АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

АЛГЕБРЫ И КОЛЬЦА

R

ÜBERREICHT VON DER

DEUTSCHEN

FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР
Ордена Трудового Красного Знамени
Институт математики с вычислительным центром

АЛГЕБРЫ И КОЛЬЦА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
вып. 90

КИШИНЕВ • ШТИИНЦА • 1986

В сборнике содержатся результаты исследований по теории колец, алгебр, модулей и топологической алгебре. Основное внимание уделяется новым областям теории многообразий алгебраических систем, связанным с теорией радикалов, структурной теории и комбинаторным вопросам алгебр Ли, теории кручений модулей, структурной теории топологических алгебр и вопросам топологизации колец и модулей.

Книга рассчитана на научных сотрудников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области современной алгебры и топологии.

А $\frac{1702030000-169}{М755(12)-86}$ 46-86

О.К.Бесолов

О МНОГООБРАЗИЯХ СТРОГО РЕГУЛЯРНЫХ АЛГЕБР, I

Регулярные кольца и алгебры привлекали внимание многих авторов и рассматривались с разных точек зрения (см., например, [1 - 3]). В последнее время они стали изучаться и в контексте теории многообразий [4, 5].

Одним из наиболее интересных классов алгебр - подклассов класса регулярных алгебр - является класс строго регулярных алгебр или в другой терминологии абелево регулярных алгебр (ср. [1] и [2]), т.е. регулярных алгебр без нильпотентных элементов. Они естественно возникают при рассмотрении радикально-полупростых классов алгебр. А именно, стандартные радикально-полупростые классы, т.е. многообразия алгебр над конечным полем Φ, состоящие из алгебр без нильпотентных элементов, состоят только из коммутативных строго регулярных алгебр [5 - 11].

В настоящей работе мы начинаем более подробное изучение строго регулярных алгебр в контексте теории многообразий строго регулярных алгебр. При этом строго регулярные алгебры рассматриваются как алгебры с дополнительной унарной операцией $x \to x'$, связанной с основными операциями алгебры тождествами

$$x = x^2 x'; \quad x' = (x')^2 x. \tag{$*$}$$

Все рассматриваемые в работе алгебры - ассоциативные алгебры над произвольным, но фиксированным основным полем Φ.

В § 1, носящем вводный характер, обосновывается естественность тождеств ($*$) при рассмотрении строго регулярных алгебр, указываются их основные свойства, приводящие к понятию многообразия строго регулярных алгебр, и специфичные свойства, отличающие их от "обычных" многообразий алгебр, которые состоят из строго регулярных алгебр. Кроме того, дан нужный результат из теории полей (см., например, [12, с.254]).

В § 2 доказывается ряд свойств абсолютно свободной строго регулярной алгебры $\mathfrak{F}_1$ ранга 1, исследование которой велось совместно с Р.С.Григор и Ю.М.Рябухиным (в работе [13] рассмотрено построение алгебры $\mathfrak{F}_1$ разными способами).

Полученный набор свойств алгебры $\mathfrak{F}_1$ оказался достаточным для полного описания всех вполне характеристических собственных идеалов алгебры $\mathfrak{S}_1$, что равносильно перечислению всех многообразий строго регулярных алгебр с базисным рангом I. В § 3 и 4 показано, что это описание существенно зависит от выбора основного поля Φ:

I) в $\mathfrak{S}_1$ есть только один собственный вполне характеристический идеал тогда и только тогда, когда Φ – алгебраически замкнутое поле;

2) в $\mathfrak{S}_1$ есть хотя бы два, но не более конечного числа собственных вполне характеристических идеала тогда и только тогда, когда $char\,\Phi = 0$ и алгебраическое замыкание $\hat{\Phi}$ основного поля Φ получается присоединением к Φ корня i неприводимого многочлена X^2+1;

3) в остальных случаях существует бесконечно много (как правило, континуум) попарно различных вполне характеристических идеалов.

Данное в § 3 полное описание вполне характеристических идеалов алгебры $\mathfrak{S}_1$ позволило построить континуальные семейства бесконечно базируемых многообразий строго регулярных алгебр. Оказалось, например, что если основное поле Φ является простым, то многообразие $Var'(\Phi(x))$ строго регулярных алгебр, порожденное полем $\Phi(x)$ рациональных дробей, не имеет конечного базиса тождеств и содержит континуальное семейство бесконечно базируемых подмногообразий. Для сравнения напомним, что "обычное" многообразие $Var(\Phi(x))$ алгебр, порожденное полем $\Phi(x)$, совпадает с многообразием всех коммутативных алгебр и потому задается одним тождеством – тождеством коммутативности.

Автор благодарит Ю.М.Рябухина, под руководством которого выполнена данная работа, и Р.С.Григор за внимание и неоценимую помощь при проведении совместных исследований и обсуждении основных результатов.

§ I. Предварительные сведения, основные определения и вспомогательные результаты

Напомним, что алгебра S называется строго регулярной, если для любого $a \in S$ найдется такой $b \in S$, что $a = a^2 b$.

Вообще говоря, элемент b, обеспечивающий указанное равенство, определяется элементом a не однозначно. Однако при некоторых дополнительных условиях на выбор элемента b, он определяется элементом a уже однозначно. Наиболее важный для нас случай указывает

ЛЕММА I.I. Пусть a – ненулевой элемент строго регулярной алгебры S. Тогда главный идеал $(\!| a |\!)$, порожденный элементом a, является алгеброй с единицей e_a, причем a оказывается обратимым в этой алгебре, т.е.

$$a a' = a' a = e_a\,, \quad a e_a = a = e_a a \qquad (I)$$

для некоторого элемента $a' \in (a)$. Элемент e_a является центральным идемпотентом в алгебре S, и поэтому

$$(a) = Sa = Se_a = e_a S = aS . \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем учитывать, что в любой строго регулярной алгебре нет ненулевых нильпотентных элементов, и потому все идемпотенты центральные.

По определению, $a = a^2 b$ для некоторого $b \in S$. Выбрав и зафиксировав элемент b, положим $e_a = ab$. По построению,

$$e_a = ab, \quad a = ae_a . \qquad (3)$$

Из (3) вытекает, что $e_a \in (a)$. Кроме того, $a(e_a - e_a^2) = 0$. Но тогда в силу отсутствия нильпотентных элементов (см. [I4, с.286]) элемент $(e_a - e_a^2) \in (a)$ аннулирует этот главный идеал. В частности, $(e_a - e_a^2)^2 = 0$ и потому $e_a = e_a^2$ - центральный идемпотент в S.

Снова применяя (3) и доказанное, получаем второе из равенств (I). Тогда в силу центральности идемпотента e_a следует, что e_a - единица алгебры (a).

Переписываем равенства (3) в виде

$$a = a^2 b = ae_a = ae_a^2 = a^2 (bab). \qquad (4)$$

Полагая $a' = bab$, находим, что $a' \in (a)$ и $a = a^2 a'$ в силу (4). Повторяя проведенное выше рассуждение для элемента a, получаем, что aa' - единица алгебры (a), т.е. $aa' = e_a$. Поэтому элемент a обратим в алгебре (a) с единицей e_a, причем обратным к a элементом будет элемент $a' = bab$. В результате получаем первое из равенств (I), а из (I) с очевидностью вытекает (2). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.I. Пусть e_a, a' - те же элементы, что и в лемме I.I. Тогда a' - единственный элемент $b \in (a)$, обеспечивающий равенство $a = a^2 b$. При этом

$$a = a^2 a', \quad a' = (a')^2 a. \qquad (5)$$

Действительно, в силу леммы I.I элемент e_a определяется ненулевым элементом $a \in S$ однозначно, так как он должен быть единицей алгебры (a). Но тогда и элемент $b \in (a)$, обеспечивающий равенство $a = a^2 b$, определится элементом a однозначно, поскольку он должен совпасть с элементом a', обратным элементу a в алгебре (a). При этом, по определению обратного элемента, будут справедливы и равенства (5).

СЛЕДСТВИЕ I.2. Алгебра S строго регулярна тогда и только тогда, когда на S можно определить унарную операцию $a \to a'$ так, что выполнены равенства (5).

Достаточно заметить, что из (5) вытекает включение $a' \in (a)$, и применить следствие I.I.

СЛЕДСТВИЕ I.3. Пусть T - тело. Тогда алгебра T строго регулярна и существует единственная унарная операция $a \to a'$, для которой в T справедливы равенства (5), т.е. если a - элемент тела T, то должно быть

$$a' = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0; \\ a^{-1}, & \text{если } a \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Это с очевидностью вытекает из следствия I.I, так как единственным ненулевым главным идеалом в теле T является сама алгебра T.

Таким образом, строго регулярные алгебры естественно рассматривать как мультиоператорные алгебры (см., например, [5 - 17]), отличающиеся от обычных алгебр (т.е. ассоциативных алгебр над полем Φ) только наличием одной дополнительной унарной операции $a \to a'$, связанной с основными операциями тождествами (5).

Мы будем рассматривать строго регулярные алгебры указанным выше образом - как алгебры с дополнительной унарной операцией. При таком подходе класс $\mathcal{S}$ всех строго регулярных алгебр оказывается многообразием (заданным "обычными" тождествами "обычных" алгебр и дополнительными тождествами (5)), поэтому к $\mathcal{S}$ можно применять общую теорию многообразий и тождеств мультиоператорных алгебр (все необходимое можно найти в [15 - 17]). Из общей теории многообразий алгебраических систем получаем соответствующие теоремы о характеристике многообразий строго регулярных алгебр (подмногообразия в $\mathcal{S}$ - это в точности классы строго регулярных алгебр, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов, строго регулярных подалгебр и прямых произведений), о взаимосвязи между многообразиями строго регулярных алгебр и вполне характеристическими идеалами абсолютно свободной строго регулярной алгебры S_{χ_0} счетного ранга, о полной решетке многообразий строго регулярных алгебр, рассматриваемых как подмногообразия в $\mathcal{S}$ и т.д. Мы не будем делать этого перевода основных понятий и теорем общей теории многообразий на язык многообразий строго регулярных алгебр, а применим соответствующие понятия и теоремы без особых оговорок.

Укажем некоторые специфические свойства строго регулярных алгебр и многообразий строго регулярных алгебр.

В силу леммы I.I в любой строго регулярной алгебре $S \neq 0$ есть ненулевые центральные идемпотенты. В связи с этим напомним, что для центральных идемпотентов естественным образом вводится частичный порядок по правилу

$$e \leq f \Longleftrightarrow e = ef. \qquad (7)$$

Из (7) вытекает, что центральные идемпотенты любой алгебры образуют решетку, в которой пересечением идемпотентов e_1, e_2 будет их произведение $e_1 e_2$, а объединением - присоединенное произведение $e_1 \circ e_2 = e_1 + e_2 - e_1 e_2$. Более того, если в алгебре есть единица, то ее центральные идемпотенты образуют булеву решетку (см., например, [18] и [19]).

ЛЕММА I.2. Пусть S - ненулевая строго регулярная алгебра. Тогда в обозначениях из леммы I.I множество $\mathcal{E}(S)$ всех ее центральных идемпотентов совпадает с $\{e_a \mid a \in S\}$. При этом считаем, что $e_0 = 0$. Соответствие $(a) \mapsto e_a$ является изоморфизмом решетки всех главных идеалов алгебры S на решетку $\mathcal{E}(S)$ всех ее центральных идемпотентов. В частности, все односторонние идеалы в S являются идеалами (т.е. двусторонними идеалами!) и все конечно-порожденные идеалы - главными.

Действительно, то, что соответствие $(a) \mapsto e_a$ является изоморфизмом решеток, вытекает из леммы I.I, следствия I.I, соотношения (7) и легко доказываемых равенств

$$(e_{a_1}) + (e_{a_2}) = (e_{a_1} \circ e_{a_2}), \quad (e_{a_1}) \cap (e_{a_2}) = (e_{a_1} \cdot e_{a_2}) \qquad (8)$$

Остается применить равенства (2) и (8).

Леммы I.I и I.2 показывают специфику строго регулярных алгебр. Специфику многообразий строго регулярных алгебр показывает следующее утверждение, легко вытекающее из указанных лемм:

СЛЕДСТВИЕ I.4. Любая строго регулярная алгебра является подпрямым произведением тел. Поэтому любое многообразие строго регулярных алгебр порождается (как подмногообразие в $\mathcal{S}$) телами.

СЛЕДСТВИЕ 0.5. Среди ненулевых многообразий строго регулярных алгебр существует наименьшее - им будет многообразие $Var'(\Phi)$ строго регулярных алгебр, порожденное основным полем Φ.

Достаточно учесть следствия I.3, I.4 и то, что любое ненулевое тело (даже любая ненулевая строго регулярная алгебра) содержит строго регулярную подалгебру, изоморфную Φ.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Конечно, необходимо брать в расчет и то, что "мультиоператорными" подалгебрами строго регулярной алгебры S будут в точности ее строго регулярные подалгебры. А именно, мы должны учесть, что замкнутость нужно рассматривать и относительно "обычных" операций алгебры, и относительно унарной операции $a \to a'$. Между тем, если A – строго регулярная подалгебра строго регулярной алгебры S, то $(a)_A \subseteq (a)_S$ для всех $a \in A$, и поэтому в силу следствий I.I и I.2, если $a \in A$, то $a' \in A$, хотя мы и вычисляли элемент a' во всей алгебре S.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу сказанного, если S – строго регулярная алгебра, то можно говорить о "мультиоператорной" подалгебре в S, порожденной заданным непустым подмножеством M в S. Это будет наименьшая строго регулярная подалгебра $\langle M \rangle'$ алгебры S, содержащая заданное подмножество M.

СЛЕДСТВИЕ I.6. Пусть M – непустое подмножество в строго регулярной алгебре S. Строим по индукции цепь подалгебр $M^{(m)}$ в S, считая, что $M^{(0)} = \langle M \rangle$ – подалгебра алгебры S, порожденная заданным подмножеством M, и

$$M^{(m+1)} = \langle a, b' / a, b \in M^{(m)} \rangle \tag{9}$$

для всех целых чисел $m \geq 0$. Тогда $\langle M \rangle' = \bigcup_{m \geq 0} M^{(m)}$.

Действительно, в силу (9) получаем, что из $a \in M^{(m)}$ вытекает $a' \in M^{(m+1)}$ и что подалгебры $M^{(m)}$ образуют возрастающую цепь подалгебр. Остается учесть замечания I и 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Основное отличие многообразий строго регулярных алгебр от "обычных" многообразий алгебр состоит именно в том, что вместо "обычных" подалгебр нужно рассматривать строго регулярные подалгебры (это отличие показано в следствии I.6). Согласно общей теории многообразий алгебраических систем класс $\mathfrak{M}$ строго регулярных алгебр будет многообразием строго регулярных алгебр, т.е. подмногообразием в $\mathcal{S}$, тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия гомоморфных образов, прямых произведений и строго регулярных подалгебр. Между тем очевидно, что не во всякой строго регулярной подалгебре все ее подалгебры строго регулярны.

В дальнейшем, учитывая указанное отличие, многообразие строго регулярных алгебр, порожденное классом $\mathcal{M}$, мы будем обозначать символом $Var'(\mathcal{M})$, а "обычное" многообразие алгебр, порожденное тем же классом, – символом $Var(\mathcal{M})$. При этом включение $Var'(\mathcal{M}) \subseteq Var(\mathcal{M})$ всегда будет справедливым, но, как правило, и строгим, т.е. $Var'(\mathcal{M}) \neq Var(\mathcal{M})$.

Из хорошо известных утверждений о радикально-полупростых классах (см., например, работы [6 – II]) легко вытекает

СЛЕДСТВИЕ I.7. Пусть ненулевое многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр состоит только из строго регулярных алгебр. Тогда основное поле Φ

должно быть конечным, среди тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{M}$, есть тождество вида $x^q = x$ для некоторого целого $q \geq 1$ и многообразие $\mathfrak{M}$ порождается некоторым конечным (с точностью до изоморфизма) классом конечных алгебр, являющихся полями. В частности, если $\mathcal{M}$ - некоторый класс ненулевых строго регулярных алгебр, то $Var'(\mathcal{M}) = Var(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда для некоторого конечного набора $\{Q_j \mid j \in \Delta\}$ конечных алгебр, являющихся полями, все алгебры из класса $\mathcal{M}$ - подпрямые произведения алгебр Q_j.

В заключение этого параграфа укажем некоторые необходимые нам сведения из теории полей.

Будем считать хорошо известными понятия конечного (точнее, конечномерного) и алгебраического расширений, алгебраически замкнутого поля и алгебраического замыкания и т.д. (см., например, главы, посвященные теории полей, из [12] и [20]). Напомним только, что конечномерная алгебра будет простым расширением основного поля Φ тогда и только тогда, когда она является полем (конечномерным), полученным присоединением одного корня некоторого многочлена из $\Phi[x]$, т.е. изоморфным подполю алгебраического замыкания $\hat{\Phi}$ основного поля, порожденному как подполе (или как строго регулярная подалгебра (см. следствие I.3)) одним элементом $\xi \in \hat{\Phi}$. Это равносильно тому, что рассматриваемое поле изоморфно фактор-алгебре $\Phi[x]/p\,\Phi[x]$ для некоторого неприводимого многочлена $p \in \Phi[x]$. Простым, но бесконечномерным расширением основного поля можно считать и поле $\Phi(x)$ рациональных дробей от одной переменной x - это простое трансцендентное расширение основного поля.

ЛЕММА I.3. Пусть основное поле Φ не является алгебраически замкнутым. Тогда равносильны следующие утверждения:

а) существует лишь конечное число попарно не изоморфных простых конечных расширений поля Φ;

б) существует такое натуральное число $N \geq 2$, что все неприводимые многочлены $p \in \Phi[x]$ имеют степень $\deg p \leq N$;

в) алгебраическое замыкание $\hat{\Phi}$ основного поля Φ конечномерно, т.е. само является конечным расширением;

г) $\dim \hat{\Phi} = 2$, $\operatorname{char} \Phi = 0$ и $\hat{\Phi} = \Phi(i)$ - простое расширение, полученное присоединением корня i многочлена x^2+1;

д) с точностью до изоморфизма имеется точно два конечных расширения основного поля Φ: Φ и $\hat{\Phi}$, причем $\dim \hat{\Phi} = 2$;

е) существует лишь конечное число попарно не изоморфных конечных расширений основного поля Φ;

ж) все неприводимые многочлены $p \in \Phi[x]$ имеют степень $\leqslant 2$, причем есть хотя бы один многочлен p (неприводимый) степени 2.

Действительно, достаточно доказать равносильность первых четырех утверждений, так как для простого конечного расширения $\Phi(\xi)$ основного поля Φ существует лишь конечное число промежуточных подполей (см., например, [12, с.211 - 212]).

а) => б). Это вытекает из указанной выше взаимосвязи между неприводимыми многочленами и конечными простыми расширениями.

б) => в). Пусть степени всех неприводимых многочленов ограничены в совокупности некоторым числом $N \geqslant 2$. Рассмотрим возникающие случаи.

Поле Φ сепарабельно (например, [12]). В этом случае все конечные расширения просты согласно теореме о примитивном элементе (см. [20, с.169]). Но тогда, если последовательно присоединять новые корни к простым расширениям $\Phi(\xi)$, начиная с Φ, мы не более чем за N шагов дойдем до $\hat{\Phi}$ и получим, что $\dim \hat{\Phi} \leqslant N$.

Поле Φ не сепарабельно. В этом случае $char\, \Phi = p > 0$ и поле Φ не совершенно, т.е. существуют элементы $a \in \Phi$, не являющиеся p-й степенью никакого элемента из Φ (см., например, [12 , с.217]). Тогда для всех натуральных чисел $r \geqslant 1$ соответствующие многочлены $X^{p^r} - a$ будут неприводимы [12, с.254].

Между тем, все они должны иметь степень, не превосходящую N. Получили противоречие, т.е. этот случай невозможен.

в) => г) - хорошо известный тонкий результат теории полей (см.[12, с.254]).

г) => а). Если справедливо утверждение г), то справедливо д), а значит, и а). Лемма доказана.

§ 2. Абсолютно свободная строго регулярная алгебра $\mathfrak{S}_1$ ранга I

Напомним, что согласно общей теории многообразий алгебраических систем абсолютно свободная строго регулярная алгебра $\mathfrak{S}_1$ ранга I характеризуется следующими двумя свойствами:

1) алгебра $\mathfrak{S}_1$ порождается, как строго регулярная алгебра, своей свободной порождающей x, т.е. $\mathfrak{S}_1 = \langle x \rangle'$;

2) для любой строго регулярной алгебры S и любого ее элемента s существует и притом точно один гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{S}_1 \to S$ такой, что $\varphi(x) = s$.

В этом параграфе мы укажем основные свойства алгебры S_1. Будем придерживаться уже введенных в § I обозначений.

Рассмотрим сначала несколько соотношений, справедливых в любой строго регулярной алгебре.

ЛЕММА 2.I. В любой строго регулярной алгебре S справедливы тождества (см. следствие I.2):

$$(x_1 x_2)' = x_2' x_1'; \quad (x')' = x. \tag{IO}$$

Действительно, в силу следствия I.3 (см. (6)) тождества (IO) выполняются в любом теле, а значит, они справедливы и в любой строго регулярной алгебре в силу следствия I.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. В любой строго регулярной алгебре S выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} e_{ab} = e_a e_b = e_{ba}; \\ ab = ba \Longrightarrow ab' = b'a \Longrightarrow a'b' = b'a'. \end{gathered} \tag{II}$$

Это с очевидностью вытекает из леммы I.I. Можно было воспользоваться и тем, что соотношения (II) справедливы в любом теле.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть A - подалгебра строго регулярной алгебры S. Если алгебра A коммутативна, то коммутативна и порожденная ею строго регулярная подалгебра $\langle A \rangle'$ алгебры S.

Действительно, согласно следствию I.6 алгебра $\langle A \rangle'$ является объединением возрастающей цепочки подалгебр $A^{(m)}$, построенных по правилу (9). Однако в силу леммы 2.I, следствия 2.I и соотношений (9) - (II), если подалгебра $A^{(m)}$ коммутативна, то коммутативна и следующая подалгебра $A^{(m+1)}$. Остается применить индукцию.

ЛЕММА 2.2. Абсолютно свободная строго регулярная алгебра S_1 ранга I является коммутативной строго регулярной алгеброй с единицей e_x. При этом подалгебра $\langle x \rangle$, порожденная свободной образующей x, изоморфна алгебре $x\Phi[x]$ многочленов без свободных членов и потому $\langle x, e_x \rangle \approx \Phi[x]$. Более того, подалгебра $\langle x, x' \rangle$ алгебры S_1 изоморфна алгебре $\mathcal{R}_{\{x\}}$ - алгебре дробей алгебры многочленов $\Phi[x]$ по ее мультипликативно замкнутой подсистеме $M_{\{x\}} = \{x^n \mid n$ - целое число, $n \geqslant 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из построения ясно, что алгебра S_1 совпадает со своим главным идеалом $(\!| x |\!)$ и порождается, как строго регулярная алгебра, своей подалгеброй $\langle x \rangle$. Поэтому S_1 - коммутативная строго регулярная алгебра с единицей e_x в силу следствия 2.2 и леммы I.I.

Допустим, что подалгебра $\langle x \rangle$ не изоморфна алгебре $x\Phi[x]$, т.е. является собственным гомоморфным образом этой алгебры. Тогда, как легко видеть, $\langle x \rangle$ - конечномерная алгебра. Поэтому в силу второго из характеристических свойств алгебры $\mathfrak{S}_1$ в любой строго регулярной алгебре S для любого ее элемента s подалгебра $\langle s\rangle$ конечномерна. Однако это не так: в поле $\Phi(x)$ элемент x порождает бесконечномерную подалгебру $x\,\Phi[x]$. Противоречие.

Итак, $\langle x\rangle \approx x\,\Phi[x]$, поэтому $\langle x, e_x\rangle \approx \Phi[x]$. С учетом доказанного будем считать, что алгебра $\Phi[x]$ многочленов содержится в алгебре $\mathfrak{S}_1$ в качестве подалгебры: мы отождествляем $\Phi[x]$ и $\langle x, e_x\rangle$.

Снова применяя лемму I.I, получаем, что элемент x алгебр $\Phi[x]$ и $\mathfrak{S}_1$ обратим в алгебре $\mathfrak{S}_1$. Обратным к элементу x будет элемент x', и поэтому все элементы мультипликативно замкнутой системы $M_{\{x\}}$ будут обратимы в алгебре $\mathfrak{S}_1$. А из этого вытекает в силу хорошо известных свойств алгебр дробей (см., например, [I2, с.85 - 88]), что тождественное вложение алгебры $\Phi[x]$ в алгебру $\langle x, x'\rangle$ продолжается и притом единственным образом до изоморфизма алгебры $\mathcal{R}_{\{x\}}$ на эту подалгебру $\langle x, x'\rangle$. Лемма доказана. Учитывая ее, мы будем всюду ниже отождествлять алгебры $\Phi[x]$ и $\langle x, e_x\rangle$, $\mathcal{R}_{\{x\}}$ и $\langle x, x'\rangle$, т.е. считать, что указанные алгебры являются подалгебрами в $\mathfrak{S}_1$. В частности, единицу алгебры $\mathfrak{S}_1$ обозначаем символом I.

