es ein $F \in \mathfrak{S}_\infty$ der Form $\bigwedge_{k=0}^{\infty} \neg \bigwedge_{l=0}^{\infty} F_{kl}$ mit $F_{kl} \in \mathfrak{S}$, so daß $\hat{S} = \hat{F}$.

Satz 12: Ist $S_1, S_2, \ldots$ eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{N}_\infty$ und ist $U_n = S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_n$ und $\widehat{U_n} = (u(0), u(1), \ldots)$, so konvergiert $\widehat{U_n}$ gleichmäßig in allen Komponenten gegen $\hat{S}$ wobei $S = \bigwedge_{k=1}^{\infty} S_k$.

Satz 13: Die Abbildung $\varkappa: \mathfrak{S}_\infty \to \mathfrak{N}_\infty$, die durch $\varkappa(S) = \hat{S}$ definiert wird, ist ein Homomorphismus, es gilt für $F, G, S_1, S_2, \ldots \in \mathfrak{S}_\infty$

$$\varkappa(F \wedge G) = \varkappa(F) \wedge \varkappa(G) \text{ also } \langle F \wedge G \rangle^{\wedge} = \hat{F} \wedge \hat{G},$$

$$\varkappa(\neg F) = \neg \varkappa(F) \text{ also } \widehat{\neg F} = \neg \hat{F},$$

$$\varkappa\left(\bigwedge_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \inf \{\widehat{S_k}\}_{k=1,2,\ldots} =: \bigwedge_{k=1}^{\infty} \widehat{S_k} \text{ also } \left\langle \bigwedge_{k=1}^{\infty} S_k \right\rangle^{\wedge} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \widehat{S_k}.$$

Satz 14: $\mathfrak{N}_\infty \in l^2$. Die Abbildung $\pi_0^* : l^2 \to l^2$, die dem Element $(s(0), s(1), s(2), \ldots)$ das Element $(s(1), s(2), \ldots)$ zuordnet, gestattet gemäß Satz 10 eine Interpretation der Komponenten $s(1), s(2), \ldots$ durch die Aussage, daß $S \in \mathfrak{S}_\infty$ und $T \in \mathfrak{S}_\infty$ genau dann unabhängige Ereignisse sind, wenn $\pi_0^*(\hat{S})$ orthogonal zu $\pi_0^*(\hat{T})$ also $\sum_{k=1}^{\infty} s(k)\, t(k) = 0$ ist.

Beweise: Die Charaktergruppe $\hat{\mathfrak{M}} = \{\chi(0, .), \chi(1, .), \ldots\}$ bildet ein vollständiges ON-System auf $\mathfrak{M}$ vgl. Fine [1]). Für jeden Vektor $(s(0), s(1), \ldots) \in l^2$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} s(k)\, \chi(k, \varphi)$ fast überall auf $\mathfrak{M}$ (vgl. Billard [1]).
Jeder beschränkten meßbaren reellen Funktion f auf $\mathfrak{M}$ entspricht eine Transformierte $\hat{f} = (f(0), f(1), \ldots) \in l^2$, für die $f(k) = \int_{\mathfrak{M}} \chi(k, \varphi) \cdot f(\varphi)\, d\varphi$ ist. Für das Produkt zweier solcher beschränkter meßbarer reeller Funktionen f und g gilt $\widehat{f \cdot g} = (h(0), h(1), \ldots)$, wobei $h(k) = \sum_{l=0}^{\infty} f(l)\, g(l \oplus k)$ (vgl. Rickart [1]). Eine beschränkte meßbare reelle Funktion f hat also genau dann die Eigenschaft $f^2 = f$ fast überall auf $\mathfrak{M}$, wenn $f(k) = \sum_{l=0}^{\infty} f(l)\, f(k \oplus l)$ für $k = 1, 2, \ldots$. Da nun die Mengen $T_0^*, (\neg T_0)^*, T_1^*, (\neg T_1)^*, \ldots$ eine Subbasis der Topologie auf $\mathfrak{M}$ bilden und μ ein Borelmaß bezüglich dieser Topologie auf $\mathfrak{M}$ ist, kann jede meßbare Teilmenge von $\mathfrak{M}$ bis auf Maß ε durch ein endliches boolesches Aggregat aus $\{T_0^*, (\neg T_0)^*, T_1^*, (\neg T_1)^*, \ldots\}$ approximiert werden. Diese endlichen booleschen Aggregate sind alle offen. Da das Maß μ auf $\mathfrak{M}$ regulär ist, kann jede meßbare Teilmenge von $\mathfrak{M}$ bis auf eine Nullmenge durch eine Menge $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}$ approximiert werden, wobei die A_{kl} endliche boolesche Aggregate der besprochenen Art sind. Jedes solche endliche boolesche Aggregat A_{kl} ist nun gleich einem $(F_{kl})^*$ mit $F_{kl} \in \mathfrak{S}$. Es kann also jede meßbare Teilmenge von $\mathfrak{M}$ durch eine der Menge der Form $\left(\bigwedge_{k=1}^{\infty} \neg \bigwedge_{l=1}^{\infty} F_{kl}\right)^*$ mit $F_{kl} \in \mathfrak{S}$ bis auf eine Nullmenge approximiert werden. Daraus schließt man auf Satz 6. Wir bemerken nun, daß für $S, T \in \mathfrak{S}_\infty$ gilt $e_{(S \wedge T)^*} = e_{S^*} \cdot e_{T^*}$ und $e_{(\neg S)^*} = 1 - e_{S^*}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{N}_\infty$, versehen mit den Operationen $\wedge$ und $\neg$, eine Boolesche Algebra ist. Da für ein $S^* \subseteqq \mathfrak{M}$ gilt $\mu(S^*) = \int_{\mathfrak{M}} \chi(0, \varphi)\, e_{S^*}(\varphi)\, d\varphi = \int_{\mathfrak{M}} e_{S^*}(\varphi)\, d\varphi = s(0)$ und da $\hat{S} = (0, 0, \ldots)$ genau dann wenn S^* eine Nullmenge ist, kann man auf Satz 2 schließen. Es ist leicht zu zeigen und bekannt, daß die Maßalgebra von $\mathfrak{M}$ nicht atomisch und separabel ist. Daraus erschließt man Satz 1 und Satz 3. Satz 5 und Satz 11 folgen aus dem bisher Gesagten ebenfalls. Zum Beweis des Satzes 12 bemerken wir, daß die Funktionenfolge $\{e_{(U_n)^*}\}_{n=1,2,\ldots}$ im Mittel konvergiert. Satz 13 ist unmittelbar klar. Die Beweise der restlichen Sätze erfordern speziellere Überlegungen. Für jedes Element $\mathfrak{s} = (s(0), s(1), \ldots) \in \mathfrak{N}_\infty$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}^{(0)}$ das Element $\mathfrak{s}$ selbst und mit $\mathfrak{s}^{(1)}$ das Element $\neg\, \mathfrak{s}$.

Die Elemente $\widehat{T_j}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{t}_{2^j}$. Jedem $(n+1)$-Tupel $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ ist eineindeutig ein Element $\mathfrak{t}_{2^0}^{(\varepsilon_0)} \wedge \mathfrak{t}_{2^1}^{(\varepsilon_1)} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{t}_{2^n}^{(\varepsilon_n)}$ aus $\mathfrak{N}$ zugeordnet, das wir mit $\mathfrak{b}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ bezeichnen. Für jede Zahl $0 \leqq m < 2^{n+1}$, die nach A(4) eine Darstellung $m = m_0 2^0 + m_1 2^1 + \ldots + m_n 2^n$ hat, bekommen wir ein Element $\mathfrak{t}_m = \bigvee_{\varepsilon_0 m_0 \oplus \varepsilon_1 m_1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon_n m_n = 0} \mathfrak{b}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Diese Elemente sind besonders einfach gebaut. Es ist nämlich $\mathfrak{t}_0 = (1, 0, 0, \ldots)$ und für $k = 1, 2, \ldots, 2^{n+1} - 1$ ist $\mathfrak{t}_k = (t_0, t_1, \ldots)$ mit $t_0 = t_k = \frac{1}{2}$ und $t_i = 0$ für $k \notin \{0, k\}$. Da die 2^{n+1} Elemente $\mathfrak{b}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ paarweise disjunkt und ungleich $(0, 0, \ldots)$ sind, hat die von ihnen erzeugte Boolesche Algebra $2^{(2^n+1)}$ Elemente. Somit sind die 2^{n+1} Elemente $\mathfrak{b}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ unabhängig. Für $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0$ gehört zu $\mathfrak{b}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ ein Satz $S_n \in \mathfrak{S}$, für den $\widehat{S_n} = \mathfrak{b}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

S_n^* ist eine Untergruppe von $\mathfrak{M}$, die dadurch gekennzeichnet ist, daß $\varphi(T_0) = \varphi(T_1) = \ldots = \varphi(T_n) = w \Leftrightarrow \varphi \in S_n^*$ gilt. Diese Untergruppe S_n^* hat 2^{n+1} Restklassen. Es gilt $S_0^* \supset S_1^* \supset S_2^* \supset \ldots$. Weiters ist $\mu(S_n^*) = 2^{-n-1}$. Ist $\mathfrak{g} = (g(0), g(1), \ldots)$ ein Element von $\mathfrak{N}_\infty$, für das nur endlich viele Komponenten ungleich null sind, so nehmen wir an, daß mindestens ein $g(k)$ ungleich null ist. Dann gibt es einen Satz $G \in \mathfrak{S}_\infty$, so daß $e_{G*}(\varphi) = g(0)\,\chi(0, \varphi) + \ldots + g(m)\,\chi(m, \varphi)$, wobei $g(m) \neq 0$.

Wir können den trivialen Fall $m = 0$ aus unseren Betrachtungen auslassen. Ist nun m nach A(4) dargestellt und ist dabei j der größte Index, für den $m_j = 1$, so ist e_{G*} auf S_j^* und jeder Restklasse von S_j^* konstant, nämlich 0 oder 1.

Für eine Restklasse $\overline{S_j^*}$ von S_j^* setzen wir für $i = 0, 1, 2, \ldots, j$

$$\varepsilon_i = 0 \text{ falls } \varphi(T_i) = w \qquad \text{für alle } \varphi \in \overline{S_j^*}\,,$$

$$\varepsilon_i = 1 \text{ falls } \varphi(T_i) = f \qquad \text{für alle } \varphi \in \overline{S_j^*}\,.$$

Dementsprechend benennen wir diese Restklasse $\overline{S_j^*}$ auch mit $S_j^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$. Wir erhalten dann

$$\mathfrak{g} = \bigvee_{e_{G^*}(S_j^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)) = 1} \mathfrak{b}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)\,.$$

Somit ist $\mathfrak{g} \in \mathfrak{N}$, gezeigt, also der erste Teil von Satz 7 bewiesen. Für ein $G \in \mathfrak{S}$ sind natürlich bei $\hat{G}$ fast alle Komponenten null. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Nun nehmen wir an, daß $F, G, H \in \mathfrak{S}$ und in $F \wedge G \wedge H$ genau die Aussagenvarablen $T_0, T_1, \ldots, T_m$ vorkommen. Es gibt dann 2^{m+1} Wahrheitsbewertungen $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ von $T_0, T_1, \ldots, T_m$, wobei wir $\varepsilon_i = 0$ bzw. 1 setzen, wenn T_i als wahr bzw. falsch bewertet wird. Den Wahrheitswert, den eine Formel F bei der Bewertung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ annimmt, bezeichnen wir mit $F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, die Menge aller Wahrheitsbewertungen $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, für die $F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = w$, bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_F$. Die Funktion e_{F*} ist über jeder Restklasse $S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ konstant. Wir zeigen nun durch Induktion über den Aufbau der Formel H, daß für jede Wahrheitsbewertung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ gilt

$$e_{H*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = 1 \text{ wenn } H(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = w\,,$$

$$e_{H*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = 0 \text{ wenn } H(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = f\,.$$

Für $H = T_i$ ist $e_{H*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = 1$ bzw. 0 wenn $\varepsilon_i = 0$ bzw. 1 ist, also wenn $H(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = w$ bzw. f ist.
Für $H = F \wedge G$ ist $e_{H*} = e_{F*} \cdot e_{G*}$ und daher $e_{H*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = 1$ bzw. 0 wenn $e_{F*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) \cdot e_{G*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = 1$ bzw. 0 ist.
Nun ist nach Induktionsvoraussetzung $e_{F*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = 1$ bzw. 0 wenn $F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = w$ bzw. f ist. Dementsprechendes gilt für e_{G*}. Daher ist $e_{H*}(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = 1$ bzw. 0 wenn $H(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = w$ bzw. f ist. Analog geht man für $H = \neg F$ vor, wobei man beachtet, daß $e_{H*} = 1 - e_{F*}$ ist. Da nun die Zuordnung $e_F^* \to \hat{F}$ für alle $F \in \mathfrak{S}$ eineindeutig ist, folgt unmittelbar Satz 8.
Um Satz 3 zu beweisen erinnern wir uns, daß $\mu(S_m^*(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) = 2^{-m-1}$ ist. Also ist $\tilde{\mu}(\hat{H}) = \mu(H^*) = \sum_{e_{H^*}(S_m^*(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)) = 1} \mu(S_m^*(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)) = 2^{-m-1} \cdot \operatorname{card} \mathfrak{C}_H$.
Damit ist Satz 9 bewiesen. Um Satz 10 zu beweisen, bemerken wir, daß die Mengen $T_0^*, T_1^*, \ldots$. statistisch unabhängige Teilmengen von $\mathfrak{M}$ sind und alle das Maß $\frac{1}{2}$ haben. Zum Beweis von Satz 14 bemerken wir, daß für jedes Element $\mathfrak{s} = (s(0), s(1), \ldots) \in \mathfrak{N}_\infty$ nach Satz 6 gilt $s(0) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k)\, s(k \oplus 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (s(k))^2$.
Also ist $\mathfrak{s} \in l^2$.
Zwei Elemente $\mathfrak{s} = (s(0), s(1), \ldots)$ und $\mathfrak{t} = (t(0), t(1), \ldots)$ sind genau dann statistisch unabhängig, wenn für $\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{t} = (h(0), h(1), \ldots)$ gilt $h(0) = s(0) \cdot t(0)$.
Nun ist $h(0) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k)\, t(k) = s(0)\, t(0) + \sum_{k=1}^{\infty} s(k)\, t(k)$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ sind also genau dann statistisch unabhängig, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} s(k)\, t(k) = 0$.

Abschließende Bemerkungen

Sei Ω irgend eine Menge von „Situationen" und (Ω, Σ, ν) ein Wahrscheinlichkeitsraum auf Ω, dessen Wahrscheinlichkeitsalgebra (Ω_1, ν) separabel ist. Weiters sei $\tilde{\mathfrak{S}}$ eine Menge sogenannter „Sätze" $\tilde{S}$, die bis auf Nullmengen gewissen meßbaren Teilmengen $\tilde{S}^*$ von Ω durch eine „semantische" Funktion ϱ zugeordnet sind, so daß durch die „Behauptung" von $\tilde{S}$ kundgetan werden kann, daß bis auf Wahrscheinlichkeit 0 eine Situation aus $\tilde{S}^*$ eingetreten ist.
Die Frage ob $\mathfrak{S}_\infty$ die gleiche Ausdruckskraft wie die Satzmenge $\tilde{\mathfrak{S}}$ hat, kann positiv beantwortet werden. Bezeichnet nämlich $(\mathfrak{M}_1, \mu)$ die Maßalgebra von $\mathfrak{M}$, so kann man einen injektiven Booleschen Homomorphismus $\beta : \Omega_1 \to \mathfrak{M}_1$ finden, sodaß für jedes Element $A \in \Omega_1$ gilt $\mu(\beta(A)) = \nu(A)$. Bezeichnet λ die Abbildung $\lambda : \mathfrak{S}_\infty \to \mathfrak{M}_1$, die jedem Satz $S \in \mathfrak{S}_\infty$ die Klasse $[S^*]$ aller meßbaren Teilmengen von $\mathfrak{M}$ zuordnet, die sich von S^* nur um eine Nullmenge unterscheiden, so kann man eine Abbildung $\alpha : \tilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}_\infty$ finden, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{S}} \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, "\alpha"] & \Omega_1 \arrow[d, "\beta"] \\ \mathfrak{S}_\infty \arrow[r, "\lambda"] & \mathfrak{M}_1 \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Da $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{N}_\infty$ kann man nach Satz 11 das Bild von α sogar auf $\left\{S \mid S = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \neg \bigwedge_{l=1}^{\infty} F_{kl} \text{ mit } F_{kl} \in \mathfrak{S}\right\}$ beschränken. (Die Einführung von $\mathfrak{N}_\infty$ für diese Überlegung ist unwesentlich). Wir bemerken, daß diese Möglichkeit im wesentlichen von der Regularität des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf dem Modellraum $\mathfrak{M}$ herrührt.

In dieser Arbeit ist die Wahl der Gruppenverknüpfung „$*$" auf $\mathfrak{M}$ eine Festlegung, welche prinzipiell willkürlich ist. Es wäre ohne weiteres möglich, auf $\mathfrak{M}$ andere Gruppenverknüpfungen zu wählen, sodaß bis auf Satz 7 alle Sätze in analoge Sätze übergehen würden. Satz 7 besagt aber, daß syntaktisch einfach strukturierte Sätze $S \in \mathfrak{S}_\infty$ auch einfach strukturierte Transformierte $\hat{S}$ haben. Diese Tatsache dürfte die Wahl von „$*$" rechtfertigen und „$*$" als eine dem Problemkreis am besten angepaßte Gruppenoperation auszeichnen.

LITERATUR

Billard, P. [1]: Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0, 1)$. Studia Math. 28 (1966/67) 363—388.

Fine, N. J. [1]: On groups of orthonormal functions I, II. Pac. J. Math. 5 (1955) 51—65.

Gibbs: Private Mitteilung über logische Differentialgleichungen.

Rickart, C. E. [1]: General theory of Banach Algebras. D. Van. Nostrand Company 1960.

Arch. math. Logik 13 (1970), 168—193.

LOGISCHE KATEGORIEN*

Von Petr Hájek, Heidelberg und Prag

§ 1 Einleitung

Die relative Widerspruchsfreiheit einer Theorie T in bezug auf eine andere Theorie S wird meistens so bewiesen, daß man eine Abbildung m angibt, die jeder T-Formel (in der Sprache von T formulierten Formel) φ eine S-Formel φ^m zuordnet, und zwar so, daß durch m die Beweisstruktur in einem bestimmten Sinne beachtet wird. So ist z. B. durch jede relative Interpretation (im Sinne von Tarski, s. [13]) eine solche Abbildung bestimmt. Eine Verallgemeinerung des Begriffes der relativen Interpretation kann im Artikel [5] gefunden werden (vgl. auch [6]). Eine andere wird in [16] betrachtet. Kreisel betrachtet in [9] Zusammenhänge zwischen verschiedenen Begriffen dieser Art. Hanf [7] und Pour-El und Kripke [11] untersuchen sog. rekursive Isomorphismen.

Da die Terminologie bis jetzt nicht eindeutig ist, sei dem Verfasser erlaubt, in dieser Arbeit den Terminus „*syntaktisches Modell*" für eine beliebige vernünftige Abbildung mit den oben angedeuteten Eigenschaften zu benutzen. Für eine Definition müssen diese Eigenschaften selbstverständlich präzisiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird eine Konzeption der syntaktischen Modelle entwickelt und mit dem Begriffsapparat der elementaren Kategorienlehre konfrontiert; es scheint nämlich, daß die Bedingung, daß die zu untersuchenden Theorien zusammen mit den syntaktischen Modellen eine Kategorie bilden, eine notwendige Bedingung dafür ist, daß die gewählte Definition des syntaktischen Modells wirklich vernünftig ist. Liegt eine Definition des syntaktischen Modells vor und bestimmt sie eine Kategorie von Theorien und Modellen, so kann man fragen, welche Begriffe über syntaktische Modelle innerhalb der Kategorienlehre definierbar sind und für welche von ihnen befriedigende kategorielle Sätze gelten. In der *Konfrontierung* der Begriffe, die die Logik bietet, mit denen der Kategorienlehre möge der Leser den Sinn dieser Arbeit sehen; wir werden also nicht danach streben, die gesamte Logik innerhalb der Kategorienlehre aufzubauen.

Die ganze Arbeit (ausgenommen § 7) kann von zwei Standpunkten aus aufgefaßt werden: man kann sowohl unter Systemen von Axiomen nur (primitiv) rekursive Systeme und unter Abbildungen nur (primitiv) rekursive Funktionen verstehen und Existenzsätze konstruktiv auffassen als auch alles in den üblichen (mengentheoretischen) Rahmen einordnen. Dabei braucht der konstruktive Standpunkt nicht genau präzisiert zu werden, weil wir nie behaupten werden, daß ein Resultat konstruktiv nicht beweisbar ist (vgl. [9]).

Die Arbeit des Verfassers an diesem Thema wurde durch die im Prager mengentheoretischen Seminar studierte Problematik veranlaßt, insbesondere die, die in

* Eingegangen am 22.5.1969.

[15] enthalten ist. Der Verfasser ist den Herren Prof. G. Müller, G. Kreisel, D. Scott und P. Vopěnka für ihr Interesse, sowie für wertvolle Diskussionen und Bemerkungen sehr dankbar[1].

§ 2 Syntaktische Modelle

Wir setzen voraus, daß wir über eine Definition von Theorien mit den üblichen Eigenschaften verfügen. Insbesondere wird definiert, was T-Formeln (innerhalb T formulierte Formeln) sind; mit jeder T-Formel ist auch ihre Negation eine T-Formel, mit zwei T-Formeln ist auch ihre Konjunktion eine T-Formel usw. Wenn es Quantoren gibt, dann bezeichnen wir für jede T-Formel φ mit $(\forall\varphi)$ ihren generellen Abschluß; wenn es sich um ein System ohne Quantoren handelt, sei $\forall$ als leeres Symbol aufgefaßt. Es sind logische Axiome und Deduktionsregeln definiert; zu jeder Theorie T gehört eine Menge[2] von speziellen Axiomen. Eine endliche Folge von T-Formeln ist ein Beweis in T, wenn jedes Glied der Folge entweder ein logisches oder spezielles Axiom ist oder wenn es aus irgendwelchen vorangehenden Gliedern der Folge gemäß den Deduktionsregeln unmittelbar folgt. $T \vdash \varphi$ bedeutet, daß φ in T beweisbar ist. Zwei Theorien T, S sind gleich, falls in den beiden dieselben Formeln beweisbar sind.
Wir werden uns insbesondere mit zwei konkreten Begriffen befassen: (1) mit dem Begriff einer Theorie im (angewandten) Aussagenkalkül (also: abzählbar viele Aussagenvariablen, Junktoren &, $\neg$ (u.a.), irgendeine Axiomatik des klassischen Aussagenkalküls) und (2) mit dem Begriff einer Theorie im Prädikatenkalkül erster Stufe (Objektvariablen, Prädikate, bzw. auch Funktionen u.a.; aussagenlogische Junktoren; Quantoren; irgendeine Axiomatik des klassischen Prädikatenkalküls). Alle weiteren Eigenschaften von Theorien, die wir benutzen, werden für diese beiden Theorienbegriffe erfüllt sein (Deduktionstheorem, Interpolationslemma); der Leser möge eine andere Definition von Theorien wählen und feststellen, ob für sie unsere Resultate gelten.
Auf Grund der oben erwähnten Begriffe definieren wir:
Definition 1. Seien T, S Theorien, m eine Abbildung, die jeder T-Formel φ eine S-Formel φ^m zuordnet. Das Tripel $\boldsymbol{m} = \langle T, m, S\rangle$ ist ein *syntaktisches Modell* von T in S, wenn folgendes gilt: (1) $\boldsymbol{m}$ *beachtet Axiome*, d. h. für jedes Axiom φ (logisches oder spezielles Axiom von T) ist $S \vdash \varphi^m$; (2) $\boldsymbol{m}$ *beachtet Deduktionsregeln*, d.h. für jede Menge Γ von T-Formeln und jede T-Formel φ, wenn φ aus Γ unmittelbar folgt gemäß einer Deduktionsregel, dann $S, \Gamma^m \vdash \varphi^m$; (3) $\boldsymbol{m}$ *beachtet die Negation*, d.h. für jede T-Formel φ ist $S, (\neg\varphi)^m \vdash \neg\forall(\varphi^m)$.
Γ^m bedeutet die Menge von Bildern der Elemente von Γ. Man beachte, daß im allgemeinen kein Zusammenhang zwischen freien Variablen von φ und von φ^m besteht, nicht einmal zwischen der Anzahl der freien Variablen in den beiden

[1] Über die Resultate dieser Arbeit wurde am 6.2.1969 im Seminar von Herrn Prof. G. Müller in Heidelberg, sowie am 24.3.1969 während der Tagung über Mathematische Logik in Oberwolfach berichtet.
[2] Der Leser möge sich entschließen, welche Mengen bzw. Funktionen er als existierend anerkennt.

Formeln. $\varphi \vdash\dashv_T \psi$ bedeutet $T, \varphi \vdash \psi$ und $T, \psi \vdash \varphi$ (φ und ψ sind deduktionsgleich in T, z. B. $\varphi \vdash\dashv_T (\forall\varphi)$).

Definition 2. Seien $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ zwei Modelle von T in S. $\boldsymbol{m}$ ist *gleich* $\boldsymbol{n}$, wenn für jede T-Formel φ $\varphi^m \vdash\dashv_S \varphi^n$ gilt.

Folgendes ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen 1, 2:

Behauptung 1. (1) Ist $\boldsymbol{m}$ ein Modell von T in S und ist $T \vdash \varphi$, dann ist $S \vdash \varphi^m$; es gilt sogar: ist Γ eine Menge von T-Formeln und ist $T, \Gamma \vdash \varphi$, dann ist $S, \Gamma^m \vdash \varphi^m$. (2) Es sei S eine Theorie, T eine widerspruchsvolle Theorie (d.h., es gibt eine T-Formel φ derart, daß $T \vdash \varphi$ und $T \vdash \neg \varphi$). Gibt es ein Modell von T in S, dann ist auch S widerspruchsvoll.

Folgerung 1. (1) Sei $\boldsymbol{m}$ ein Modell von T in S, sei $\varphi \vdash\dashv_T \psi$; dann ist $\varphi^m \vdash\dashv_S \psi^m$. (2) Sei $\boldsymbol{m} = \langle T, m, S\rangle$ ein Modell und sei Γ eine Menge von T-Formeln; wir bezeichnen die Theorie T, Γ mit T_1 und die Theorie S, Γ^m mit S_1. Dann ist $\langle T_1, m, S_1\rangle$ ein Modell. (3) Seien T, S Theorien. Gibt es ein Modell von T in S und ist S widerspruchsfrei, dann ist auch T widerspruchsfrei. (Für den Konstruktivisten ist dies schwächer als Beh. 1 (2).)

Behauptung 2. (1) Sei Id_T die identische Abbildung von T-Formeln. Dann ist $\langle T, Id_T, T\rangle$ ein Modell von T in T; es wird mit $\boldsymbol{Id}_T$ bezeichnet. (2) Seien $\boldsymbol{m} = \langle T, m, S\rangle$ und $\boldsymbol{n} = \langle S, n, U\rangle$ Modelle, sei $m * n$ die Komposition der Abbildungen m, n. Dann ist $\langle T, m * n, U\rangle$ ein Modell; es wird mit $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ bezeichnet. $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{Id}_S$ ist gleich $\boldsymbol{m}$ und $\boldsymbol{Id}_S * \boldsymbol{n}$ ist gleich $\boldsymbol{n}$. (3) Sind ferner $\boldsymbol{m}' = \langle T, \boldsymbol{m}', S\rangle$ und $\boldsymbol{n}' = \langle S, n', U\rangle$ Modelle und sind $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'$ gleich und auch $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ gleich, dann ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ gleich $\boldsymbol{m}' * \boldsymbol{n}'$. (4) Ist $\boldsymbol{m}$ ein Modell von T in S, $\boldsymbol{n}$ ein Modell von S in U und $\boldsymbol{p}$ ein Modell von U in W, dann ist $\boldsymbol{m} * (\boldsymbol{n} * \boldsymbol{p})$ gleich $(\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}) * \boldsymbol{p}$.

Das einzige, was hier nicht offenbar ist, ist die Tatsache, daß die Abblidung $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ in (2) die Negation beachtet. Um es zu beweisen, brauchen wir das folgende

Lemma 1. Sei $\boldsymbol{m} = \langle T, m, S\rangle$ ein Modell, φ eine T-Formel. Dann $\forall(\forall\varphi)^m \vdash\dashv_S \forall(\varphi^m)$ $\vdash\dashv_S (\forall\varphi)^m \vdash\dashv_S \varphi^m$; sogar $S \vdash \forall(\forall\varphi)^m \equiv (\forall\varphi^m)$.

Beweis. Offenbar ist die erste Formel der dritten und die zweite der vierten deduktionsgleich. Es genügt also zu zeigen, daß die dritte der vierten deduktionsgleich ist. Das folgt aber aus $\forall\varphi \vdash\dashv_T \varphi$ (Folgerung 1 (1)). Die zusätzliche Behauptung folgt aus dem Deduktionstheorem, weil beide Formeln abgeschlossen sind.

Beweis der Behauptung 2. Wir wollen zeigen, daß $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ die Negation beachtet. Sei φ eine T-Formel. Dann $S, (\neg\varphi)^m \vdash \neg\forall(\varphi^m)$, also $U, (\neg\varphi)^{m*n} \vdash [\neg\forall(\varphi^m)]^n$ (nach Beh. 1 (1)). Da n die Negation beachtet, ist $U, [\neg\forall(\varphi^m)]^n \vdash \neg\forall[\forall(\varphi^m)]^n$, also $U, (\neg\varphi)^{m*n} \vdash \neg\forall[\forall(\varphi^m)]^n$. Aus dem Lemma 1 folgt $U \vdash \forall(\psi^n) \equiv \forall(\forall\psi)^n$; für φ^m statt ψ haben wir $U \vdash \forall(\varphi^{m*n}) \equiv \forall[\forall(\varphi^m)]^n$, also $U \vdash \neg\forall(\varphi^{m*n}) \equiv$ $\equiv \neg\forall[\forall(\varphi^m)]^n$. Daraus folgt $U, (\neg\varphi)^{m*n} \vdash \neg\forall(\varphi^{m*n})$. Daraus folgt $U, (\neg\varphi)^{m*n} \vdash \neg\forall(\varphi^{m*n})$.

Lemma 2. (1) Sei $\boldsymbol{m}$ ein Modell von T in S. Für beliebige T-Formeln φ, ψ gilt $(\varphi \mathbin{\&} \psi)^m \vdash\dashv_S \varphi^m \mathbin{\&} \psi^m$. (2) Seien $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ Modelle von T in S. $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ sind genau dann gleich, wenn für jede abgeschlossene T-Formel φ $\varphi^m \vdash\dashv_S \varphi^n$ gilt.

Beweis. (1) $T, \varphi \mathbin{\&} \psi \vdash \varphi$, also $S, (\varphi \mathbin{\&} \psi)^m \vdash \varphi^m$; genauso $S, (\varphi \mathbin{\&} \psi)^m \vdash \psi^m$, also $S, (\varphi \mathbin{\&} \psi)^m \vdash \varphi^m \mathbin{\&} \psi^m$. Umgekehrt ist $T, \varphi, \psi \vdash (\varphi \mathbin{\&} \psi)$, also $S, \varphi^m, \psi^m \vdash$

$\vdash (\varphi \mathbin{\&} \psi)^m$, d.h. $S, \varphi^m \mathbin{\&} \psi^m \vdash (\varphi \mathbin{\&} \psi)^m$. (2) Die Bedingung ist notwendig. Gilt umgekehrt $\varphi^m \dashv\vdash_S \varphi^n$ für jede abgeschlossene T-Formel und ist ψ eine beliebige T-Formel, dann ist $(\forall\psi)^m \dashv\vdash_S (\forall\psi)^n$, also $\forall(\forall\psi)^m \dashv\vdash_S \forall(\forall\psi)^n$, also $\forall(\psi^m) \dashv\vdash_S \forall(\psi^n)$, also $\psi^m \dashv\vdash_S \psi^n$.

Lemma 3. Sei $\boldsymbol{m}$ ein Modell von T in S, sei n eine Abbildung von T-Formeln in S-Formeln derart, daß für jede T-Formel φ $\varphi^m \dashv\vdash_S \varphi^n$ gilt; dann ist $\langle T, n, S\rangle = \boldsymbol{n}$ ein Modell von T in S.

Beweis. Man muß nur zeigen, daß $\boldsymbol{n}$ die Negation beachtet. Aus $\varphi^m \dashv\vdash_S \varphi^n$ folgt $S \vdash \forall(\varphi^m) \equiv \forall(\varphi^n)$, also $S \vdash \neg\forall(\varphi^m) \equiv \neg\forall(\varphi^n)$. Daraus folgt $S, (\neg\varphi)^n \vdash$ $\vdash (\neg\varphi)^m$, $S, (\neg\varphi)^n \vdash \neg\forall(\varphi^m)$, $S, (\neg\varphi)^n \vdash \neg\forall(\varphi^n)$.

Behauptung 3. (1) Seien T, S Theorien, m eine Abbildung von abgeschlossenen T-Formeln in abgeschlossene S-Formeln derart, daß für beliebige abgeschlossene T-Formeln φ, ψ folgendes gilt: (a) wenn $T \vdash \varphi$, dann $S \vdash \varphi^m$; (b) wenn $T \vdash \neg\varphi$, dann $S \vdash \neg(\varphi^m)$; (c) wenn $T \vdash \varphi \equiv \psi$, dann $S \vdash \varphi^m \equiv \psi^m$; (d) $(\varphi \mathbin{\&} \psi)^m$ $\dashv\vdash_S \varphi^m \mathbin{\&} \psi^m$. Definiert man für jede T-Formel φ $\varphi^n = (\forall\varphi)^m$, dann ist $\langle T, n, S\rangle$ ein Modell von T in S. (2) Sei $\boldsymbol{n}$ ein Modell von T in S, sei $\varphi^m = \forall(\varphi^n)$ für jede abgeschlossene T-Formel φ. Dann erfüllt m die Bedingungen (a) bis (d) in (1) und das durch m nach (1) bestimmte Modell ist gleich $\boldsymbol{n}$.

Beweis. (1) $\boldsymbol{n}$ beachtet Axiome nach (a). Wenn φ aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ unmittelbar folgt, dann ist $T, (\forall\varphi_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \forall\varphi_n) \vdash (\forall\varphi)$, also (wenn $\psi\,(\forall\varphi_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \forall\varphi_n)$ ist) $T \vdash (\psi \mathbin{\&} \forall\varphi) \equiv \psi$, also $S \vdash (\psi \mathbin{\&} \forall\varphi)^m \equiv \psi^m$ nach (c), $S \vdash \psi^m \mathbin{\&} (\forall\varphi)^m \equiv \psi^m$ nach (d). Es folgt $S, \psi^m \vdash (\forall\varphi)^m$, also $S, (\forall\varphi_1)^m \mathbin{\&} \ldots \vdash (\forall\varphi)^m$ nach (d) und $S, \varphi_1{}^m, \ldots \vdash \varphi^m$ nach der Definition von m. $\boldsymbol{m}$ beachtet also Deduktionsregeln. Um zu zeigen, daß m die Negation beachtet, muß man $S, (\neg\varphi)^m \vdash \neg(\varphi^m)$ zeigen (weil φ^m abgeschlossen ist). Dazu genügt es zu zeigen, daß $S, (\neg\varphi)^m \mathbin{\&} (\varphi^m)$ widerspruchsvoll ist, also daß $S, (\forall \neg\varphi \mathbin{\&} \forall\varphi)^m$ widerspruchsvoll ist. Das ist aber der Fall, weil $T \vdash \neg(\forall\neg\varphi \mathbin{\&} \forall\varphi)$, also nach (b) $S \vdash \neg(\forall\neg\varphi \mathbin{\&} \forall\varphi)^m$. (2) (a) und (d) ist klar. Sei $T \vdash \neg\varphi$, dann ist $S \vdash (\neg\varphi)^n$, also $S \vdash \neg\forall(\varphi^n)$, also $S \vdash \neg(\varphi^m)$. Damit ist (b) bewiesen. Sei $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$, dann $T, \varphi \vdash \psi$, also $S, \varphi^n \vdash \psi^n$, was $S \vdash \varphi^m \rightarrow \psi^m$ ergibt, weil φ^m abgeschlossen ist. Daraus folgt (c). Wir haben $\varphi^m \dashv\vdash_S \varphi^n$ für jede abgeschlossene Formel φ, so daß das durch m bestimmte Modell gleich $\boldsymbol{n}$ ist.

Definition 3. Die Abbildung m aus (1) der Beh. 3 heißt eine *abgeschlossene Basis* des durch sie bestimmten Modells.

Bemerkung. Nach (2) dieser Beh. gibt es zu jedem Modell eine abgeschlossene Basis; genauer: zu jedem Modell $\boldsymbol{n}$ gibt es eine abgeschlossene Basis m derart, daß das durch m bestimmte Modell gleich $\boldsymbol{n}$ ist.

Definition 4. S ist *stärker als* T, wenn jede in T beweisbare Formel in S beweisbar ist. (Es folgt dann, daß jede T-Formel eine S-Formel ist.)

Lemma 4. (1) S ist stärker als T genau dann, wenn $\langle T, Id_T, S\rangle$ ein Modell von T in S ist. (2) T ist gleich S genau dann, wenn T stärker als S und S stärker als T ist.