Хорошо известно, что каждый многочлен $f\in\Phi[x]$, отличный от констант, представляется в виде произведения неприводимых многочленов. Здесь и всюду ниже полагаем

$$\mathcal{P}=\Big\{p\in\Phi[x]\mid p \text{ - неприводим, старший коэффициент в } p \text{ равен } 1,\ p\neq x\Big\}. \qquad (12)$$

ЛЕММА 2.3. С каждым неприводимым многочленом $p\in\mathcal{P}$ свяжем центральные идемпотенты

$$e_p=pp'=p'p, \quad e_p^*=1-e_p. \qquad (13)$$

В результате получаем ортогональную систему $\{e_p^*\mid p\in\mathcal{P}\}$ идемпотентов в алгебре $\mathfrak{S}_1$. При этом соответствующие подалгебры $k_p=\Phi[x]\,e_p^*$ будут главными идеалами алгебры $\mathfrak{S}_1$, изоморфными, как алгебры, соответствующим конечным простым расширениям $\Phi[x]/p\Phi[x]$ основного поля Φ, т.е. полям вычетов алгебры $\Phi[x]$ по простому модулю p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_1, p_2\in\mathcal{P}$ и $p_1\neq p_2$. Тогда многочлены p_1, p_2 взаимно просты, а значит $1=u_1p_1+u_2p_2$ для некоторых многочленов u_1, u_2. Поэтому для соответствующих главных идеалов алгебры $\mathfrak{S}_1$ получаем равенство $(\!(p_1)\!)+(\!(p_2)\!)=\mathfrak{S}_1=(\!(1)\!)$, из которого вытекает в силу леммы I.2 (см. (8)), что $e_{p_1}\circ e_{p_2}=1$. Тогда в силу (I3)

$$e^*_{p_1}\cdot e^*_{p_2}=(1-e_{p_1})(1-e_{p_2})=1-(e_{p_1}\circ e_{p_2})=0.$$

Следовательно, $\{e^*_p \mid p\in\mathcal{P}\}$ – ортогональная система центральных идемпотентов в алгебре $\mathbf{S}_1$.

Легко видеть, что умножение на центральный идемпотент является эндоморфизмом. Поэтому $k_p=\Phi[x]e^*_p$ – подалгебра алгебры $\mathbf{S}_1$, являющаяся гомоморфным образом алгебры многочленов $\Phi[x]$. В частности, для соответствующего гомоморфизма $\varepsilon_p : \Phi[x]\longrightarrow k_p$ (сужения на $\Phi[x]$ умножения на центральный идемпотент e^*_p), получаем включение $Ker\,\varepsilon_p\supseteq p\,\Phi[x]$ в силу (I3). Однако конечномерное поле $\Phi[x]/p\,\Phi[x]$ является гомоморфным образом абсолютно свободной строго регулярной алгебры $\mathbf{S}_1$, как и любое другое однопорожденное поле. Из этого легко вытекает, что $k_p\neq 0$, поэтому $Ker\,\varepsilon_p=p\Phi[x]$, т.е. $k_p\approx\Phi[x]/p\Phi[x]$ для соответствующего неприводимого многочлена $p\in\mathcal{P}$.

Осталось показать, что k_p – идеалы, т.е.

$$\forall p\in\mathcal{P}\mid \Phi[x]e^*_p=k_p=\mathbf{S}_1\,e^*_p\,. \qquad (I4)$$

Ясно, что $\mathbf{S}_1=\langle\Phi[x]\rangle'$. Поэтому для доказательства (I4) достаточно доказать, что для всех целых чисел $m\geqslant 0$ подалгебра $\Phi[x]^{(m)}$, построенная по правилу (9) из следствия I.6, обладает свойством $\Phi[x]^{(m)}e^*_p\leq k_p$ для всех $p\in\mathcal{P}$. Но при $m=0$ нужное нам включение очевидно по построению алгебр $k_p=\Phi[x]e^*_p$, поэтому достаточно доказать, что справедлива импликация

$$\forall p\in\mathcal{P}\mid \Phi[x]^{(m)}e^*_p\leq k_p\Longrightarrow\Phi[x]^{(m+1)}e^*_p\leq k_p. \qquad (I5)$$

Пусть $a\in\mathbf{S}_1$ и мы доказали, что $ae^*_p\in k_p$. Если $ae^*_p=0$, то $(a)e^*_p=0$, а значит, и $a'e^*_p=0$. Поэтому, очевидно, что $a'e^*_p\in k_p$.

Если $ae^*_p\neq 0$, то ae^*_p – ненулевой элемент поля k_p, по предположению. Применяя замечание I и следствия I.2, I.3 и 2.I вместе с леммой 2.I, получаем, производя вычисления в алгебре k_p, что $(ae^*_p)'=a'e^*_p=(ae^*_p)^{-1}\in k_p$.

В результате мы доказали импликацию

$$\forall p\in\mathcal{P}\mid ae^*_p\in k_p\Longrightarrow a'e^*_p\in k_p\,. \qquad (I6)$$

Из (I6), леммы 2.I, следствия 2.I и правила (9) легко вытекает импликация (I5), а с ней и равенство (I4).

ЛЕММА 2.4. Тождественное отображение $\{x\} \longrightarrow \{x\}$ продолжается и притом единственным образом до гомоморфизма $\nu: S_1 \longrightarrow \Phi(x)$ алгебры S_1 на поле $\Phi(x)$ рациональных дробей. Ядром этого канонического гомоморфизма будет идеал $I = \oplus_{p\in\mathcal{P}} k_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.3 вытекает, что идеалы k_p действительно образуют прямую сумму в силу ортогональности идемпотентов e_p^*. Снова применяя лемму 2.3, получаем, что алгебра $I = \oplus_{p\in\mathcal{P}} k_p$ есть локально конечномерная алгебра. Однако в алгебрах $\Phi[x]$ и $\Phi(x)$ нет идеалов, являющихся ненулевыми локально конечномерными алгебрами. Поэтому $\Phi[x] \cap I = 0$ и $Ker\,\nu \supseteq I$. Остается показать, что $S_1/I \approx \approx \Phi(x)$, а это легко вытекает из построения идеала I (подробнее см. в [13, лемму 3]).

Доказанные леммы содержат достаточно большую информацию об алгебре S_1, позволяющую строить эту алгебру разными способами. Соответствующие построения (вплоть до указания базиса и таблицы умножения базисных элементов) проведены в работе [13]. Нам будет полезен следующий результат, с очевидностью вытекающий из основных результатов работы [13, теорема 3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $E = \prod_{p\in\mathcal{P}} k_p$ - прямое произведение алгебр k_p из леммы 2.3. Тогда с точностью до изоморфизма

$$I = \oplus_{p\in\mathcal{P}} k_p \subseteq S_1 \subseteq E = \prod_{p\in\mathcal{P}} k_p . \tag{17}$$

Многообразия строго регулярных алгебр близки по своим свойствам к радикально-полупростым классам. Однако, как показала Е.Н.Захарова [9 - 11], при изучении радикально-полупростых классов большую роль играют идемпотенты и простые подалгебры свободных алгебр соответствующих многообразий. В связи с этим дадим описание простых подалгебр (т.е.подполей) и идемпотентов в абсолютно свободной строго регулярной алгебре S_1 ранга 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если i - ненулевой идемпотент в S_1, то найдется такое конечное $\Delta \subseteq \mathcal{P}$, что либо $i = \sum_{p\in\Delta} e_p^*$, либо $i = 1 - \sum_{q\in\Delta} e_q^*$. При этом первый случай выполняется тогда и только тогда, когда $i \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \in I$, $i \neq 0$. Тогда, рассматривая ненулевые проекции ie_p^* элемента i в соответствующие поля k_p, получаем, по построению I, что $i = \sum_{p\in\Delta} e_p^*$ для некоторого конечного непустого $\Delta \subseteq \mathcal{P}$. Если же $i \notin I$, $i = i^2 \neq 0$, то, применяя канонический гомоморфизм $\nu: S_1 \longrightarrow \Phi(x)$ (см. лемму 1.4), получаем, что $i\nu$ - ненулевой идемпотент поля $\Phi(x)$. Поэтому справедливо равенство $i\nu = 1\cdot\nu$. Переходя к прообразам, видим, что либо $i=1$, либо $1-i$ - ненулевой идемпотент алгебры I. Остается учесть уже доказанное.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Все ненулевые простые подалгебры в S_1, т.е. подполя в S_1, конечномерны и изоморфны подполям подходящих полей k_p из разложений алгебр I и E. Более того, если k - подполе в S_1, причем $\dim k \geqslant 2$, то существует такое непустое конечное $\Delta \subseteq \mathcal{P}$, что $k \subseteq \oplus k_p \subseteq I$ и для каждого $p \in \Delta$ проекция $k e_p^*$ есть подполе поля k_p, изоморфное полю k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k - подполе в S_1 и i - единица этого поля, $i \neq 0$. Тогда в силу соотношения (I7) хотя бы одна проекция ke_p^* будет ненулевой. При этом для соответствующего $p \in \mathcal{P}$ получаем, что k изоморфно подполю ke_p^* поля k_p и потому само поле k конечномерно.

Допустим теперь, что $\dim k \geqslant 2$. Тогда при каноническом гомоморфизме $\nu: S_1 \longrightarrow \Phi(x)$ поле k перейдет в нуль, так как единственным конечномерным подполем поля $\Phi(x)$ является основное поле Φ, поэтому $k \subseteq Ker\,\nu = I$. Отсюда, записывая представление идемпотента i, получаем в силу предложения I.2, что $k \subseteq \oplus k_p \subseteq I$ для некоторого конечного непустого $\Delta \subseteq \mathcal{P}$ такого, что для всех $p \in \Delta$, проекции $k e_p^*$ - ненулевые. Предложение доказано.

§ 3. Многообразия строго регулярных алгебр, имеющие базисный ранг I

Напомним, что в соответствии с терминологией общей теории многообразий алгебраических систем, натуральное число $r \geqslant 1$ называется базисным рангом многообразия $\mathfrak{M}$ строго регулярных алгебр, если оно порождается (как подмногообразие в φ) своей свободной строго регулярной r-порожденной алгеброй, но не порождается своими свободными строго регулярными алгебрами меньшего ранга (см. [I7, с.344]).

Нас будут интересовать многообразия с базисным рангом I. В силу сказанного любое такое многообразие порождается своей свободной строго регулярной алгеброй ранга I. Однако в силу хорошо известного соответствия между вполне характеристическими идеалами и подмногообразиями свободная в $\mathfrak{M}$ строго регулярная алгебра ранга I изоморфна фактор-алгебре $S_1 / T_{\mathfrak{M}}(S_1)$, где вполне характеристический идеал $T_{\mathfrak{M}}(S_1)$ строится по правилу

$$T_{\mathfrak{M}}(S_1) = \cap \left\{ J \triangleleft S_1 \mid S_1 / J \in \mathfrak{M} \right\}. \tag{I8}$$

Это означает, что соответствие $\mathfrak{M} \longrightarrow T_{\mathfrak{M}}(S_1)$ является взаимно однозначным отображением множеств всех многообразий строго регулярных алгебр с базисным рангом I на множество всех вполне характеристических идеалов абсолютно свободной строго регулярной алгебры $\mathbf{S}_1$, построенной в § I. Поэтому мы должны описать вполне характеристические идеалы этой строго регулярной алгебры $\mathbf{S}_1$. Будем придерживаться обозначений и понятий, введенных в предыдущих параграфах.

Из следствия I.5 с очевидностью вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Среди собственных вполне характеристических идеалов алгебры $\mathbf{S}_1$ существует наибольший:

$$T_{\Phi}=T_{Var'(\Phi)}(\mathbf{S}_1)=\cap\left\{J\triangle\mathbf{S}_1 \mid \mathbf{S}_1/J\in Var'(\Phi)\right\}=$$

$$=\cap\left\{j\triangle\mathbf{S}_1\mid \mathbf{S}_1/j\approx\Phi\right\}. \qquad (I9)$$

Поэтому собственные вполне характеристические идеалы алгебры $\mathbf{S}_1$ образуют полную решетку (относительно теоретико-множественного включения и обычных операций пересечения и суммы над идеалами) с наибольшим элементом T_{Φ}.

Основную роль будут играть многообразие $Var'(\Phi(x))$ строго регулярных агебр, порожденное полем $\Phi(x)$ рациональных дробей, и соответствующий ему вполне характеристический идеал $T_{\Phi(x)}=T_{Var'(\Phi(x))}(\mathbf{S}_1)$. Причину этого выявляет

ЛЕММА 3.I. Пусть $\mathfrak{M}$ – ненулевое многообразие строго регулярных алгебр, имеющее базисный ранг I. Тогда:

а) либо $\Phi(x)\in\mathfrak{M}$;

б) либо $\Phi(x)\notin\mathfrak{M}$, основное поле Φ конечно и $\mathfrak{M}=Var'(\Delta)=$ $=Var(\Delta)$ для некоторого конечного множества Δ конечномерных полей, являющихся простыми расширениями основного поля Φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\mathbf{S}}_1$ – свободная в $\mathfrak{M}$ строго регулярная алгебра ранга I. По определению, $\mathfrak{M}=Var'(\bar{\mathbf{S}}_1)$.

Допустим, что $\Phi(x)\notin\mathfrak{M}$. Тогда алгебра $\Phi(x)$ не является гомоморфным образом алгебры $\bar{\mathbf{S}}_1$. Проводя анализ доказательства основных лемм 2.2 – 2.4, получаем, что свободная порождающая $\bar{x}$ порождает в алгебре $\bar{\mathbf{S}}_1$ конечномерную подалгебру $\langle\bar{x}\rangle$. Однако в силу классических структурных теорем $\langle\bar{x}\rangle$ – конечная прямая сумма конечномерных простых расширений основного поля Φ, а значит, и строго регулярная алгебра. Поэтому эта подалгебра совпадает со всей алгеброй $\bar{S}_1$, т.е. $\bar{\mathbf{S}}_1\approx\bigoplus_{\rho\in\Delta}K_\rho$ для некоторого конечного множества конечномерных простых расширений основного поля Φ. Из сказанного вытекает, что среди тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ есть тождество вида

$$x = x^2 g(x) \qquad (20)$$

для некоторого многочлена $g \in \Phi[x]$. Однако (20) уже обеспечивает строго регулярность всех алгебр с этим тождеством, поэтому многообразие $Var(\bar{k}_p \mid p \in \Delta)$ алгебр, порожденное указанными конечномерными полями, состоит только из строго регулярных алгебр.

Остается учесть, что $\mathfrak{M} = Var'(\bar{k}_p \mid p \in \Delta)$, и применить следствие I.7.

ЛЕММА 3.2. Пусть A - произвольная строго регулярная алгебра и $T_A = T_{Var'(A)}$ - ее идеал "строго регулярных" тождеств в алгебре S_1. Тогда

$$T_A = \cap \{ \mathcal{J} \vartriangleleft S_1 \mid S_1/\mathcal{J} \text{ - изоморфно некоторой подалгебре алгебры } A \}. \qquad (21)$$

Это вытекает из общих утверждений о свободных алгебраических системах (см., например, [17,с.358]).Действительно, в силу указанного утверждения свободная в $Var'(A)$ строго регулярная алгебра $\bar{S}_1 = S_1/T_A$ изоморфно вкладывается в прямое произведение $Q = \prod_{j \in \Gamma} Q_j$ некоторого семейства алгебр Q_j, изоморфных заданной строго регулярной алгебре A. Тогда, учитывая (18) и то, что $\bigcap_{j \in \Gamma} Ker\, \bar{\varepsilon}_j = 0$ для сужений $\bar{\varepsilon}_j$ проектирований ε_j на алгебре $\bar{S}_1$, получаем равенство (21).

Нас будет интересовать только тот случай, когда в алгебре S_1 достаточно "много" вполне характеристических идеалов. В связи с этим укажем сначала исключение - когда в S_1 есть только один собственный вполне характеристический идеал, т.е. когда есть точно одно ненулевое многообразие строго регулярных алгебр, имеющее базисный ранг I.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Следующие утверждения об основном поле Φ и абсолютно свободной строго регулярной алгебре S_1 ранга I эквивалентны:

а) в S_1 существует точно один собственный вполне характеристический идеал;

б) в алгебре S_1 справедливо равенство $T_\Phi = 0$;

в) в алгебре S_1 справедливо равенство $T_{\Phi(x)} = 0$;

г) основное поле Φ алгебраически замкнуто, т.е. $\Phi = \hat{\Phi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а), б) равносильны в силу предложения 3.I. Из него же вытекает, что б) $\Longrightarrow$ в).

в) $\Longrightarrow$ г). Пусть $T_{\Phi(x)} = 0$. Допустим, что основное поле Φ не является алгебраически замкнутым. Это означает, что не любой многочлен $f \in \Phi[x]$ с $deg\, f \geq 1$ разлагается над полем Φ на линейные множители, т.е. существует хотя бы один неприводимый многочлен $p \in \in \mathcal{P}$ с $deg\, p \geq 2$. Но в алгебре $\Phi(x)$ единственным конечномерным подполем является само поле Φ. Поэтому при любом гомоморфизме $\varphi: \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \longrightarrow \Phi(x)$ соответствующий идеал k_p должен перейти в нуль. Это означает в силу леммы 3.2, что $k_p \subseteq T_{\Phi(x)}$. Получили противоречие с тем, что $T_\Phi = O$, а k_p – ненулевой идеал в алгебре $\mathfrak{S}_1$ в силу леммы 2.3.

г) $\Longrightarrow$ б). Пусть $\Phi = \bar{\Phi}$. Тогда для всех $p \in \mathcal{P}$ соответствующее поле k_p изоморфно основному полю Φ, поскольку $p = x - \alpha$ для некоторого $\alpha \in \Phi$ в силу предполагаемой алгебраической замкнутости Φ. Отсюда в силу предложения I.I получаем включение $\mathfrak{S}_1 \in Var'(\Phi)$, так как оказалось, что $E \in Var'(\Phi)$. Следовательно, из предложения 3.I вытекает равенство $T_\Phi = O$.

Предложение доказано. Оно показывает, что в $\mathfrak{S}_1$ может быть достаточно много вполне характеристических идеалов только в случае, если основное поле Φ не алгебраически замкнуто, т.е. множество

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ p \in \mathcal{P} \mid deg(p) \geq 2 \right\} \tag{22}$$

не пусто. Учитывая сказанное, мы всюду ниже так и будем считать. Из допущения вытекает, что идеал $T_{\Phi(x)}$ будет ненулевым собственным вполне характеристическим идеалом в $\mathfrak{S}_1$ в силу предложения 2.2.

ТЕОРЕМА 3.I. В алгебре $\mathfrak{S}_1$, $T_{\Phi(x)} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_0} k_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.2 (см. (21)), леммы 2.4 и предложения 2.I вытекает в силу (22) соотношение

$$\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} k_p = I \geq T_{\Phi(x)} \geq I_0 = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_0} k_p . \tag{23}$$

Идеалы алгебры, являющейся прямой суммой полей, легко описываются, поэтому из включения (23) вытекает равенство

$$T_{\Phi(x)} = \bigoplus_{p \in Q} k_p \tag{24}$$

для некоторого Q такого, что $\mathcal{P} \geq Q \geq \mathcal{P}_0$. Остается показать в силу (24), что $Q = \mathcal{P}_0$.

Допустим, что $Q \neq \mathcal{P}_0$, т.е. существует $q \in Q$, $q \notin \mathcal{P}_0$. В силу (22) $deg\, q = 1$, а значит, $k_q \approx \Phi \approx \Phi 1$.

Отображение $\Psi : \beta e_q^* \rightsquigarrow \beta 1$ является изоморфизмом поля k_q на подполе $\Phi 1$ алгебры $\mathfrak{S}_1$. Отображение $\varepsilon_q : s \rightsquigarrow s e_q^*$ является эндоморфизмом алгебры $\mathfrak{S}_1$. В результате возникает эндоморфизм $\theta = \varepsilon_q \Psi$ алгебры $\mathfrak{S}_1$.

Для построенного эндоморфизма θ получаем $\varepsilon_q^* \theta = e_q^* \varepsilon_q \Psi = = e_q^* \Psi = 1$. Однако $T_{\Phi(x)}$ – вполне характеристический идеал, поэтому из $e_q^* \in T_{\Phi(x)}$ вытекает, что $1 = e_q^* \theta \in T_{\Phi(x)} \theta \subseteq T_{\Phi(x)}$. Тогда $T_{\Phi(x)} = = \mathfrak{S}_1$. Получили противоречие с тем, что $T_{\Phi(x)} \neq \mathfrak{S}_1$, так как $T_{\Phi(x)} \subseteq \subseteq I \neq \mathfrak{S}_1$ в силу леммы I.4. Теорема доказана.

Для описания вполне характеристических идеалов в S_1 нам необходимо ввести в рассмотрение одно частично упорядоченное множество и несколько связанных с ним понятий. Для этого вводим на (непустом!) множестве $\mathcal{P}_0$ (см. (22)) бинарное отношение $\longrightarrow$ по правилу

$$p_1 \longrightarrow p_2 \Longleftrightarrow k_{p_1} \text{ изоморфно вкладывается в } k_{p_2} \tag{25}$$

и бинарное отношение $\longleftrightarrow$ по правилу

$$p_1 \longleftrightarrow p_2 \Leftrightarrow (p_1 \longrightarrow p_2) \,\&\, (p_2 \longrightarrow p_1). \tag{26}$$

Из (25) и (26) вытекает, что $p_1 \longleftrightarrow p_2$ равносильно тому, что поля k_{p_1} и k_{p_2} изоморфны. Поэтому бинарное отношение $\longleftrightarrow$ является эквивалентностью на множестве $\mathcal{P}_0$ и бинарное отношение $\longrightarrow$ согласовано с этой эквивалентностью. Поэтому, построив фактор-множество $\bar{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0 / \longleftrightarrow$ и обозначив класс эквивалентности, содержащий заданный $p \in \mathcal{P}_0$, (символом $\bar{p}$, получим, что бинарное отношение

$$\bar{p}_1 \longrightarrow \bar{p}_2 \Longleftrightarrow p_1 \longrightarrow p_2 \tag{27}$$

корректно определено на множестве $\bar{\mathcal{P}}_0$ и превращает его в частично упорядоченное множество.

Именно это частично упорядоченное множество $\bar{\mathcal{P}}_0$ с частичным порядком $\longrightarrow$ нам и необходимо. Отметим еще раз, что элементы $\bar{p} \in \bar{\mathcal{P}}_0$ – это, на самом деле, классы полей, изоморфных заданному полю k_p с $\dim k_p \geq 2$, а частичный порядок $\longrightarrow$ – возможность изоморфного вложения соответствующих полей.

Напомним, что согласно общепринятой терминологии (см., например, [8, с.II]), подмножество W в $\bar{\mathcal{P}}_0$ является верхним (нижним) конусом, если с каждым своим элементом $\bar{p}_0$ оно содержит и все такие $\bar{p} \in \bar{\mathcal{P}}_0$, что $\bar{p}_0 \longrightarrow \bar{p}$ ($\bar{p} \longrightarrow \bar{p}_0$ соответственно). При этом допускаются и пустые конусы.

Ясно, что в таком случае множества всех верхних конусов в $\bar{\mathcal{P}}_0$ и всех нижних конусов в $\bar{\mathcal{P}}_0$ являются частично упорядоченными множествами (относительно теоретико-множественного включения) и даже полными дуально-изоморфными друг другу решетками (объединение и пересечение – теоретико-множественные, наименьший конус – пустой, наибольший конус – все $\bar{\mathcal{P}}_0$, дуальный изоморфизм – переход к дополнениям в $\bar{\mathcal{P}}_0$).

Скажем, что подмножество Q в $\mathcal{P}_0$ замкнуто относительно увеличения (уменьшения), если с каждым $q \in Q$ оно содержит все такие $p \in \mathcal{P}_0$, что $q \longrightarrow p$ (соответственно $p \longrightarrow q$). Из этих определений с очевидностью вытекает, что подмножества, замкнутые относительно увеличения (уменьшения) - это в точности полные прообразы верхних (нижних) конусов при естественном отображении $\delta: \mathcal{P}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0/\longleftrightarrow$.

ТЕОРЕМА 3.2. Отображение, ставящее в соответствие каждому верхнему конусу W в $\bar{\mathcal{P}}_0$ идеал

$$T(W) = \bigoplus_{\bar{p} \in W} k_p, \qquad (28)$$

является изоморфизмом полной решетки всех верхних конусов в $\bar{\mathcal{P}}_0$ на полную решетку всех вполне характеристических идеалов алгебры S_1, содержащихся в идеале $T_{\Phi(x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что сумма пустого множества идеалов совпадает с нулевым идеалом. При такой договоренности правило (28) ставит в соответствие пустому конусу нуль.

I. Если W - верхний конус, то идеал $T(W)$, построенный по правилу (28), является вполне характеристическим идеалом.

Действительно, если W - пуст, то доказывать нечего. Поэтому будем считать, что верхний конус W не пуст. Тогда полный прообраз $\delta^{-1}(W)$ - не пустое подмножество в $\mathcal{P}_0$, замкнутое относительно увеличения, и равенство (28) принимает вид

$$T(W) = \bigoplus_{p \in \delta^{-1}(W)} k_p. \qquad (29)$$

Возьмем любой эндоморфизм θ алгебры S_1. Тогда

$$(T(W))\theta = \sum_{p \in \delta^{-1}(W)} k_p \theta \qquad (30)$$

в силу (29). Пусть $p \in \mathcal{P}_0$ и $p \in \delta^{-1}(W)$, т.е. $\bar{p} \in W$. Тогда в силу предложения I.3 найдется такое непустое конечное $\Delta \subseteq \mathcal{P}_0$, что $k_p\theta \subseteq \bigoplus_{q \in \Delta} k_q \subseteq I_0$ и для каждого $q \in \Delta$ проекция ke_q^* поля $k = k_p\theta$ является подполем поля k_q, изоморфным полю k_p. Однако из сказанного вытекает, что $p \longrightarrow q$ для всех $q \in \Delta$. Поэтому в силу замкнутости $\delta^{-1}(W)$ относительно увеличения $\Delta \subseteq \delta^{-1}(W)$. Следовательно, $k_p\theta \subseteq T(W)$ с учетом (29), поэтому $T(W)$ - вполне характеристический идеал алгебры S_1, содержащийся в идеале $T_{\Phi(x)}$ в силу равенств (29), (30), леммы 2.3 и теоремы 3.I.