Definition 5. Sei $\boldsymbol{m}$ ein Modell von T in S. $\boldsymbol{m}$ heißt *treu*, wenn jede T-Formel φ genau dann in T beweisbar ist, wenn φ^m in S beweisbar ist (also: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow S \vdash \varphi^m$).

$\boldsymbol{m}$ heißt *wesentlich treu*, wenn für jede Menge Γ von T-Formeln und jede T-Formel φ $T, \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow S, \Gamma^m \vdash \varphi^m$ gilt.

Bemerkung. Den Begriff eines treuen Modells kann man in [3] finden; der Begriff eines wesentlich treuen Modells scheint neu zu sein. Wir werden noch sehen, daß für die in [3] untersuchten Modelle (relative Interpretationen) die Begriffe der Treue und der wesentlichen Treue übereinstimmen, was aber im allgemeinen nicht der Fall ist. Vom Gesichtspunkt der Widerspruchsfreiheitsfragen haben treue Modelle eine große Bedeutung: wenn wir ein Modell $\boldsymbol{m} = \langle T, m, S\rangle$ konstruieren, wissen wir, daß T widerspruchsfrei ist, falls S widerspruchsfrei ist. Ohne zu wissen, daß $\boldsymbol{m}$ treu ist, können wir aber nicht sicher sein, daß m eigentlich mehr über Widerspruchsfreiheit sagt, als wir wissen: es ist nämlich durchaus möglich, daß es eine in T nicht beweisbare Formel φ gibt derart, daß $\langle (T, \varphi), m, S\rangle$ ein Modell ist, also daß die Abbildung m die Widerspruchsfreiheit von (T, φ) in bezug auf S liefert. Da uns sehr oft nicht nur eine Theorie T interessiert, sondern verschiedene von ihren Erweiterungen (vgl. die Mengenlehre), ist es besonders wichtig, ob Modelle, mit denen man arbeitet, nicht nur treu, sondern auch wesentlich treu sind. Wir werden treue und wesentliche treue Modelle in den nächsten §§ untersuchen.

Definition 6. Sei m eine abgeschlossene Basis eines Modells von T in S. m heißt *homogen*, wenn für jede abgeschlossene T-Formel φ $S \vdash (\neg \varphi)^m \equiv \neg (\varphi^m)$ gilt. Ein Modell heißt *homogen*, wenn es eine homogene abgeschlossene Basis besitzt. (Offenbar hängt die Homogenität eines Modells nicht von der Wahl einer abgeschlossenen Basis ab).

Lemma 5. Sei $\boldsymbol{n}$ ein Modell von T in S. $\boldsymbol{n}$ ist homogen genau dann, wenn für jede T-Formel φ folgendes gilt:

$$(*) \qquad S \vdash \forall(\neg \forall\varphi)^n \equiv \neg \forall(\varphi^n).$$

Beweis. (1) Sei $(*)$ angenommen, sei m eine abgeschlossene Basis für $\boldsymbol{n}$ und sei φ eine abgeschlossene Formel. Es ist $\varphi^n \dashv\vdash_S \varphi^m$, also $\forall\varphi^n \dashv\vdash_S \forall\varphi^m$, daraus $S \vdash \forall\varphi^n \equiv \varphi^m$ (weil φ^m abgeschlossen ist) und $S \vdash \neg \varphi^m \equiv \neg \forall\varphi^n$. Analog ist $(\neg \varphi)^n \dashv\vdash_S (\neg \varphi)^m$, also $S \vdash \forall(\neg \varphi)^n \equiv (\neg \varphi)^m$; das gibt $S \vdash \neg \varphi^m \equiv (\neg \varphi)^m$; $\boldsymbol{n}$ ist homogen. (2) Sei umgekehrt $\boldsymbol{n}$ homogen; aus der Beh. 3 folgt, daß die dort definierte Abbildung m eine abgeschlossene Basis für $\boldsymbol{n}$ ist. Sei φ eine beliebige T-Formel; dann ist $(\forall\varphi)$ abgeschlossen und deswegen ist $S \vdash \neg (\forall\varphi)^m \equiv (\neg\forall\varphi)^m$. Nach der Definition von m ist $S \vdash \neg \forall(\forall\varphi)^n \equiv \forall(\neg \forall\varphi)^n$; nach dem Lemma 1 ist aber $S \vdash \forall(\forall\varphi)^n \equiv \forall(\varphi^n)$ und $(*)$ folgt.

Bemerkung. Jede relative Interpretation ist ein homogenes Modell; beschränkt auf abgeschlossene Formeln ist sie ihre eigene abgeschlossene Basis und erfüllt offenbar die Bedingungen (a) bis (d). Man sieht, daß – nichtfinitistisch gesagt – homogene Modelle genau allen Homomorphismen der Algebra der Aussagen von T in die Algebra der Aussagen von S entsprechen.

§ 3 Verschiedenes aus der Kategorienlehre

Die Axiome und Begriffe der elementaren Kategorienlehre werden als bekannt vorausgesetzt. Insbesondere benutzen wir die Begriffe eines *Monomorphismus*, *Epi- Bi-* und *Isomorphismus*, einer *Koretraktion* usw. (Siehe [10], wenn notwendig.) Ist das Endobjekt von $\boldsymbol{m}$ dem Anfangsobjekt von $\boldsymbol{n}$ gleich, wird die *Komposition* von $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ mit $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ bezeichnet. Wie bekannt, gilt folgendes:

(a) Sind $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ Monomorphismen und ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ definiert, so ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ ein Monomorphismus. (b) Ist $m * n$ ein Monomorphismus, so ist m ein Monomorphismus. (c) Sind $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ Epimorphismen und ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ definiert, so ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ ein Epimorphismus. (d) Ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ ein Epimorphismus, so ist $\boldsymbol{n}$ ein Epimorphismus.

Der Begriff eines *pushouts* hat eine große Bedeutung für unsere Betrachtungen; deswegen führen wir hier die Definition an. Das Diagramm (D1) ist ein (zu $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ zugehöriger) *pushout*, wenn dieses kommutiert und wenn für jedes kommutative Diagramm (D2) es einen einzigen Morphismus $\boldsymbol{l}$ gibt derart, daß (D3) kommutiert. Die Beweise der folgenden Lemmata können teilweise in [10] gefunden werden; alle sind aber ganz elementar und können dem Leser als eine Übung überlassen werden.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\hat{m}"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "n"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, "\hat{n}"'] \end{tikzcd} \quad (D1) \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\hat{\hat{m}}"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "n"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, "\hat{\hat{n}}"'] \end{tikzcd} \quad (D2) \qquad \begin{tikzcd} & & \cdot \\ \cdot \arrow[r, "\hat{m}"] \arrow[urr, "\hat{\hat{m}}"] & \cdot \arrow[ur, "l"'] & \\ \cdot \arrow[u, "n"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, "\hat{n}"] \arrow[uur, "\hat{\hat{n}}"'] & \end{tikzcd} \quad (D3)$$

(e) Ist (D1) ein pushout und (D2) auch, dann gibt es einen Isomorphismus $\boldsymbol{l}$ derart, daß (D3) kommutiert. (f) Sind in (D4) die Quadrate pushouts, dann ist auch das große Rechteck ein pushout. (g) Ist (D1) ein pushout und ist $\boldsymbol{m}$ ein Epimorphismus, (eine Koretraktion; ein Isomorphismus), dann hat auch $\hat{\boldsymbol{m}}$ dieselbe Eigenschaft. (h) Ist in (D5) das Quadrat ein pushout und ist $\boldsymbol{l}$ ein Isomorphismus,

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \\ \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \end{tikzcd} \quad (D4) \qquad \begin{tikzcd} \cdot & & \\ & \cdot \arrow[ul, "l"'] \arrow[r, "\hat{m}"] & \cdot \\ & \cdot \arrow[u, "n"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, "\hat{n}"'] \end{tikzcd} \quad (D5) \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr, "l^{-1}\ \hat{m}"] & \\ \cdot \arrow[u, "l"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "n"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, "\hat{n}"'] \end{tikzcd} \quad (D6)$$

dann ist (D6) ein pushout. Analog für andere Ecken von (D1). (i) Ist (D1) kommutativ, ist $\boldsymbol{n}$ ein Epimorphismus und $\hat{\boldsymbol{n}}$ ein Isomorphismus, dann ist dieses Diagramm ein pushout.

Für die Begriffe eines Funktors, eines vollen (repräsentativen; treuen) Funktors und eines Äquivalenzfunktors siehe [10]. Sind K, K' Kategorien, sagen wir, daß K' *ärmer* ist als K, wenn K' eine Unterkategorie von K ist mit denselben Objekten.

§ 4 Logische Kategorien

Aus der Beh. 2 folgt, daß die Theorien zusammen mit den Modellen (bezüglich der definierten Gleichheit) eine Kategorie bilden (Theorien sind Objekte, Modelle sind Morphismen). Insbesondere bezeichnen wir mit K_0 die Kategorie der Theorien und Modelle des Aussagenkalküls und mit K_1 die Kategorie der Theorien und

Modelle des Prädikatenkalküls (vgl. den zweiten Absatz des § 2); mit K wird eine beliebige Kategorie der Theorien und Modelle bezeichnet (K_0 oder K_1 oder eventuell auch eine andere).

Behauptung 4. ($\delta 1$) Eine Theorie T ist genau dann *widerspruchsvoll*, wenn sie ein Nullobjekt von K ist, also wenn aus jeder Theorie S genau ein Morphismus in T führt.

Beweis. (1) Sei T widerspruchsvoll, sei φ eine beliebige T-Formel. Dann ist $T \vdash \varphi$ und für jede T-Formel ψ haben wir $\varphi \vdash\dashv_T \psi$. Wenn wir für jede S-Formel ψ ψ^m als φ definieren, so bekommen wir ein Modell von S in T. Ist n ein Modell von S in T, dann ist für jede S-Formel ψ $\psi^n \vdash\dashv_T \varphi$, so daß $\boldsymbol{n}$ gleich $\boldsymbol{m}$ ist. (2) Sei T ein Nullobjekt, sei S eine widerspruchsvolle Theorie. Dann gibt es ein Modell von S in T, woraus folgt, daß T widerspruchsvoll ist.

Behauptung 5. ($\varepsilon 0$) Ist T widerspruchsvoll und ist $\boldsymbol{m} : T \to S$, dann ist $\boldsymbol{m}$ ein Isomorphismus.

Beweis. S ist auch widerspruchsvoll, so daß es ein Modell $\boldsymbol{n} : S \to T$ gibt. $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ ist ein Modell von T in T, das – da T widerspruchsvoll ist – dem Modell $\boldsymbol{Id}_T$ gleich ist. Genauso ist $\boldsymbol{n} * \boldsymbol{m}$ gleich $\boldsymbol{Id}_S$.

In K untersuchen wir die Gesamtheit aller Modelle $\langle T, Id_T, S\rangle$ (vgl. Lemma 4). Diese Modelle (und alle Modelle, die diesen gleich sind) bilden eine ausgesonderte Klasse von Morphismen, die wir ε-Morphismen nennen werden. Wir definieren also:

Definition 7. Ein Modell $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist ein *ε-Morphismus*, wenn jede T-Formel eine S-Formel ist und für jede T-Formel φ $\varphi^m \vdash\dashv_S \varphi$ ist.

Behauptung 6. Die Theorien zusammen mit den ε-Morphismen bilden eine Kategorie K^ε, die ärmer als K ist.

Beweis. $\boldsymbol{Id}_T$ ist ein ε-Morphismus für jede Theorie T; sind $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ ε-Morphismen, so ist auch $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ ein ε-Morphismus.

Lemma 6. Ein Modell von T in S ist genau dann ein ε-Morphismus, wenn es eine abgeschlossene Basis n besitzt derart, daß für jede abgeschlossene T-Formel φ $S \vdash \varphi \equiv \varphi^n$ ist.

Wir werden in diesem Paragraphen voraussetzen, daß jedes Modell, mit dem wir arbeiten, abgeschlossene Formeln in abgeschlossene Formeln abbildet (das kann man auf Grund der Beh. 3); dann ist die Restriktion auf abgeschlossene Formeln eine dem Modell zugehörige abgeschlossene Basis, die wir mit demselben Buchstaben bezeichnen wie das Modell.

Lemma 7. Ein Modell $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn $\boldsymbol{m}$ eine eineindeutige Abbildung ist in dem Sinne, daß für beliebige T-Formeln φ, ψ $\varphi \vdash\dashv_T \psi$ genau dann gilt, wenn $\varphi^m \vdash\dashv_S \psi^m$ gilt.

Beweis. (1) Sei $\boldsymbol{m}$ eineindeutig, seien $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ Modelle von U in T, sei $\boldsymbol{n}_1 * \boldsymbol{m}$ gleich $\boldsymbol{n}_2 * \boldsymbol{m}$. Sei φ eine U-Formel. Dann ist $(\varphi^{n_1})^m \vdash\dashv_S (\varphi^{n_2})^m$, also $\varphi^{n_1} \vdash\dashv_T \varphi^{n_2}$; $\boldsymbol{n}_1$ ist gleich $\boldsymbol{n}_2$. (2) Umgekehrt sei $\boldsymbol{m}$ ein Monomorphismus und seien φ, ψ T-Formeln derart, daß $\varphi^m \vdash\dashv_S \psi^m$. Sei T_0 eine Theorie mit folgenden Eigenschaften: es gibt eine T-Formel ω_0 derart, daß ω_0 in T unabhängig ist (weder beweisbar noch widerlegbar) und daß jede T-Formel entweder beweisbar oder widerlegbar oder äquivalent ω_0 oder äquivalent $\neg\,\omega_0$ ist[3]. Die Modelle $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ von T_0 in T sind folgenderweise definiert: ist $T \vdash \omega \equiv (\omega_0 \vee \neg\,\omega_0)$, dann ist $\omega^{n_1} = \omega^{n_2} = (\varphi \vee \neg\,\varphi)$; ist $T \vdash \omega \equiv (\omega_0 \,\&\, \neg\,\omega_0)$, dann ist $\omega^{n_1} = \omega^{n_2} = (\varphi \,\&\, \neg\,\varphi)$; ist $T \vdash \omega \equiv \neg\,\omega_0$, dann ist $\omega^{n_1} = \omega^{n_2} = (\varphi \,\&\, \neg\,\varphi)$; ist $T \vdash \omega \equiv \omega_0$, dann ist $\omega^{n_1} = \varphi$, $\omega^{n_2} = \psi$. $\boldsymbol{n}_1$ und $\boldsymbol{n}_2$ sind Modelle von T_0 in T nach der Beh. 3. Offenbar sind die Bedingungen (a) bis (c) erfüllt, es bleibt (d) zu verifizieren. Man hat zu zeigen, daß $(\omega_1 \,\&\, \omega_2)^{n_i} \dashv\vdash_T \omega_1^{n_i} \,\&\, \omega_2^{n_i}$ (für beliebige T-Formeln ω_1, ω_2) ist. Ist eine der Formeln ω_1, ω_2 entweder mit $(\omega_0 \vee \neg\,\omega_0)$ oder mit $(\omega_0 \,\&\, \neg\,\omega_0)$ äquivalent oder sind ω_1, ω_2 einander äquivalent, so erfüllen sie die Bedingung. Es bleibt also der Fall, daß ω_1 mit ω_0 und ω_2 mit $\neg\,\omega_0$ äquivalent ist. Dann ist $(\omega_1 \,\&\, \omega_2)^{n_i} = (\varphi \,\&\, \neg\,\varphi)$ und $\omega_1^{n_i} \,\&\, \omega_2^{n_i} = \omega_1^{n_i} \,\&\, (\varphi \,\&\, \neg\,\varphi)$, so daß auch dann die Bedingung erfüllt ist. $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ sind Modelle von T_0 in T. Offenbar ist $\boldsymbol{n}_1 * \boldsymbol{m}$ gleich $\boldsymbol{n}_2 * \boldsymbol{m}$; $\boldsymbol{n}_1$ ist also gleich $\boldsymbol{n}_2$ (nach der Voraussetzung, daß $\boldsymbol{m}$ ein Monomorphismus ist), d.h. $\omega_0^{n_1} \dashv\vdash_T \omega_0^{n_2}$, also $\varphi \dashv\vdash_T \psi$.

Lemma 8. Ein ε-Morphismus $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn $\boldsymbol{m}$ eine Abbildung auf alle S-Formeln ist in dem Sinne, daß es für jede S-Formel ψ eine T-Formel φ gibt mit $\psi \dashv\vdash_S \varphi^m$.

Beweis. Wie üblich zeigt man, daß ein beliebiges Modell, das eine Abbildung auf alle S-Formeln ist, ein Epimorphismus ist. Es sei also $\boldsymbol{m} : T \to S$ ein ε-Morphismus und dazu ein Epimorphismus. Jede T-Formel ist eine S-Formel, die Sprache von T ist also eine Untersprache der Sprache von S. Es sei S_1 die Theorie, deren Sprache aus der Sprache von S so entsteht, daß man jedes Symbol, das nicht in der Sprache von T vorkommt, dupliziert, und deren Axiome aus den Axiomen von S durch die evidente Duplikation entstehen. Zu jeder S-Formel ψ hat man also ihr erstes und zweites Exemplar, wobei diese Exemplare übereinstimmen (graphisch gleich sind), wenn ψ eine T-Formel ist[4]. Die Abbildungen n_1, n_2 bilden jede S-Formel auf ihr erstes bzw. zweites Exemplar. Offenbar sind $\boldsymbol{n}_i = \langle S, n_i, S_1\rangle$ Modelle von S in S_1 ($i = 1, 2$) und $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}_1$ ist gleich $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}_2$. Sei jetzt ψ eine (abgeschlossene) S-Formel; da $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ gleich sein müssen, ($\boldsymbol{m}$ ist ein Epimorphismus!) ist $\psi^1 \dashv\vdash_{S_1} \psi^2$, also $S_1 \vdash \psi^1 \equiv \psi^2$. Es gibt also eine endliche Menge Γ von S-Formeln derart, daß $\Gamma^1, \Gamma^2 \vdash \psi^1 \equiv \psi^2$ (Γ^1 sind die ersten, Γ^2 die zweiten Exemplare der Formeln in Γ). Es folgt $\vdash (\Gamma^1 \,\&\, \psi^1) \to (\Gamma^2 \to \psi^2)$. Nach dem Craigschen Interpolationslemma (s. z. B. [2]) gibt es also eine Interpolationsformel ω, die nur gemeinsame Symbole der beiden Glieder der letzten Implikation enthält und für die $\vdash (\Gamma^1 \,\&\, \psi^1) \to \omega \to (\Gamma^2 \to \psi^2)$ ist. Wenn man hier die ersten und zweiten Exemplare der S-Formeln wieder identifiziert, bekommt man $\vdash (\Gamma \,\&\, \psi) \to \omega \to (\Gamma \to \psi)$,

[3] In K_0: Die Theorie, deren Sprache eine einzige Aussagenvariable enthält und die keine speziellen Axiome hat. In K_1: Die Theorie mit einem einzigen Prädikat P und mit dem speziellen Axiom $(\forall x)\, P(x) \equiv (\exists x)\, P(x)$. (Jede unabhängige Formel ist entweder $P(x)$ oder $\neg\, P(x)$ äquivalent).