II. Если T - вполне характеристический идеал алгебры S_1, содержащийся в идеале $T_{\Phi(x)}$, и мы представили его в виде прямой суммы $T = \bigoplus_{q \in Q} k_q$ для соответствующего подмножества Q в $\mathcal{P}_0$, то множество Q замкнуто относительно увеличений и потому является полным прообразом верхнего конуса $W = \delta(Q)$, т.е. $T = T(W)$ для этого конуса.

Действительно, пусть $q \in Q$, $p \in \mathcal{P}_0$, $q \longrightarrow p$. Последнее означает, что существует изоморфное вложение $\Psi: k_q \longrightarrow k_p$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 3.I, находим такой эндоморфизм θ алгебры S_1, что $e_q^* \theta = e_p^*$. Однако $e_q^* \in T$, по построению, поэтому и $e_p^* \in T$, поскольку идеал T - вполне характеристический, а значит, справедливо и включение $k_p \subseteq T$, т.е. $k_p = S_1 e_p^*$.

Легко убедиться в том, что переходы от верхних конусов к вполне характеристическим идеалам и обратно, о которых говорится в пп.I и II, обратны друг другу. Поэтому теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Если основное поле Φ бесконечно, но не алгебраически замкнуто, то в алгебре S_1 существуют ненулевые собственные вполне характеристические идеалы, причем $T_\Phi = T_{\Phi(x)} \neq 0$. Поэтому собственные вполне характеристические идеалы алгебры S_1 образуют полную решетку, изоморфную полной решетке всех верхних конусов в $\bar{\mathcal{P}}_0$, а ненулевые многообразия строго регулярных алгебр с базисным рангом I - полную решетку, изоморфную полной решетке всех нижних конусов в $\bar{\mathcal{P}}_0$.

Действительно, в силу теорем 3.I и 3.2 достаточно доказать, что в случае бесконечности основного поля Φ справедливо равенство $T_\Phi = T_{\Phi(x)}$. Нужное нам равенство вытекает из равенства $Var'(\Phi) = Var'(\Phi(x))$, справедливого в силу леммы 3.I, так как мы предполагаем, что основное поле Φ бесконечно.

Если основное поле Φ конечно, то описание вполне характеристических идеалов в S_1 немного сложнее. Дело в том, что согласно лемме 3.I возникают собственные вполне характеристические идеалы, не содержащиеся в $T_{\Phi(x)}$; они соответствуют многообразиям $\mathfrak{M}$ строго регулярных алгебр таким, что $\Phi(x) \notin \mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть основное поле Φ конечно. Тогда:

а) частично упорядоченное множество $\bar{\mathcal{P}}_0$ изоморфно частично упорядоченному множеству $\mathcal{N}$ всех целых чисел $m \geq 2$ с отношением делимости в качестве частичного порядка. Изоморфизм устанавливается по правилу $\bar{p} \rightsquigarrow deg(p) = dim\ k_p$;

б) вполне характеристические идеалы алгебры S_1, содержащиеся в идеале $T_{\Phi(x)}$, образуют полную решетку $\mathcal{T}^0$, изоморфную полной решетке всех верхних конусов в $\bar{\mathcal{P}}_0$. Изоморфизм устанавливается по правилу: если W - непустой верхний конус в $\bar{\mathcal{P}}_0$, то ему ставится в соответствие вполне характеристический идеал

$$T(W) = \bigoplus_{\bar{p} \in W} k_p; \qquad (*)$$

пустому конусу ставится в соответствие нулевой идеал $T(\varnothing) = 0$;

в) собственные вполне характеристические идеалы алгебры S_1, не содержащиеся в идеале $T_{\Phi(x)}$, образуют решетку $\mathcal{T}^*$, дуально изоморфную решетке всех конечных нижних конусов в $\bar{\mathcal{P}}_0$. Наибольшим элементом в $\mathcal{T}^*$ является идеал T_Φ, а наименьшего в ней нет. Дуальный изоморфизм устанавливается по правилу: если N – конечный непустой нижний конус в $\bar{\mathcal{P}}_0$, то ему ставится в соответствие вполне характеристический идеал

$$T^*(N) = \bigcap_{p \in N} T_{k_p}; \qquad (**)$$

пустому конусу ставится в соответствие вполне характеристический идеал T_Φ;

г) решетки $\mathcal{T}^0$ и $\mathcal{T}^*$ являются подрешетками в полной решетке $\mathcal{T}$ всех собственных вполне характеристических идеалов алгебры S_1. Более того, $\mathcal{T}^0$ – главный идеал в решетке $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$ – фильтр в этой решетке и

$$\mathcal{T}^0 \cap \mathcal{T}^* = \varnothing; \quad \mathcal{T}^0 \cup \mathcal{T}^* = \mathcal{T}. \qquad (31)$$

Если W – верхний конус в $\bar{\mathcal{P}}_0$, а N – конечный нижний конус в $\bar{\mathcal{P}}_0$, то вполне характеристические идеалы $T(W), T^*(N)$ сравнимы тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_0 \setminus N \supseteq W$. При этом окажется, что $T^*(N) \supseteq T(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что если поля k', k'' являются конечными расширениями основного (конечного!) поля Φ, то k' изоморфно вкладывается в k'' тогда и только тогда, когда $\dim k'$ – делитель числа $\dim k''$. А из этого с очевидностью вытекает справедливость утверждения а) по построению частично упорядоченного множества $\bar{\mathcal{P}}_0$.

В силу леммы 3.I, если $\mathfrak{M}$ – ненулевое многообразие строго регулярных алгебр с базисным рангом I, причем $\Phi(x) \notin \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = Var'(\Delta) = Var(\Delta)$ для некоторого однозначно определенного конечного (с точностью до изоморфизма) наследственного (в смысле работы [II]) класса Δ конечных простых расширений k_p основного поля Φ. Значит, либо $\mathfrak{M} = Var'(\Phi) = Var(\Phi)$ и в этом случае $T_{\mathfrak{M}}(S_1) = T_\Phi = T^*(\varnothing)$, либо в $\mathfrak{M}$ есть поля k_p с $p \in \mathcal{P}_0$ и тогда $T_{\mathfrak{M}}(S_1) = \bigcap_{p \in \Gamma} T_{k_p}$ для некоторого конечного непустого подмножества Γ в $\mathcal{P}_0$ замкнутого относительно уменьшения. При этом в силу леммы 2.2

$$T_{k_p} = \bigcap \Big\{ J \triangleleft S_1 \mid S_1/J \approx k_q \text{ для некоторого } q \in \mathcal{P} \text{ такого, что}$$
$$\text{либо } k_q \approx \Phi, \text{ либо } q \in \mathcal{P}_0 \text{ и } q \longrightarrow p \Big\}. \qquad (32)$$

Но тогда в силу следствия I.7 получаем в).

Осталось доказать г). Оно легко вытекает из пп. б), в), равенств (**),(*) и равенства (32), так как (31) очевидно. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что каково бы ни было конечное поле Φ решетка $\mathcal{T}$ всех собственных вполне характеристических идеалов алгебры $\mathfrak{S}_1$ одна и та же, с точностью до изоморфизма решеток, и бесконечна.

§ 4. Бесконечная базируемость многообразий строго регулярных алгебр и бесконечность решетки вполне характеристических идеалов в $\mathfrak{S}_1$

Покажем теперь, что решетка всех вполне характеристических идеалов в $\mathfrak{S}_1$ почти всегда бесконечна.

ТЕОРЕМА 4.I. Следующие утверждения об основном поле Φ и абсолютно свободной строго регулярной алгебре $\mathfrak{S}_1$ ранга I эквивалентны:

а) решетка всех вполне характеристических идеалов алгебры $\mathfrak{S}_1$ конечна и имеет хотя бы три различных элемента;

б) частично упорядоченное множество $\overline{\mathfrak{P}}_0$ конечно и непусто;

в) существует лишь конечное число попарно не изоморфных конечномерных простых расширений основного поля Φ, причем хотя бы одно из них имеет размерность 2;

г) алгебраическое замыкание $\hat{\Phi}$ основного поля Φ конечномерно над Φ, хотя это поле не алгебраически замкнуто;

д) $\dim \hat{\Phi} = 2$, $\operatorname{char} \Phi = 0$ и $\hat{\Phi}$ получается из Φ присоединением корня i многочлена x^2+1.

Действительно, равносильность утверждений а), б) легко вытекает из теорем 3.2, 3.3 и предложения 3.2, так как множество верхних конусов в $\overline{\mathfrak{P}}_0$ конечно тогда и только тогда, когда само частично упорядоченное множество $\overline{\mathfrak{P}}_0$ конечно. Равносильность утверждений б), в) вытекает из построения частично упорядоченного множества $\overline{\mathfrak{P}}_0$. Остается применить лемму I.3. Теорема доказана.

Учитывая теорему 4.I, будем считать, что алгебраическое замыкание $\hat{\Phi}$ основного поля Φ бесконечно мерно над Φ. Согласно лемме I.3 или теореме 4.I "почти все" поля, в частности все конечные поля и поле рациональных чисел, удовлетворяют этому требованию.

Ввиду указанной договоренности в абсолютно свободной строго регулярной алгебре $\mathfrak{S}_1$ ранга I будет бесконечно много вполне характеристических идеалов. Покажем, что в таком случае возникают бесконечно базируемые многообразия строго регулярных алгебр - многообразия строго регулярных алгебр, которые нельзя задать конечным набором "строго регулярных" тождеств.

Напомним, что согласно общей теории тождеств и многообразий алгебраических систем ненулевой элемент $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ абсолютно свободной строго регулярной алгебры S_{X_0} со счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ свободных порождающих называется строго регулярным тождеством (или, короче, тождеством) в строго регулярной алгебре A, если $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, т.е. $\varphi(f) = 0$ для любого гомоморфизма $\varphi: S_{X_0} \to A$. На самом деле, мы продолжаем перевод основных понятий и результатов общей теории многообразий алгебраических систем на рассматриваемый нами случай многообразия $\mathcal{Y}$ строго регулярных алгебр (см. § I, следствие I.2 и далее), учитывая их специфику.

Для построения конкретных примеров бесконечно базируемых многообразий строго регулярных алгебр продолжим изучение алгебры S_1 и соответствующего частично упорядоченного множества $\bar{\mathcal{P}}_0$.

Напомним, что ввиду договоренности частично упорядоченное множество $\bar{\mathcal{P}}_0$ бесконечно.

ЛЕММА 4.I. Частично упорядоченное множество $\bar{\mathcal{P}}_0$ удовлетворяет условию минимальности. Поэтому в любом непустом верхнем конусе W множество $Min(W) = \{\bar{p} \in W \mid p$ - минимальный элемент в $W\}$ не пусто и конус W однозначно "восстанавливается" по своему множеству $Min(W)$ минимальных элементов

$$W = \{\bar{q} \in \bar{\mathcal{P}}_0 \mid \bar{p} \longrightarrow \bar{q} \text{ для некоторого } \bar{p} \in Min(W)\}. \quad (33)$$

Действительно, рассмотрим в $\bar{\mathcal{P}}_0$ любую строго убывающую цепь $\bar{p}_1 \to \bar{p}_2 \to \bar{p}_3 \longrightarrow \ldots$ попарно различных элементов. Эта цепь должна быть конечной, так как ей соответствует строго убывающая цепь $dim\, k_{p_1} > dim\, k_{p_2} > dim\, k_{p_3} > \ldots$ натуральных чисел. Поэтому $\bar{\mathcal{P}}_0$ удовлетворяет условию минимальности, т.е. условию обрыва строго убывающих цепей. Все остальное, в том числе и равенство (33), с очевидностью вытекает из доказанного и определения верхнего конуса.

Выделим теперь в абсолютно свободной строго регулярной алгебре S_1 некоторые элементы специального вида:

$$\forall p \in \bar{\mathcal{P}}_0 \mid st_p(x) = xx' - (xp)(xp)'. \quad (34)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть W - любой такой верхний конус в $\bar{\mathcal{P}}_0$, что множество $Min(W)$ бесконечно. Пусть $\{k_{p_i} \mid i \in \Gamma\}$ - соответствующее множество попарно неизоморфных идеалов k_{p_i} из I_0, т.е. $Min(W) = \{\bar{p}_i \mid i \in \Gamma\}$ и элементы $\bar{p}_i$ уже попарно не сравнимы. Строим многообразие $\mathfrak{M}(W)$ строго регулярных алгебр, заданное системой тождеств:

$$\forall i \in \Gamma \mid st_{\rho i}(x_1) \equiv 0. \tag{35}$$

Тогда многообразие $\mathfrak{M}(W)$ не может быть задано никаким конечным набором строго регулярных тождеств. Более того, (35) - бесконечный независимый базис строго регулярных тождеств многообразия $\mathfrak{M}(W)$: ни одно из тождеств (35) не вытекает из совокупности всех остальных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать вполне характеристический идеал алгебры R, порожденный ее непустым подмножеством M символом $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$. Тогда, по условию, многообразие $\mathfrak{M}(W)$ задается в свободной (абсолютно) строго регулярной алгебре $\mathfrak{F}_{\chi_0}$ своим идеалом строго регулярных тождеств

$$T_{\mathfrak{M}(W)} = \langle\!\langle st_{\rho i}(x_1) \mid i \in \Gamma \rangle\!\rangle. \tag{36}$$

Нам надо доказать, что этот идеал не порождается, как вполне характеристический идеал, никаким своим конечным подмножеством. Для этого достаточно доказать, что для любого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$.

$$T_{\mathfrak{M}(W)} \neq \langle\!\langle st_{\rho j}(x_1) \mid j \in \Delta \rangle\!\rangle. \tag{37}$$

Но множество Γ бесконечно, поэтому (37) будет доказано в том случае, если будет доказана независимость системы (35), т.е. соотношение

$$\forall j \in \Gamma \mid \langle\!\langle st_{\rho i}(x_1) \mid i \in \Gamma,\ i \neq j \rangle\!\rangle \neq T_{\mathfrak{M}(W)}. \tag{38}$$

Для доказательства (38) необходимо для каждого $j \in \Gamma$ построить такую строго регулярную алгебру A_j, чтобы $st_{\rho j}(x_1)$ не являлось тождеством в A_j, но все $st_{\rho i}(x_1)$ с $i \in \Gamma$, $i \neq j$ уже были тождествами в строго регулярной алгебре A_j.

Вычисляя элемент $st_\rho(x)$ в алгебре $\mathfrak{F}_1$, легко получаем в силу лемм 2.1 - 2.3, что

$$\forall \rho \in \mathcal{P}_0 \mid st_\rho(x) = e_\rho^* . \tag{39}$$

Поэтому из (36) и теоремы 3.2 вытекает, что в алгебре $\mathfrak{F}_1$

$$T_{\mathfrak{M}(W)}(\mathfrak{F}_1) = \langle\!\langle e_{\rho i}^* \mid i \in \Gamma \rangle\!\rangle = \Gamma(W) \tag{40}$$

в силу (39). Учитывая (40), строим для каждого $j \in \Gamma$ верхний конус W_j в $\bar{\mathcal{P}}_0$, порожденный множеством $Min(W) \setminus \{\bar{\rho}_j\}$. Тогда

$$\forall j \in \Gamma \mid e^*_{\rho j} \notin T(W_j)\,; \tag{41}$$

$$i \in \Gamma,\ i \neq j \Longrightarrow e^*_{\rho i} \in T(W_j) \tag{42}$$

в силу попарной несравнимости и построения элементов из $Min(W)$ вполне характеристических идеалов $T(W_j)$.

Для каждого $j \in \Gamma$ строим фактор-алгебру $S^{(j)} = \mathfrak{S}_1 / T(W_j)$. Тогда в силу вполне характеристичности идеалов $T(W_j)$ из (39), (42) вытекает, что все $st_{\rho i}(x_1)$ с $i \in \Gamma$, $i \neq j$ будут тождествами в алгебре $\mathfrak{S}^{(j)}$, а $st_{\rho j}(x_1)$ не является тождеством в строго регулярной алгебре $S^{(j)}$ в силу (41).

Таким образом, соотношения (38) справедливы, т.е. система (35) независимый базис строго регулярных тождеств многообразия $\mathfrak{M}(W)$ в силу (36) и (38). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если существует хотя бы один верхний конус W с бесконечным множеством $Min(W)$, то существует континуальное семейство бесконечно базируемых многообразий строго регулярных алгебр.

Действительно, это с очевидностью вытекает из теоремы 4.2, так как каждому бесконечному подмножеству в $Min(W)$ будет соответствовать свое бесконечно базируемое многообразие.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если основное поле Φ конечно или является полем рациональных чисел, то существует континуальное семейство бесконечно базируемых многообразий строго регулярных алгебр. При этом многообразие $Var'(\Phi(x))$ будет бесконечно базируемым, т.е. поле $\Phi(x)$ рациональных дробей, рассматриваемое как строго регулярная алгебра, не имеет конечного базиса строго регулярных тождеств.

Действительно, в силу следствия 3.1 достаточно доказать, что для верхнего конуса $\overline{\mathcal{P}}_0$ множество $Min(\overline{\mathcal{P}}_0)$ бесконечно. Следовательно, если поле Φ конечно, то все вытекает из теоремы 3.3, поскольку множество простых чисел бесконечно, а если Φ - поле рациональных чисел, то для получения бесконечного подмножества в $Min(\overline{\mathcal{P}}_0)$ достаточно рассмотреть квадратичные расширения $\mathcal{R}(\sqrt{q}) = \mathcal{R} + \mathcal{R}\sqrt{q}$, соответствующие простым числам.

В связи со следствием 4.2 напомним, что "обычное" многообразие $Var(\Phi(x))$ алгебр, порожденное полем $\Phi(x)$, совпадает с многообразием всех коммутативных алгебр и потому задается одним тождеством - тождеством коммутативности.

Цитированная литература

I. Goodearl K.R. Von Neumann regular rings, Pitmann, London, San Francisco, Melbourne, 1979. - 369 p.

2. Джекобсон Н. Строение колец. - М.: ИЛ., I96I. - 392 с.

3. Скорняков Л.А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. - М.: Физматгиз, I96I. - I98 с.

4. Armendariz E.P., Fisher J.W. Regular PI-rings.- Proc.Amer. Math. Soc., 1973, v.39, p.247 - 250.

5. Gardner B.J. Radical classes of regular rings with primitive images. - Pasific J.Math., 1982, v.49, p.337 - 350.

6. Stewart P.N. Semisimple radical classes. - Pasific J.Math., 1970, v.32, p.249 - 254.

7. Wiegandt R. Homomorphically closed semisimple classes. - Studia Univ. Babes, Bolyai, Ser. Math,Mech,1972,v.2,p.17 - 20.

8. Gardner B.J., Stewart P.N. On semisimple radical classes. - Bull.Austral,Math.Soc., 1975, v.13, p.349 - 353.

9. Захарова Е.Н. О радикально полупростых классах колец и алгебр. - В кн.: Алгебраические структуры. Математические исследования, вып.56. - Кишинев: Штиинца, I980, с.5I - 6I.

I0. Захарова Е.Н. О радикалах приведенно-свободных локально-конечных алгебр. - Рукопись деп. в ВИНИТИ, I9.04.I983. № 2033. - 28 с.

II. Захарова Е.Н. Радикально полупростые классы и радикалы приведенно-свободных алгебр. - Рукопись деп. в ВИНИТИ,28.09.I983,№5367. - 23 с.

I2. Ленг С. Алгебра. - М.: Мир, I968. - 564 с.

I3. Григор Р.С., Рябухин Ю.М. Абсолютно свободная строго регулярная алгебра ранга I. - Настоящий сборник, с. 48 - 60.

I4. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. - М.: Наука, I979. - 495 с.

I5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. - М.: Наука,I973.- 399с.

I6. Кон П. Универсальная алгебра. - М.: Наука, I968. - 352с.

I7. Мальцев А.Н. Алгебраические системы. - М.:Наука,I970. - 39Iс.

I8. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. - М.: Наука,I970.- I47с.

I9. Ламбек Н. Кольца и модули. - М.: Мир, I97I. - 279с.

20. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. - М.: Наука, I976. - 648с.

Д.В.Ботнару

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ КАТЕГОРИИ ОТДЕЛИМЫХ ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

Введение

В статье [I] (см. также [2 - 6]) автор ввел для категории $C_2\mathcal{V}$- отделимых локально-выпуклых топологических векторных пространств понятие сопряженной пары подкатегорий. Если $\mathcal{K}$ - корефлексивная, а $\mathcal{R}$ - рефлексивная подкатегории категории $C_2\mathcal{V}$ с функторами корефлексии $k : C_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{K}$ и рефлексии $r : C_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}$, то пара $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ сопряжена, если и только если $kr = k$ и $rk = r$. Это определение - перевод на язык функторов тех основных свойств из теории двойственности, которыми обладает пара подкатегорий $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ пространств с топологией Макки и пространств со слабой топологией (см. [7]).

Рассмотрим только ненулевые (т.е. $\mathcal{K} \neq 0$ или, что то же самое, $\mathcal{R} \neq 0$) сопряженные пары подкатегорий категории $C_2\mathcal{V}$. В таком случае $\mathcal{K}$ называется c-корефлексивной, а $\mathcal{R}$ - c-рефлексивной подкатегорией. Каждый компонент такой пары однозначно определяет другой, поэтому свойство пары быть сопряженной можно сформулировать как с помощью свойств обеих функторов k и r, так и с помощью свойств каждого в отдельности из этих функторов. Объединив результаты работ [I - 5], относящиеся к сопряженным парам подкатегорий, сформулируем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Следующие условия равносильны:

I) $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ - сопряженная пара подкатегорий категории $C_2\mathcal{V}$, т.е. $kr = k$ и $rk = r$;

2) функтор k сопряжен слева функтору r;

3) функтор k перестановочен с индуктивными пределами;

4) функтор r перестановочен с проективными пределами;

5) $\mathcal{R}$-реплика каждого объекта из $C_2\mathcal{V}$ есть биективное отображение, и функтор r точен слева;

6) $\mathcal{R}$-реплика каждого объекта категории $C_2\mathcal{V}$ есть биективное отображение, и функтор r отображает класс вложений категории $C_2\mathcal{V}$ в классе вложений.

Далее, в статье [8] введено понятие относительной теории кручения, обобщающее известное для абелевых категорий понятие теории кручения, которое рассматривается Диксоном в [9]. Относительная теория кручения - это тоже пара $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ корефлексивной и рефлексивной подкатегорий с некоторыми свойствами. В [10] были исследованы относительные теории кручения некоторых топологических категорий, в частности, категории $C_2\mathcal{V}$. Оказалось, что если $\mathcal{P}$ – пополнение, т.е. $\mathcal{P}$-реплика каждого объекта категории $C_2\mathcal{V}$ является вложением, то пара $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ есть относительная теория кручения, если и только если функтор корефлексии $k: C_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{K}$ и функтор рефлексии $p: C_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{P}$ коммутируют: $kp = pk$. Свойство функтора корефлексии коммутировать с функтором пополнения исследуется давно и успешно в категории отделимых равномерных пространств (см. [11, 12]).

В данной статье рассматривается вопрос: когда пара $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ является относительной теорией кручения, если $(\mathcal{K},\mathcal{R})$ – сопряженная пара подкатегорий, а $\mathcal{P}$ – пополнение категории $C_2\mathcal{V}$? Оказалось, что при указанных условиях следующие утверждения равносильны (теорема 5):

1) $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ – относительная теория кручения категории $C_2\mathcal{V}$;

2) $kp = pk$;

3) $rp = pr$.

Далее, если $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ – относительная теория кручения категории $C_2\mathcal{V}$ то $(\mathcal{K}\cap\mathcal{P}, \mathcal{R}\cap\mathcal{P})$ – сопряженная пара подкатегорий категории $\mathcal{P}$. Более того, каждую сопряженную пару подкатегорий категории $\mathcal{P}$ можно получить, как след на $\mathcal{P}$ от некоторой сопряженной пары подкатегорий категории $C_2\mathcal{V}$ (теорема 10). Строятся примеры.

§ 1. Основные результаты

В дальнейшем $\mathcal{K}$ будет означать ненулевую корефлексивную подкатегорию категории $C_2\mathcal{V}$, а $\mathcal{P}$ – пополнение категории $C_2\mathcal{V}$. Рефлексивная подкатегория $\mathcal{P}$ категории $C_2\mathcal{V}$ называется пополнением, если $\mathcal{P}$-реплика любого объекта категории $C_2\mathcal{V}$ является вложением. Известно, что рефлексивная подкатегория $\mathcal{P}$ является пополнением, если и только если $\Gamma_0 \subset \mathcal{P}$, где Γ_0 – подкатегория всех полных пространств. Заметим также, что ненулевая корефлексивная подкатегория $\mathcal{K}$ категории $C_2\mathcal{V}$ обладает тем свойством, что $\mathcal{K}$-кореплика произвольного объекта есть биективное отображение.

Далее, пусть $k: C_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{K}$ и $r: C_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}$ – функторы корефлексии и рефлексии. Обозначим через $\mathcal{K}^*$ полную подкатегорию категории $C_2\mathcal{V}$ всех объектов X таких, что $rX \in |\mathcal{K}|$. Дуально, обозначим через $\mathcal{R}^*$ полную подкатегорию категории $C_2\mathcal{V}$ всех объектов X таких, что $kX \in |\mathcal{R}|$ [12]. Другие возможные определения подкатегорий $\mathcal{K}^*$ и $\mathcal{R}^*$ см. в работе [10].

ЛЕММА I.I (см. [I2, I0]). Для пары $(\mathcal{K},\mathcal{R})$ следующие условия равносильны:

F I. $r\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$.

F 1*. $k\mathcal{R}\subset\mathcal{R}$.

2) Если k – эпифунктор, т.е. переводит эпиморфизм в эпиморфизм, а $\mathcal{P}$ – пополнение, то для пары $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ выполняется условие $F1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) Пусть X – объект подкатегории $\mathcal{K}$, $\pi: X\to pX$ – его $\mathcal{P}$–реплика, а $\varkappa: kpX \longrightarrow pX$ является $\mathcal{K}$-корепликой объекта pX. Тогда $\pi=\varkappa\alpha$ для некоторого морфизма α. Поскольку π – эпиморфизм, а $\alpha = k(\pi)$, то α – также эпиморфизм. Но тогда квадрат $\varkappa\alpha=1\cdot\pi$ кодекортов [I0, лемма I.3]. Следовательно, $\varkappa$ – вложение, а так как, кроме того, $\varkappa$ – биективное отображение, то $\varkappa$ – изоморфизм.

Обозначим через $\mathcal{M}$ корефлексивную подкатегорию категории $C_2\mathcal{V}$ всех пространств с топологией Макки (см. [7]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\mathcal{M}\subset\mathcal{K}$, то для пары $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ выполняется условие $F1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного объекта X категории $C_2\mathcal{V}$ топологии на X и kX согласуются с одной и той же двойственностью [I3], следовательно, k – эпифунктор.

Заметим, что если $\mathcal{K}$ – c-корефлексивная подкатегория категории $C_2\mathcal{V}$, то $\mathcal{M}\subset\mathcal{K}$ [I].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{K}$ – c-корефлексивная подкатегория категории $C_2\mathcal{V}$, а $\mathcal{L}$ – рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{K}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

I) $k^{-1}\mathcal{L}$ – рефлексивная подкатегория категории $C_2\mathcal{V}$;

2) функторы корефлексии $k: C_2\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{K}$ и рефлексии $r: C_2\mathcal{V}\longrightarrow k^{-1}\mathcal{L}$ коммутируют: $kr = rk$;

3) если $\mathcal{L}$ – пополнение категории $\mathcal{K}$, то $k^{-1}\mathcal{L}$ является пополнением категории $C_2\mathcal{V}$, а $(\mathcal{K},k^{-1}\mathcal{L})$ – относительной теорией кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Проводится аналогично теоремам I.I и I.2 из работы [I0].

2) Пусть X – некоторый объект категории $C_2\mathcal{V}$; $\varkappa_X: kX\longrightarrow X$ – его $\mathcal{K}$-корепликa; $\lambda_X: kX \longrightarrow lkX$ – $\mathcal{L}$-реплика объекта kX; $\rho_X\varkappa_X = \psi_X\lambda_X$ – кодекартовый квадрат, построенный в категории $C_2\mathcal{V}$ на морфизмах $\varkappa_X$ и λ_X, где $\psi_X: lkX\longrightarrow rX$. Так как объект lkX принадлежит подкатегории $\mathcal{K}$, а функтор k перестановочен с индуктивными пределами, то легко доказать, что ψ_X является $\mathcal{K}$-корепп-

ликой объекта rX. Тем самым получаем, что $rX \in |k^{-1}\mathcal{L}|$. Далее непосредственная проверка показывает, что морфизм $\rho_X : X \longrightarrow rX$ есть $(k^{-1}\mathcal{L})$-реплика объекта X. Если же $X \in |\mathcal{K}|$, то согласно построению $(k^{-1}\mathcal{L})$-реплики $\mathcal{L}$-реплика объекта X и $(k^{-1}\mathcal{L})$-реплика совпадают. Таким образом, доказано, что $kr = rk$.

$$\begin{tikzcd} kX \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "\varkappa_X"'] & lkX \arrow[d, "\psi_X"] \\ X \arrow[r, dashed, "\rho_X"] & rX \end{tikzcd}$$

3) Если для произвольного объекта kX его $\mathcal{L}$-реплика является вложением, то в кодекартовом квадрате $\rho_X \varkappa_X = \psi_X \lambda_X$, ρ_X - также вложение. Этим доказано, что если $\mathcal{L}$ - пополнение категории $\mathcal{K}$, то $k^{-1}\mathcal{L}$ - пополнение категории $C_\ell \mathcal{V}$. Остается применить теорему 3.2 из [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще говоря, $(\mathcal{K}, k^{-1}\mathcal{L})$ не является относительной теорией кручения. Так как $kr = rk$ и квадрат $\rho_X \varkappa_X = \psi_X \lambda_X$ кодекартов, то $(\mathcal{K}, k^{-1}\mathcal{L})$ - относительная теория кручения, если и только если указанный квадрат декартов. Иногда это так (см. [14]).

Если $\mathcal{K}$ - корефлексивная подкатегория, а $\mathcal{P}$ - пополнение, то согласно [10, теорема 4.2] пара $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ является относительной теорией кручения, если и только если выполняются следующие условия:

F 1. $p\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

F 2. $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$.

F 3. $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$.

Оказывается, что если при этом $\mathcal{K}$ - c-корефлексивная подкатегория, то $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ - относительная теория кручения, если и только если для этой пары выполняется условие F 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{K}$ - c-корефлексивная подкатегория, а $\mathcal{P}$ - пополнение категории $C_\ell \mathcal{V}$. Тогда $(\mathcal{K}, \mathcal{P}^*)$ - относительная теория кручения категории $C_\ell \mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{K}$ является c-корефлексивной подкатегорией категории $C_\ell \mathcal{V}$, то $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ [1, предложение 3]. Значит, подкатегория $\mathcal{K} \cap \mathcal{P}$ является пополнением подкатегории $\mathcal{K}$ (следствие 2). Но тогда согласно теореме 3 $(\mathcal{K}, k^{-1}(\mathcal{K} \cap \mathcal{P}))$ - относительная теория кручения категории $C_\ell \mathcal{V}$. Остается заметить, что $k^{-1}(\mathcal{K} \cap \mathcal{P}) = \mathcal{P}^*$ [10, теорема 1.2б)*].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ - сопряженная пара подкатегорий категории $C_\ell \mathcal{V}$, а $\mathcal{P}$ - пополнение. Тогда следующие условия равносильны:

1) $(\mathcal{K},\mathcal{P})$- относительная теория кручения категории $C_\ell \mathcal{V}$;
2) $kp=pk$;
3) $rp=pr$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность условий 1) и 2) следует из теоремы 3.2 в [10].

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть X - некоторый объект категории $C_\ell \mathcal{V}$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} kX \arrow[r, "\varkappa_X"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & X \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "\pi_X"'] & rX \arrow[d, "\pi"'] \\ kpX=pkX \arrow[r, "\psi_X"] & pX \arrow[r, "\rho_{pX}"] & rpX \end{tikzcd},$$

где φ_X и π_X - $\mathcal{P}$-реплики, $\varkappa_X$ и ψ_X - $\mathcal{K}$-корепликм, а ρ_X и ρ_{pX} $\mathcal{R}$-реплики соответствующих объектов. Тогда $\rho_{pX}\pi_X=\pi\rho_X$ для некоторого морфизма π . Так как $\pi=r(\pi_X)$, а π_X - вложение, то π - также вложение [5, теорема 1]. Далее $\rho_{pX}\psi_X$ является $\mathcal{K}$-корепликой объекта rpX. Значит, $rpX\in|\mathcal{P}^*|=|\mathcal{P}|$ [10, теорема 1.2].

Далее квадрат $(\rho_{pX}\psi_X)\varphi_X=\pi(\rho_X\varkappa_X)$ - кодекартов [10, лемма 1.3]. Тогда легко доказать, что морфизм π является $\mathcal{P}$—репликой объекта rX. Таким образом, $rp=pr$.

3) $\Longrightarrow$ 2). Докажем, что $\mathcal{P}^*=\mathcal{P}$ и тем самым будет видно, что $kp=pk$. Согласно следствию 2 $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}^*$. Пусть сейчас $X\in|\mathcal{P}^*|$, т.е. $kX\in|\mathcal{P}|$ и проверим, что $X\in|\mathcal{P}|$. Покажем сначала, что $rX\in|\mathcal{P}|$. Имеем $prkX=prX$. Кроме того, так как функторы p и k коммутируют, а $kX\in|\mathcal{P}|$, то $prkX=rpkX=rkX=rX$, т.е. $prX=rX$. Следовательно, $rX\in|\mathcal{P}|$.

Докажем сейчас, что $X\in|\mathcal{P}|$ при условии, что $rX\in|\mathcal{P}|$. Пусть ρ_X : $X\longrightarrow rX$ и $\pi_X: X\longrightarrow pX$ являются $\mathcal{R}$- и $\mathcal{P}$-репликами объекта X. Поскольку $rX\in|\mathcal{P}|$, то $\rho_X=\alpha\pi_X$ для некоторого морфизма $\alpha: pX\longrightarrow rX$. Далее, так как π_X - эпиморфизм, то квадрат $1\cdot\rho_X=\alpha\pi_X$ - кодекартов. Учитывая это и тот факт, что ρ_X устойчивый мономорфизм [13], выводим, что α - мономорфизм. Тогда квадрат $\rho_X\cdot 1=\alpha\pi_X$ декартов и поскольку ρ_X - биективное отображение, то таким же является и π_X , т.е. π_X - изоморфизм.

Объединим изложенные выше результаты. Из полученного вытекает

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{K}$ - c-корефлексивная подкатегория категории $C_\ell\mathcal{V}$. Тогда:

1) соответствие $\mathcal{L}\longrightarrow k^{-1}\mathcal{L}$ устанавливает изоморфизм между классом рефлексивных подкатегорий категории $\mathcal{K}$ и классом рефлексивных подкатегорий категории $C_\ell\mathcal{V}$ таких, что $kr=rk$;

2) соответствие $\mathcal{L}\longrightarrow(\mathcal{K},k^{-1}\mathcal{L})$ устанавливает изоморфизм

между классом пополнений категории $\mathcal{K}$ и классом пополнений категории $C_2\mathcal{V}$ таких, что $kp = pk$.

Обратным к указанному в теореме 6 отображению является отображение $\mathcal{R} \longrightarrow (\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$. Однако может случиться, что для отличных друг от друга рефлексивных подкатегорий $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ категории $C_2\mathcal{V}$ имеем $\mathcal{K} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{K} \cap \mathcal{R}_2$. Оказывается, что среди таких рефлексивных подкатегорий всегда существуют наименьшая и наибольшая.

Пусть $\mathcal{K}$ – c-корефлексивная подкатегория категории $C_2\mathcal{V}$, а $\mathcal{L}$ – рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ – класс всех рефлексивных подкатегорий $\mathcal{R}$ категории $C_2\mathcal{V}$ таких, что $r\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ и $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L}$. Далее, положим $\mathcal{L}_m = \{\cap \mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}\}$. Подкатегории $\mathcal{R}$ из класса $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ замкнуты в $C_2\mathcal{V}$ относительно произведений и замкнутых подпространств. Следовательно, такой же является и подкатегория $\mathcal{L}_m$, т.е. $\mathcal{L}_m$ – рефлексивная подкатегория категории $C_2\mathcal{V}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathcal{R}$ – рефлексивная подкатегория категории $C_2\mathcal{V}$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L}$ и $k\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$;

2) $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{R} \subset k^{-1}\mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1 $\Longrightarrow$ 2) – очевидно. 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть r_m, r, l – соответствующие функторы рефлексии. Имеем $k\mathcal{L}_m \subset \mathcal{A}$ для любого элемента $\mathcal{A}$ класса $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$. Следовательно, $k\mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}_m$. Далее $\mathcal{L} = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}_m \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{K} \cap k^{-1}\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}$, т.е. $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L}$. Докажем, что $r\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$. Имеем $\mathcal{L} = r_m \mathcal{K} \subset r\mathcal{K} \subset l\mathcal{K} = \mathcal{L}$.

Если $\mathcal{L}$ – пополнение категории $\mathcal{K}$, а $\mathcal{L}_m$ – пополнение категории $C_2\mathcal{V}$, то любая рефлексивная подкатегория $\mathcal{R}$ класса $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ также является пополнением категории $C_2\mathcal{V}$.

<u>Вопрос 1.</u> Пусть $\mathcal{K}$ – c-корефлексивная подкатегория, а $\mathcal{R}$ – рефлексивная подкатегория категории $C_2\mathcal{V}$. Далее пусть $\mathcal{K} \cap \mathcal{R}$ – пополнение категории $\mathcal{K}$. Верно ли тогда, что $\mathcal{R}$ является пополнением категории $C_2\mathcal{V}$?

Если $\mathcal{L}$ – пополнение категории $\mathcal{K}$, то рассмотрим в классе $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ подкласс $\mathcal{R}'_{\mathcal{L}}$ всех пополнений категории $C_2\mathcal{V}$ и положим $\mathcal{L}'_m = \{\cap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{R}'_{\mathcal{L}}\}$.

Тогда аналогично предыдущему результату доказывается

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\mathcal{L}$ – пополнение c-корефлексивной подкатегории $\mathcal{K}$, а $\mathcal{P}$ – пополнение категории $C_2\mathcal{V}$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathcal{K} \cap \mathcal{P} = \mathcal{L}$;

2) $\mathcal{L}'_m \subset \mathcal{P} \subset k^{-1}\mathcal{L}$.

В статье [10, теорема 3.3] доказывается, что если для пары $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ выполняются условия $F1$ и $F2$, а $\mathcal{P}_1$ – пополнение категории $C_2\mathcal{V}$

и $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1$, то пара $(\mathcal{K},\mathcal{P}_1)$ также обладает свойствами $F1$ и $F2$.

Вопрос 2. Если, кроме того, предположить, что $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ - относительная теория кручения, а $\mathcal{K}$ - c-корефлексивная подкатегория, то верно ли тогда, что $(\mathcal{K},\mathcal{P}_1)$ - относительная теория кручения?

Если рассматривать дуальный вопрос, то он решается положительно.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - c-корефлексивные подкатегории категории $C_2\mathcal{V}$, $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, а $(\mathcal{K}_1,\mathcal{P})$ - относительная теория кручения. Тогда $(\mathcal{K}_2,\mathcal{P})$ также является относительной теорией кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X - некоторый объект категории $C_2\mathcal{V}$, $\varkappa_2$ - его $\mathcal{K}_2$-кореплика, а $\varkappa_1$ - $\mathcal{K}_1$-кореплика объекта k_2X. Тогда поскольку $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, то $\varkappa_2\varkappa_1$ является $\mathcal{K}_1$-корепликой объекта X. Далее, пусть $\mathcal{R}$ - $\mathcal{P}$-реплика объекта k_1X. Построим на морфизмах $\varkappa_1$ и $\mathcal{R}$ кодекартовый квадрат $\varkappa_3\mathcal{R} = \mathcal{R}_1\varkappa_1$. Так как $(\mathcal{K}_1,\mathcal{P})$- относительная теория кручения, то $\mathcal{R}_1$ является $\mathcal{P}$-репликой объекта k_2X, а $\varkappa_3$ - $\mathcal{K}_1$-корепликой объекта pk_2X. Аналогично, чтобы построить $\mathcal{P}$-реплику объекта X и $\mathcal{K}_1$-кореплику объекта pX, нужно на морфизмах $\varkappa_2\varkappa_1$ и $\mathcal{R}$ построить кодекартовый квадрат. Поскольку на морфизмах $\varkappa_1$ и $\mathcal{R}$ кодекартов квадрат построен, то достаточно построить кодекартов квадрат на морфизмах $\varkappa_2$ и $\mathcal{R}_1$: $\varkappa_4\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2\varkappa_2$. Тогда $(\varkappa_4\varkappa_3)\mathcal{R} = \mathcal{R}_2(\varkappa_2\varkappa_1)$ является кодекартовым квадратом.

$$\begin{tikzcd}
k_1X \arrow[r, "\varkappa_1"] \arrow[d, "\mathcal{R}"'] & k_2X \arrow[r, "\varkappa_2"] \arrow[d, "\mathcal{R}_1"'] & X \arrow[d, "\mathcal{R}_2"'] \\
pk_1X \arrow[r, "\varkappa_3"] & pk_2X \arrow[r, "\varkappa_4"] & pX
\end{tikzcd}$$

Остается заметить, что $pk_2X \in |\mathcal{K}_2|$ и так как $\mathcal{K}_2$ - c-корефлексивная подкатегория, то $\varkappa_4$ является $\mathcal{K}_2$-корепликой объекта pX. Этим доказано, что $k_2 p = p k_2$.

Вопрос 3. Пусть $\mathcal{P}$- пополнение категории $C_2\mathcal{V}$. Существует ли в классе c-корефлексивных подкатегорий категории $C_2\mathcal{V}$, образующих с подкатегорией $\mathcal{P}$ относительную теорию кручения, наименьшая?

Как следует из теоремы 5, если $(\mathcal{K},\mathcal{R})$ - сопряженная пара подкатегорий категории $C_2\mathcal{V}$, а $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ - относительная теория кручения, то $(\mathcal{K}\cap\mathcal{P}, \mathcal{R}\cap\mathcal{P})$ - сопряженная пара подкатегорий категории $\mathcal{P}$. Оказывается, что любая сопряженная пара подкатегорий некоторого пополнения $\mathcal{P}$ получается указанным образом как след сопряженной пары подкатегорий категории $C_2\mathcal{V}$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\mathcal{P}$ - пополнение категории $C_2\mathcal{V}$. Тогда соответствие $(\mathcal{K},\mathcal{R})\to(\mathcal{K}\cap\mathcal{P},\mathcal{R}\cap\mathcal{P})$ устанавливает изоморфизм между классом сопряженных пар подкатегорий $(\mathcal{K},\mathcal{R})$ категории $C_2\mathcal{V}$ таких, что $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ - относительная теория кручения, и классом ненулевых сопряженных пар $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ категории $\mathcal{P}$. Обратное отображение:

$$(\mathcal{T},\mathcal{F})\longrightarrow(p^{-1}\mathcal{T},\,p^{-1}\mathcal{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ - ненулевая сопряженная пара подкатегорий категории $\mathcal{P}$, X - некоторый объект категории $C_2\mathcal{V}$, $\pi_X: X\longrightarrow pX$ - его $\mathcal{P}$-реплика, а $\varphi_X: pX\longrightarrow fpX$ - $\mathcal{F}$-реплика объекта pX. Образ объекта X при морфизме $\varphi_X\pi_X$ с индуцированной из fpX топологией обозначим через rX. Каноническое отображение X на rX обозначим через ρ_X, а вложение rX в fpX - через λ_X.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\rho_X"'] & pX \arrow[d, "\varphi_X"] \\
rX \arrow[r, dashed, "\lambda_X"] & fpX
\end{tikzcd}$$

Легко проверить, что λ_X является $\mathcal{P}$-репликой объекта rX. Таким образом, доказывается, что $rX\in|p^{-1}\mathcal{F}|$. Далее, так как для любых объектов X,Y категории $C_2\mathcal{V}$ морфизм ρ_X является биективным отображением, а π_Y - вложением, то непосредственно проверяется, что ρ_X является $(p^{-1}\mathcal{F})$-репликой объекта X. Пусть $r: C_2\mathcal{V}\longrightarrow p^{-1}\mathcal{F}$ - функтор рефлексии. Из построения $(p^{-1}\mathcal{F})$-реплики видно, что φ_X есть $(p^{-1}\mathcal{F})$-реплика объекта pX, т.е. $pr=rp$.

Докажем сейчас, что функтор r переводит класс вложений категории $C_2\mathcal{V}$ в себя. Пусть $\varkappa: X\longrightarrow Y$ - вложение. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varkappa"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "\rho_X"'] & & Y \arrow[dr, "\pi_Y"] \arrow[dd, "\rho_Y"] & \\
& pX \arrow[rr, dashed, "p(\varkappa)"] \arrow[dd, "\varphi_X"] & & pY \arrow[dd, "\varphi_Y"] \\
rX \arrow[rr, dashed, "r(\varkappa)"] \arrow[dr, "\lambda_X"'] & & rY \arrow[dr, "\lambda_Y"] & \\
& fpX \arrow[rr, dashed, "fp(\varkappa)"] & & fpY
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\pi_Y \varkappa$ - вложение, то $\rho(\varkappa)\pi_X$ - также вложение. Далее π_X - эпиморфизм, значит, квадрат $1\cdot(\rho(\varkappa)\pi_X)=\rho(\varkappa)\pi_X$ - кодекартов. Следовательно, $\rho(\varkappa)$, а с ним и $t\rho(\varkappa)$ - вложения. Имеем $t\rho(\varkappa)\lambda_X=\lambda_Y r(\varkappa)$ и так как $t\rho(\varkappa)$ и λ - вложения, то таким же является и $r(\varkappa)$. Этим доказано, что $\rho^{-1}\mathcal{F}$ - c-рефлексивная подкатегория. Таким образом, существует корефлексивная подкатегория $\mathcal{K}$ категории $C_2\mathcal{V}$ такая, что $(\mathcal{K},\rho^{-1}\mathcal{F})$ образуют сопряженную пару подкатегорий категории $C_2\mathcal{V}$. Далее, поскольку $r\rho=\rho r$, то $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ - относительная теория кручения категории $C_2\mathcal{V}$.

Докажем, что $\mathcal{K}=\rho^{-1}\mathcal{T}$. Так как $(\mathcal{K}\cap\mathcal{P}, \rho^{-1}\mathcal{F}\cap\mathcal{P})$ - сопряженная пара подкатегорий категории $\mathcal{P}$ и $\rho^{-1}\mathcal{F}\cap\mathcal{P}=\mathcal{F}$, то отсюда следует, что $\mathcal{K}\cap\mathcal{P}=\mathcal{T}$. Пусть $\tau_X : t\rho X \longrightarrow \rho X$ - $\mathcal{T}$-кореплика, а значит, и $\mathcal{K}$-кореплика объекта ρX. Поскольку $(\mathcal{K},\mathcal{P})$ - относительная теория кручения категории $C_2\mathcal{V}$, то для нахождения $\mathcal{K}$-кореплики объекта X нужно на морфизмах π_X и τ_X построить декартовый квадрат. Пусть $\pi_X\varkappa_X=\tau_X\psi_X$ - указанный квадрат,

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, dashed, "\psi_X"] \arrow[d, "\varkappa_X"'] & t\rho X \arrow[d, "\tau_X"] \\
X \arrow[r, "\pi_X"] & \rho X
\end{tikzcd}$$

Тогда $\varkappa_X$ - $\mathcal{K}$-кореплика объекта X, а ψ_X - $\mathcal{P}$-реплика объекта kX. Имеем $\rho kX=t\rho X\in|\mathcal{T}|$. Этим доказано, что $\mathcal{K}=\rho^{-1}\mathcal{T}$. Очевидно, что $(\rho^{-1}\mathcal{T}\cap\mathcal{P}, \rho^{-1}\mathcal{F}\cap\mathcal{P})=(\mathcal{T},\mathcal{F})$.

Докажем, что отображение $(\mathcal{K},\mathcal{R})\to(\mathcal{K}\cap\mathcal{P},\mathcal{R}\cap\mathcal{P})$ инъективно на классе сопряженных пар $(\mathcal{K},\mathcal{R})$ категории $C_2\mathcal{V}$ таких, что $r\rho=\rho r$. Действительно, пусть $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ - c-рефлексивные подкатегории категории $C_2\mathcal{V}$, $r_1\rho=\rho r_1$, $r_2\rho=\rho r_2$ и $\mathcal{R}_1\cap\mathcal{P}=\mathcal{R}_2\cap\mathcal{P}$. Тогда для произвольного объекта X категории $C_2\mathcal{V}$ имеем $\rho r_1 X=\rho r_2 X$. Далее так как $r_1 X$ и $r_2 X$ являются подпространствами пространства $r_1\rho X=r_2\rho X$, а пространство $r_1\rho X$ принадлежит подкатегории $\mathcal{R}_1$, которая замкнута относительно подпространств, то $r_1 X$ и $r_2 X$ принадлежат подкатегории $\mathcal{R}_1$. Аналогично доказывается, что пространства $r_1 X$ и $r_2 X$ принадлежат подкатегории $\mathcal{R}_2$. Отсюда следует, что $\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_2$.

Рассмотрим конструкцию, позволяющую строить примеры относительных теорий кручения категории $C_2\mathcal{V}$. Пусть $\mathcal{A}$ - некоторый класс объектов категории $C_2\mathcal{V}$, а $\mathcal{R}$ - рефлексивная подкатегория. Обозначим через $\mathcal{R}[\mathcal{A}]$ полную подкатегорию категории $C_2\mathcal{V}$ всех объектов X

таких, что если $A \in \mathcal{A}$ и $\alpha : A \longrightarrow X$, то $\alpha = \beta \rho_A$ для некоторого морфизма β, где ρ_A - $\mathcal{R}$-реплика объекта A. Тогда легко проверить, что $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}[\mathcal{A}]$ и $\mathcal{R}[\mathcal{A}]$ - рефлексивная подкатегория категории $C_2 \mathcal{V}$ [10].

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\mathcal{K}$ - корефлексивная подкатегория категории $C_2 \mathcal{V}$, а $\mathcal{A}$ - некоторый класс объектов категории $\mathcal{K}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для пары $(\mathcal{K}, \mathcal{R}[\mathcal{A}])$ выполняется условие F 3;

2) если для пары $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ выполняется условие F 1, то оно выполняется и для пары $(\mathcal{K}, \mathcal{R}[\mathcal{A}])$;

3) если $\mathcal{R}$ - пополнение, то $(\mathcal{K}^*, \mathcal{R}[\mathcal{A}])$ - относительная теория кручения категории $C_2 \mathcal{V}$;

4) если $\mathcal{K}$ - c-корефлексивная подкатегория категории $C_2 \mathcal{V}$, а $\mathcal{R}$ - пополнение, то $(\mathcal{K}, \mathcal{R}[\mathcal{A}])$ - относительная теория кручения категории $C_2 \mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждений 1) и 2) проверяется непосредственно. Утверждение 3) верно согласно работе [10, теорема 4.4], а 4) - согласно утверждению 2) и теореме 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все изложенные выше результаты справедливы и в категории отделимых локально-выпуклых групп (см. [14 - 16]).