[4] Besteht z. B. die Sprache von T aus einem einzigen zweistelligen Prädikat P und die Sprache von S aus P, Q, wo Q ein einstelliges Prädikat ist, dann besteht die Sprache von S_1 aus P, Q^1, Q^2, wo Q^1, Q^2 zwei verschiedene einstellige Prädikate sind. Von der Formel $(\exists x)\,(Q(x) \,\&\, (\forall y)\, P(x, y))$ ist dann $(\exists x)\,(Q^1(x) \,\&\, (\forall y)\, P(x, y))$ das erste und $(\exists x)\,(Q^2(x) \,\&\, (\exists y)\, P(x, y))$ das zweite Exemplar.

also $\Gamma \vdash \psi \equiv \omega$; da aber Γ eine Menge von S-Formeln ist, gilt $S \vdash \psi \equiv \omega$, also $\psi \dashv\vdash_S \omega$. Dabei ist ω eine T-Formel. $\boldsymbol{m}$ ist also eine Abbildung auf alle S-Formeln.

Bemerkung zur konstruktiven Auffassung. Die Gleichheit von zwei Modellen $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ bedeutet die Existenz eines Algorithmus, der jeder Formel φ zwei Beweise zuordnet: den von φ^n in S, φ^m und den von φ^m in S, φ^n; wir nennen ihn einen Gleichheitsalgorithmus. „$\boldsymbol{m}$ ist ein Epimorphismus" bedeutet: es gibt einen Algorithmus, der beliebigen Modellen $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ und einem beliebigen Gleichheitsalgorithmus für $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}_1$ und $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}_2$ einen Gleichheitsalgorithmus für $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ zuordnet. Unter der Voraussetzung, daß ein ε-Morphismus ein Epimorphismus ist, können wir zu jeder S-Formel φ die ihr äquivalente T-Formel ω wirklich konstruieren, weil es konstruktive Beweise des Interpolationslemmas gibt.

Behauptung 7. ($\varepsilon 1$) Zu jedem T gibt es einen ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e}: T \to F$, wo F eine widerspruchsvolle Theorie ist.

Beweis. Sei φ eine T-Formel, sei F die Theorie T, φ, $\neg\, \varphi$, sei $\boldsymbol{e} = \langle T, Id_T, F\rangle$. F ist widerspruchsvoll und $\boldsymbol{e}$ ist ein ε-Epimorphismus.

Behauptung 8. ($\varepsilon 2$) Ist ein ε-Morphismus ein Bimorphismus, so ist er ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $\boldsymbol{m}: T \to S$ ein ε-Bimorphismus. Dann ist $\boldsymbol{m}$ eine eineindeutige Abbildung von T-Formeln auf alle S-Formeln (im oben angeführten Sinne); zu jeder abgeschlossenen S-Formel ψ kann also eine abgeschlossene T-Formel ψ^n gefunden werden mit $S \vdash \psi \equiv \psi^n$. Wir zeigen, daß n Basis eines Modells von S in T ist. Dazu zeigen wir zuerst, daß für eine beliebige T-Formel φ aus $S \vdash \varphi$ $T \vdash \varphi$ folgt. Aus $S \vdash \varphi$ folgt $S \vdash \varphi^m$ (weil $\varphi^m \dashv\vdash_S \varphi$), also $\varphi^m \dashv\vdash_S (\varphi \vee \neg\, \varphi)^m$; da m eineindeutig ist, muß $\varphi \dashv\vdash_T \varphi \vee \neg\, \varphi$, also $T \vdash \varphi$ sein. (a) Ist $S \vdash \psi$, dann $S \vdash \psi^n$, also $T \vdash \psi^n$. (b) Ist $S \vdash \neg\, \psi$, dann $S \vdash \neg\, (\psi^n)$ (aus $S \vdash \psi \equiv \psi^n$), also $T \vdash \neg(\psi^n)$. (c) Ist $S \vdash \psi_1 \equiv \psi_2$, dann $S \vdash \psi_1^n \equiv \psi_2^n$, also $T \vdash \psi_1^n \equiv \psi_2^n$. (d) Es ist $S \vdash \psi_i \equiv$ $\equiv \psi_i^n$ $(i = 1, 2)$, also $S \vdash \psi_1 \,\&\, \psi_2 \equiv \psi_1^n \,\&\, \psi_2^n$; dabei ist $S \vdash (\psi_1 \,\&\, \psi_2) \equiv (\psi_1 \,\&\, \psi_2)^n$, also $S \vdash (\psi_1 \,\&\, \psi_2)^n \equiv \psi_1^n \,\&\, \psi_2^n$; es folgt $T \vdash (\psi_1 \,\&\, \psi_2)^n \equiv \psi_1^n \,\&\, \psi_2^n$. n ist eine abgeschlossene Basis; sei $\boldsymbol{n}$ das zugehörige Modell. Wir zeigen, daß $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ gleich $\boldsymbol{Id}_T$ und $\boldsymbol{n} * \boldsymbol{m}$ gleich $\boldsymbol{Id}_S$ ist. Für jede S-Formel ψ haben wir $\psi \dashv\vdash_S \psi^n$. Sei φ eine T-Formel, dann ist $\varphi^m \dashv\vdash_S \varphi$, also $\varphi^{m*n} \dashv\vdash_S \varphi^n$, also $\varphi^{m*n} \dashv\vdash_T \varphi$. Sei ψ eine S-Formel, dann ist $\psi \dashv\vdash_S \psi^n$, dabei ist ψ^n eine T-Formel, also $\psi^n \dashv\vdash_S \psi^{n*m}$; es folgt $\psi \dashv\vdash_S \psi^{n*m}$. Damit ist bewiesen, daß $\boldsymbol{m}$ ein Isomorphismus ist.

Behauptung 9. ($\delta 2$) Ein Morphismus $\boldsymbol{m}: T \to S$ ist genau dann *treu*, wenn für jedes kommutative Diagramm (D7) gilt: ist $\boldsymbol{e}$ ein ε-Epimorphismus, so ist $\boldsymbol{e}$ ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} & \hat{T} \arrow[dr, "m'"] & \\ T \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "m"'] & & S \end{tikzcd} \qquad (D7)$$

Beweis. (1) Sei $S \vdash \varphi^m$, sei $\hat{T}$ die Theorie (T, φ). Dann ist $\boldsymbol{e} = \langle T, Id_T, \hat{T}\rangle$ ein ε-Epimorphismus; wenn also die kategorielle Bedingung erfüllt ist, muß $\boldsymbol{e}$ ein

Isomorphismus sein, also eineindeutig. Daraus folgt: $\hat{T} \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \dashv\vdash_{\hat{T}} \varphi \vee \neg\varphi \Rightarrow \Rightarrow \varphi \dashv\vdash_T \varphi \vee \neg\varphi$. Also ist $\boldsymbol{m}$ treu. (2) Sei umgekehrt $\boldsymbol{m}$ treu, sei $\boldsymbol{e}$ gegeben. Es genügt zu zeigen, daß $\boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus ist. Seien φ, ψ T-Formeln, für die $\varphi^e \dashv\vdash_{\hat{T}} \psi^e$, also $\varphi \dashv\vdash_{\hat{T}} \psi$ ist. Dann ist $\hat{T} \vdash (\forall\varphi) \equiv (\forall\psi)$, also $\hat{T} \vdash ((\forall\varphi) \equiv \equiv (\forall\psi))^e$; es folgt $S \vdash ((\forall\varphi) \equiv (\forall\psi))^{e * m'}$, und da $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{m}'$ gleich $\boldsymbol{m}$ und $\boldsymbol{m}$ treu ist, haben wir $T \vdash (\forall\varphi) \equiv (\forall\psi)$, also $\varphi \dashv\vdash_T \psi$. $\boldsymbol{e}$ ist also ein Isomorphismus, d.h. die kategorielle Bedingung ist erfüllt.

Behauptung 10. (ε3). (1) Zu jedem Morphismus $\boldsymbol{m}$ gibt es einem ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e}$ und einen treuen Morphismus $\boldsymbol{n}$ derart, daß $\boldsymbol{m}$ gleich $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n}$ ist. (2) Sind $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ ε-Epimorphismen, ist $\boldsymbol{n}$ treu und $\boldsymbol{n}'$ beliebig und sind $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{e}' * \boldsymbol{n}'$ gleich, dann gibt es einen Epimorphismus $\boldsymbol{p}$ derart, daß $\boldsymbol{e}$ gleich $\boldsymbol{e}' * \boldsymbol{p}$ ist. (3) Ist $\boldsymbol{m}$ ein ε-Morphismus, $\boldsymbol{e}$ ein ε-Epimorphismus, $\boldsymbol{n}$ treu und sind $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n}$ gleich, dann ist $\boldsymbol{n}$ ein Monomorphismus.

Beweis. Sei $\boldsymbol{m} : T \to S$ beliebig. Erstens konstruieren wir eine Theorie $\hat{T}$ mit derselben Sprache wie T, in der eine beliebige T-Formel φ genau dann beweisbar ist, wenn $S \vdash \varphi^m$. Dazu sei für jede natürliche Zahl $\mathrm{n} > 0$ $\mathrm{n} \times \varphi$ die Formel $\varphi \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi$ (n-mal); $\mathrm{n} \times \varphi$ ist ein Axiom von $\hat{T}$ genau dann, wenn es einen Beweis von φ^m in S der Länge n gibt. Damit ist die Axiomatik von $\hat{T}$ definiert und $\hat{T}$ hat offenbar die gewünschten Eigenschaften. (Wir haben hier einen Resultat von Craig benutzt, vgl. [1] 4.13.) Sei $\boldsymbol{e}$ das Modell $\langle T, Id_T, \hat{T}\rangle$; $\boldsymbol{e}$ ist ein ε-Epimorphismus. Dabei ist $\langle \hat{T}, m, S\rangle$ ein Modell, das mit $\boldsymbol{n}$ bezeichnet sei. Offenbar ist $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n}$ gleich $\boldsymbol{m}$ und es ist klar, daß $\boldsymbol{n}$ treu ist. Damit ist (1) bewiesen. Wir beweisen jetzt (3). Wenn $\boldsymbol{m}$ ein ε-Morphismus (von T in S), $\boldsymbol{e} : T \to T'$ ein ε-Epimorphismus, $\boldsymbol{n}$ treu und $\boldsymbol{m}$ gleich $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n}$ ist, dann ist $\boldsymbol{m}$ gleich $\langle T, Id_T, S\rangle$ und wir haben $T' \vdash \varphi$ genau dann, wenn $S \vdash \varphi$ (für jede T-Formel φ). Ist $\varphi \dashv\vdash_S \psi$, dann ist $S \vdash (\forall\varphi) \equiv (\forall\psi)$, also $T' \vdash (\forall\varphi) \equiv (\forall\psi)$, also $\varphi \dashv\vdash_{T'} \psi$; $\boldsymbol{n}$ ist eineindeutig und deshalb ein Monomorphismus. Es bleibt (2) zu beweisen. Es seien $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ Morphismen mit den oben angeführten Eigenschaften, sei $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n}$ gleich $\boldsymbol{m}$. $\boldsymbol{e}$ sei $\langle T, Id_T, T'\rangle$ und $\boldsymbol{e}'$ sei $\langle T, Id_T, T''\rangle$. $\boldsymbol{e}' * \boldsymbol{n}'$ ist gleich $\boldsymbol{m}$ und jede T''-Formel φ ist einer T-Formel in T'' deduktionsgleich. Ferner gilt: ist φ eine T-Formel und $T'' \vdash \varphi$, dann $T' \vdash \varphi$. Es ist nämlich $\varphi \dashv\vdash_{T''} \varphi^{e'}$; wenn $T'' \vdash \varphi^{e'}$, dann $S \vdash \varphi^{e' * n}$, also $S \vdash \varphi^m$, also $T' \vdash \varphi$. Wenn nun p eine Abbildung ist, die jeder abgeschlossenen T''-Formel eine ihr in T'' äquivalente abgeschlossene T-Formel zuordnet, so ist p abgeschlossene Basis eines Modells von T'' in T'. Wir verifizieren die Bedingungen (a) bis (d) aus der Beh. 3. (a) Ist $T'' \vdash \psi$, dann $T'' \vdash \psi^p$, also $T' \vdash \psi^p$ (ψ^p ist eine T-Formel). (b) Ist $T \vdash \neg\psi$, dann $T'' \vdash \neg(\psi^p)$ (weil $T'' \vdash \psi \equiv \psi^p$), also $T' \vdash \neg(\psi^p)$. (c) Ist $T'' \vdash \psi_1 \equiv \psi_2$, dann $T'' \vdash \psi_1^p \equiv \psi_2^p$, also $T' \vdash \psi_1^p \equiv \psi_2^p$. (d) Wir haben $T'' \vdash (\psi_1^p \,\&\, \psi_2^p) \equiv (\psi_1 \,\&\, \psi_2)$ und auch $T'' \vdash (\psi_1 \,\&\, \psi_2)^p \equiv (\psi_1 \,\&\, \psi_2)$, also $T'' \vdash \vdash (\psi_1 \,\&\, \psi_2)^p \equiv (\psi_1^p \,\&\, \psi_2^p)$, wobei die letzte Äquivalenz eine T-Formel ist; es folgt $T' \vdash (\psi_1 \,\&\, \psi_2)^p \equiv (\psi_1^p \,\&\, \psi_2^p)$. p ist eine Basis. Sei $\boldsymbol{p}$ das durch p bestimmte Modell von T'' in T'. $\boldsymbol{e}$ ist gleich $\boldsymbol{e}' * \boldsymbol{p}$; wenn nämlich φ eine abgeschlossene T-Formel ist, dann ist $T'' \vdash \varphi^{e'} \equiv \varphi$, also $T'' \vdash \varphi^{e' * p} \equiv \varphi$, also $T' \vdash \varphi^{e' * p} \equiv \varphi$; aus $T' \vdash \varphi^e \equiv \varphi$ folgt $T' \vdash \varphi^e \equiv \varphi^{e' * p}$. Da $\boldsymbol{e}$ ein Epimorphismus ist und $\boldsymbol{e}$ gleich $\boldsymbol{e}' * \boldsymbol{p}$ ist, ist auch $\boldsymbol{e}'$ ein Epimorphismus. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Folgerung 2. Zu jedem ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e} : T \to S$ gibt es ε-Morphismen $\boldsymbol{e}_1 : T \to \hat{T}$, $\boldsymbol{e}_2 : \hat{T} \to S$ derart, daß $\boldsymbol{e}$ gleich $\boldsymbol{e}_1 * \boldsymbol{e}_2$ ist, T und $\hat{T}$ dieselbe Sprache haben, $\boldsymbol{e}_1$ ein Epimorphismus und $\boldsymbol{e}_2$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Wenn man im vorangehenden Beweis (1), (3) statt m e, statt e e_1 und statt n e_2 schreibt, so weiß man sofort: T und $\hat{T}$ haben dieselbe Sprache, $\boldsymbol{e}_1$ ist ein ε-Epimorphismus, $\boldsymbol{e}_2$ ist ein Bimorphismus und $\boldsymbol{e}$ ist gleich $\boldsymbol{e}_1 * \boldsymbol{e}_2$. Es genügt zu zeigen, daß $\boldsymbol{e}_2$ ein ε-Morphismus ist. (Dann s. Beh. 8.) Das ist aber der Fall, weil $\boldsymbol{e}$ gleich $\langle T, Id_T, S\rangle$ und $\boldsymbol{e}_2$ gleich $\langle \hat{T}, Id_T, S\rangle$, also gleich $\langle \hat{T}, Id_{\hat{T}}, S\rangle$ ist.

Behauptung 11. ($\varepsilon 4$) Sei $\boldsymbol{m} : T \to S$ ein beliebiger Morphismus und sei $\boldsymbol{e} : T \to \hat{T}$ ein ε-Epimorphismus. Dann gibt es einen Morphismus $\hat{\boldsymbol{m}} : \hat{T} \to \hat{S}$ und einen ε-Epimorphismus $\hat{\boldsymbol{e}} : S \to \hat{S}$ derart, daß das Diagramm (D8) ein pushout ist.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\hat{m}"] & {} \\ {} \arrow[u, "e"] \arrow[r, "m"'] & {} \arrow[u, "\hat{e}"'] \end{tikzcd} \quad (D8) \qquad\qquad \begin{tikzcd} & & {} \\ {} \arrow[r, "\hat{m}"'] \arrow[urr, "p_2"] & {} & \\ {} \arrow[u, "e"] \arrow[r, "m"'] & {} \arrow[u, "e"'] \arrow[uur, "p_1"'] & \end{tikzcd} \quad (D9)$$

Beweis. Sei $\boldsymbol{m} = \langle T, m, S\rangle$, $\boldsymbol{e} = \langle T, Id_T, \hat{T}\rangle$. Wir können nach der Folgerung 2 und nach § 3 (h) voraussetzen, daß T und $\hat{T}$ dieselbe Sprache haben. Weiter können wir voraussetzen, daß m abgeschlossene Formeln in abgeschlossene Formel abbildet. $\hat{S}$ ist folgenderweise definiert: sie hat dieselbe Sprache, wie S, und die Axiome sind (a) alle Axiome von S und (b) die Formel φ^m für jedes Axiom φ von $\hat{T}$. $\hat{\boldsymbol{e}}$ ist $\langle S, Id_S, \hat{S}\rangle$; offenbar ist $\boldsymbol{e}$ ein Epimorphismus. Ferner sei $\hat{\boldsymbol{m}} = \langle \hat{T}, m, \hat{S}\rangle$. $\hat{\boldsymbol{m}}$ ist ein Modell von T in S nach der Beh. 1 (1). $\boldsymbol{m} * \hat{\boldsymbol{e}}$ ist gleich $\boldsymbol{e} * \hat{\boldsymbol{m}}$, weil $\varphi^{\boldsymbol{m} * \hat{\boldsymbol{e}}}$ und $\varphi^{\boldsymbol{e} * \hat{\boldsymbol{m}}}$ eine und dieselbe Formel ist (für jede T-Formel φ). Sei nun das Diagramm (D9) kommutativ, sei $\boldsymbol{p}_1 = \langle S, p_1, U\rangle$. Wir zeigen, daß $\langle \hat{S}, p_1, U\rangle$ ein Modell ist. Es genügt zu zeigen, daß für jedes Axiom ψ von $\hat{S}$ $U \vdash \psi^{p_1}$ ist. Sei also φ ein Axiom von $\hat{T}$, dann ist φ^m ein Axiom von $\hat{S}$. Da $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{p}_1$ gleich $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{p}_2$ ist, haben wir $(\varphi^m)^{p_1} \vdash\dashv_U \varphi^{p_2}$ und aus $\hat{T} \vdash \varphi$ folgt $U \vdash \varphi^{p_2}$. $(\varphi^m)^{p_1}$ ist also in U beweisbar und deswegen ist $\boldsymbol{q} = \langle S, p_1, U\rangle$ ein Modell von S in U; ferner ist $\hat{\boldsymbol{e}} * \boldsymbol{q}$ gleich $\boldsymbol{p}_1$. $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{p}_2$ ist gleich $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{p}_1$ gleich $\boldsymbol{m} * \hat{\boldsymbol{e}} * \boldsymbol{q}$ gleich $\boldsymbol{e} * \hat{\boldsymbol{m}} * \boldsymbol{q}$; da $\boldsymbol{e}$ ein Epimorphismus ist, folgt, daß $\boldsymbol{p}_2$ gleich $\hat{\boldsymbol{m}} * \boldsymbol{q}$ ist. Ist $\hat{\boldsymbol{q}}$ ein anderer Morphismus derart, daß $\boldsymbol{p}_1$ gleich $\hat{\boldsymbol{e}} * \hat{\boldsymbol{q}}$ und $\boldsymbol{p}_2$ gleich $\hat{\boldsymbol{m}} * \hat{\boldsymbol{q}}$ ist, dann ist $\hat{\boldsymbol{e}} * \boldsymbol{q}$ gleich $\hat{\boldsymbol{e}} * \hat{\boldsymbol{q}}$, und da $\hat{\boldsymbol{e}}$ ein Epimorphismus ist, ist $\boldsymbol{q}$ gleich $\hat{\boldsymbol{q}}$. Das Diagramm (D8) ist also ein pushout.

Behauptung 12. ($\delta 3$) $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist *wesentlich treu* genau dann, wenn für jeden ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e}$ im damit bestimmten pushout (D8) $\hat{\boldsymbol{m}}$ treu ist.

Beweis. (1) Sei die kategorielle Bedingung erfüllt, sei Γ eine Menge von T-Formeln, sei $\hat{T}$ die Theorie (T, Γ) und sei $\boldsymbol{e} = \langle T, Id_T, \hat{T}\rangle$. Dann ist $\boldsymbol{e}$ ein ε-Epimorphismus; wenn wir die Theorie $\hat{S}$ und die Morphismen $\hat{\boldsymbol{m}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}$ wie oben definieren, so bilden diese Morphismen einen pushout (D8). Es folgt, daß $\hat{\boldsymbol{m}}$ treu ist; $\boldsymbol{m}$ ist also wesentlich treu. (2) Sei $\boldsymbol{m}$ wesentlich treu, sei der pushout (D8) gegeben. Nach der Folgerung 2 und nach § 3 (h) können wir voraussetzen, daß T und $\hat{T}$ dieselbe Sprache haben; dann ist $\hat{\boldsymbol{m}}$ gleich $\langle \hat{T}, m, \hat{S}\rangle$. Nimmt man für Γ die Menge aller Axiome von $\hat{T}$, sieht man aus der Definition der wesentlichen Treue, daß $\hat{\boldsymbol{m}}$ treu ist. Die kategorielle Bedingung ist also erfüllt.

Behauptung 13. $(\varepsilon 5)$ Ein beliebiger Morphismus ist genau dann wesentlich treu, wenn er ein Monomorphismus ist.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß ein beliebiges Modell genau dann wesentlich treu ist, wenn es eineindeutig ist (vgl. Lemma 7). (1) Sei $\boldsymbol{m} : T \to S$ wesentlich treu; sei $\varphi^m \dashv\vdash_S \psi^m$. Dann ist $S, \varphi^m \vdash \psi^m$, also $T, \varphi \vdash \psi$, genauso ist $T, \psi \vdash \varphi$, also $\varphi \dashv\vdash_T \psi$; m ist eineindeutig. (2) Sei $\boldsymbol{m} : T \to S$ eineindeutig, sei Γ eine Menge von T-Formeln, sei $\boldsymbol{m} = \langle (T, \Gamma), m, (S, \Gamma^m) \rangle$. Sei φ eine beliebige T-Formel und sei $S, \Gamma^m \vdash \varphi^m$. Es gibt eine endliche Untermenge von Γ, sagen wir $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ derart, daß $S, \varphi_1^m, \ldots, \varphi_n^m \vdash \varphi^m$. Sei ψ die Konjunktion $\varphi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_n$; es folgt, daß $\psi^m \dashv\vdash_S \psi^m \,\&\, \varphi^m$, also $\psi \dashv\vdash_T \psi \,\&\, \varphi$ ist; das heißt $T, \psi \vdash \varphi$, also $T, \Gamma \vdash \varphi$.

In der Analogie zur Beh. 12 definieren wir:

Definition 8. $(\delta 4)$ $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist ein *wesentlicher Monomorphismus*, wenn für jeden ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e}$ im zugehörigen pushout (D8) $\hat{\boldsymbol{m}}$ ein Monomorphismus ist.

Definition 9. *(Logische Kategorien.)* Sei K eine Kategorie, K^ε eine Kategorie ärmer als K; die Morphismen von K^ε sollen ε-*Morphismen* heißen. Statt „Nullobjekt" sagen wir – laut $(\delta 1)$ – „*widerspruchsvolles Objekt*" (statt „Objekt" sagen wir auch „*Theorie*"). Das Paar $(\mathsf{K}, \mathsf{K}^\varepsilon)$ ist eine *logische Kategorie*, wenn die Axiome $(\varepsilon 0)$ bis $(\varepsilon 5)$ erfüllt sind; dabei sind die Begriffe „*treu*" und *wesentlich treu*" durch $(\delta 2)$ und $(\delta 3)$ definiert. In jeder logischen Kategorie ist der Begriff eines *wesentlichen Monomorphismus* durch $(\delta 4)$ definiert.

Wir wollen jetzt bestimmte Sätze für beliebige logische Kategorien ableiten; sie werden also auch für unsere Kategorien K_0, K_1 gelten. Man kann die folgenden Sätze für die Kategorien K_0, K_1 leicht auch ohne kategorielles Apparat beweisen; es ist aber vielleicht vom bestimmten Interesse, daß sie schon aus den Axiomen der logischen Kategorien folgen. Übrigens werden wir noch in K_0, K_1 ε-Morphismen auf eine andere Weise definieren; ferner werden wir eine algebraisch definierte logische Kategorie untersuchen.

Satz 1. Ein Morphismus $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist genau dann treu, wenn folgendes für jeden ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e} : T \to \hat{T}$ gilt: ist im zugehörigen pushout (D8) $\hat{\boldsymbol{e}}$ ein Monomorphismus, dann ist auch $\boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend: Die Kommutativität von (D7) (wo $\boldsymbol{e}$ ein Epimorphismus ist), bedeutet nach § 3 (i), daß (D10) ein Pushout ist, wo doppelter

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "n"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "e"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, equal] \end{tikzcd} \quad (D10) \qquad \begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "e^{-1}"] & & \\ \cdot \arrow[ur, "e"] \arrow[rrr, "m"'] & & \cdot \arrow[r, "m"] & \cdot \end{tikzcd} \quad (D11) \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "e"] \arrow[r, "m * n"'] & \cdot \arrow[u, "e"'] \end{tikzcd} \quad (D12)$$

Pfeil Identität bedeutet. Die Identität ist ein Monomorphismus, es muß also $\boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus und nach $(\varepsilon 2)$ ein Isomorphismus sein. Die Bedingung ist auch notwendig: ist $\boldsymbol{m}$ treu und ist in (D8) $\hat{\boldsymbol{e}}$ ein Monomorphismus, so ist $\hat{\boldsymbol{e}}$ ein Isomorphismus nach $(\varepsilon 2)$ (s. § 3 (g)) und (D11) ist kommutativ; $\boldsymbol{e}$ muß also ein Monomorphismus sein (s. $(\delta 2)$).

Satz 2. (1) Sind $\boldsymbol{m} : T \to S$ und $\boldsymbol{n} : S \to U$ treu, so ist auch $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ treu. (2) Ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ treu, so ist $\boldsymbol{m}$ treu.

Beweis. (1) Sei $\boldsymbol{e} : T \to \hat{T}$ gegeben, $\boldsymbol{e}$ ein ε-Epimorphismus; sei im pushout (D12) $\hat{\boldsymbol{e}}$ ein Isomorphismus. Sind in (D13) die Quadrate pushouts (sie existieren nach (ε4)), dann ist auch das große Rechteck ein pushout und deswegen gibt es (s. § 3 (e)) einen Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ mit $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{e}_2$ ist also ein Monomorphismus, aus der

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & {} \arrow[r] & {} \\ {} \arrow[u, "e"] \arrow[r] & {} \arrow[u, "e_1"] \arrow[r] & {} \arrow[u, "e_2"] \end{tikzcd} \qquad (D13)$$

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[r, "m"] & {} \arrow[dr, "n"] & \\ {} \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "m"'] & & {} \arrow[r, "n"'] & {} \end{tikzcd} \qquad (D14)$$

Treue von $\boldsymbol{n}$ folgt, daß $\boldsymbol{e}_1$ ein Monomorphismus ist und aus der Treue von $\boldsymbol{m}$ folgt, daß $\boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus ist (nach dem Satz 1). (2) Ist (D7) kommutativ, so ist (D14) kommutativ und aus der Treue von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ folgt, daß $\boldsymbol{e}$ ein Isomorphismus ist.

Satz 3. (1) Jeder Monomorphismus ist treu. (2) Ist ein ε-Morphismus treu, so ist er ein Monomorphismus.

Beweis. (1) Ist $\boldsymbol{e} * \hat{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m}$ und ist $\boldsymbol{m}$ ein Monomorphismus, dann ist $\boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus; ist dabei $\boldsymbol{e}$ ein ε-Epimorphismus, dann ist $\boldsymbol{e}$ ein Isomorphismus. (2) Sei $\boldsymbol{e}$ ein ε-Morphismus, sei $\boldsymbol{e}$ treu. Nach (ε3) gibt es ε-Morphismen $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ derart, daß $\boldsymbol{e}_1$ ein Epi-, $\boldsymbol{e}_2$ ein Monomorphismus ist und $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1 * \boldsymbol{e}_2$. Da $\boldsymbol{m}$ treu ist, muß $\boldsymbol{e}_1$ ein Isomorphismus sein. Dann ist $\boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus.

Satz 4. $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist genau dann treu, wenn für jedes kommutative Diagramm (D7), wo $\boldsymbol{e}$ ein beliebiger ε-Morphismus ist, $\boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus ist.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Ist in (D7) $\boldsymbol{e}$ ein ε-Epimorphismus, so ist es ein Isomorphismus, weil es nach der Bedingung ein Monomorphismus sein muß. Umgekehrt sei $\boldsymbol{m}$ treu, sei (D7) kommutativ. Dann ist $\boldsymbol{e}$ treu (Satz 2) und deshalb ein Monomorphismus (Satz 3).

Satz 5. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent: (a) $\boldsymbol{m}$ ist ein Monomorphismus, (b) $\boldsymbol{m}$ ist wesentlich treu, (c) $\boldsymbol{m}$ ist ein wesentlicher Monomorphismus.

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) ist durch (ε5) gesichert. (c) $\Rightarrow$ (a) ist evident. Umgekehrt sei $\boldsymbol{m}$ ein Monomorphismus, sei (D15) ein pushout; um zu zeigen, daß $\boldsymbol{m}$ ein wesentlicher Monomorphismus ist, genügt es zu zeigen, daß $\hat{\boldsymbol{m}}$ wesentlich treu ist. Sei also $\boldsymbol{e}' : T^1 \to T^2$ ein ε-Epimorphismus; wir betrachten (D16), wo die

$$\begin{tikzcd} T^1 \arrow[r, "\hat{m}"] & {} \\ T \arrow[u, "e"] \arrow[r, "m"'] & {} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad (D\,15)$$

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "\hat{m}"] & {} \\ T^1 \arrow[u, "e'"] \arrow[r, "\hat{m}"] & {} \arrow[u] \\ T \arrow[u, "e"] \arrow[r, "m"'] & {} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad (D16)$$

Quadrate pushouts sind. Dann ist das große Rechteck ein pushout, $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{e}'$ ist ein ε-Epimorphismus und $\boldsymbol{m}$ ist wesentlich treu; deshalb ist $\hat{\boldsymbol{m}}$ treu, also $\hat{\boldsymbol{m}}$ wesentlich treu, also ein Monomorphismus; $\boldsymbol{m}$ ist ein wesentlicher Monomorphismus.
Wir werden noch sehen, daß es Morphismen geben kann, die keine Monomorphismen sind aber doch treu sind. Eine schwächere Folgerung läßt sich aber aus der Treue doch ziehen:
Satz 6. Sei $\boldsymbol{m} : T \to S$ treu, sei $\boldsymbol{n}_1 * \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}_2 * \boldsymbol{m}$; sei $\boldsymbol{e} : U \to U'$ ein ε-Epimorphismus. Sei (D17) ein pushout für $i = 1, 2$. Dann ist $\boldsymbol{e}_1$ ein Isomorphismus genau dann, wenn $\boldsymbol{e}_2$ ein Isomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] & T^i \\ U \arrow[u, "e"] \arrow[r, "n_i"'] & T \arrow[u, "e_i"'] \end{tikzcd} \quad (D17) \qquad \begin{tikzcd} U' \arrow[r] & T^i \arrow[r] & S^i \\ U \arrow[u, "e"] \arrow[r, "n_i"'] & T \arrow[u, "e_i"'] \arrow[r, "m"'] & S \arrow[u, "\hat{e}_i"'] \end{tikzcd} \quad (D18)$$

Beweis. Sei $\boldsymbol{e}_1$ ein Isomorphismus, sei in (D18) für $i = 1$ das rechte Quadrat ein pushout. Dann ist $\widehat{\boldsymbol{e}}_1$ ein Isomorphismus (§ 3 (g)) und das große Rechteck ist ein pushout zu $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}_1 * \boldsymbol{m}$. Genauso ist für $i = 2$ das große Rechteck in (D18) ein pushout (falls die Quadrate pushouts sind) und deshalb gibt es einen Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ mit $\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 * \boldsymbol{i}$ (§ 3 (e)). $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ ist also ein Isomorphismus und da $\boldsymbol{m}$ treu ist, muß nach dem Satz 1 $\boldsymbol{e}_2$ auch ein Isomorphismus sein.
Bemerkung. Das hat für unsere Kategorien K_0, K_1 die folgende Bedeutung: ist $m : T \to S$ und φ eine T-Formel, sagt man, daß φ in m gilt, wenn $S \vdash \varphi^m$. Wie sich der Leser leicht überzeugen kann, besagt der Satz 6, daß wenn $\boldsymbol{m}$ treu ist und $\boldsymbol{n}_1 * \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}_2 * \boldsymbol{m}$ gleich sind, dann in $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ dieselben Formeln gelten. (Woraus aber nicht folgt, daß $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ gleich sind).
Satz 7. (1) Ist $\boldsymbol{m} : T \to S$ beliebig und ist T widerspruchsvoll, dann ist S widerspruchsvoll. (2) Ist $\boldsymbol{m} : T \to S$ treu, dann ist T genau dann widerspruchsvoll, wenn S widerspruchsvoll ist.
Beweis. (1) Ist T widerspruchsvoll, dann ist $\boldsymbol{m}$ ein Isomorphismus nach (ε0); S ist also einem Nullobjekt isomorph und deshalb selbst ein Nullobjekt. (2) Sei $\boldsymbol{m}$ treu, sei S widerspruchsvoll. Sei nach (ε1) $\hat{T}$ ein widerspruchsvolles Objekt derart, daß es einen ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e} : T \to \hat{T}$ gibt. Sei $\boldsymbol{n} : \hat{T} \to S$ der eindeutig bestimmte Morphismus aus T in $\hat{S}$. Es ist $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{n}$ (weil S widerspruchsvoll ist), $\boldsymbol{e}$ ist also ein Isomorphismus (weil $\boldsymbol{m}$ treu ist). Da aber $\hat{T}$ widerspruchsvoll ist, ist auch T widerspruchsvoll.
Satz 8. (1) Wenn $\boldsymbol{m} : T \to S$ und $\boldsymbol{n} : S \to U$ wesentlich treu sind, dann ist auch $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ wesentlich treu. (2) Wenn $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ wesentlich treu ist, dann ist auch $\boldsymbol{m}$ wesentlich treu.
Das gilt für Monomorphismen (§ 3 (a, b)), die genau alle wesentlich treue Modelle darstellen.

Definition 10. Sei $\boldsymbol{m}$ ein Morphismus, $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{m}$ in einen ε-Epimorphismus und einen treuen Morphismus (nach (ε3)). Dann heißt $\boldsymbol{n}$ das *Quasibild* von $\boldsymbol{m}$ und $\boldsymbol{e}$ das *duale Quasibild* von $\boldsymbol{m}$.

Satz 9. Das Quasibild und das duale Quasibild ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. sind $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ zwei Quasibilder von $\boldsymbol{m}$, dann gibt es einen Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ mit $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} * \boldsymbol{n}'$; sind $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}'$ zwei duale Quasibilder von $\boldsymbol{m}$, dann gibt es einen Isomorphismus $\boldsymbol{j}$ mit $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' * \boldsymbol{j}$.

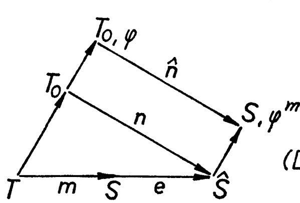
Beweis. Seien erstens $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ duale Quasibilder, dann gibt es nach (ε3) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}'$ mit $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{i}'$ und $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' * \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{i}' * \boldsymbol{i}$. Da $\boldsymbol{e}$ ein Epimorphismus ist, folgt $\boldsymbol{i}' * \boldsymbol{i} = \boldsymbol{Id}$; genauso ist $\boldsymbol{i} * \boldsymbol{i}'$ Identität, $\boldsymbol{i}$ ist also ein Isomorphismus. Sind $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ die zu $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ zugehörigen Quasibilder von $\boldsymbol{m}$, dann ist $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}' * \boldsymbol{n}' = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{i}' * \boldsymbol{n}'$, also $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}' * \boldsymbol{n}'$, wobei $\boldsymbol{i}'$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung. Das Quasibild braucht kein Monomorphismus zu sein.

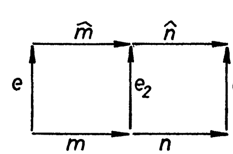
Definition 11. (δ5) $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist ein Homomorphismus, wenn für jeden ε-Epimorphismus mit dem Anfang S das Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}$ ein Monomorphismus ist.