§ 2. Примеры

1. Если $\mathcal{K}$ - c-корефлексивная подкатегория, а $\mathcal{P}$ - пополнение категории $C_2 \mathcal{V}$, то $(\mathcal{K}, \mathcal{P}^*)$ - относительная теория кручения (теорема 4). Пространства подкатегории $\mathcal{P}^*$ естественно называть $\mathcal{K}$ - $\mathcal{P}$-полными пространствами, а подкатегории Γ_0^* - просто $\mathcal{K}$-полными. Например, если $\mathcal{P}$ - подкатегория секвенциально полных или ограниченно полных (т.е. квазиполных) пространств [17], то пространства подкатегории $\mathcal{P}^*$ назовем $\mathcal{K}$-секвенциально полными и $\mathcal{K}$-ограниченно полными пространствами.

2. Пусть $Norm$ - класс всех нормированных пространств. $\Gamma_0[Norm]$ является подкатегорией локально полных пространств [17]. Далее пространство, представимое в виде индуктивного предела нормированных пространств, называется борнологическим (см. [7, 17]). Борнологические пространства образуют корефлексивную подкатегорию (см. [7, 17]), которую обозначим через $Born$. Известно, что каждое метризуемое локально-выпуклое пространство является борнологическим пространством [7, с. 122], и локальное пополнение борнологического пространства есть борнологическое пространство [17, с. 287].

Далее в категории $C_{\ell}\mathcal{V}$ подкатегории S-пространств со слабой топологией, sN-усиленно ядерных пространств [18] и Sch-шварцевских пространств [19, 20] являются c-рефлексивными [3, 21].

Из результатов § 1 следует:

1) $((Born)^*, \mathcal{P}[Norm])$ - относительная теория кручения категории $C_{\ell}\mathcal{V}$;

2) если $\mathcal{K}$ - c-корефлексивная подкатегория категории $C_{\ell}\mathcal{V}$, то $(\mathcal{K}, \mathcal{P}[Norm])$- относительная теория кручения категории $C_{\ell}\mathcal{V}$. В частности, $(\mathcal{M}, \Gamma_0[Norm])$ - относительная теория кручения;

3) функторы рефлексии $C_{\ell}\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{S}$ ($C_{\ell}\mathcal{V} \longrightarrow sN$, $C_{\ell}\mathcal{V} \longrightarrow Sch$) и $C_{\ell}\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{P}[Norm]$ коммутируют;

4) в категории $\mathcal{P}[Norm]$ существует собственный класс сопряженных пар подкатегорий.

3. Аналогичные результаты получаем, если вместо класса объектов $Norm$ рассматривать класс $Metr$ метризуемых пространств.

4. В примерах 2 и 3 подкатегорию $Born$ можно заменить на подкатегорию $CTon$ - квазибочечных пространств [17], так как $Born \subset CTon$, и локальное пополнение квазибочечного пространства квазибочечно [17, с.290].

5. Пусть Ton - корефлексивная подкатегория категории $C_{\ell}\mathcal{V}$ всех бочечных пространств [7, гл. IV]. Поскольку пополнение отделимого бочечного пространства бочечно [7, с.159], то пара $(Ton, \mathcal{P})$ обладает свойством F I для любого пополнения $\mathcal{P}$. Следовательно, $((Ton)^{**}, \mathcal{P}^*)$ и $((Ton)^*, \mathcal{P}^{**})$ - относительные теории кручения категории $C_{\ell}\mathcal{V}$ [10, теоремы 3.4 и 3.4*].

Цитированная литература

1. Ботнару Д.В. Сопряженные пары подкатегорий. - УМН, 1976, т.31, вып.3, с.203 - 204.

2. Ботнару Д.В. Сопряженные пары подкатегорий категории локально выпуклых групп. - В кн.: Функциональный анализ. - Ульяновск, 1976, вып.7, с.33 - 36.

3. Ботнару Д.В. Универсальные объекты c-рефлексивных подкатегорий категории отделимых локально выпуклых пространств. - В кн.: Функциональный анализ. - Ульяновск, 1976, вып. 7, с.37 - 40.

4. Ботнару Д.В. О подъеме корефлексивных подкатегорий рефлексивной подкатегории. - В кн.: Функциональный анализ. - Ульяновск, 1977, вып.9, с.3 - 7.

5. Ботнару Д.В. О c-рефлексивных подкатегориях. - В кн.: Общая алгебра и дискретная геометрия. - Кишинев: Штиинца, 1980, с.9 - 10.

6. Ботнару Д.В. Композиция и коммутативность рефлексивных функторов. - В кн.: Функциональный анализ. - Ульяновск, 1983, вып. 21, с.59 - 71.

7. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1967. - 257 с.

8. Ботнару Д.В. Относительные теории кручения категорий. - В кн.: Исследования по теории колец, алгебр и модулей / Математические исследования. - Кишинев: Штиинца, 1984, вып.76, с.3 - 13.

9. Dickson S.E. A torsion theory for abelian categories. - Trans. Amer. Math. Soc., 1966, v.121, N 1, p. 223 - 235.

10. Ботнару Д.В. Относительные теории кручения категории отделимых равномерных пространств. - В кн.: Алгебры, кольца и топологии / Математические исследования. - Кишинев: Штиинца, 1985, вып.85, с.43 - 57.

11. Isbell J.R. Uniform spaces.- Providence; Amer. Math.Soc.,1964, N 12. - 186 p.

12. Hager A.W., Rice M.D. The commuting of coreflectors in uniform spaces with completion. - Czechoslovak Math. Jour., 1976, v.26, N 3, p. 371 - 380.

13. Ботнару Д.В., Гисин В.Б. Устойчивые мономорфизмы в категории локально выпуклых пространств. - Известия АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1973, № 1, с.3 - 7.

14. Ботнару Д.В. Относительные теории кручения категории локально выпуклых групп. - УМН, 1984, т.39, вып. 3, с.229 - 230.

15. Райков Д.А. О B-полных топологических векторных группах. - Studia Math., 1968, т.31, с.295 - 306.

16. Кендеров П. О топологических векторных группах. - Математический сборник, 1970, т.81, № 4, с.580 - 599.

17. Райков Д.А. Экспоненциальный закон для пространств непрерывных линейных отображений. - Математический сборник,1965, т.67, № 2, с.279 - 302.

18. Брудовский Б.С. Ассоциированная ядерная топология, отображения типа S и усиленно ядерные пространства. - ДАН СССР, 1968, т.178, № 2, с.271 - 273.

19. Райков Д.А. Некоторые свойства ограниченных линейных операторов. - Ученые записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1962, № 188,с.171 - 191.

20. Jarchow H. Die universalität des räumes c_0 für die classe der Schwartz-räume. - Math. Ann., 1973, v.203, p. 211 - 214.

21. Гейлер В.А., Гисин В.Б. Обобщенная двойственность для локально выпуклых пространств. - В кн.: Функциональный анализ. - Ульяновск, 1978, вып.II, с.41 - 50.

Б.М.Верников

О ФОРМУЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

Пусть S - некоторый класс многообразий ассоциативных колец. Класс S назовем <u>формульным</u>, если существует такая формула языка первого порядка $\Phi(x)$ с одной свободной переменной x в сигнатуре решеточных операций объединения и пересечения, что $\Phi(\mathfrak{X})$ истинно для всех $\mathfrak{X}\in S$ и $\Phi(\mathfrak{M})$ ложно для всех $\mathfrak{M}\notin S$. В этой ситуации будем говорить также, что формула $\Phi(x)$ <u>выделяет</u> класс S. Если S состоит из одного многообразия $\mathfrak{M}$, то скажем, что $\mathfrak{M}$ - <u>формульное</u> многообразие, выделяемое формулой $\Phi(x)$. Во избежание путаницы договоримся, что решеточные операции объединения и пересечения обозначаются через $\vee$ и $\wedge$, а конъюнкция и дизъюнкция - через & и ИЛИ соответственно.

Вопрос о том, являются ли формульными те или иные часто встречающиеся и важные для теории классы многообразий и отдельные многообразия, представляется нам интересным, однако до сих пор мало изученным направлением. Отметим, что этой проблематике (в случае универсальных алгебр) посвящен один из разделов работы [1]. Формульность ряда многообразий универсальных алгебр в решетке всех многообразий алгебр фиксированной сигнатуры установлена в [2]. Отметим еще работу [3], в которой доказана формульность нескольких конкретных многообразий ассоциативных колец.

Совокупность всех формульных многообразий ассоциативных колец образует счетную (поскольку множество всех формул счетно) подрешетку решетки всех многообразий ассоциативных колец. В самом деле, если многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выделяются формулами $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ соответственно, то их объединение выделяется формулой

$$\mathfrak{M}^{\vee}\mathfrak{N}(x)\rightleftharpoons(\exists y)(\exists z)(\Phi(y)\&\Psi(z)\&\, x=y\vee z),$$

а пересечение - формулой

$$\mathfrak{M}^{\wedge}\mathfrak{N}(x)\rightleftharpoons(\exists y)(\exists z)(\Phi(y)\&\Psi(z)\&\, x=y\wedge z).$$

Изучение этой решетки представляется нам вторым интересным направлением, связанным с понятием формульного многообразия.

В данной работе содержатся результаты, относящиеся к обоим направлениям. Отталкиваясь от полученного в [4] описания цепных многообразий (т.е. многообразий, решетка подмногообразий которых - цепь), мы доказываем формульность ряда многообразий ассоциативных колец. Это позволяет получить следующие результаты (через $var\{\Sigma\}$ обозначается многообразие, заданное системой тождеств Σ):

ТЕОРЕМА 1. Многообразия $\mathfrak{A}_p = var\{px = xy = 0\}$, $\mathfrak{T}_p = var\{x^p = x,\ px = 0\}$ (p - простое число) и только они являются атомами решетки всех формульных многообразий ассоциативных колец.

ТЕОРЕМА 2. Класс всех кроссовых многообразий ассоциативных колец является формульным.

ТЕОРЕМА 3. Класс всех локально-конечных многообразий ассоциативных колец является формульным.

Прежде чем доказывать эти теоремы, введем ряд обозначений. Договоримся, что если $\mathfrak{M}$ - формульное многообразие, то выделяющая его формула обозначается через $\mathfrak{M}(x)$. Пусть S - формульный класс многообразий, выделяемый формулой $\Phi(x)$, $\mathfrak{M}$ - объединение всех многообразий этого класса. Тогда, как легко понять, $\mathfrak{M}$ - формульное многообразие, выделяемое формулой

$$\check{\Phi}(x) \rightleftharpoons (\forall y)(\Phi(y) \to y \leqslant x) \& (\forall z)(\forall t)((\Phi(z) \to z \leqslant t) \to x \leqslant t).$$

В ряде случаев нам понадобится включить в формулу фрагмент, означающий, что элементы $x_1, \dots, x_n$ попарно различны. Введем соответствующее обозначение:

$$PNE(x_1, \dots, x_n) \rightleftharpoons x_1 \neq x_2 \& x_1 \neq x_3 \& \dots$$

$$\dots \& x_1 \neq x_n \& x_2 \neq x_3 \& \dots \& x_2 \neq x_n \& \dots \& x_{n-1} \neq x_n.$$

В двух приведенных формулах символы $\leqslant$ и $\neq$ использованы в обычном смысле: $x \leqslant y$ означает $x \wedge y = x$, а $x \neq y$ - $\neg(x = y)$. Будем также писать $x < y$ вместо $x \leqslant y \& x \neq y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 - 3. Как хорошо известно, многообразия $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{T}_p$ и только они являются атомами решетки всех многообразий ассоциативных колец [5]. Многообразие ассоциативных колец кроссово тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного из многообразий $\mathfrak{A}_0 = var\{xy = 0\}$ и $\mathfrak{V}_p = var\{px = x^p = 0,\ xy = yx\}$ (p - простое число) [6]. Локальная конечность многообразия ассоциативных колец эквивалентна тому, что оно не содержит ни одного из многообразий $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{E}_p = var\{px=0,\ xy=yx\}$ (p - простое число).

Предположим, что мы уже доказали формульность многообразий $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{T}_p$, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{V}_p$ и $\mathfrak{E}_p$. Тогда теорема I вытекает из [5], класс кроссовых многообразий выделяется формулой

$$Cross(x) \rightleftharpoons (\forall y)(\forall z)(\mathfrak{A}_0(y) \to \neg(y \leqslant x) \& \mathfrak{V}_p(z) \to \neg(z \leqslant x)),$$

а класс локально-конечных многообразий - формулой

$$LF(x) \rightleftharpoons (\forall y)(\forall z)(\mathfrak{A}_0(y) \longrightarrow \neg(y \leqslant x) \& \mathfrak{E}_p(z) \longrightarrow \neg(z \leqslant x)).$$

Приступим к доказательству формульности перечисленных выше многообразий. Прежде всего запишем две очевидные формулы, первая из которых выделяет тривиальное многообразие $\mathfrak{O} = var\{x=0\}$, а вторая - класс всех атомов решетки многообразий:

$$\mathfrak{O}(x) \rightleftharpoons (\forall y)(x \leqslant y);$$

$$A(x) \rightleftharpoons (\forall y)(y < x \longrightarrow \mathfrak{O}(y)).$$

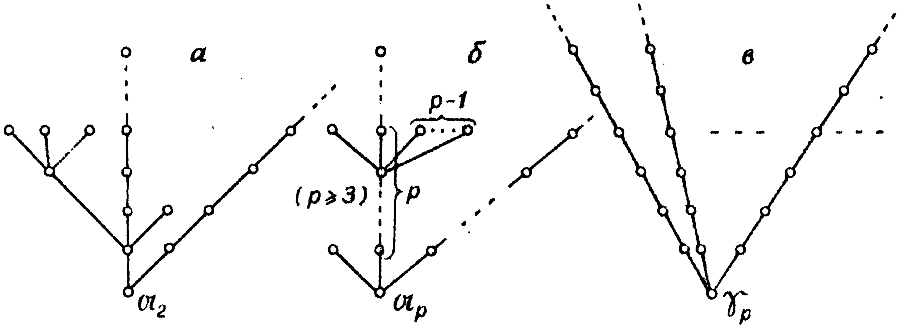
Как уже отмечалось во введении, нам понадобится описание цепных многообразий ассоциативных колец, полученное в [4]. При этом важно не то, какими тождествами задаются цепные многообразия, а то, как устроены нижние полурешетки цепных многообразий, содержащих тот или иной фиксированный атом. На рисунке изображены диаграммы нижних полурешеток цепных многообразий, содержащих $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_p$ (при $p>2$) и $\mathfrak{T}_p$ соответственно. Мы видим, что:

- для всякого простого p и всякого натурального $n \geqslant 2$ существует бесконечно много цепных многообразий высоты n, содержащих $\mathfrak{T}_p$;

- для всякого простого p существует ровно $p+2$ цепных многообразий высотой $p+1$, содержащих $\mathfrak{A}_p$ (под <u>высотой</u> многообразия понимается длина решетки его подмногообразий). Эти два факта и позволят нам выделить многообразие $\mathfrak{A}_p$. Запишем сначала несколько вспомогательных формул.

Первая из следующих трех формул выделяет класс всех цепных многообразий, вторая - класс всех многообразий, содержащих не менее чем n подмногообразий, а третья - класс всех многообразий, содержащих ровно n подмногообразий:

$$C(x) \rightleftharpoons (\forall y)(\forall z)(y \leqslant x \& z \leqslant x \longrightarrow y \leqslant z \text{ или } z \leqslant y);$$



Диаграммы нижних полурешеток цепных многообразий, содержащих $\mathfrak{A}_2$ (а), $\mathfrak{A}_p$ (б) и γ_p (в)

$$S_n(x) \rightleftharpoons (\exists y_1)\ldots(\exists y_n)(PNE(y_1,\ldots,y_n)\,\&\,y_1\leqslant x\,\&\ldots\&\,y_n\leqslant x);$$

$$S_{\bar{n}}(x) \rightleftharpoons S_n(x)\,\&\,\rceil S_{n+1}(x).$$

Введем сокращение:

$$F_n(x,y) \rightleftharpoons x<y\,\&\,C(y)\,\&\,S_{\bar{n}}(y).$$

Из сказанного вытекает, что $\mathfrak{A}_p$ выделяется следующей формулой:

$$\mathfrak{A}_p(x) \rightleftharpoons A(x)\,\&\,(\exists y_1)\ldots(\exists y_{p+2})(PNE(y_1,\ldots,y_{p+2})\,\&\,F_{p+2}(x,y_1)\,\&\ldots\&$$

$$\&\,F_{p+2}(x,y_{p+2})\,\&\,(\forall z)(F_{p+2}(x,z)\to z=y_1 \text{ ИЛИ}\ldots\text{ИЛИ } z=y_{p+2})).$$

Будем говорить, что элемент x решетки L строго покрывает элемент y той же решетки, если y – наибольший элемент множества $\{a\in L\mid a<x\}$. Следующая формула от двух свободных переменных x и y истинна тогда и только тогда, когда x строго покрывает y:

$$SC(x,y) \rightleftharpoons (\forall z)(z<x\to z\leqslant y).$$

Для выделения многообразия γ_p заметим, что существуют многообразия, строго покрывающие $\mathfrak{A}_p\vee\gamma_p$, но не существует многообразий, строго покрывающих $\mathfrak{A}_p\vee\gamma_q$ при $p\neq q$ (см., например, [8, § 3]). Следовательно, γ_p выделяется формулой

$$\gamma_p(x) \rightleftharpoons A(x)\,\&\,(\exists y)(\exists z)(\exists t)(\mathfrak{A}_p(y)\,\&\,z=x\vee y\,\&\,SC(t,z))\,\&\,\rceil\mathfrak{A}_p(x).$$

Будем называть многообразия $\mathfrak{A}_p$ нильпотентными атомами, а многообразия $\mathfrak{T}_p$ - полупростыми атомами (поскольку они состоят соответственно из нильпотентных и полупростых в смысле Джекобсона колец). Из рисунка видно, что $\mathfrak{T}_p$ содержится в бесконечном множестве цепных многообразий высоты 2, а $\mathfrak{A}_p$ - не более чем в трех таких многообразиях. Следовательно, класс всех полупростых атомов выделяется формулой

$$SA(x) \rightleftharpoons A(x) \& (\exists y_1) \ldots (\exists y_4)(PNE(y_1, \ldots, y_4) \& F_3(x, y_1) \& \ldots \& F_3(x, y_4)),$$

а класс всех нильпотентных атомов - формулой

$$NA(x) \rightleftharpoons A(x) \& \neg SA(x).$$

Многообразие $\mathfrak{A}_0$ является объединением всех нильпотентных атомов и потому выделяется формулой

$$\mathfrak{A}_0(x) \rightleftharpoons N^{\vee}A(x).$$

Чтобы выделить $\mathfrak{V}_p$, заметим (см. рисунок, а,б), что это единственное цепное многообразие, содержащее $\mathfrak{A}_p$, решетка подмногообразий которого - бесконечная цепь, и что эта цепь имеет тип $\omega + 1$. Следовательно, $\mathfrak{V}_p$ выделяется формулой

$$\mathfrak{V}_p(x) \rightleftharpoons C(x) \& (\exists y)(\mathfrak{A}_p(y) \& y \leqslant x) \& (\forall z)(z < x \to (\exists t)(t < x \& z < t)).$$

Осталось доказать формульность многообразия $\mathfrak{E}_p$. Для этого заметим, что цепные многообразия высоты 2, содержащие $\mathfrak{T}_p$, есть $\mathfrak{T}_p^q = var\{ px = 0,\ x^{p^q} = x \}$ (q - простое число), и $\mathfrak{E}_p$ есть объединение $\mathfrak{T}_p^q$ при всех q. Класс многообразий $\mathfrak{T}_p^q$ при фиксированном p и всех q описывается формулой

$$\mathfrak{T}_p^{(q)}(x) \rightleftharpoons C(x) \& S_3(x) \& (\forall y)(A(y) \& y \leqslant x \to \mathfrak{T}_p(y)),$$

а многообразие $\mathfrak{E}_p$ - формулой

$$\mathfrak{E}_p(x) \rightleftharpoons \mathfrak{T}_p^{\vee(q)}(x).$$

Теоремы I - 3 доказаны.

Рассуждения того же типа, что и приведенные выше, позволяют доказать формульность ряда других многообразий ассоциативных колец (в частности, многообразий $\mathfrak{B}_p = var\{px=0\}$ и $\mathfrak{A} = var\{xy=yx\}$).Мы, однако, ограничились теми многообразиями, формульность которых необходима для доказательства теорем I - 3. Заметим, что формульность многообразий $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{A}$ доказана в работе [3]. Наконец, отметим, что теорема 2 подтверждает (в случае ассоциативных колец) одну из гипотез работы [I, § 4, теорема 20].

В заключение сформулируем несколько открытых вопросов. Мы видели выше, что множество атомов решетки формульных многообразий ассоциативных колец совпадает с множеством атомов решетки всех многообразий ассоциативных колец. В случае полугрупп этого совпадения не происходит. В самом деле, легко проверить, что многообразия полугрупп левых нулей $\mathfrak{L}$ и многообразие полугрупп правых нулей $\mathfrak{R}$ не формульные, хотя и являются атомами решетки всех полугрупповых многообразий. Автору неизвестно, верен ли аналог сформулированного выше факта для многообразий групп.

Вопрос I. а) Является ли многообразие $var\{x^p=[x,y]=1\}$ (p - простое число) формульным многообразием групп?

б) Является ли многообразие $var\{x^py=y,\ xy=yx\}$ (p - простое число) формульным многообразием полугрупп?

Ответ на вопрос I,б) необходим для описания атомов решетки формульных многообразий полугрупп. Несложными рассуждениями можно доказать формульность многообразия полурешеток, многообразия полугрупп с нулевым умножением и многообразия $\mathfrak{L}\vee\mathfrak{R}$, что дает описание негрупповых атомов названной решетки.

Вопрос 2. а) Является ли формульным класс всех кроссовых многообразий групп?

б) Тот же вопрос для многообразий полугрупп.

Вопрос 3. а) Является ли формульным класс всех локально-конечных многообразий групп?

б) Тот же вопрос для многообразий полугрупп.

Вопрос 4. а) Является ли решетка формульных многообразий ассоциативных колец полной?

б) Тот же вопрос для многообразий групп.

в) Тот же вопрос для многообразий полугрупп.

Автор благодарит профессора Л.Н.Шеврина за руководство работой и М.В.Волкова за полезные обсуждения.

Цитированная литература

I. McNulty G.F. Fifteen possible previews in equational logic.- Technische Hochschul Darmstadt, 1983, prepr.773, p.25.

2. Mckenzie R. Definability in lattices of equational theories. - Ann.Math. Log., 1971, v.3, N 2, p. 197 - 237.

3. Iskander A.A. Definibility in the lattice of ring varieties. - Pacif. J. Math., 1978, v.76, N 1, p. 61 - 67.

4. Артамонов В.А. Решетки многообразий линейных алгебр. - УМН, 1978, т.33, № 2, с.135 - 167; исправления там же, 1979, т. 34, № 2, с.251.

5. Tarski A. Equationally complete rings and relation algebras. - Proc. Konikl. nederl. akad.wetensch., ser. A, 1956, v.59, N 1, p. 39 - 46.

6. Львов И.В. О многообразиях ассоциативных колец. II. - Алгебра и логика, 1973, т.12, № 6, с.667 - 688.

7. Волков М.В. Периодические многообразия ассоциативных колец. - Известия вузов. Математика, 1979, № 8, с.3 - 13.

8. Верников Б.М., Волков М.В. Дуализмы в решетках многообразий ассоциативных колец. - В кн.: Исследования по алгебраическим системам. - Свердловск, 1984, с.11 - 38.

Р.С.Григор, Ю.М.Рябухин

АБСОЛЮТНО СВОБОДНАЯ СТРОГО РЕГУЛЯРНАЯ АЛГЕБРА РАНГА ОДИН

В работах [I,2] строго регулярные (или абелево регулярные) алгебры изучались в контексте теории многообразий. Если S - строго регулярная алгебра, то ее можно рассматривать как мультиоператорную алгебру, отличающуюся от обычных ассоциативных алгебр только наличием дополнительной унарной операции $x \to x'$, связанной с основными операциями алгебры тождествами

$$x = x^2 x', \quad x' = (x')^2 x . \tag{I}$$

Поэтому класс $\mathcal{Y}$ всех строго регулярных алгебр, которые рассматриваются как указанные мультиоператорные алгебры, образует многообразие (в смысле общей теории многообразий алгебраических систем, см.[3]), заданное тождествами (I). Многообразия строго регулярных алгебр - это подмногообразия в $\mathcal{Y}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Многообразие строго регулярных алгебр не является, как правило, многообразием алгебр. А именно, если многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр (ассоциативных алгебр над фиксированным "основным" полем Φ) состоит только из строго регулярных алгебр, то, как легко видеть, оно задается некоторой системой "обычных" тождеств, среди которых будет тождество вида $x^n = x$ для некоторого целого $n \geqslant 2$. Между тем, не всякая строго регулярная алгебра удовлетворяет тождеству вида $x^n = x$. Поэтому уже само $\mathcal{Y}$ не будет многообразием обычных алгебр (так как существуют бесконечные поля).

Более подробное изучение многообразий строго регулярных алгебр начато в работе Бесолова [4], где содержится полезное для нас

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Унарная операция $x \longrightarrow x'$ определяется в строго регулярной алгебре S, на самом деле, единственным образом. Из (I) легко вытекает, что $0' = 0$, а если $a \in S$, $a \neq 0$, то главный идеал, порожденный элементом a

$$(a) = Sa = aS , \tag{2}$$

есть алгебра с некоторой единицей e_a, причем

$$e_a = aa' = a'a . \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает, что элемент a обратим в алгебре $\langle a \rangle$ с единицей e_a, а элемент a' именно обратный к элементу a в этой алгебре.