Behauptung 14. Ein Modell $\boldsymbol{m} : T \to S$ ist genau dann homogen, wenn es ein Homomorphismus ist.

Beweis. Erstens zeigen wir, daß das Quasibild jedes homogenen Modells ein Monomorphismus ist. Sei $\boldsymbol{m}$ homogen; wir können voraussetzen, daß die Restriktion von $\boldsymbol{m}$ auf abgeschlossene Formeln eine abgeschlossene Basis ist; es gilt also $S \vdash (\neg \varphi)^m \equiv \neg (\varphi^m)$ für jede abgeschlossene T-Formel φ. Die Theorie $\hat{T}$ im Beweis der Beh. 10 hat dieselbe Sprache wie T und das Quasibild von $\boldsymbol{m}$ ist $\langle \hat{T}, m, S \rangle = \boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{n}$ ist also auch homogen. Dabei ist $\boldsymbol{n}$ treu. Es muß also gezeigt werden, daß ein homogenes treues Modell eineindeutig ist. Es seien φ, ψ abgeschlossene T-Formeln, sei $S \vdash \varphi^n \equiv \psi^n$, also $S \vdash \neg (\varphi^n \,\&\, \neg \psi^n) \,\&\, \neg (\psi^n \,\&\, \neg \varphi^n)$. Aus der Homogenität haben wir $S \vdash [\neg (\varphi \,\&\, \neg \psi) \,\&\, \neg (\psi \,\&\, \neg \varphi)]^n$, also $S \vdash (\varphi \equiv \psi)^n$. Daraus folgt $T \vdash \varphi \equiv \psi$, weil n treu ist. – Jeder ε-Morphismus ist homogen und die Komposition von zwei homogenen Modellen ist homogen; ist also im Produkt $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{e}$ ein ε-Epimorphismus, so ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}$ homogen und das Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}$ ist ein Monomorphismus; $\boldsymbol{m}$ ist ein Homomorphismus. Sei umgekehrt $\boldsymbol{m}$ ein Homomorphismus und sei φ eine abgeschlossene T-Formel. Wenn $\boldsymbol{m}$ abgeschlossene Formeln in abgeschlossene Formeln abbildet (was vorausgesetzt werden kann), so ist $S \vdash (\neg \varphi)^m \to \neg (\varphi^m)$. Es bleibt also die Beweisbarkeit der umgekehrten Implikation zu zeigen. Sei $\hat{S}$ die Theorie $S, \neg (\varphi^m)$, $\neg (\neg \varphi)^m$, sei $\boldsymbol{e} = \langle S, Id_S, \hat{S} \rangle$. $\boldsymbol{e}$ ist ein ε-Epimorphismus. Sei $\boldsymbol{n}$ das Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}$; $\boldsymbol{n}$ ist ein Monomorphismus und deshalb wesentlich treu. Wir bezeichnen den Anfang von $\boldsymbol{n}$ mit T_0. ($\boldsymbol{n}$ ist $\langle T_0, m, \hat{S} \rangle$). Sei $\hat{\boldsymbol{n}} = \langle (T_0, \varphi), m, (\hat{S}, \varphi^m) \rangle$. $\hat{\boldsymbol{n}}$ ist ein



(D 19)



(D 20)

treues Modell (siehe D19); $(\hat{S}, \varphi^m)$ ist aber widerspruchsvoll und deshalb ist auch (T_0, φ) widerspruchsvoll (Satz 7), also $T_0 \vdash \neg \varphi$. Genauso zeigt man, daß $(T_0, \neg \varphi)$ widerspruchsvoll ist, also $T_0 \vdash \varphi$. T_0 ist also selbst widerspruchsvoll und deswegen ist auch $\hat{S}$ widerspruchsvoll. Da $(\neg\,\varphi)^m$ abgeschlossen ist, folgt $S, \neg\,(\varphi^m) \vdash (\neg\,\varphi)^m$. Wir haben also $S \vdash (\neg\,\varphi)^m \equiv \neg\,(\varphi^m)$ und m ist homogen.

Die folgenden Behauptungen können für alle logischen Kategorien bewiesen werden:

Satz 10. (1) Jeder ε-Morphismus ist ein Homomorphismus. (2) Sind $\boldsymbol{m} : T \to S$ und $\boldsymbol{n} : S \to U$ Homomorphismen, so ist auch $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ ein Homomorphismus.

Beweis. (1) folgt aus (ε3). (2) Sei $\boldsymbol{e}_1$ ein beliebiger ε-Epimorphismus, dessen Anfang mit dem Ende von $\boldsymbol{n}$ übereinstimmt. Sei $\hat{\boldsymbol{n}}$ das Quasibild von $\boldsymbol{n} * \boldsymbol{e}_1$, sei $\boldsymbol{e}_2$ das zugehörige duale Quasibild. (s. (D20)). Sei $\hat{\boldsymbol{m}}$ das Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}$ das zugehörige duale Quasibild. Dann ist das äußere Rechteck kommutativ, $\boldsymbol{e}$ ist ein ε-Epimorphismus und $\hat{\boldsymbol{m}} * \hat{\boldsymbol{n}}$ ist ein Monomorphismus, also treu. $\hat{\boldsymbol{m}} * \hat{\boldsymbol{n}}$ ist also das Quasibild und $\boldsymbol{e}$ das duale Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n} * \boldsymbol{e}_1$; wir haben also gezeigt, daß das Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n} * \boldsymbol{e}_1$ ein Monomorphismus ist. $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}$ ist ein Homomorphismus.

Satz 11. (1) Das Quasibild eines Homomorphismus ist ein Homomorphismus. (2) Jeder Isomorphismus ist ein Homomorphismus.

Beweis. (1) Siehe (D21). $\boldsymbol{n}$ ist das Quasibild, $\boldsymbol{e}$ das duale Quasibild von $\boldsymbol{m}$; $\boldsymbol{e}_1$ ist ein beliebiger ε-Morphismus. $\hat{\boldsymbol{n}}$ ist das Quasibild und $\boldsymbol{e}_2$ das duale Quasibild von

$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[ddrr, "\hat{n}"] & & \\ & \cdot \arrow[ur, "e_2"] \arrow[dr, "n"] & & & \\ \cdot \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "m"'] & & \cdot \arrow[rr, "e_1"'] & & \cdot \end{tikzcd} \quad (D\,21)$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\hat{m}"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "\hat{e}"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, "e"'] \end{tikzcd} \quad (D\,22)$$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "n"] & \\ \cdot \arrow[ur, "e_2"] \arrow[r, "\hat{m}"] & \cdot \arrow[r, "e_1"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "e"] \arrow[r, "m"'] & \cdot \arrow[u, "\hat{e}"'] & \end{tikzcd} \quad (D\,23)$$

$\boldsymbol{n} * \boldsymbol{e}_1$. Es folgt, daß $\hat{\boldsymbol{n}}$ das Quasibild und $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{e}_2$ das duale Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}_1$ sind; $\hat{\boldsymbol{n}}$ muß also ein Monomorphismus sein. $\boldsymbol{n}$ ist ein Homomorphismus. (2) Sei $\boldsymbol{m} : T \to S$ ein Isomorphismus, $\boldsymbol{e} : S \to U$ ein ε-Epimorphismus. $\boldsymbol{m}^{-1}$ und $\boldsymbol{e}$ bestimmen einen pushout, in dem der dem Morphismus $\boldsymbol{m}^{-1}$ entsprechende Morphismus ein Isomorphismus ist (s. § 3 (g)). Wir können ihn also mit $\hat{\boldsymbol{m}}^{-1}$ bezeichnen und haben das kommutative Diagramm (D22), wo $\hat{\boldsymbol{m}}$ ein Isomorphismus ist. $\hat{\boldsymbol{m}}$ ist also ein Monomorphismus, $\hat{\boldsymbol{e}}$ ist ein ε-Epimorphismus; das bedeutet, daß $\hat{\boldsymbol{m}}$ das Quasibild von $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{e}$ ist. Dieses Quasibild ist ein Monomorphismus, $\boldsymbol{m}$ ist also ein Homomorphismus.

Satz 12. Ist $\boldsymbol{m} : T \to S$ ein Homomorphismus und $\boldsymbol{e} : T \to \hat{T}$ ein ε-Epimorphismus, dann ist im zugehörigen pushout (D8) $\hat{\boldsymbol{m}}$ ein Homomorphismus. (Jeder Homomorphismus ist ein wesentlicher Homomorphismus.)

Beweis. Siehe (D23). Das Quadrat ist ein pushout, $\boldsymbol{e}_1$ ist ein ε-Epimorphismus, $\boldsymbol{n}$ ist das Quasibild und $\boldsymbol{e}_2$ das duale Quasibild von $\hat{\boldsymbol{m}} * \boldsymbol{e}_1$. Dann ist $\boldsymbol{n}$ das Quasibild und $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{e}_2$ das duale Quasibild von $\boldsymbol{m} * \hat{\boldsymbol{e}} * \boldsymbol{e}_1$, also ein Monomorphismus; $\hat{\boldsymbol{m}}$ ist ein Homomorphismus.

Satz 13. Ist $\boldsymbol{m}$ ein treuer Homomorphismus, so ist er wesentlich treu.

Beweis. Ist $\boldsymbol{m}$ treu, so ist $\boldsymbol{m}$ sein eigenes Quasibild, so muß $\boldsymbol{m}$ ein Monomorphismus und deshalb wesentlich treu sein.

§ 5 Beispiele

Wir kommentieren jetzt die im § 4 entwickelte Theorie mit einer Reihe von konkreten Beispielen. Die Sätze 2 und 8 dienen als ein Beweismittel dafür, daß bestimmte Modelle (wesentlich) treu sind.

Beispiel 1. *Das Gödelsche Δ-Modell.* Das Modell ist durch eine relative Interpretation gegeben; es ist ein Modell von $(GB,\ V = L)$ in GB (s. [4]; GB ist die Gödel-Bernayssche Mengenlehre, vgl. auch [15]). Um zu zeigen, daß Δ wesentlich treu ist, bezeichnen wir mit $\boldsymbol{e}$ den ε-Morphismus aus GB in $(GB,\ V = L)$ und untersuchen $\Delta * \boldsymbol{e}$. Nach [4] ist $GB,\ V = L \vdash (\forall X)\ \mathsf{L}\,(X)$ (wo L bedeutet: X ist eine konstruktible Klasse), woraus $GB,\ V = L \vdash \varphi \equiv \varphi^{\Delta}$ für jede abgeschlossene GB-Formel folgt. $\Delta * \boldsymbol{e}$ ist also dem Modell $\boldsymbol{Id}_{(GB,\ V=L)}$ gleich, das offenbar wesentlich treu ist. Nach dem Satz 8 ist also auch Δ wesentlich treu.

Beispiel 2. Man zeigt leicht, daß der ε-Morphismus aus einer beliebigen Theorie T in (T, δ), wo δ eine Definition eines neuen Symbols (Prädikaten usw.) in T ist, ein Isomorphismus und deshalb wesentlich treu ist. Komplizierter ist die Lage mit der Formalisation des üblichen Beweismittels ,,es gibt ein x mit $\chi(x)$; sei also a ein *beliebiges aber festes* x mit $\chi(x)$". Sei T eine Theorie, sei $T \vdash (\exists x)\ \chi(x)$ wo x die einzige freie Variable von $\chi(x)$ ist, sei a eine in der Sprache von T nicht vorkommende Konstante, sei $\hat{T}$ die Theorie $(T,\ \chi(a))$, sei schließlich $\boldsymbol{e}$ der ε-Morphismus von T in $\hat{T}$. Um zu zeigen, daß $\boldsymbol{e}$ wesentlich treu ist, konstruieren wir zu $\boldsymbol{e}$ das (rechtsseitige) Inverse, also ein Modell $\boldsymbol{r}$ mit $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{r} = \boldsymbol{Id}_T$. Für jede $\hat{T}$-Formel $\varphi(a, x_1, \ldots, x_n)$ sei φ^r die T-Formel $\chi(x_1) \to \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ ($\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ bedeutet: statt jeder Variable x_i, die in φ vorkommt — frei oder gebunden — schreibe man x_{i+1}; statt a schreibe man x_1). Man zeigt leicht, daß $\langle \hat{T}, r, T\rangle$ ein Modell ist $\big($insbesondere ist $(\chi(a))^r = \chi(x_1) \to \chi(x_1)\big)$; ist eine abgeschlossene T-Formel, dann ist $T \vdash \varphi \equiv \varphi^r$, also $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{r} = \boldsymbol{Id}_T$; $\boldsymbol{e}$ ist wesentlich treu. $\boldsymbol{r}$ ist treu $(T \vdash \chi(x_1) \to \varphi(x_1, x_2, \ldots) \Rightarrow \hat{T} \vdash \chi(x_1) \to \varphi(x_1, x_2, \ldots) \Rightarrow \hat{T} \vdash \varphi(a, x_1, \ldots))$, aber nicht notwendig wesentlich treu. Sei z. B. T die Peanosche Arithmetik, $\chi(x)$ besage ,,x ist gerade". Dann ist $\boldsymbol{r}$ ein Model von T, $\chi(a)$ in T; auch $\big(T,\ \chi(a), (a \leqq 10)\big)$, $r, \big(T, (a \leqq 10)^r\big)$ ist ein Modell. Die Anfangstheorie dieses Modells ist widerspruchsfrei (angenommen, daß die Arithmetik widerspruchsfrei ist), aber $(a \leqq 10)^r$ ist ,,x_1 ist gerade $\to x_1 \leqq 10$", was bedeutet, daß $\big(T, (a \leqq 10)^r\big)$ widerspruchsvoll ist. Deshalb ist $\boldsymbol{r}$ nicht wesentlich treu. Auf diese Weise zeigt man, daß für die in [5] betrachteten *parametrischen Modelle* die wesentliche Treue aus der (üblichen) Treue nicht folgt.

In den zwei nächsten Beispielen betrachten wir die sog. *booleschwertigen Modelle* (s. [12] oder [14], auch [15]), und zwar in zwei sehr ähnlichen, aber doch nicht gleichen Fassungen. Wir benutzen hier die Schreibweise von Scott, schreiben also $[\![\varphi]\!]_B$ und nicht $F_B\,[\![\varphi]\!]$.

Beispiel 3. Sei ZF die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre, ZF^* sei ZF mit dem Auswahlaxiom, ZF^L sei ZF mit dem Gödelschen Konstruktibilitätsaxiom. $Supp\,(B, Z)$ sagt (s. [15]): B ist eine konstruktible, konstruktiv vollständige Boolesche Algebra und Z ist ein Ultrafilter auf B, der gegen alle konstruktiblen

Durchschnitte abgeschlossen ist und die folgende Eigenschaft hat: für jede Menge X von konstruktiblen Mengen gibt es eine konstruktible Funktion f mit $X = f^{-1''}(Z)$. Die Aussage $(\exists\, B, Z)\ Supp\,(B, Z)$ (kurz: (Sp)) ist das Supportaxiom von Vopěnka. Sei $\beta(x)$ eine ZF-Formel mit $ZF \vdash (\beta(x) \equiv x$ ist eine vollständige Boolesche Algebra). Sei $(ZF^L, \beta(\overline{B}))$ die Erweiterung von ZF^L durch $\beta(\overline{B})$, wo $\overline{B}$ eine neue Konstante ist. Sei ∇ die Abbildung von ZF-Formeln in $(ZF^L, \beta(\overline{B}))$-Formeln, die durch die Basis gegeben ist, die jeder abgeschlossenen ZF-Formel φ die Formel $[\![\varphi]\!]_{\overline{B}} = 1_{\overline{B}}$ zuordnet. Nach [12] und [14] beweist man, daß diese Basis ein Modell von (ZF, Sp) in $(ZF^L, \beta(\overline{B}))$ bestimmt; dieses Modell sei mit ∇ bezeichnet. Wir zeigen, daß ∇ wesentlich treu ist. Dazu bezeichnen wir (ZF^*, Sp) mit ZF_1, weiter bezeichnen wir $(ZF^L, \beta(\overline{B}))$ mit ZF_2 und $(ZF^*, Supp\,(\overline{B}, \overline{Z}))$ (wo $\overline{Z}$ eine neue Konstante ist) mit ZF_3. Sei φ eine beliebige abgeschlossene ZF-Formel. Wir haben die folgenden Modelle:

$$\begin{tikzcd} ZF_1, \varphi \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\nabla"'] & & ZF_3, \varphi^{\nabla * \Delta} \\ & ZF_2, \varphi^{\nabla} \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd} \qquad (D\,24)$$

Nach [14] und [15] ist $ZF_1 \vdash \psi \to (\exists\, B, Z)\,(Supp\,(B, Z)\ \&\ [\![\psi]\!]^L_B = 1_B)$, $ZF_3 \vdash \psi \equiv$ $\equiv [\![\psi]\!]^L_{\overline{B}} \in \overline{Z}$. Dabei bedeutet $[\![\psi]\!]^L_{\overline{B}}$ den Booleschen φ-Wert in $\overline{B}$ im Sinne des konstruktiblen Universums; $\varphi^{\nabla * \Delta}$ ist $[\![\varphi]\!]^L_{\overline{B}} = 1_{\overline{B}}$. $\boldsymbol{e}$ ist der ε-Morphismus von ZF_1, φ in $ZF_3, \varphi^{\nabla * \Delta}$; nach dem Beispiel 2 ist $\boldsymbol{e}$ wesentlich treu. Wir behaupten nicht, daß (D 24) kommutativ ist ; dennoch hilft es uns, die wesentliche Treue von ∇ zu beweisen. Sei ψ eine beliebige ZF-Formel. Wenn $ZF_3, \varphi^{\nabla * \Delta} \vdash \psi^{\nabla * \Delta}$ ist, dann ist $ZF_3, \varphi^{\nabla * \Delta} \vdash [\![\psi]\!]^L_B \in Z$, also $ZF_3, \varphi^{\nabla * \Delta} \vdash \psi$. ψ ist eine ZF-Formel und $\boldsymbol{e}$ ist treu, also ist $ZF_1, \varphi \vdash \psi$; ∇ ist also ein treues Modell von ZF_1, φ in $ZF_3, \varphi^{\nabla * \Delta}$ und deshalb ist ∇ ein treues Modell von ZF_1, φ in ZF_2, φ^{∇}. Da hier φ eine beliebige abgeschlossene ZF-Formel war, bedeutet es, daß ∇ ein wesentlich treues Modell von ZF_1 in ZF_2 ist.

Beispiel 4. ZF_1 aus dem vorangehenden Beispiel hat ein treues Modell in ZF_L, das durch die Basis $\tilde{\nabla}$ gegeben ist, die jeder abgeschlossenen ZF-Formel φ die Formel $(\forall B)\,(\beta(B) \to [\![\varphi]\!]_B = 1_B)$ zuordnet. Der Beweis, daß $\tilde{\nabla}$ ein treues Modell von ZF_1 in ZF^L ist, braucht eine unwesentliche Änderung des vorangehenden Beweises und kann dem Leser als eine Übung überlassen werden. Obgleich der Unterschied so gering ist, ist $\tilde{\nabla}$ nicht wesentlich treu: sei z. B. γ_7 die Formel $2^{\aleph_0} = \aleph_7$; wie bekannt, ist $ZF^L \vdash (\exists\, B)\,([\![\gamma_7]\!]_B = 1_B)$. also ist ZF_2, $[\![\gamma_7]\!]^L_{\overline{B}} = 1_{\overline{B}}$ widerspruchsfrei, und deshalb ist auch ZF_1, γ_7 widerspruchsfrei. Dagegen ist $ZF^L, (\gamma_7)^{\tilde{\nabla}}$ widerspruchsvoll; $(\gamma_7)^{\tilde{\nabla}}$ ist nämlich $(\forall B)\,(\beta(B) \to [\![\gamma_7]\!]_B = 1_B)$, was in ZF^L widerlegbar ist, da $ZF^L \vdash (\exists\, B)\,(\beta(B)\ \&\ [\![\gamma_7]\!]_B \neq 1_B)$ ist. $\tilde{\nabla}$ ist also nicht wesentlich treu.

Bemerkungen. (1) Zu demselben Themenkreis gehören verschiedene treue Modelle zwischen der Mengenlehre TS und der *Halbmengenlehre* TSS, die in [15] zu finden sind. (2) Man bemerke, daß die Erwägungen des Beispiels 3 richtig bleiben, wenn man allgemeiner statt $\beta(x)$ eine ZF-Formel $\beta_1(x)$ nimmt, aus der nur in ZF folgt, daß x eine vollständige Boolesche Algebra ist, wobei $ZF^L \vdash (\exists B)(\beta_1(B))$ ist. Z. B. kann $\beta_1(B)$ bedeuten: B ist eine atomlose total inhomogene vollständige Boolesche Algebra. Dann gilt, wie bekannt, in ∇ als einem Modell von ZF^*, $(\exists B, Z)(\beta_1(B) \;\&\; Supp\,(B, Z))$ in ZF^L, $\beta_1(\overline{B})$ das Axiom $V = Df$, wo Df die Klasse aller definierbaren (ordinal-definable im Sinne von Myhill-Scott [17]) Mengen bezeichnet. Aus der Treue des Modells folgt, daß $V = Df$ aus dem Axiom $(\exists B, Z)(\beta_1(B) \;\&\; Supp\,(B, Z))$ in ZF^* beweisbar ist.

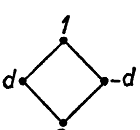
Beispiel 5. Die in der Fußnote 3 auf der Seite 175 definierte Theorie hat 9 Modelle in sich selber, darunter 4 Homomorphismen. Sie sind eindeutig durch die Bilder von p, $\neg p$ gegeben, s. (D25) (w bezeichnet $(p \vee \neg p)$, f bezeichnet $(p \;\&\; \neg p)$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	p	p	q	q	w	f	f	f	f
$\neg p$	q	f	p	f	f	p	q	w	f
Hom	+	−	+	−	+	−	−	+	−

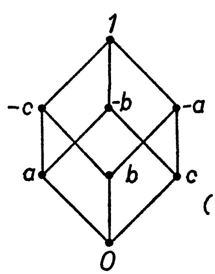
(D 25)

Beispiel 6. Allgemeiner kann zu jeder endlichen Booleschen Algebra eine entscheidbare Theorie A_B im Aussagenkalkül gefunden werden, in der es einander deduktionsungleiche Formeln φ_a gibt, die in einer eineindeutigen Korrespondenz zu den Elementen von B stehen, wobei jede A_B-Formel genau einer Formel φ_a äquivalent ist. Es genügt die Elemente von B als Aussagenvariablen aufzufassen; diese Variablen bilden die Sprache von A_B. Axiome: (1) $a \;\&\; b \equiv c$, wenn $a \wedge b = c$ (in B); $\neg a \equiv c$, wenn $-a = c$ (in B). Wenn $a \leqq b$, dann $a \wedge b = a$, also $A_B \vdash a \;\&\; b \equiv a$, also $A_B, a \vdash b$. Wenn $a \leqq b$, dann hat $(A_B, a, \neg b$ eine widerspruchsvolle Vervollständigung A'_B, die als Axiome außer den Axiomen von A_B alle c mit $a \leqq c$ (in B) und alle $\neg c$ für $a \leqq c$ (in B) hat; es folgt $A_B, a \nVdash b$. Ist also $A_B, a \vdash b$, so ist $a \leqq b$ in B.

Auf Grund dieser Theorien zeigen wir leicht, daß die Bedingung aus (δ5) nicht durch die einfachere Bedingung ersetzt werden kann, die sagt, daß das Quasibild von m ein Monomorphismus ist: es gibt Nichthomomorphismen, deren Quasibild ein Monomorphismus ist. Wir finden einen Nichthomomorphismus, der selbst ein Monomorphismus ist. Sei A_2 bzw. A_3 die der endlichen Algebra B_2 bzw. B_3 mit genau zwei bzw. genau drei Atomen entsprechende Theorie (s. (D26), (D27)). Durch die in (D28) gegebene Abbildung von B_2 in B_3 ist ein Modell von A_2 in A_3



(D 26)



(D 27)

0	d	-d	1
0	a	c	1

(D 28)

definiert: Ist $A_2 \vdash \varphi$, so ist $\varphi^m = 1$; ist $A_2 \vdash \varphi \equiv d$, so ist $\varphi^m = a$ usw. Man zeigt leicht nach der Beh. 3, daß m ein Modell von A_2 in A_3 ist. m ist eineindeutig, also ein Monomorphismus. Dabei ist $A_3 \not\vdash (\neg d)^m \equiv \neg (d^m)$, m ist also kein Homomorphismus.

§ 6 Äquivalenz des Aussagen- und Prädikatenkalküls

Genauer gesagt, wollen wir die folgende Behauptung beweisen:

Behauptung 15. Sei $\mathbf{K}_0 = (\mathsf{K}_0, \mathsf{K}_0^\varepsilon)$ die logische Kategorie der Theorien und Modelle des Aussagenkalküls, $\mathbf{K}_1 = (\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_1^\varepsilon)$ die logische Kategorie der Theorien und Modelle des Prädikatenkalküls. (Vgl. Anfang des § 4; ε-Morphismen sind in der Def. 7 definiert). Dann gibt es einen Funktor $\mathscr{A} : \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_0$, der voll, repräsentativ und treu, also eine Äquivalenz ist; darüber hinaus ist ein Morphismus $\boldsymbol{m}$ von $\mathbf{K}_1$ genau dann ein ε-Morphismus, wenn $\mathscr{A}(\boldsymbol{m})$ ein ε-Morphismus ist.

Um die Behauptung zu beweisen, definieren wir zuerst die Werte von $\mathscr{A}$ für K_1-Objekte. Sei T eine Theorie aus $\mathbf{K}_1$; wir ordnen ein für allemal jeder abgeschlossenen Formel φ des Prädikatenkalküls eineindeutig eine Aussagenvariable p_φ zu. Die Gesamtheit aller p_φ für alle abgeschlossenen T-Formeln bildet die Sprache von $\mathscr{A}(T)$. Die Axiome von $\mathscr{A}(T)$: (1) $p_\varphi \,\&\, p_\psi \equiv p_{\varphi \& \psi}$, (2) $p_{\neg\varphi} \equiv \neg p_\varphi$ (für beliebige abgeschlossene T-Formeln φ, ψ), (3) $\mathrm{n} \times p_\varphi$ falls es in T zu φ einen Beweis der Länge n gibt.

(a) Für jede $\mathscr{A}(T)$-Formel a gibt es eine Aussagenvariable p mit $\mathscr{A}(T) \vdash a \equiv p$. In der Tat kann p auf Grund von (1), (2) gefunden werden. Das so gefundene p heiße der Repräsentant von a.

(b) $T \vdash \varphi$ genau dann, wenn $\mathscr{A}(T) \vdash p_\varphi$. Die Implikation $\Rightarrow$ ist klar auf Grund von (3). Ist umgekehrt $a_1, \ldots, a_n$ ein Beweis von p_φ in $\mathscr{A}(T)$ (also a_n ist p_φ) und sind $p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_n}$ die Repräsentanten von $a_1, \ldots, a_n$, dann gilt für jedes i $(1 \leqq i \leqq n)$: entweder ist φ_i eine aussagenlogische Tautologie (wenn a_i ein Axiom des Aussagenkalküls ist), oder es ist $\varphi_i = \mathrm{n} \times \psi$ für eine T-Formel ψ, zu der es in T einen Beweis der Länge n gibt, oder es ist $\varphi_i \equiv (\varphi_j \to \varphi_k)$ für $j, k > i$ (aussagenlogisch beweisbare Äquivalenz). Es folgt induktiv, daß $T \vdash \varphi_i$, also $T \vdash \varphi$.

(c) Ist $T_1 \neq T_2$, dann ist $\mathscr{A}(T_1) \neq \mathscr{A}(T_2)$. Entweder sind nämlich die Sprachen von T_1, T_2 und deshalb auch die Sprachen von $\mathscr{A}(T_1)$, $\mathscr{A}(T_2)$ verschieden, oder sie sind gleich, und es gibt eine abgeschlossene Formel φ, die in einer der Theorien T_1, T_2 beweisbar und in der anderen nicht beweisbar ist; dasselbe gilt dann für p_φ und $\mathscr{A}(T_1)$, $\mathscr{A}(T_2)$ (s. (b)); es ist $\mathscr{A}(T_1) \neq \mathscr{A}(T_2)$.

(d) $T, \psi \vdash \varphi$ genau dann, wenn $\mathscr{A}(T), p_\psi \vdash p_\varphi$. Das folgt aus (b) auf Grund des Deduktionstheorems.

Jetzt definieren wir $\mathscr{A}(\boldsymbol{m})$ für $\boldsymbol{m} : T \to S$ ($\boldsymbol{m}$, T, S in K_1). Für jede Aussagenvariable p_φ sei $(p_\varphi)^{\mathscr{A}(m)} = p_{\varphi^m}$; für eine nichtatomare $\mathscr{A}(T)$-Formel a sei $a^{\mathscr{A}(m)}$ gleich dem Bild des Repräsentanten von a.

(e) $A(\boldsymbol{m}) = \langle \mathscr{A}(T), \mathscr{A}(m), \mathscr{A}(S) \rangle$ ist ein Modell von $\mathscr{A}(T)$ in $\mathscr{A}(S)$. Nach (b), (d) und der Beh. 3 in § 2.

(f) Ist $\boldsymbol{m}$ ein ε-Morphismus, so ist auch $\mathscr{A}(\boldsymbol{m})$ ein ε-Morphismus. Evident; daraus
(g) $\mathscr{A}(\boldsymbol{Id}_T) = \boldsymbol{Id}_{\mathscr{A}(T)}$. Sogar
(h) Ist $\mathscr{A}(\boldsymbol{m})$ ein ε-Morphismus, dann ist $\boldsymbol{m}$ ein ε-Morphismus. Weil aus $(p_\varphi)^{\mathscr{A}(m)} \equiv_{\mathscr{A}(S)} p_\varphi$ nach (d) für jede abgeschlossene Formel $\varphi^m \equiv_S \varphi$ folgt.
$\mathscr{A}(m * n) = \mathscr{A}(m) * \mathscr{A}(n)$. Ist nämlich p_φ der Repräsentant von a, dann $a^{\mathscr{A}(m*n)} = (p_\varphi)^{\mathscr{A}(m*n)} = p_{\varphi^{m*n}} = (p_{\varphi^m})^{\mathscr{A}(n)} = (p_\varphi)^{\mathscr{A}(m)*\mathscr{A}(n)} = a^{\mathscr{A}(m)*\mathscr{A}(n)}$.
(j) Ist $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} : T \to S$ und $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n}$, dann ist $\mathscr{A}(\boldsymbol{m}) \neq \mathscr{A}(\boldsymbol{n})$. Gibt es nämlich eine abgeschlossene T-Formel φ mit $S \not\vdash \varphi^m \equiv \varphi^n$, dann ist $\mathscr{A}(S) \not\vdash (p_\varphi)^{\mathscr{A}(m)} \equiv (p_\varphi)^{\mathscr{A}(n)}$ nach (d).
(k) Ist $\boldsymbol{m} : \mathscr{A}(T) \to \mathscr{A}(S)$, dann gibt es ein $\boldsymbol{n} : T \to S$ mit $\mathscr{A}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}$. Für jede abgeschlossene T-Formel φ sei φ^n die S-Formel ψ, für die p_ψ der Repräsentant von $(p_\varphi)^m$ ist. Auf Grund von (b), (d) und der Beh. 3 zeigt man, daß n eine abgeschlossene Basis ist; $\mathscr{A}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}$ ist klar.

Zusammenzufassend: $\mathscr{A}$ ist ein Funktor (e, g, i), $\mathscr{A}$ ist treu (j), eine Einbettung (c) und voll (k). Nach (f), (h) ist $\mathscr{A}$ eine eineindeutige Korrespondenz zwischen ε-Morphismen. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathscr{A}$ repräsentativ ist. Zuerst beweisen wir aber ein Lemma, das wir auch später benutzen werden.

Lemma 9. Sei $\boldsymbol{m} = \langle A, m, B\rangle$ ein Modell in K_0, sei $\boldsymbol{m}$ ein Monomorphismus und sei $\boldsymbol{m}$ eine Abbildung auf alle B-Formeln (im hier benutzten Sinne). Dann ist $\boldsymbol{m}$ ein Isomorphismus.

Der *Beweis* ist eine Modifikation des Beweises der Beh. 8 und entspricht dem üblichen Beweis aus der Theorie der Booleschen Algebren, daß ein Ordnungsisomorphismus ein Isomorphismus im Sinne der Booleschen Algebren ist. Wenn man über abgeschlossene Basen spricht, kann man den Beweis auch für K_1 führen. Zu jeder B-Formel b finden wir eine A-Formel a mit $B \vdash a^m \equiv b$; a sei b^n. Dann ist $A \vdash a \equiv (a^m)^n$ und $B \vdash b \equiv (b^n)^m$ für jede A-Formel a und jede B-Formel b. Ist also $\boldsymbol{n} = \langle B, n, A\rangle$ ein Modell, so ist es ein zweiseitiges Inverses zu $\boldsymbol{m}$ und $\boldsymbol{m}$ ist ein Isomorphismus. Wir zeigen, daß $\boldsymbol{n}$ ein Modell ist, auf Grund der Beh. 3. Ist $B \vdash b$, dann ist $A \vdash b^n$, weil m treu ist. Ist $B \vdash b^1 \equiv b^2$, dann ist $A \vdash b_1^n \equiv b_2^n$, weil m eineindeutig ist. Aus $B \vdash (b_1 \& b_2)^{n*m} \equiv b_1 \& b_2$, $B \vdash b_i{}^{n*m} \equiv b_i$ $(i = 1, 2)$ und aus der wesentlichen Treue von $\boldsymbol{m}$ folgt $A \vdash (b_1 \& b_2)^n \to b_i^n$ $(i = 1, 2)$ und $A, b_1^n, b_2^n \vdash (b_1 \& b_2)]$, also $A \vdash (b_1 \& b_2)^n \equiv b_1^n \& b_2^n$. Um $A, (\neg\, b)^n \vdash \neg\, (b^n)$ zu beweisen, zeigen wir $B \vdash (\neg\, a)^m \equiv \neg\, (a^m)$ $(*)$ für jede A-Formel a. Es ist $B \vdash (\neg\, a)^m \to \neg\, (a^m)$ und es gibt ein a_1 mit $B \vdash a_1{}^m \equiv \neg\, (a^m)$. Dabei ist sowohl $(a \& \neg\, a)^m$ als auch $a^m \& a_1^m$ widerspruchsvoll in B, also $B \vdash (a \& \neg\, a)^m \equiv$ $\equiv (a \& a_1)^m$, daraus $A \vdash (a \& \neg a) \equiv (a \& a_1)$, also $A \vdash a_1 \to a$, also $B \vdash \neg (a^m) \to (\neg a)^m$.
$(*)$ ist bewiesen. Sei b eine B-Formel, sei $b^n = a$, $(\neg\, b)^n = a_1$. Dann ist $B \vdash a_m \equiv b$, $B \vdash a_1^m \equiv \neg\, b$, also nach $(*)$ $B \vdash (\neg\, a)^m \equiv \neg\, b$; es folgt $A \vdash (\neg\, b)^n \equiv \neg\, (b^n)$. $\boldsymbol{n}$ ist ein Modell.

Jetzt setzen wir den *Beweis der Beh. 15* fort. Sei A eine beliebige Theorie aus K_0, $p_1, p_2, \ldots$ eine Folge aller Aussagenvariablen in der Sprache von A. (Wir können voraussetzen, daß diese Sprache unendlich ist; wäre sie endlich, so fügen wir unendlich viele neue Variablen q_i zu und zu jeder diesen Variablen das Axiom q_i.

So entsteht eine zu A isomorphe Theorie). Wir suchen eine Theorie T aus K_1 derart, daß A und $\mathscr{A}(T)$ isomorph sind. Dazu benutzen wir eine Theorie von Hanf [7]. Die Sprache von H: Gleichheitsprädikat $=$, eine einstellige Operation $'$ und eine Konstante 0. Axiome von H: (1) Gleichheitsaxiome, (2) $x' = y' \rightarrow x = y$, (3) $x' \neq 0$. Wir definieren neue einstellige Operationen $+ n$ für jede natürliche Zahl n durch $x + 0 = x$, $x + (n + 1) = (x + n)'$. Ferner definieren wir für jedes $k > 0$ einen einstelligen Prädikat $Z^{(k)}(x)$ (x gehört zu einem Zirkel der Länge k) durch $Z^{(k)}(x) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{k-1} x + i \neq x\right) \& \, x + k = x$ und einen zweistelligen Prädikat $x \approx_k y$ durch $x \approx_k y \equiv \bigvee_{i=0}^{k-1} (x + i = y)$. Die Formel $Z^{(k)}(x) \,\&\, Z^{(k)}(y) \,\&\, x \not\approx_k y$ bedeutet, daß x, y zu verschiedenen Zirkeln der Länge k gehören. Nach Hanf ist jede abgeschlossene Formel der eben beschriebenen Theorie H einem Booleschen Ausdruck aus den Aussagen φ_{hk} äquivalent, die besagen, daß es mindestens h verschiedene Zirkel der Länge k gibt. Wir fügen zu H für jedes k das Axiom φ_{2k}, also (4) $Z^{(k)}(x) \,\&\, Z^{(k)}(y) \rightarrow x \approx_k y$ für jedes k. So entsteht die Theorie H_0; sei φ_k die Aussage $(\exists x) Z^{(k)}(x)$. Jede abgeschlossene H_0-Formel ist in H_0 einem Booleschen Ausdruck aus den Formeln φ_k äquivalent, wobei jede elementare Konjunktion aus der Formeln φ_k in H_0 widerspruchsfrei ist. H_0 ist entscheidbar und widerspruchsfrei. (Der Leser kann als eine leichte Übung eine primitiv rekursive „Quantorenelimination" finden, die zu jeder H_0-Formel den zu φ in H_0 äquivalenten Booleschen Ausdruck aussucht).