В качестве следствия получаем

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Любая строго регулярная алгебра является подпрямым произведением тел. Любое тело T является строго регулярной алгеброй, причем унарная операция $x \to x'$ в теле T, превращающая его в строго регулярную алгебру (элемент многообразия φ), единственна:

$$a' = \begin{cases} 0, \text{ если } a = 0; \\ a^{-1}, \text{ если } a \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

В настоящей работе мы построим абсолютно свободную строго регулярную алгебру S_1, т.е. свободную в многообразии φ строго регулярную алгебру с одной свободной порождающей x.

Пусть $\Phi[x]$ - алгебра многочленов от одной переменной x над основным полем Φ.

Хорошо известно, что каждый многочлен разлагается в произведение неприводимых многочленов. Введем обозначения: Π - множество всех неприводимых многочленов алгебры $\Phi[x]$ с коэффициентом I при старшем члене; $\mathcal{P}$ - множество всех неприводимых многочленов $p \in \Pi$, имеющих степень $deg(p) \geqslant 1$ и отличных от x, т.е. $p \neq x$; $\pi(g)$ - множество всех неприводимых многочленов $p \in \Pi$, входящих в разложение многочлена g. Как обычно, $\Phi(x)$ - поле рациональных дробей алгебры $\Phi[x]$. С каждым конечным непустым подмножеством $\Delta \subseteq \Pi$ связывается подалгебра R_Δ алгебры $\Phi(x)$, имеющая вид

$$R_\Delta = \{ f g^{-1} \mid \pi(g) \subseteq \Delta \}. \tag{5}$$

Из ее построения вытекает, что с точностью до изоморфизма R_Δ является алгеброй дробей $\Phi[x] M_\Delta^{-1}$ алгебры многочленов $\Phi[x]$ по ее мультипликативно замкнутой подсистеме M_Δ, порожденной Δ.

Для дальнейших построений нам понадобится несколько утверждений из работы [4].

ЛЕММА I. (см. [4, лемма I.2]). Алгебра S_1 коммутативна и имеет единицу $e_x = xx' = x'x$. При этом подалгебра $\langle x, x' \rangle$, порожденная в S_1 указанными элементами, изоморфна алгебре $R_{\{x\}}$.

Учитывая лемму I, отождествляем подалгебру $\langle x, x' \rangle$ алгебры S_1 с алгеброй $R_{\{x\}}$. В частности, единица I алгебры $\Phi[x]$ будет отождествляться с e_x, а сама $\Phi[x]$ будет считаться подалгеброй в S_1, так как мы уже отождествили $R_{\{x\}}$ и $\langle x, x' \rangle$.

В алгебре $\mathfrak{S}_1$ с каждым элементом $p \in \mathcal{P}$ свяжем центральный идемпотент $e_p = pp' = p'p$ алгебры $\mathfrak{S}_1$, а с каждым идемпотентом e_p – идемпотент $e_p^* = 1 - e_p$ и подалгебру $\Phi[x]\, e_p^* = k_p$.

ЛЕММА 2. [4 , лемма I.3]. Идемпотенты e_p^* $(p \in \mathcal{P})$ образуют ортогональную систему центральных идемпотентов алгебры $\mathfrak{S}_1$, т.е.

$$p_1, p_2 \in \mathcal{P};\ p_1 \neq p_2 \Longrightarrow e_{p_1}^* e_{p_2}^* = 0. \tag{6}$$

При этом k_p оказываются главными идеалами алгебры $\mathfrak{S}_1$:

$$k_p = \Phi[x]\, e_p^* = \mathfrak{S}_1 e_p^* . \tag{7}$$

Более того, для каждого $p \in \mathcal{P}$ алгебра k_p (являющаяся идеалом в $\mathfrak{S}_1$ в силу (7)) есть конечномерное поле, изоморфное полю вычетов $\Phi[x]/p\Phi[x]$ алгебры $\Phi[x]$ по модулю p.

СЛЕДСТВИЕ I. Идеал $I = \sum\limits_{p \in \mathcal{P}} \mathfrak{S}_1 e_p^*$ алгебры $\mathfrak{S}_1$ является локально-конечномерной алгеброй, изоморфной прямой сумме алгебр k_p, $I = \bigoplus\limits_{p \in \mathcal{P}} k_p$. Это с очевидностью вытекает из леммы 2.

В силу замечания 3 поле рациональных дробей $\Phi(x)$ является строго регулярной алгеброй. При этом строго регулярные подалгебры и подполя в $\Phi(x)$ – это одно и то же. Поэтому $\Phi(x)$, как строго регулярная алгебра, порождается одним элементом x. Но тогда в силу общих свойств свободных алгебр существует канонический гомоморфизм $\nu: \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \Phi(x)$ алгебры $\mathfrak{S}_1$ на алгебру $\Phi(x)$, продолжающий тождественное отображение $x \to x$.

ЛЕММА 3. Ядром канонического гомоморфизма $\nu: \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \Phi(x)$ алгебры $\mathfrak{S}_1$ на алгебре $\Phi(x)$ является идеал I. В частности, фактор алгебра $\mathfrak{S}_1 / I \approx \Phi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что в $\Phi(x)$ нет идеалов, являющихся конечномерными ненулевыми алгебрами. Поэтому в силу следствия I $I \subseteq \ker \nu$. Остается показать, что $\mathfrak{S}_1 / I \approx \Phi(x)$.

Поскольку конечномерных ненулевых идеалов нет и в алгебре $\Phi[x]$, то в строго регулярной алгебре $\mathfrak{S}_1$ получаем равенство $I \cap \Phi[x] = 0$. Из этого вытекает, что строго регулярная алгебра $\bar{\mathfrak{S}}_1 = \mathfrak{S}_1 \nu$ порождается, как строго регулярная алгебра, своей подалгеброй $\Phi[x]\nu$, изоморфной алгебре $\Phi[x]$.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $\bar{f} = f\nu$ алгебры $\bar{\Phi}[x]\nu$. Представим соответствующий многочлен f в виде произведения

$$f = \alpha x^s p_1^{s_1} \ldots p_n^{s_n} \quad (\alpha \in \Phi, \alpha \neq 0) \tag{8}$$

неприводимых множителей, где $p_i \in \mathcal{P}, s, s_1, \ldots, s_n$ - натуральные числа или нуль. При этом считаем, как обычно, что $g^0 = 1$.

Элемент x обратим в алгебре S_1; обратным к нему будет элемент x', поэтому его образ $\bar{x} = x\nu$ - обратимый элемент алгебры $\bar{S}_1$.

Возьмем любой $p \in \mathcal{P}$. Тогда, по построению, $pp' = e_p$ в алгебре S_1 и $\bar{e}_p = e_p \nu = (1 - e_p^*)\nu = 1\nu - e_p^* \nu = 1\nu$ - единица алгебры $\bar{S}_1$, так как $e_p^* \in I$. Переходя к образам, получаем $(p\nu)(p'\nu) = 1\nu$, т.е. $\bar{p} = p\nu$ - обратный элемент в алгебре $\bar{S}_1$.

Применяя доказанное к (8), получаем, что произвольный ненулевой элемент $\bar{f} = \alpha \bar{x}^s \bar{p}_1^{s_1} \ldots \bar{p}_n^{s_n}$ алгебры $\Phi[x]\nu$ обратим в алгебре $\bar{S}_1$, как произведение обратимых элементов. Но тогда изоморфное вложение $\varphi: \Phi[x] \longrightarrow \bar{S}_1$, являющееся сужением гомоморфизма $\nu: S_1 \to \bar{S}_1$, продолжается канонически до изоморфного вложения поля $\Phi(x)$ (поля дробей алгебры $\Phi[x]$) в алгебру $\bar{S}_1$. Следовательно, в алгебре $\bar{S}_1$ есть подалгебра, изоморфная полю $\Phi(x)$ и содержащая $\Phi[x]\nu$. По построению, эта подалгебра порождается, как поле, своей подалгеброй $\Phi[x]\nu$. В силу замечания 3 это подполе алгебры $\bar{S}_1$ будет строго регулярной подалгеброй, порожденной $\Phi[x]\nu$.

Однако сама $\bar{S}_1$ порождается, как строго регулярная алгебра, своей подалгеброй $\Phi[x]\nu$. Поэтому $\bar{S}_1$ совпадает с указанным подполем, т.е. является полем дробей алгебры $\Phi[x]\nu$ - полем, изоморфным полю $\Phi(x)$ рациональных дробей. Итак, $S_1 / I \cong \Phi(x)$.

Из построения идеала I вытекает в силу лемм I и 2, что I естественным образом превращается в $\Phi[x]$-модуль:

$$f e_p^* = r e_p^*, \text{ если } f = qp + r. \tag{9}$$

Следовательно, $f e_p^*$ получается из f делением с остатком на неприводимый многочлен p.

На самом деле, равенство (9) можно усилить.

ЛЕММА 4. Для любых $f, g \in \Phi[x]$ и любого $p \in \Pi$ справедливо равенство

$$f g' e_p^* = \begin{cases} 0, & \text{если } p \in \mathcal{T}(g); \\ (f e_p^*)(g e_p^*)^{-1}, & \text{если } p \notin \mathcal{T}(g), \end{cases} \tag{10}$$

где $(g e_p^*)^{-1}$ - элемент, обратный ненулевому элементу $g e_p^*$ в алгебре (поле !) k_p.

Действительно, если $p \in \mathcal{T}(g)$, то $g e_p^* = 0$ в силу (9). Но тогда и $g' e_p^* = 0$ в силу (I). Если же $g e_p^* \neq 0$, т.е. $p \notin \mathcal{T}(g)$, то $g' e_p^* \neq 0$ и элементы $g e_p^*, g' e_p^*$ будут обратными друг другу элементами поля k_p в силу замечаний I и 3.

Усилим теперь лемму I.

ЛЕММА 5. Пусть Δ - произвольное конечное непустое подмножество в Π, содержащее $\{x\}$. Свяжем с ним идемпотент

$$e_\Delta = \prod_{\rho\in\Delta\setminus\{x\}} e_\rho . \qquad (11)$$

При этом, если $\Delta = \{x\}$, то считаем, что $e_\Delta = 1$ - единица алгебры S_1. Тогда:

а) гомоморфизм $\varepsilon_\Delta : \Phi[x] \to \Phi[x]e_\Delta \subseteq S_1 e_\Delta$, получающийся сужением правого умножения на (центральный) идемпотент e_Δ, является изоморфным вложением алгебры $\Phi[x]$ в идеал $S_1 e_\Delta$ алгебры S_1, порожденный идемпотентом e_Δ;

б) изоморфное вложение $\varepsilon_\Delta : \Phi[x] \longrightarrow S_1 e_\Delta$ продолжается и притом единственным образом до изоморфного вложения $\hat{\varepsilon}_\Delta : R_\Delta \to S_1 e_\Delta \subseteq$ $\subseteq S_1$ алгебры R_Δ в алгебру S_1. Оно действует по правилу

$$(fg^{-1})\hat{\varepsilon}_\Delta = fe_\Delta \cdot g' e_\Delta = fg' e_\Delta = fe_\Delta \cdot (ge_\Delta)^{-1}, \qquad (12)$$

где $(ge_\Delta)^{-1}$ - элемент, обратный к элементу ge_Δ в алгебре $S_1 e_\Delta$ с единицей e_Δ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ - произвольное конечное непустое подмножество в Π, M_Δ - порожденная им мультипликативно замкнутая подсистема в $\Phi[x]$.

Замечаем сначала, что ε_Δ действительно является изоморфным вложением: если $f(x)e_\Delta = 0$, то, применяя канонический гомоморфизм $\nu : S_1 \longrightarrow \Phi(x)$ (продолжающий отображение $x \longrightarrow x$), получаем

$$f(x) = f(x)1 = f(x)\nu\, e_\Delta \nu = 0.$$

Из этого вытекает, что ε_Δ осуществляет вложение M_Δ в $S_1 e_\Delta$ (мы можем отождествить M_Δ и $M_\Delta \varepsilon_\Delta = M_\Delta e_\Delta$, если мы уже отождествили $\Phi[x]$ и $\Phi[x]e_\Delta$). Тогда в силу хорошо известных свойств алгебр дробей (см. [5, с.61 - 63]) нам остается показать, что все элементы из $M_\Delta e_\Delta$ обратимы в алгебре $S_1 e_\Delta$ с единицей e_Δ.

Возьмем любой $\rho\in\Delta$. Тогда, по построению, $e_\rho = \rho\rho'$ является сомножителем в e_Δ, поэтому получаем равенство $\rho e_\Delta \cdot (\rho e_\Delta)' = e_\rho e_\Delta = e_\Delta$. Это означает, что любой элемент $\rho e_\Delta \in M_\Delta e_\Delta$ обратим в алгебре $S_1 e_\Delta$. Следовательно, все элементы из $M_\Delta e_\Delta$ обратимы.

Равенство (12) вытекает из единственности $\hat{\varepsilon}_\Delta$ и того, что элемент $g' e_\Delta$, если он ненулевой, обратен элементу ge_Δ в алгебре $S_1 e_\Delta$ с единицей e_Δ в силу замечания 2 и построения алгебры R_Δ.

ЛЕММА 6. Для любого конечного непустого подмножества Δ в Π подалгебра $\hat{R}_\Delta = R_\Delta \hat{\varepsilon}_\Delta + \bigoplus_{\rho\in\Delta\setminus\{x\}} k_\rho$ является алгеброй, изоморфной прямой сумме $\mathcal{R}_\Delta \hat{\varepsilon}_\Delta \oplus (\overset{\oplus}{_{p\in\Delta\setminus\{x\}}} k_p)$, так как $\mathcal{R}_\Delta \hat{\varepsilon}_\Delta \cap (\overset{\oplus}{_{p\in\Delta\setminus\{x\}}} k_p) = 0$, $\mathcal{R}_\Delta \hat{\varepsilon}_\Delta \cdot (\overset{\oplus}{_{p\in\Delta\setminus\{x\}}} k_p) = 0$ в алгебре S_1.

Действительно, достаточно заметить, что $e_\Delta \cdot e_p^* = 0$, если $p \in \Delta\setminus\{x\}$.

ТЕОРЕМА I. Если Δ пробегает все конечные непустые подмножества в Π, содержащие x, то соответствующие подалгебры $\hat{\mathcal{R}}_\Delta$ алгебры S_1 образуют в S_1 индуктивное (направленное вверх) семейство подалгебр, содержащих подалгебру $\langle x, x'\rangle = \hat{\mathcal{R}}_{\{x\}} = \mathcal{R}_{\{x\}}$.

При этом окажется, что абсолютно свободная строго регулярная алгебра S_1 является объединением этого индуктивного семейства подалгебр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 6, доказываем сначала, что если Δ_1, Δ_2 - конечные непустые подмножества в Π, содержащие x, то справедлива импликация

$$\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \Longrightarrow \hat{\mathcal{R}}_{\Delta_1} \subseteq \hat{\mathcal{R}}_{\Delta_2}. \tag{13}$$

В частности, получится и включение $\hat{\mathcal{R}}_\Delta \supseteq \hat{\mathcal{R}}_{\{x\}} = \langle x, x'\rangle$.

Пусть $\{x\} \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2$ и эти множества - конечные непустые подмножества в Π. С помощью лемм 5 и 6 строим соответствующие подалгебры в S_1.

По построению, получаем включение $\mathcal{R}_{\Delta_1} \subseteq \mathcal{R}_{\Delta_2}$. В силу леммы 5 $\hat{\varepsilon}_{\Delta_1}$ переводит изоморфную алгебру $\mathcal{R}_{\Delta_1}$ в идеал $S_1 e_{\Delta_1}$. Аналогично для Δ_2. При этом, по построению, $e_{\Delta_2} = e_{\Delta_1} e_{\Delta_2}$, поэтому правое умножение $\rho(e_{\Delta_2})$ переводит идеал $S_1 e_{\Delta_1}$ в идеал $S_1 e_{\Delta_2}$. В результате получаем снова в силу леммы 5, что сужением изоморфного вложения $\hat{\varepsilon}_{\Delta_2}$ на $\mathcal{R}_{\Delta_1}$ будет гомоморфизм $\hat{\varepsilon}_{\Delta_1} \rho(e_{\Delta_2})$. Это и приводит нас к импликации (13).

С одной стороны,

$$\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \Longrightarrow \overset{\oplus}{_{p\in\Delta_1\setminus\{x\}}} k_p \subseteq \overset{\oplus}{_{p\in\Delta_2\setminus\{x\}}} k_p, \tag{14}$$

с другой - если $s \in \hat{\mathcal{R}}_{\Delta_1}$, то

$$s = s\rho(e_{\Delta_2}) + (s - s\rho(e_{\Delta_2})) = s\rho(e_{\Delta_2}) + s(1 - e_{\Delta_2}). \tag{15}$$

При этом с учетом доказанного выше $s\rho(e_{\Delta_2}) \in \hat{\mathcal{R}}_{\Delta_2}$. Но тогда из выражений (14), (15) и леммы 6 получаем (13), так как $\overset{\oplus}{_{p\in\Delta_2\setminus\{x\}}} k_p$ - идеал алгебры S_1 и $1-e_{\Delta_2}$ - элемент из этого идеала.

Из импликации (13) и конечности рассматриваемых множеств Δ с очевидностью вытекает, что соответствующие подалгебры $\hat{\mathcal{R}}_\Delta$ (структуру которых описывает лемма 6) образуют индуктивную систему подалгебр. Остается показать, что каждый элемент алгебры $\mathfrak{S}_1$ принадлежит хотя бы одной из этих подалгебр $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta$.

Возьмем произвольный элемент $s \in \mathfrak{S}_1$.

Если $s \in I$, то, по построению $I, s \in \bigoplus_{p \in \Gamma} k_p$ для некоторого конечного $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$. Тогда, по построению, $s \in \widehat{\mathcal{R}}_\Delta$, где $\Delta = \Gamma \cup \{x\}$. Поэтому можно считать, что $s \notin I$. Применяем канонический гомоморфизм $\nu: \mathfrak{S}_1 \to \Phi(x)$ с ядром $ker\nu = I$. В результате получаем, что $s\nu = fg^{-1} \in \mathcal{R}_\Delta$ для некоторого конечного непустого $\Delta \subseteq \Pi$, так как подалгебры $\mathcal{R}_\Delta$ образуют индуктивное семейство подалгебр в алгебре $\Phi(x)$, откуда следует, что $\Phi(x)$ - объединение этого семейства подалгебр. При этом, конечно, можно считать, что $x \in \Delta$.

По построению получаем, что образы элементов s и $fg'e_\Delta$ при гомоморфизме ν совпадают. Поэтому $s - fg'e_\Delta \in I$. Но тогда в силу сказанного выше для некоторого $\Delta' \subseteq \mathcal{P}$ получаем, что Δ' - конечное непустое подмножество в $\mathcal{P}$ и $s - fg'e_\Delta \in \widehat{\mathcal{R}}_{\Delta \cup \Delta'}$ в силу (13). Значит, $s = fg'e_\Delta + (s - fg'e_\Delta) \in \widehat{\mathcal{R}}_{\Delta \cup \Delta'}$ в силу лемм 5 и 6. Теорема доказана.

С помощью доказанной теоремы мы можем задать алгебру $\mathfrak{S}_1$, указав некоторый ее канонический базис и соответствующую таблицу умножения базисных элементов, т.е. учитывая описание алгебры I, выбираем и фиксируем сначала базис алгебры I

$$\mathcal{B}(I) = \{ i_\xi \mid \xi \in \sigma \}, \tag{16}$$

где соответствующие элементы i_ξ имеют вид $x^s e_p^*, 0 \leq s \leq -1 + deg(p)$ для подходящего $p \in \mathcal{P}$. Другими словами, мы просто объединили канонические базисы конечномерных алгебр - полей k_p (см. лемму 2 и следствие 1). После этого запишем соответствующую таблицу умножения базисных элементов алгебры I:

$$i_{\xi_1} \, i_{\xi_2} = \sum_{\xi \in \Lambda(\xi_1, \xi_2)} \delta_{\xi_1 \xi_2 \xi} \, i_\xi . \tag{17}$$

Зафиксировав базис $\mathcal{B}(I)$ алгебры I, получим в силу леммы 4 правила умножения элементов специального вида из алгебры $\mathfrak{S}_1$ на базисные элементы алгебры I:

$$s = fg' \Longrightarrow se_p^* = e_p^* s = \sum_{\xi \in \sigma(s, e_p^*)} \delta_\xi(s, e_p^*) \, i_\xi \tag{18}$$

для некоторых конечных подмножеств $\sigma(s, e_p^{\varkappa})$ в σ и более общие правила

$$s = fg' \Longrightarrow s i_\eta = i_\eta s = \sum_{\xi \in \sigma(s, i_\eta)} \delta_\xi(s, i_\eta) i_\xi . \qquad (19)$$

Затем учтем канонический гомоморфизм $\nu: \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \Phi(x)$ алгебры $\mathfrak{S}_1$ на поле $\Phi(x)$ рациональных дробей (см. лемму 3). Хорошо известно [6], что базисом алгебры $\Phi(x)$ является множество

$$\mathfrak{B}(\Phi(x)) = \{\bar{y}_\theta \mid \theta \in \Xi\} \qquad (20)$$

простейших дробей. При этом простейшая дробь $\bar{y}_\theta$ имеет один из следующих видов:

1) x^n для некоторого целого $n \geqslant 1$;

2) x^{-m} для некоторого целого $m \geqslant 1$;

3) единица 1 алгебры $\Phi(x)$;

4) $x^s p^{-t}$, где s - целое число, $p \in \mathcal{P}$, $0 \leqslant s \leqslant -1 + deg(p)$, t - целое число, $t \geqslant 1$.

В соответствии с указанным разбиением базиса алгебры $\Phi(x)$ строим в алгебре $\mathfrak{S}_1$ элементы y_θ следующих видов:

1) x^n для некоторого целого $n \geqslant 1$;

2) $x^{-m} = (x^m)'$ для некоторого целого $m \geqslant 1$;

3) единица $1 = e_x$ алгебры $\mathfrak{S}_1$;

4) $x^s (p')^t = x^s (p^t)'$, где s - целое число, $p \in \mathcal{P}$, $0 \leqslant s \leqslant -1 + deg(p)$, t - целое число, $t \geqslant 1$.

Таким образом, мы выделили в алгебре $\mathfrak{S}_1$ некоторое подмножество $\{y_\theta \mid \theta \in \Xi\}$ элементов, имеющих вид $s = fg'$ для подходящих многочленов f, g ("наипростейшего" вида), причем, по построению, отображение $\bar{y}_\theta \longrightarrow y_\theta$ взаимно однозначно: мы вложили базис алгебры $\Phi(x)$ в алгебру $\mathfrak{S}_1$. Нужно только заметить, что $y_\theta \nu = \bar{y}_\theta$ для канонического гомоморфизма ν.

С каждым базисным элементом $\bar{y}_\theta$ алгебры $\Phi(x)$ свяжем конечное подмножество $\Delta(\theta)$ в $\mathcal{P}$ по правилу

$$\Delta(\theta) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } \bar{y}_\theta \text{ имеет вид 1), 2) или 3);} \\ \{p\}, \text{ если } \bar{y}_\theta \text{ имеет вид 4).} \end{cases} \qquad (21)$$

Для любых двух $\theta_1, \theta_2 \in \Xi$ полагаем

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) = \Delta(\theta_1) \cup \Delta(\theta_2) . \qquad (22)$$

Придерживаясь указанных выше обозначений и соглашений, получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Выбранные нами элементы образуют базис алгебры $\mathfrak{S}_1$:

$$\mathcal{B}(\mathfrak{S}_1) = \{ i_\xi \mid \xi \in \sigma \} \sqcup \{ y_\theta \mid \theta \in \Xi \}. \tag{23}$$

При этом в соответствии с правилами (17) - (19)

$$\left.\begin{aligned} & i_{\xi_1} i_{\xi_2} = \sum_{\xi \in \Lambda(\xi_1,\xi_2)} \delta_{\xi_1 \xi_2 \xi}\, i_\xi \ ; \\ & y_\theta i_{\xi_1} = i_{\xi_1} y_\theta = \sum_{\xi \in \sigma(y_\theta, i_{\xi_1})} \delta_\xi (y_\theta, i_{\xi_1}) i_\xi \ ; \end{aligned}\right\} \ldots \tag{24}$$

$$y_{\theta_1} y_{\theta_2} = \sum_{\theta \in \Gamma(\theta_1,\theta_2)} \alpha_{\theta_1\theta_2\theta}\, y_\theta -$$

$$- \sum_{\rho \in \Delta(\theta_1,\theta_2)} \ \sum_{\theta \in \Gamma(\theta_1,\theta_2)} \ \sum_{\xi \in \sigma(y_\theta, e_\rho^*)} \alpha_{\theta_1\theta_2\theta}\, \delta_\xi (y_\theta, e_\rho^*) i_\xi \ , \tag{25}$$

где $\Delta(\theta_1,\theta_2)$ вычисляется по правилам (21), (22), а коэффициенты $\alpha_{\theta_1\theta_2\theta}$ взяты из таблицы умножения

$$\bar{y}_{\theta_1} \bar{y}_{\theta_2} = \sum_{\theta \in \Gamma(\theta_1,\theta_2)} \alpha_{\theta_1\theta_2\theta}\, \bar{y}_\theta \tag{26}$$

базисных элементов алгебры $\Phi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 и равенств $y_\theta \nu = \bar{y}_\theta$ легко вытекает, что выбранные нами элементы действительно образуют базис алгебры $\mathfrak{S}_1$. Кроме того, в силу сказанного и доказанного справедливы равенства (24). Остается связать равенства (25) и (26).

Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \Xi$ и $\bar{y}_{\theta_1}, \bar{y}_{\theta_2}$ – соответствующие базисным элементам $y_{\theta_1}, y_{\theta_2}$ базисные элементы алгебры $\mathfrak{S}_1$. Согласно условию для них справедливы равенства (26), причем элементы $\bar{y}_{\theta_1}, \bar{y}_{\theta_2}, y_{\theta_1}, y_{\theta_2}$ имеют один из видов 1) - 4).

Строим $\Delta = \{x\} \cup \Delta(\theta_1) \cup \Delta(\theta_2) = \{x\} \cup \Delta(\theta_1, \theta_2)$ (см. (21) и (22)). Рассмотрим возникающие случаи.

Если ни один из элементов $y_{\theta_1}, y_{\theta_2}$ не имеет вида 4), то оба эти элемента находятся в подалгебре $\mathcal{R}_{\{x\}}$ алгебр $\Phi(x)$ и $\mathfrak{S}_1$. Но тогда $\Delta(\theta_1, \theta_2) = \emptyset$ и равенство (25) принимает вид

$$y_{\theta_1} y_{\theta_2} = \sum_{\theta \in \Gamma(\theta_1,\theta_2)} \alpha_{\theta_1\theta_2\theta}\, y_\theta \, .$$

Значит, оно вытекает из (26), так как мы произвели вычисления в одной и той же алгебре - алгебре $\mathcal{R}_{\{x\}}$. Здесь мы, конечно, учли лемму

I и то, что сумма пустого множества слагаемых считается равной нулю.

Пусть хотя бы один из элементов $y_{\theta_1}, y_{\theta_2}$ имеет вид 4), т.е. $\Delta(\theta_1, \theta_2)$ – конечное непустое (не более чем двухэлементное) подмножество в $\mathcal{P}$. В этом случае применим изоморфное вложение ε_Δ алгебры $\mathcal{A}_\Delta$ в алгебру $\mathcal{S}_1$, построенное в лемме 5.

Применяя ε_Δ, получаем

$$
\begin{gathered}
y_{\theta_1} y_{\theta_2} = (y_{\theta_1} y_{\theta_2})\varepsilon_\Delta + y_{\theta_1} y_{\theta_2}(1 - e_\Delta); \\
(y_{\theta_1} y_{\theta_2})\varepsilon_\Delta = \sum_{\gamma \in \Gamma(\theta_1, \theta_2)} \alpha_{\theta_1 \theta_2 \gamma}\, y_\gamma e_\Delta
\end{gathered}
\tag{27}
$$

в силу (26) и леммы 5. По построению, $1 - e_\Delta = \sum_{\rho \in \Delta \setminus \{x\}} e_\rho^*$, в силу (II). Но тогда, по построению Δ, легко вытекает равенство $y_{\theta_1} y_{\theta_2}(1 - e_\Delta) = 0$, так как $\rho' e_\rho^* = 0$ для любого $\rho \in \mathcal{P}$.

Таким образом, система (27) упрощается:

$$
y_{\theta_1} y_{\theta_2} = \sum_{\theta \in \Gamma(\theta_1, \theta_2)} \alpha_{\theta_1 \theta_2 \theta}\, y_\theta e_\Delta . \tag{28}
$$

Очевидны равенства

$$
y_\theta e_\Delta = y_\theta - y_\theta(1 - e_\Delta); \quad 1 - e_\Delta = \sum_{\rho \in \Delta(\theta_1, \theta_2)} e_\rho^* , \tag{29}
$$

а из равенств (28), (29) и (24) следуют нужные нам равенства (25). Теорема доказана.

В заключение укажем еще один способ описания абсолютно свободной строго регулярной алгебры $\mathcal{S}_1$ с одной свободной порождающей x.

С множеством $\mathcal{P}$ всех неприводимых многочленов $\rho \neq x$ со старшим коэффициентом I мы уже связали алгебру I – прямую сумму полей k_ρ. Свяжем с $\mathcal{P}$ еще одну алгебру – прямое произведение

$$
E = \prod_{\rho \in \mathcal{P}} k_\rho . \tag{30}
$$

Из (30) вытекает, что алгебра E – строго регулярна, а алгебра I является ее идеалом – суммой всех минимальных идеалов k_ρ алгебры E.

ЛЕММА 7. Отображение $\varepsilon_{\mathcal{P}} = \prod_{\rho \in \mathcal{P}} \varepsilon_\rho$ алгебры $\Phi[x]$ многочленов в алгебру E, действующее по правилу

$$
f\varepsilon_{\mathcal{P}} = (f e_\rho^* \mid \rho \in \mathcal{P}) \in E, \tag{31}
$$

является изоморфным вложением алгебры $\Phi[x]$ в алгебру E.

Это с очевидностью вытекает из (9), (31), так как ненулевой многочлен f может иметь лишь конечное число простых делителей $p \in \mathcal{P}$, а само множество $\mathcal{P}$ бесконечно.

Для формулировки теоремы нам необходимо

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $\mathcal{S}$ - строго регулярная алгебра. Если R - строго регулярная подалгебра алгебры $\mathcal{S}$, то унарная операция $x \to x'$ на R получается сужением на R той же операции в $\mathcal{S}$: если $r \in R$ и r' вычислен в $\mathcal{S}$, то $r' \in R$. Поэтому пересечение любого семейства строго регулярных подалгебр алгебры $\mathcal{S}$ само является строго регулярной подалгеброй в $\mathcal{S}$. В частности, для любого непустого подмножества Y в $\mathcal{S}$ среди строго регулярных подалгебр алгебры $\mathcal{S}$, содержащих Y, существует наименьшая - строго регулярная подалгебра $\langle Y \rangle'$, порожденная множеством Y в $\mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 3. Строго регулярная подалгебра $\mathcal{S} = \langle \Phi[x] e_{\mathcal{P}} \rangle'$ строго регулярной алгебры E, порожденная образом изоморфного вложения $\varepsilon_{\mathcal{P}} : \Phi[x] \longrightarrow E$, является абсолютно свободной однопорожденной (как строго регулярная алгебра!) строго регулярной алгеброй. При этом $I \not\subseteq \mathcal{S} \not\subseteq E$.

Для доказательства теоремы 3 нам необходимо несколько лемм:

ЛЕММА 8. Идеал I алгебры $\mathcal{S}_1$ является максимальным идеалом в $\mathcal{S}_1$, причем $\mathcal{S}_1/I \approx \Phi(x)$, но $\mathcal{S}_1$ не изоморфно $\Phi(x) \oplus I$ - прямой сумме алгебр $\Phi(x)$ и I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм $\mathcal{S}_1/I \approx \Phi(x)$ был установлен в лемме 3. Поэтому остается доказать, что $\mathcal{S}_1$ не изоморфно $\Phi(x) \oplus I$.

Допустим, что $\mathcal{S}_1 \approx \Phi(x) \oplus I$. Тогда I будет гомоморфным образом алгебры $\mathcal{S}_1$, а значит, - алгеброй с единицей. Между тем, множество $\mathcal{P}$ бесконечно, а прямая сумма бесконечного числа алгебр с единицей никогда не является алгеброй с единицей (если конечно прямые слагаемые - ненулевые). Противоречие заканчивает доказательство леммы.

Будем теперь рассматривать алгебру I как левый I-модуль (естественным образом). Тогда из того, что I - идеал алгебры $\mathcal{S}_1$ вытекает, что правые умножения ρ_s на элементы $s \in \mathcal{S}_1$ являются эндоморфизмами левого I-модуля I.

ЛЕММА 9. Отображение $\rho : \mathcal{S}_1 \longrightarrow End(_I I)$ алгебры $\mathcal{S}_1$ в алгебру эндоморфизмов левого I-модуля I, ставящее в соответствие каждому элементу $s \in \mathcal{S}_1$ правое умножение $\rho(s) = \rho_s$, является изоморфным вложением алгебр.

Действительно, то, что ρ - гомоморфизм алгебр очевидно. Поэтому остается доказать, что $ker \rho = 0$, т.е. идеал $I^* = \{s \in \mathcal{S}_1 | Is = 0\}$ - нулевой.

По построению I – алгебра без нильпотентных элементов. Поэтому $I \cap I^* = 0$. Допуская, что $I^* \neq 0$, и применяя канонический гомоморфизм $\nu: \mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{S}_1 / I$, получаем, что I^* изоморфно вкладывается в поле $\mathfrak{S}_1 / I \approx \Phi(x)$. Но тогда имеем прямое разложение алгебры $\mathfrak{S}_1$: $\mathfrak{S}_1 = I \oplus I^* \approx I \oplus \Phi(x)$ в силу леммы 8, а это противоречит той же лемме.

ЛЕММА 10. Алгебра E канонически изоморфна алгебре $End({}_I I)$ эндоморфизмов левого I-модуля I.

Действительно, возьмем любой эндоморфизм φ левого I-модуля I. Тогда для любого $p \in \mathcal{P}$ получаем

$$\varphi(e_p^*) = \varphi_p = \varphi(e_p^* e_p^*) = e_p^* \varphi_p \in k_p . \tag{32}$$

С другой стороны, с каждым элементом $q = (q_p \mid p \in \mathcal{P})$ алгебры E можно связать эндоморфизм левого I-модуля I, т.е. правое умножение на этот элемент q в алгебре E, суженное на ее идеал I (см. (30)). Эти переходы и устанавливают нужный канонический изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\theta: End({}_I I) \longrightarrow E$ – канонический изоморфизм, о котором говорится в лемме 10, а ρ – изоморфное вложение алгебры $\mathfrak{S}_1$ в алгебру $End({}_I I)$, о котором говорится в лемме 9.

Ясно, что тогда $\rho\theta$ будет изоморфным вложением алгебры $\mathfrak{S}_1$ в алгебру E. Но мы отождествили алгебру $\Phi[x]$ с подалгеброй $\langle x, x' \rangle$ в $\mathfrak{S}_1$ (см. лемму I) и в лемме 7 построим изоморфное вложение $\varepsilon_{\mathcal{P}}$ алгебры $\Phi[x]$ в алгебру E. По построению получаем, что для любого $f \in \Phi[x]$ справедливо равенство (см. (32), леммы 9 и 10)

$$f \rho \theta = (f e_p^* \mid p \in \mathcal{P}) . \tag{33}$$

Сравнивая (31) и (33), видим, что изоморфное вложение $\varepsilon_{\mathcal{P}}$ совпадает с сужением изоморфного вложения $\rho\theta$ на подалгебру $\Phi[x]$ алгебры $\mathfrak{S}_1$. В частности,

$$\Phi[x]\varepsilon_{\mathcal{P}} = \Phi[x]\rho\theta \subseteq \mathfrak{S}_1 \rho\theta \subseteq E ,$$

откуда с очевидностью вытекает, что строго регулярная подалгебра $\mathfrak{S}_1 \rho\theta$ алгебры E совпадает со строго регулярной подалгеброй $\mathfrak{S} = \langle \Phi[x]\varepsilon_{\mathcal{P}} \rangle'$ алгебры E, порожденной в E изоморфным вложением $\varepsilon_{\mathcal{P}}$.

Для окончания доказательства теоремы остается заметить, что при изоморфизме $\rho\theta : S_1 \to S = S_1\rho\theta \in E$ идеал I тождественным образом переходит сам в себя, и применить лемму 8. Теорема доказана.

Цитированная литература

I. Gardner B.J. Radical classes of regular rings with primitive images. - Pacif. J. Math., 1982, v.99, N 2, p.337 - 349.

2. Goodearl K.R. Von Neumann regular rings. - Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979. - 370 p.

3. Мальцев А.И. Алгебраические структуры. - М.: Наука, I970.- 392 с.

4. Бесолов О.К. О многообразиях строго регулярных алгебр. I. - Настоящий сборник, с. 3 - 27.

5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. - М.: Наука, I962. - 396 с.

6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. - М.: Наука, I977. - 496 с.

А.И.Кашу

ОТОБРАЖЕНИЕ КРУЧЕНИЙ И ЛОКАЛИЗАЦИЙ МОДУЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКТОРОВ

В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в [I] и анонсированные в [2]. Рассматривается пара сопряженных функторов

$$ {}_R\mathcal{M} \underset{T=U\otimes_S -}{\overset{H=Hom_R(U,-)}{\rightleftarrows}} {}_S\mathcal{M}, $$

где ${}_R U_S$ - произвольный R-S-бимодуль. Пусть $\Phi: TH \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{M}}$ и $\Psi: 1_{{}_S\mathcal{M}} \longrightarrow HT$ - сопутствующие естественные преобразования.

Обозначим через $\mathcal{J}(R)$ ($\mathcal{L}(R)$) совокупность всех идемпотентных радикалов (кручений) категории левых R-модулей ${}_R\mathcal{M}$. В работе [I] изучались отображения

$$ \mathcal{J}(R) \underset{\alpha'}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathcal{J}(S), $$

определенные правилами

$$ \mathcal{R}(\alpha(r)) = T^{-1}(\mathcal{R}(r)), \quad \mathcal{P}(\alpha'(s)) = H^{-1}(\mathcal{P}(s)), $$

где $r \in \mathcal{J}(R)$, $s \in \mathcal{J}(S)$, $\mathcal{R}(r)$ - класс r-радикальных модулей, а $\mathcal{P}(s)$ - класс s-полупростых модулей.

В настоящей статье рассматривается действие отображений α и α' на кручения и кокручения категорий ${}_R\mathcal{M}$ и ${}_S\mathcal{M}$. Изучается вопрос о том, при каких условиях α сохраняет кручения, а α' - кокручения. Кроме того, исследуется вопрос о сохранении локализаций функтором H и колокализаций функтором T.

Интересно, что ответы на эти вопросы, полученные в терминах свойств функторов T и H, приводят к различным ослаблениям хорошо известных свойств точности и полноты этих функторов.

§ I. Отображение α: сохранение кручений и локализаций

Скажем, что α <u>сохраняет кручения</u>, если $\alpha(r)$ является кручением для любого $r \in \mathcal{L}(R)$. Покажем условия на функторы H и T, равносильные тому, что α сохраняет кручения.

Для любого класса модулей $\mathcal{K} \subseteq {}_R\mathcal{M}$ обозначим:

$$\mathcal{K}^{\uparrow} = \{X \in {}_R\mathcal{M} \mid Hom_R(X,M)=0 \text{ для любого } M \in \mathcal{K}\};$$

$$\mathcal{K}^{\downarrow} = \{X \in {}_R\mathcal{M} \mid Hom_R(M,X)=0 \text{ для любого } M \in \mathcal{K}\}.$$

Назовем модуль ${}_RQ$ <u>наследственным сверху</u>, если класс $\{Q\}^{\uparrow}$ – наследственный.

ЛЕММА I.I. Модуль Q является наследственным сверху тогда и только тогда, когда $\{Q\}^{\uparrow} = \{E(Q)\}^{\uparrow}$, где $E(Q)$ – инъективная оболочка модуля Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – наследственный сверху модуль. Так как $Q \subseteq E(Q)$, имеем $\{Q\}^{\uparrow} \supseteq \{E(Q)\}^{\uparrow}$. Пусть $X \in \{Q\}^{\uparrow}$. Если $f \in Hom_R(X, E(Q))$ и $f \neq 0$, то $f(X) \neq 0$, поэтому $f(X) \cap Q \neq 0$. Обозначим $X' = f^{-1}(f(X) \cap Q)$. Тогда ограничение $f' = f|_{X'}$ является ненулевым элементом в $Hom_R(X',Q)$, где $X' \subseteq X$. Это противоречит наследственности класса $\{Q\}^{\uparrow}$, значит, $Hom_R(X, E(Q))=0$, т.е. $X \in \{E(Q)\}^{\uparrow}$. Следовательно, $\{Q\}^{\uparrow} = \{E(Q)\}^{\uparrow}$.

Теперь заметим, что если ${}_RM$ – инъективный модуль, то класс $\{M\}^{\uparrow}$ является наследственным. Поэтому равенство $\{Q\}^{\uparrow} = \{E(Q)\}^{\uparrow}$ очевидным образом влечет, что Q – наследственный сверху. Лемма доказана.

Примерами наследственных сверху модулей могут служить инъективные и псевдоинъективные модули [3, с.33], а также кообразующие категории ${}_R\mathcal{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Следующие условия равносильны:

I) отображение α: $\mathcal{J}(R) \to \mathcal{J}(S)$ сохраняет кручения;

2) функтор H переводит инъективные модули в наследственные сверху модули;

3) функтор H сохраняет свойство наследственности сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2). Пусть ${}_RQ$ – инъективный модуль и $r = r_Q$ – кручение с кообразующим Q [3, с.32]. По условию I) $\alpha(r)$ должно быть кручением. Так как $\mathcal{R}(r) = \{Q\}^{\uparrow}$, по определению отображения α имеем

$$\mathcal{R}(\alpha(r)) = T^{-1}(\{Q\}^{\uparrow}) = \{H(Q)\}^{\uparrow},$$

поэтому $\{H(Q)\}^{\dagger}$ - наследственный класс, т.е. $H(Q)$ - наследственный сверху модуль.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть Q - наследственный сверху модуль. Тогда по лемме I.I $\{Q\}^{\dagger}=\{E(Q)\}^{\dagger}$, а по условию 2) модуль $H(E(Q))$ - наследственный сверху. Так как

$$\{H(Q)\}^{\dagger}=T^{-1}(\{Q\}^{\dagger})=T^{-1}(\{E(Q)\}^{\dagger})=\{H(E(Q))\}^{\dagger},$$

отсюда заключаем, что $H(Q)$ - наследственный сверху.

3) $\Longrightarrow$ I). Пусть $r\in\mathcal{L}(R)$ и ${}_RQ$ - инъективный кообразующий кручения r. Тогда Q - наследственный сверху и по условию 3) $H(Q)$ также обладает этим свойством. Поэтому $\{H(Q)\}^{\dagger}$ - класс кручения и по определению $\mathcal{R}(\alpha(r))=T^{-1}(\{Q\}^{\dagger})=\{H(Q)\}^{\dagger}$. Следовательно, $\alpha(r)$ - кручение. Предложение доказано.

Покажем теперь как выражается условие сохранения кручений отображением α с помощью функтора T. Обозначим через $\mathcal{R}(M)$ наименьший класс кручения категории ${}_R\mathcal{M}$, содержащий модуль ${}_RM$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3. Следующие условия равносильны:

I) отображение α сохраняет кручения;

2) для любого мономорфизма $N'\xrightarrow{i}N$ категории ${}_S\mathcal{M}$ выполняется соотношение $\ker T(i)\in\mathcal{R}(T(N))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2). По условию I) класс $T^{-1}(\mathcal{R}(T(N)))$ - наследственный, поэтому из $N\in T^{-1}(\mathcal{R}(T(N)))$ следует $N'\in T^{-1}(\mathcal{R}(T(N)))$. Значит, $T(N')\in\mathcal{R}(T(N))$, откуда заключаем, что $\ker T(i)\in\mathcal{R}(T(N))$.

2) $\Longrightarrow$ I). Пусть $r\in\mathcal{L}(R)$ и докажем наследственность класса $\mathcal{R}(\alpha(r))=T^{-1}(\mathcal{R}(r))$. Для этого возьмем произвольный $N\in T^{-1}(\mathcal{R}(r))$ и пусть $N'\overset{i}{\leq}N$. Рассмотрим точную последовательность

$$0\longrightarrow\ker T(i)\longrightarrow T(N')\longrightarrow \operatorname{im}T(i)\longrightarrow 0,$$

где $\operatorname{im}T(i)\subseteq T(N)$. Так как $T(N)\in\mathcal{R}(T(N))$, имеем $\operatorname{im}T(i)\in\mathcal{R}(T(N))$. Кроме того, по условию 2) $\ker T(i)\in\mathcal{R}(T(N))$. Поскольку класс $\mathcal{R}(T(N))$ замкнут относительно расширений, то выводим, что $T(N')\in\mathcal{R}(T(N))$. Остается заметить, что допущение $T(N)\in\mathcal{R}(r)$ влечет $\mathcal{R}(T(N))\subseteq\mathcal{R}(r)$, поэтому $T(N')\in\mathcal{R}(r)$, т.е. $N'\in T^{-1}(\mathcal{R}(r))$, что показывает наследственность класса $T^{-1}(\mathcal{R}(r))$. Это значит, что $\alpha(r)$ является кручением. Предложение доказано.

Хорошо известно, что для пары сопряженных функторов $T \dashv H$ точность функтора T равносильна тому, что H сохраняет инъективность модулей. Очевидно, что если H сохраняет инъективность, то выполняется условие 2) предложения I.2. С другой стороны, нетрудно заметить, что если T - точный функтор, то выполняется условие 2) предложения I.3, так как в этом случае $ker\,T(i)=0$ для любого мономорфизма i. Поэтому верно

СЛЕДСТВИЕ I.4. Если T - точный функтор (т.е. U_S - плоский модуль), то отображение α сохраняет кручения.

Для простоты далее в этом параграфе будем считать, что T является <u>точным функтором</u>. Заметим, что в этом случае отображение α можно определить применением функтора H к инъективным кообразующим кручений категории ${}_R\mathcal{M}$. В самом деле, пусть $r \in \mathcal{L}(R)$ и Q - инъективный кообразующий кручения r. Если T - точный, то H сохраняет инъективность модулей, поэтому $H(Q)$ - инъективный модуль. Имеем $\mathcal{R}(\alpha(r)) = T^{-1}(\mathcal{R}(r)) = (H(\mathcal{F}(r)))^{\uparrow} = \{H(Q)\}^{\uparrow}$, следовательно, $H(Q)$-инъективный кообразующий кручения $\alpha(r)$.

Нетрудно показать вид радикального фильтра $\mathcal{E}_{\alpha(r)}$ кручения $\alpha(r)$, где $r \in \mathcal{L}(R)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.5. Пусть $r \in \mathcal{L}(R)$. Тогда

$$\mathcal{E}_{\alpha(r)} = \{J \text{ - левый идеал кольца } S \mid U/UJ \in \mathcal{R}(r)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $J \in \mathcal{E}_{\alpha(r)}$, если и только если $S/J \in \mathcal{R}(\alpha(r)) = T^{-1}(\mathcal{R}(r))$, т.е. $U \otimes_S S/J \in \mathcal{R}(r)$. Остается применить изоморфизм $U \otimes_S S/J \cong U/UJ$. Предложение доказано.

В частности, если $r=0$, то имеем $\mathcal{R}(\alpha(r)) = T^{-1}(0) = Ker\,T$. Обозначим соответствующее кручение через s_1. Тогда из предложения I.5 следует, что

$$\mathcal{E}_{s_1} = \{J \text{ - левый идеал кольца } S \mid U = UJ\}.$$

Переходим к вопросу о сохранении локализаций функтором H. Если $r \in \mathcal{L}(R)$, то любой модуль $M \in {}_R\mathcal{M}$ имеет r-локализацию φ_M: $M \longrightarrow L_r(M)$, т.е. такой гомоморфизм φ_M, что $ker\,\varphi_M$, $coker\,\varphi_M \in \mathcal{R}(r)$, а $L_r(M)$ - r-полупростой и r-инъективный модуль [3, с.81]. Аналогично, любой модуль $N \in {}_S\mathcal{M}$ обладает s-локализацией, где $s = \alpha(r)$.

Скажем, что функтор H <u>сохраняет r-локализации</u>, если гомоморфизм $H(\varphi_M): H(M) \longrightarrow H(L_r(M))$ является $\alpha(r)$-локализацией модуля $H(M)$ для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$. Если это условие выполняется для любого $r \in \mathcal{L}(R)$, то скажем, что H сохраняет локализации.

Обозначим через $\mathcal{L}_r$ класс всех r-полупростых r-инъективных модулей и напомним, что $M \in \mathcal{L}_r$, если и только если для любой пары $X' \subseteq X$ со свойством $X/X' \in \mathcal{R}(r)$ имеется естественный изоморфизм $Hom_R(X', M) \cong Hom_R(X, M)$.

ЛЕММА I.6. Если T – точный функтор, то для любого $r \in \mathcal{L}(R)$ имеет место соотношение $H(\mathcal{L}_r) \subseteq \mathcal{L}_{\alpha(r)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M \in \mathcal{L}_r$. Обозначим $s = \alpha(r)$ и возьмем произвольную точную последовательность из ${}_s\mathcal{M}$

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0$$

со свойством $Y'' \in \mathcal{R}(s) = T^{-1}(\mathcal{R}(r))$. Тогда в категории ${}_R\mathcal{M}$ имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow T(Y') \longrightarrow T(Y) \longrightarrow T(Y'') \longrightarrow 0,$$

где $T(Y'') \in \mathcal{R}(r)$. Из допущения $M \in \mathcal{L}_r$ следует изоморфизм $Hom_R(T(Y'), M) \cong Hom_R(T(Y), M)$, где ввиду сопряженности $Hom_R(T(Y'), M) \cong$ $\cong Hom_s(Y', H(M))$ и $Hom_R(T(Y), M) \cong Hom_s(Y, H(M))$. Значит, получаем изоморфизм $Hom_s(Y', H(M)) \cong Hom_s(Y, H(M))$, показывающий, что $H(M) \in \mathcal{L}_s$. Лемма доказана.

Если $r \in \mathcal{L}(R)$ и Q – инъективный кообразующий кручения r, то класс $\mathcal{L}_r$ состоит из всех таких $M \in {}_R\mathcal{M}$, что существует точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} Q_\alpha \longrightarrow \prod_{\beta \in \mathfrak{B}} Q_\beta,$$

где $Q_\alpha \cong Q_\beta \cong Q$. Применением функтора H получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H(M) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} H(Q_\alpha) \longrightarrow \prod_{\beta \in \mathfrak{B}} H(Q_\beta)$$

и, поскольку $H(Q)$ – инъективный кообразующий кручения $s = \alpha(r)$, имеем $H(M) \in \mathcal{L}_s$. Это рассуждение дает другое доказательство соотношения $H(\mathcal{L}_r) \subseteq \mathcal{L}_s$.