Jetzt kehren wir zurück zu unserer Theorie A und definieren eine Abbildung t, die jeder Aussagenvariablen p_k in der Sprache von A die Formel φ_k zuordnet und die die aussagenlogischen Junktoren erhält. Unsere Theorie T hat die Sprache von H_0 und außer der Axiome von H_0 noch (5) a^t für jedes Axiom a von A.

Wir zeigen: ($\mathrm{a}^{\mathrm{bis}}$) Zu jeder abgeschlossenen T-Formel φ gibt es eine A-Formel a mit $T \vdash \varphi \equiv a^t$. Weil jede abgeschlossene T-Formel einem Booleschen Ausdruck aus den φ_k in T äquivalent ist.

($\mathrm{b}^{\mathrm{bis}}$) $\vdash a$ (beweisbar im Aussagenkalkül) genau dann, wenn $H_0 \vdash a^t$. Die Implikation $\Rightarrow$ ist offenbar. Sei also $H_0 \vdash a^t$. Es genügt zu zeigen, daß die Voraussetzung $\not\vdash a$ zum Widerspruch führt. (Für den Konstruktivisten: $\vdash a$ oder non $\not\vdash a$). Wenn $\not\vdash a$ und $p_1, \ldots, p_n$ die Aussagenvariablen sind, die in a vorkommen, dann gibt es eine elementare Konjunktion K von $p_1, \ldots, p_n$ mit $K \neg \vdash a$. Es folgt $H_0, K^t \vdash \neg (a^t)$, also $H_0 \vdash \neg (K^t)$, was aber nicht wahr ist, weil K^t eine elementare Konjunktion der φ_k-Aussagen ist.

Aus dem Deduktionstheorem folgt ($\mathrm{d}^{\mathrm{bis}}$) $A \vdash a$ genau dann, wenn $T \vdash a^t$. Jetzt betrachten wir $\mathscr{A}(T)$.

Sei $a^m = p_{(a^t)}$ für jede A-Formel a. Aus (a), (b), (d), ($\mathrm{a}^{\mathrm{bis}}$), ($\mathrm{b}^{\mathrm{bis}}$), ($\mathrm{d}^{\mathrm{bis}}$) und daraus, daß m die aussagenlogischen Junktoren erhält, folgt, daß $\boldsymbol{m} = \langle A, m, \mathscr{A}(T) \rangle$ ein wesentlich treues Modell von A in $\mathscr{A}(T)$ ist und daß $\boldsymbol{m}$ eine Abbildung auf alle $\mathscr{A}(T)$-Formeln ist. Nach dem Lemma 9 ist $\boldsymbol{m}$ ein Isomorphismus. Damit ist die Behauptung 15 vollständig bewiesen.

Diese Behauptung ermöglicht alle „vernünftigen“ kategoriell formulierten Sätze, die wir über eine der Kategorien $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_1$ beweisen, auf die andere zu übertragen. Insbesondere zeigen wir:

Behauptung 16. Sowohl in $\mathbf{K}_0$ als auch in $\mathbf{K}_1$ gilt: Jeder Homomorphismus, der ein Bimorphismus ist, ist ein Isomorphismus.

Es genügt den *Beweis* nur für $\mathbf{K}_0$ zu geben. (Man merke, daß die kategoriell formulierbare Eigenschaft, ein Homomorphismus zu sein, durch $\mathscr{A}$ beiderseitig erhalten wird.) Nach dem Lemma 9 genügt es zu zeigen, daß in $\mathbf{K}_0$ jeder Homo-Epimorphismus eine Abbildung auf alle Formeln ist. Sei $\boldsymbol{m} : A \to B$. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken können wir voraussetzen, daß die Theorie B die Eigenschaft (a) hat, daß es also zu jeder B-Formel b eine Aussagenvariable p gibt mit $B \vdash b \equiv p$. Ein solches p sei mit p_b bezeichnet. Der Beweis ist jetzt ganz analog dem des Lemmas 8 und benutzt das Interpolationslemma für den Aussagenkalkül. (Man vergesse nicht, daß „Homomorphismus“ dasselbe bedeutet wie „homogen“.) Sei C die Theorie, die jede Aussagenvariable p von B in zwei Exemplaren p^1, p^2 enthält, und mit folgenden Axiomen: (1) Zu jedem Axiom b und B seine beiden Exemplare b^1, b^2, (2) zu jeder A-Formel a die Formel $(p_{a^m})^1 \equiv (p_{a^m})^2$. Die Modelle $\boldsymbol{n}_i$ von B in C bilden jede Formel auf ihr i-tes Exemplar ab. Es ist $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{m} * \boldsymbol{n}_2$, also $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2$. Ist also q eine beliebige Aussagenvariable von B, stellen wir wie im Beweis des Lemmas 9 fest, daß es eine Formel ω gibt, die nur Aussagenvariablen der Form p_{a^m} enthält und die in B mit q äquivalent ist. Da $\boldsymbol{m}$ ein Homomorphismus ist, folgt, daß q in B einer Formel a^m (a A-Formel) äquivalent ist.

Satz 14. Es sei $\mathbf{K}$ eine logische Kategorie, in der jeder Homo-Bimorphismus ein Isomorphismus ist. Dann gibt es zu jedem Homo-Epimorphismus $\boldsymbol{m}$ einen ε-Epimorphismus $\boldsymbol{e}$ und einen Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ mit $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{i}$.

Beweis. Wir zeigen, daß das Quasibild $\boldsymbol{i}$ von $\boldsymbol{m}$ ein Isomorphismus ist. $\boldsymbol{i}$ ist ein Monomorphismus (Def. 11); falls $\boldsymbol{m}$ ein Epimorphismus ist, so ist es auch $\boldsymbol{i}$. $\boldsymbol{i}$ ist also ein Bimorphismus und deshalb ein Isomorphismus.

Wir sehen, daß die Homomorphismen ähnliche Eigenschaften wie die ε-Morphismen haben. Es gilt der folgende

Satz 15. Sei $\mathbf{K} = (\mathsf{K}, \mathsf{K}^\varepsilon)$ eine logische Kategorie, in der jeder Homo-Bimorphismus ein Isomorphismus ist. Sei K^h die Kategorie ärmer als K, deren Morphismen genau alle Homomorphismen von $\mathbf{K}$ sind. Dann ist $\overline{\mathbf{K}} = (\mathsf{K}, \mathsf{K}^h)$ eine logische Kategorie, in der jeder Homomorphismus ein ε-Morphismus ist. Darüber hinaus ist jeder Morphismus $\boldsymbol{m}$ genau dann im Sinne von $\mathbf{K}$ (wesentlich) treu, wenn er im Sinne von $\overline{\mathbf{K}}$ (wesentlich) treu ist.

Beweis. K^h ist eine Kategorie und ist ärmer als K nach Satz 10. ($\varepsilon 0$) sagt nichts über ε-Morphismen aus, daher gilt es für $\overline{\mathbf{K}}$. ($\varepsilon 1$) folgt daraus, daß jeder ε-Morphismus ein Homomorphismus ist. ($\varepsilon 2$) gilt nach der Voraussetzung. Aus dem Satz 14 folgt, daß m treu in $\overline{\mathbf{K}}$ genau dann, wenn in $\mathbf{K}$ ist. ($\varepsilon 3$): (1) gilt, weil jeder ε-Morphismus ein Homomorphismus ist. (2) folgt aus dem Satz 14. (3) folgt aus der Definition der Homomorphismen. ($\varepsilon 4$) folgt aus dem Satz 14 und aus § 3 (h).

Daraus und wieder aus dem Satz 14 folgt, daß m wesentlich treu in $\overline{\mathbf{K}}$ ist genau dann, wenn es in $\mathbf{K}$ ist. Dann folgt ($\varepsilon 5$) automatisch aus ($\varepsilon 5$) für $\mathbf{K}$. Aus der Definition des Homomorphismus und aus dem Satz 14 folgt, daß in $\overline{\mathbf{K}}$ jeder Homomorphismus ein ε-Morphismus ist.

§ 7 Die Kategorie der Booleschen Algebren und Subhomomorphismen

Der Leser hat schon sicher gemerkt, daß uns an einer Theorie – mindestens vom nichtfinitistischen Standpunkt aus gesehen – die Algebra der (Äquivalenzklassen der) abgeschlossenen Formeln interessiert und daß die Modelle bestimmten verallgemeinerten Homomorphismen der Booleschen Algebren entsprechen. Jetzt wollen wir uns also kurz mit der algebraischen Seite der Sache befassen und ein algebraisches Beispiel einer logischen Kategorie geben. Dazu akzeptieren wir in diesem § die übliche Mengenlehre.

Definition 12. Seien B_1, B_2 Boolesche Algebren, f eine Abbildung von B_1 in B_2. f heißt ein *Subhomomorphismus*, wenn (a) $f(1_1) = 1_2$, (b) $f(0_1) = 0_2$, (c) $f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$ für alle $a, b \in B_1$.

Lemma 10. Sei $f: B_1 \to B_2$ ein Subhomomorphismus; dann (a) $a \leqq_1 b \Rightarrow f(a) \leqq_2 f(b)$ (b) $f(-_1 a) \leqq_2 -_2 f(a)$.

Beweis. $a \leqq_1 b \Rightarrow a \wedge_1 b = a \Rightarrow f(a) \wedge_2 f(b) = f(b) \Rightarrow f(a) \leqq_2 f(b)$; (b) $a \wedge_1 - a = 0_1 \Rightarrow f(a) \wedge_2 f(-_1 a) = 0_2 \Rightarrow f(-_1 a) \leqq_2 -_2 f(a)$.

Definition 13. Eine *Boolesche Halbgruppe* ist eine Halbgruppe A mit einem Einselement, einem Nullelement und lauter idempotenten Elementen. Ist B eine Boolesche Algebra, so ist die *B zugehörige Boolesche Halbgruppe* die Struktur, die aus B entsteht, indem man die Komplementoperation „vergißt".

Es ist klar, daß jeder Subhomomorphismus $f: B_1 \to B_2$ ein Homomorphismus der zugehörigen Booleschen Halbgruppe ist und deshalb eine Kongruenz auf B_1 in bezug auf die Durchschnittsoperation bestimmt. Umgekehrt gilt die

Behauptung 17. Sei B_1 eine Boolesche Algebra, sei $\sim$ eine Kongruenz auf der B_1 zugehörigen Booleschen Halbgruppe. Dann gibt es eine Boolesche Algebra B_2, die durch Elemente der Halbgruppe $B_1/\sim$ erzeugt wird, und einen Subhomomorphismus $f: B_1 \to B_2$ derart, daß für alle $x, y \in B_1$ $f(x) = f(y)$ genau dann gilt, wenn $x \sim y$ ist.

Beweis. Man bemerke zuerst, daß auf jeder Booleschen Halbgruppe A eine Halbordnung $\leqq$ definiert werden kann, indem man $a \leqq b \equiv a \wedge b = a$ setzt; $\leqq$ heiße die kanonische Halbordnung von A. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß es zu jeder Booleschen Halbgruppe A eine Boolesche Algebra B gibt, die durch A erzeugt wird. Sei also A eine Boolesche Halbgruppe; wir betrachten die Elemente von A als Aussagenvariablen, die Sprache einer Theorie Q, deren Axiome folgende sind: (1) 1, (2) $\neg 0$, (3) $(a \,\&\, b) \equiv c$ für $a \wedge b = c$. B ist die Algebra der Äquivalenzklassen von Q-Formeln. Die Abbildung $a \to [a]_Q$ ist ein Halbgruppenhomomorphismus. Es genügt zu zeigen, daß dieser Homomorphismus eineindeutig ist, also daß $Q \vdash a \equiv b$ genau dann, wenn $a = b$. Dazu genügt zu zeigen, daß aus $Q \vdash a \to b$ $a \leqq b$ folgt, wobei $\leqq$ die kanonische Halbordnung von A ist und a, b beliebige Elemente von A sind. Wenn nämlich $a \leqq b$ ist, dann gebe man allen Elementen $c \geqq a$ den Wahrheitswert 1 und allen anderen 0. Es entsteht ein semantisches Modell von Q, in dem a wahr, aber b falsch ist. $a \to b$ ist also nicht beweisbar.

Definition 14. Sei A eine Boolesche Halbgruppe, $J \subseteq A$. J ist ein *Schnitt* in A, wenn $y \leqq x \in J \Rightarrow y \in J$ für alle $x, y \in A$.
Man bemerke, daß, wenn J ein Schnitt ist und wenn man eine Äquivalenz $\sim_J$ mit $x \sim_J y \equiv (x = y \vee x, y \in J)$ definiert, $\sim_J$ eine Kongruenz auf A ist.

Behauptung 18. Sei K die Kategorie der Booleschen Algebren und Subhomomorphismen, sei K^h die Kategorie der Booleschen Algebren und Homomorphismen (im Sinne der Booleschen Algebren). Dann ist $(\mathsf{K}, \mathsf{K}^h)$ eine logische Kategorie, in der ein Morphismus genau dann ein Epimorphismus ist, wenn er eine Abbildung auf ihr Endobjekt ist.

Beweis. Die Feststellung, daß $\mathbf{K}$ eine logische Kategorie ist, kann analog zu den oben gegebenen Beweisen geführt werden und sei dem Leser als eine Übung überlassen. Wir zeigen, daß in $\mathbf{K}$ jeder Epimorphismus eine Abbildung auf ihr Endobjekt ist. Sei $f: B_1 \to B_2$ ein Subhomomorphismus, sei $u \in B_2 - f''(B_1)$. Sei $J = \{x \in B_2;\ x < u\}$. J ist ein Schnitt; sei $\sim$ die durch J bestimmte Kongruenz und B_3 die durch $B_2/\sim$ erzeugte Boolesche Algebra. Wir haben zwei Subhomomorphismen von B_2 in B_3: erstens den durch $\sim$ bestimmten g_1 und zweitens den Subhomomorphismus g_2, der sich nur darin von g_1 unterscheidet, daß $g_2(u) = 0_3$ ist; $f * g_1$ und $f * g_2$ sind aber gleich, so daß f kein Epimorphismus ist.

Schlußbemerkungen

(1) Dem Verfasser ist nicht bekannt, wie man für die Kategorien $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_1$ konstruktiv beweisen könnte, daß jeder Epimorphismus eine Abbildung auf alle Formeln ihres Endobjekts ist.

(2) Es scheint, daß sowohl die ursprünglich definierten ε-Morphismen als auch die Homomorphismen als ε-Morphismen der Kategorien $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_1$ Vorteile haben. Die Homomorphismen haben die gute Eigenschaft, daß, wenn $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} * \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{g}$ ein Homo- und $\boldsymbol{i}$ ein Isomorphismus ist, dann auch $\boldsymbol{h}$ ein Homomorphismus ist, was für die ε-Morphismen nicht der Fall ist. Dagegen kann man mit Hilfe von ε-Morphismen verschiedene Begriffe gut definieren, z. B. eine *Logik* (Theorie ohne spezielle Axiome) als eine Theorie derart, daß jeder in sie führende ε-Morphismus ein Monomorphismus ist, und postulieren, daß jede Theorie „ihre" Logik hat usw.

(3) Man kann auf die übliche Weise (konstruktiv, wenn erforderlich) zeigen, daß es in $\mathbf{K}_0$ Produkte gibt. (Es genügt, jedem Paar (a, b), wo a eine A-Formel und b eine B-Formel ist, eine Aussagenvariable zuzuordnen und geeignete Axiome zu wählen). Aus der Beh. 15 folgt, daß es auch in $\mathbf{K}_1$ Produkte gibt.

(4) Zwei Ergebnisse aus der Literatur sind im Zusammenhang mit unseren Betrachtungen bemerkenswert. Sie können folgenderweise formuliert werden:
(a) In [3] wird u.a. beweisen, daß, wenn die Peanosche Arithmetik 1-widerspruchsfrei ist (siehe dort), dann aus der Existenz einer relativen Interpretation

einer beliebigen Theorie T in P (also eines speziellen Homomorphismus) die Existenz einer (wesentlich) treuen relativen Interpretation von T in P folgt. (Konstruktiver Beweis). (b) In [11] wird folgendes bewiesen: Eine Theorie T in $\mathbf{K}_1$ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn es einen Homo-Monomorphismus von T in P gibt. (Ist die Axiomatik von T primitiv rekursiv, so wird eine primitiv rekursive Modell-Abbildung konstruiert; die induzierte Abbildung von Beweisen in Beweise ist offenbar allgemein rekursiv, es ist aber nicht klar, ob auch sie primitiv rekursiv ist).

LITERATUR

[1] Feferman, S.: Arithmetization of metamathematics in a general setting, Fundamenta Mathematicae **49** (1960) 35—92.

[2] — Lectures on proof theory, Leeds 1967.

[3] — Kreisel, G., Orey, S.: 1-consistency and faithful interpretations, Arch. für Math. Logik und Grundlagenforschung Band **6**, 52—63.

[4] Gödel, K.: Consistency of the axiom of choice etc., Princeton University Press 1940.

[5] Hájek, P.: Syntactic models of axiomatic theories, Bull. Acad. Polon. Sci (sér. math., astr., phys.) **13** (1965) 273—278.

[6] — Generalized interpretability in terms of models (note to a paper of R. Montague) Čas. pěst. mat. **91** (1966) 352—357.

[7] Hanf, W.: Model-theoretic methods in the study of elementary logic, in: The theory of models, Amsterdam 1965.

[8] Kleene, S. C.: Introduction to metamathematics, Amsterdam 1952.

[9] Kreisel, G.: Models, translations and interpretations, in: Mathematical interpretation of formal systems, Amsterdam 1955.

[10] Mitchell, B.: Theory of categories, New York-London 1965.

[11] Pour-El, M. B., Kripke, S.: Deduction-preserving "recursive isomorphisms" between theories, Fundamenta Mathematicae **61** (1967) 142—163.

[12] Scott, D.: Lectures on Booleanvalued models for set theory, lecture notes of the U.C.L.A. Summer Institute on Set Theory 1967.

[13] Tarski, A., Mostowski, A., Robinson, R. M.: Undecidable theories, Amsterdam 1953.

[14] Vopěnka, P.: General theory of ∇-models, Comm. math. univ. Carol. 8, (1967), 145—170.

[15] — Hájek, P.: Sets, semisets, models (Buch in Vorbereitung).

[16] Wang, H.: Arithmetic translations of axiom systems, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951) 283—293.

[17] Myhill, J., Scott, D.: Ordinal-definable sets, lecture notes of the U.C.L.A. Summer Institute on Set Theory 1967.

Inhalt des dreizehnten Bandes