Пусть $r \in \mathcal{L}(R)$ и $s = \alpha(r)$. Из определения отображения α следует, что $H(\mathcal{P}(r)) \subseteq \mathcal{P}(s)$. Однако для радикальных классов кручений r и s аналогичное соотношение не всегда имеет место. Покажем какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы $H(\mathcal{R}(r)) \subseteq \mathcal{R}(s)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.7. Пусть $r \in \mathcal{L}(R)$, Q – инъективный кообразующий кручения r и $s = \alpha(r)$. Равносильны следующие условия:

1) $H(\mathcal{R}(r)) \subseteq \mathcal{R}(s)$;

2) если $M \in \mathcal{R}(r)$, то $TH(M) \in \mathcal{R}(r)$;

3) если $M \in \mathfrak{R}(r)$, то $\ker \Phi_M \in \mathfrak{R}(r)$;

4) для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$ соотношение $Hom_s(H(M), H(Q)) \neq 0$ влечет $Hom_R(M, Q) \neq 0$;

5) $s(H(M)) \cong H(r(M))$ для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$ (в функторной записи: $s \cdot H \cong H \cdot r$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ 2) Если $M \in \mathfrak{R}(r)$, то из 1) получаем $H(M) \in \mathfrak{R}(s) = T^{-1}(\mathfrak{R}(r))$, поэтому $TH(M) \in \mathfrak{R}(r)$.

2) $\Longrightarrow$ 3) ясно из наследственности класса $\mathfrak{R}(r)$, так как $\ker \Phi_M \subseteq TH(M)$, где $\Phi : TH \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{M}}$ – естественное преобразование, сопутствующее сопряженности.

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $M \in \mathfrak{R}(r)$. По допущению 3) $\ker \Phi_M \in \mathfrak{R}(r)$. Кроме того, из наследственности класса $\mathfrak{R}(r)$ имеем $im\, \Phi_M \in \mathfrak{R}(r)$, так как $im\, \Phi_M \subseteq M$. Теперь, используя замкнутость класса $\mathfrak{R}(r)$ относительно расширений, заключаем, что $TH(M) \in \mathfrak{R}(r)$, поэтому $H(M) \in T^{-1}(\mathfrak{R}(r)) = \mathfrak{R}(s)$.

1) $\Longleftrightarrow$ 4). Так как $\mathfrak{R}(r) = \{Q\}^{\dagger}$ и $\mathfrak{R}(s) = \{H(Q)\}^{\dagger}$, то условие 1) равносильно тому, что соотношение $Hom_R(M, Q) = 0$ влечет $Hom_s(H(M), H(Q)) = 0$.

1) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $M \in {}_R\mathcal{M}$ и $i_M : r(M) \longrightarrow M$ – вложение. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H(r(M)) \xrightarrow{H(i_M)} H(M) \longrightarrow H(M/r(M)),$$

где $H(M)/\, im\, H(i_M)$ изоморфен подмодулю модуля $H(M/r(M))$. Поскольку $M/r(M) \in \mathfrak{P}(r)$, получаем $H(M/r(M)) \in \mathfrak{P}(s)$, следовательно, $H(M)/\, im\, H(i_M) \in \mathfrak{P}(s)$. Это означает, что $s(H(M)) \subseteq im\, H(i_M) \cong H(r(M))$.

С другой стороны, $r(M) \in \mathfrak{R}(r)$ и по условию 1) $H(r(M)) \in \mathfrak{R}(s)$, поэтому $im\, H(i_M) \subseteq s(H(M))$. Таким образом, $s(H(M)) = im\, H(i_M)$, значит, $s(H(M)) \cong H(r(M))$.

5) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $M \in \mathfrak{R}(r)$. По условию 5) $H(M) = H(r(M)) \cong$ $\cong s(H(M))$, поэтому $H(M) \in \mathfrak{R}(s)$. Предложение доказано.

Напомним, что произвольный функтор $F: \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ называется полным, если для любой пары $A, B \in Ob\, \mathcal{K}_1$ индуцированное отображение

$$Hom_{\mathcal{K}_1}(A,B) \xrightarrow{F_{AB}} Hom_{\mathcal{K}_2}(F(A),F(B))$$

является сюръекцией.

Допустим, что функтор H является полным. Тогда пара модулей $M, Q \in {}_R\mathcal{M}$ определяет эпиморфизм $Hom_R(M,Q) \xrightarrow{H_{MQ}} Hom_S(H(M),H(Q))$, откуда очевидно, что выполняется условие 4) предложения I.7. В этом смысле каждое из равносильных условий предложения I.7 можно считать ослаблением полноты функтора H.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выполняются равносильные условия предложения I.7, то назовем функтор H <u>r-полным.</u> Если эти условия выполняются для любого $r \in \mathcal{L}(R)$, то назовем функтор H <u>$\mathcal{L}(R)$-полным.</u>

Из сказанного ясно, что если H – полный функтор, то он является и $\mathcal{L}(R)$-полным.

Теперь нам необходимо еще одно ограничение на функтор H, являющееся ослаблением его точности. Пусть $r \in \mathcal{L}(R)$ и $s = \alpha(r)$. Для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$ обозначим через π_M^r канонический гомоморфизм $M \longrightarrow M/r(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем функтор H <u>r-точным,</u> если $coker\, H(\pi_M^r) \in \mathcal{R}(s)$ для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$. Если это условие выполняется для любого $r \in \mathcal{L}(R)$, то назовем функтор H <u>$\mathcal{L}(R)$-точным</u>.

Очевидно, что если H точный, то $H(\pi_M^r)$ – эпиморфизм для любого $r \in \mathcal{L}(R)$ и $M \in {}_R\mathcal{M}$, поэтому H является $\mathcal{L}(R)$-точным.

ТЕОРЕМА I.8. Пусть функтор T точный и $r \in \mathcal{L}(R)$. Следующие условия равносильны:

1) функтор H сохраняет r-локализации;

2) функтор H является r-полным и r-точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2). Для произвольного $M \in {}_R\mathcal{M}$ пусть $\varphi_M : M \longrightarrow L_r(M)$ – r-локализация модуля M. По условию I) гомоморфизм $H(\varphi_M): H(M) \longrightarrow H(L_r(M))$ является s-локализацией модуля $H(M)$, где $s = \alpha(r)$. Из определения локализации следует, что $ker\, H(\varphi_M) \in \mathcal{R}(s)$. Поскольку $ker\, H(\varphi_M) \cong H(ker\, \varphi_M)$, то получаем $H(ker\, \varphi_M) \in \mathcal{R}(s)$ для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$. Заметим, что любой модуль из класса $\mathcal{R}(r)$ имеет вид $ker\, \varphi_M$, так как из $M \in \mathcal{R}(r)$ следует $M = ker\, \varphi_M$. Поэтому из доказанного ясно, что $H(\mathcal{R}(r)) \subseteq \mathcal{R}(s)$, т.е. H является r-полным.

Далее, представим гомоморфизм φ_M в виде композиции

$$M \xrightarrow{\pi_M} M/r(M) \xrightarrow{k_M} L_r(M),$$

где k_M – вложение, и заметим, что $coker\, \varphi_M = coker\, k_M$. Применим функтор H к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi_M"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_M"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M/r(M) \arrow[r, "k_M"] & L_r(M) \arrow[r, "\varepsilon_M"] & coker\, \varphi_M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

и полученное дополним до 3 x 3-диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H(M) \arrow[r, equal] \arrow[d, "H(\pi_M)"] & H(M) \arrow[r] \arrow[d, "H(\varphi_M)"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H(M/r(M)) \arrow[r, "H(k_M)"] \arrow[d] & H(L_r(M)) \arrow[r, "H(\varepsilon_M)"] \arrow[d] & im\, H(\varepsilon_M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & coker\, H(\pi_M) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & coker\, H(\varphi_M) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & im\, H(\varepsilon_M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Тогда нижняя строка является точной (см., например, [4 , с. 72]).

По условию I) $coker\, H(\varphi_M) \in \mathcal{R}(s)$, где класс $\mathcal{R}(s)$ – наследственный, поэтому $coker\, H(\pi_M) \in \mathcal{R}(s)$ для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$. По определению это означает, что H – r-точный.

2) $\Longrightarrow$ I). Допустим, что H является r-полным и r-точным. Докажем, что для любого $M \in {}_R\mathcal{M}$ гомоморфизм $H(\varphi_M)$ является s-локализацией модуля $H(M)$ (т.е. $ker\, H(\varphi_M)$, $coker\, H(\varphi_M) \in \mathcal{R}(s)$ и $H(L_r(M)) \in \mathcal{L}_s$).

Так как $ker\, H(\varphi_M) \cong H(ker\, \varphi_M)$ и $ker\, \varphi_M \in \mathcal{R}(r)$, то имеем $ker\, H(\varphi_M) \in H(\mathcal{R}(r))$. Ввиду r-полноты функтора H верно соотношение $H(\mathcal{R}(r)) \subseteq \mathcal{R}(s)$, поэтому $ker\, H(\varphi_M) \in \mathcal{R}(s)$.

Теперь используем тот факт, что в последней диаграмме нижняя строка точна и $im\, H(\varepsilon_M) \subseteq H(coker\, \varphi_M)$. Так как $coker\, \varphi_M \in \mathcal{R}(r)$, по определению, а функтор H является s-полным, по допущению, то получаем $H(coker\, \varphi_M) \in \mathcal{R}(s)$. Наследственность класса $\mathcal{R}(s)$ влечет $im\, H(\varepsilon_M) \in \mathcal{R}(s)$. Кроме того, из r-точности функтора H имеем $coker\, H(\pi_M) \in \mathcal{R}(s)$. Поскольку класс $\mathcal{R}(s)$ замкнут относительно расширений, из последних двух соотношений выводим, что $coker\, H(\varphi_M) \in \mathcal{R}(s)$.

Остается применить лемму I.6, из которой следует, что $H(L_r(M)) \in \mathcal{L}(s)$, поскольку $L_r(M) \in \mathcal{L}_r$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.9. Пусть функтор T точный. Тогда следующие условия равносильны:

I) функтор H сохраняет локализации;

2) функтор H является $\mathcal{L}(R)$-полным и $\mathcal{L}(R)$-точным.

СЛЕДСТВИЕ I.10. Пусть T - точный функтор. Если функтор H является полным и точным, то он сохраняет локализации.

Условия этого следствия выполняются, например, в случае, когда $_RU$ - проективный образующий категории $_R\mathcal{M}$, а $S = End(_RU)$. Тогда функтор H является точным и, кроме того, согласно теореме Габриеля - Попеску [5, с. 630] в этом случае H полный, а сопряженный ему функтор T точный. Поэтому отображение α сохраняет кручения, а функтор H сохраняет локализации.

§ 2. Отображение α': сохранение кокручений и колокализаций

В этом разделе рассмотрим отображение $\alpha' : \mathcal{J}(S) \longrightarrow \mathcal{J}(R)$, определенное равенством $\mathcal{P}(\alpha'(s)) = H^{-1}(\mathcal{P}(s))$ для любого $s \in \mathcal{J}(S)$. Здесь мы ответим на вопрос, при каких условиях α' сохраняет кокручения и функтор $T: {}_S\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ сохраняет колокализации. Материал этого параграфа носит двойственный характер по отношению к результатам из § I.

Сначала покажем, при каких условиях отображение α' переводит кокручения категории $_S\mathcal{M}$ в кокручения категории $_R\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{L}^*(R)$ ($\mathcal{L}^*(S)$) совокупность всех кокручений категории $_R\mathcal{M}$ ($_S\mathcal{M}$).

Назовем модуль $_RP$ <u>конаследственным снизу</u>, если класс $\{P\}^{\downarrow}$ является конаследственным (т.е. замкнут относительно гомоморфных образов). В этом случае $\{P\}^{\downarrow}$ является TTF-классом, поэтому $\{P\}^{\downarrow}$ - полупростой класс для некоторого кокручения. Примерами таких модулей являются проективные и псевдопроективные модули, а также образующие категории $_R\mathcal{M}$.

Заметим теперь, что для любого кокручения r существует такой модуль $P \in \mathcal{R}(r)$, что $\mathcal{P}(r) = \{P\}^{\downarrow}$. В самом деле, если $r \in \mathcal{L}^*(R)$ и $I = r(R)$, то из $_RI \in \mathcal{R}(r)$ следует $\{_RI\}^{\downarrow} \supseteq \mathcal{R}(r)^{\downarrow} = \mathcal{P}(r)$. Докажем обратное включение.

Пусть $X \in \{_RI\}^{\downarrow}$. Если $r(X) \neq 0$, то поскольку $r(X) = IX$, имеем $i_0 x_0 \neq 0$, $i_0 \in I$, $x_0 \in X$. Получаем ненулевой гомоморфизм $f_{x_0}: {}_RI \longrightarrow {}_RX$, где $(i)f_{x_0} = ix_0$ для любого $i \in I$. Это противоречит допущению $X \in \{{}_R I\}^{\downarrow}$, поэтому $r(X)=0$, т.е. $X \in \mathcal{P}(r)$. Значит, $\{{}_R I\}^{\downarrow} = \mathcal{P}(r)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Следующие условия равносильны:

1) α' сохраняет кокручения;

2) функтор T сохраняет конаследственность снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть ${}_S P$ – конаследственный снизу модуль. Тогда $\{P\}^{\downarrow}$ – полупростой класс для некоторого кокручения s. По условию 1) $H^{-1}(\{P\}^{\downarrow})$ является полупростым классом для кокручения $\alpha'(s)$. Ввиду соотношения $H^{-1}(\{P\}^{\downarrow}) = \{T(P)\}^{\downarrow}$ (см. [1]) получаем, что $\{T(P)\}^{\downarrow}$ – конаследственный класс, поэтому $T(P)$ – конаследственный снизу модуль.

2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $s \in \mathcal{L}^*(S)$. Согласно сделанному выше замечанию $\mathcal{P}(s)=\{P\}^{\downarrow}$ для некоторого модуля ${}_S P \in \mathcal{R}(s)$. Ясно, что P – конаследственный снизу и по допущению 2) таким же является и модуль $T(P)$, т.е. $\{T(P)\}^{\downarrow}$ – конаследственный класс. Так как $\{T(P)\}^{\downarrow}=\mathcal{P}(\alpha'(s))$, то отсюда следует, что $\alpha'(s)$ – кокручение. Предложение доказано.

Для модуля $N \in {}_S\mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{P}(N)$ наименьший TTF-класс, содержащий N.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Следующие условия равносильны:

1) α' сохраняет кокручения;

2) для любого эпиморфизма $f: M \longrightarrow M''$ категории ${}_R\mathcal{M}$ выполняется соотношение $\operatorname{coker} H(f) \in \mathcal{P}(H(M))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $f: M \longrightarrow M''$ – произвольный эпиморфизм и $\mathcal{P}(H(M))$ – наименьший TTF-класс, содержащий модуль $H(M)$. Класс $\mathcal{P}(H(M))$ определяет в категории ${}_S\mathcal{M}$ кокручение s, причем $\mathcal{P}(H(M)) = \mathcal{P}(s)$. По допущению 1) $\alpha'(s) \in \mathcal{L}^*(R)$, поэтому класс $H^{-1}(\mathcal{P}(H(M)))$ – конаследственный, значит, из $M \in H^{-1}(\mathcal{P}(H(M)))$ можно заключить, что $M'' \in H^{-1}(\mathcal{P}(H(M)))$, т.е. $H(M'') \in \mathcal{P}(H(M))$. Конаследственность класса $\mathcal{P}(H(M))$ и эпиморфизм $H(M'') \longrightarrow \operatorname{coker} H(f) \rightarrow 0$ приводят теперь к соотношению $\operatorname{coker} H(f) \in \mathcal{P}(H(M))$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $s \in \mathcal{L}^*(S)$. Докажем, что при условии 2) $\alpha'(s)$ является кокручением, т.е. класс $\mathcal{P}(\alpha'(s))=H^{-1}(\mathcal{P}(s))$ – конаследственный. Возьмем $M \in \mathcal{P}(\alpha'(s))$ и пусть $f: M \longrightarrow M''$ – эпиморфизм. Тогда $H(M) \in \mathcal{P}(s)$, поэтому $\mathcal{P}(H(M)) \subseteq \mathcal{P}(s)$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} H(f) \longrightarrow H(M'') \longrightarrow \operatorname{coker} H(f) \longrightarrow 0.$$

Так как $H(M) \in \mathcal{P}(s)$ и класс $\mathcal{P}(s)$ конаследственный, то имеем $\operatorname{im} H(f) \in \mathcal{P}(s)$. Кроме того, по условию 2) $\operatorname{coker} H(f) \in \mathcal{P}(H(M)) \subseteq \mathcal{P}(s)$.

Поскольку класс $\mathcal{P}(s)$ замкнут относительно расширений, отсюда выводим, что $H(M'')\in\mathcal{P}(s)$, т.е. $M''\in H^{-1}(\mathcal{P}(s))=\mathcal{P}(\alpha'(s))$. Это показывает конаследственность класса $\mathcal{P}(\alpha'(s))$, значит, $\alpha'(s)\in\mathcal{L}^*(R)$. Предложение доказано.

Если функтор H точный, то выполняется условие 2) предложения 2.2, поскольку в этом случае $\operatorname{coker} H(f)=0$ для любого эпиморфизма f категории ${}_R\mathcal{M}$. Поэтому верно

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если H – точный функтор (т.е. ${}_RU$ – проективный модуль), то отображение α' сохраняет кокручения.

Учитывая это следствие, в дальнейшем мы будем считать, что H – точный функтор, и это условие обеспечит существование отображения $\mathcal{L}^*(S)\xrightarrow{\alpha'}\mathcal{L}^*(R)$.

Пусть $s\in\mathcal{L}^*(S)$. Тогда любой модуль $N\in{}_S\mathcal{M}$ имеет s-колокализацию, т.е. такой гомоморфизм $\psi_N: C_s(N)\to N$, что $\ker\psi_N, \operatorname{coker}\psi_N\in\mathcal{P}(s)$, а $C_s(N)\in\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – класс всех s-полупростых s-проективных модулей. Скажем, что функтор T сохраняет s-колокализации, если для любого $N\in{}_S\mathcal{M}$ гомоморфизм $T(\psi_N): T(C_s(N))\to T(N)$ является $\alpha'(s)$-колокализацией модуля $T(N)$. Далее покажем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функтор T сохранял колокализации.

ЛЕММА 2.4. Пусть H – точный функтор, $s\in\mathcal{L}^*(S)$ и $r=\alpha'(s)$. Тогда $T(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N\in\mathcal{B}$. Возьмем произвольную точную последовательность в ${}_R\mathcal{M}$:

$$0\longrightarrow X'\longrightarrow X\longrightarrow X''\longrightarrow 0$$

со свойством $X'\in\mathcal{P}(r)\longrightarrow H^{-1}(\mathcal{P}(s))$. Тогда в ${}_S\mathcal{M}$ имеем точную последовательность

$$0\longrightarrow H(X')\longrightarrow H(X)\longrightarrow H(X'')\longrightarrow 0,$$

причем $H(X')\in\mathcal{P}(s)$. Из допущения $N\in\mathcal{B}$ следует изоморфизм $\mathrm{Hom}_S(N, H(X))\cong\mathrm{Hom}_S(N, H(X''))$, откуда ввиду сопряженности получаем $\mathrm{Hom}_R(T(N), X)\cong\mathrm{Hom}_R(T(N), X'')$, а это означает, что $T(N)\in\mathcal{B}$. Лемма доказана.

Если $s\in\mathcal{L}^*(S)$ и $r=\alpha'(s)$, то согласно определению отображения α' имеем $T(\mathcal{R}(s))\subseteq\mathcal{R}(r)$. Покажем, при каких условиях имеет место аналогичное соотношение для полупростых классов. Пусть ${}_SP$ такой модуль, что $\mathcal{P}(s)=\{P\}^{\downarrow}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Следующие условия равносильны:

1) $T(\mathcal{P}(s)) \subseteq \mathcal{P}(r)$;

2) если $N \in \mathcal{P}(s)$, то $HT(N) \in \mathcal{P}(s)$;

3) если $N \in \mathcal{P}(s)$, то $coker\ \Psi_N \in \mathcal{P}(s)$;

4) если $Hom_R(T(P), T(N)) \neq 0$ для некоторого $N \in {}_S\mathcal{M}$, то $Hom_S(P, N) \neq 0$;

5) $T(N/s(N)) \cong T(N)/r(T(N))$ для любого $N \in {}_S\mathcal{M}$ (т.е. $T \cdot 1/s \cong 1/r \cdot T$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $N \in \mathcal{P}(s)$. Тогда из 1) следует, что $T(N) \in \mathcal{P}(r) = H^{-1}(\mathcal{P}(s))$, поэтому $HT(N) \in \mathcal{P}(s)$. Так как $\mathcal{P}(s)$ - конаследственный класс, то получаем, что $coker\,\Psi_N \in \mathcal{P}(s)$, где $\Psi_N : N \longrightarrow HT(N)$ - гомоморфизм, сопутствующий сопряженности.

3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $N \in \mathcal{P}(s)$. Тогда $im\ \Psi_N \in \mathcal{P}(s)$ и по условию 3) $coker\ \Psi_N \in \mathcal{P}(s)$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow im\,\Psi_N \longrightarrow HT(N) \longrightarrow coker\,\Psi_N \longrightarrow 0$$

видно, что $HT(N) \in \mathcal{P}(s)$. Значит, $T(N) \in H^{-1}(\mathcal{P}(s)) = \mathcal{P}(r)$.

1) $\Longleftrightarrow$ 4). По выбору модуля P имеем $\mathcal{P}(s) = \{P\}^{\dagger}$ и $\mathcal{P}(r) = \{T(P)\}^{\dagger}$. Следовательно, условие 1) равносильно тому, что $Hom_S(P, N) = 0$ влечет $Hom_R(T(P), T(N)) = 0$.

1) $\Longrightarrow$ 5). Для любого $N \in {}_S\mathcal{M}$ точная последовательность

$$0 \longrightarrow s(N) \xrightarrow{i_N} N \xrightarrow{\pi_N} N/s(N) \longrightarrow 0$$

влечет точную последовательность

$$T(s(N)) \xrightarrow{T(i_N)} T(N) \xrightarrow{T(\pi_N)} T(N/s(N)) \longrightarrow 0.$$

Поскольку $s(N) \in \mathcal{R}(s)$, то имеем $T(s(N)) \in \mathcal{R}(r)$, поэтому $im\,T(i_N) = ker\,T(\pi_N) \in \mathcal{R}(r)$. Значит, $ker\ T(\pi_N) \subseteq r(T(N))$.

Кроме того, из $N/s(N) \in \mathcal{P}(s)$ по условию 1) выводим, что $T(N/s(N)) \in \mathcal{P}(r)$. Так как $T(N/s(N)) \cong T(N)/ker\,T(\pi_N) \in \mathcal{P}(r)$, то имеем $ker\ T(\pi_N) \supseteq r(T(N))$. Таким образом, получаем $ker\,T(\pi_N) = r(T(N))$, а это значит, что $T(N/s(N)) \cong T(N)/r(T(N))$.

5) $\Longrightarrow$ 1). Если $N \in \mathcal{P}(s)$, то $s(N) = 0$ и по условию 5) имеем $T(N) \cong T(N)/r(T(N)) \in \mathcal{P}(r)$. Предложение доказано.

Из условия 4) предложения 2.5 очевидно, что если функтор T

является полным, то соотношение $T(\mathcal{P}(s)) \subseteq \mathcal{P}(\alpha'(s))$ имеет место для любого $s \in \mathcal{L}^*(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем функтор T <u>s-полным,</u> если выполняются равносильные условия предложения 2.5. Если эти условия выполняются для любого $s \in \mathcal{L}^*(S)$, то скажем, что T является <u>$\mathcal{L}^*(S)$-полным</u>.

Для изучения вопроса о сохранении колокализаций нам необходимо следующее ослабление точности функтора T. Пусть $s \in \mathcal{L}^*(S)$ и $r = \alpha'(s)$. Для любого $N \in {}_s\mathcal{M}$ обозначим через i_N^s вложение $s(N) \subseteq N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем функтор T <u>s-точным</u> <u>($\mathcal{L}^*(S)$-точным)</u>, если для каждого $N \in {}_s\mathcal{M}$ верно соотношение $\ker T(i_N^s) \in \mathcal{P}(\alpha'(s))$ (для любого $s \in \mathcal{L}^*(S)$).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть функтор H точный и $s \in \mathcal{L}^*(S)$. Следующие условия равносильны:

1) функтор T сохраняет s-колокализации;

2) функтор T является s-полным и s-точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ 2). Каждый модуль $N \in {}_s\mathcal{M}$ имеет s-колокализацию $\psi_N : C_s(N) \longrightarrow N$, причем по условию 1) гомоморфизм $T(\psi_N)$: $T(C_s(N)) \longrightarrow T(N)$ является r-колокализацией модуля $T(N)$, где $r = \alpha'(s)$. Из точности справа функтора T имеем $T(\operatorname{coker} \psi_N) \cong \operatorname{coker} T(\psi_N)$, где $\operatorname{coker} T(\psi_N) \in \mathcal{P}(r)$. Следовательно, $T(\operatorname{coker} \psi_N) \in \mathcal{P}(r)$ для любого $N \in {}_s\mathcal{M}$. Так как $\mathcal{P}(s) = \{\operatorname{coker} \psi_N \mid N \in {}_s\mathcal{M}\}$, то получаем $T(\mathcal{P}(s)) \subseteq \mathcal{P}(r)$, а это значит, что T является s-полным функтором.

Осталось показать, что T является s-точным. Для этого представим гомоморфизм ψ_N в виде композиции

$$C_s(N) \xrightarrow{\delta_N} s(N) \xrightarrow{i_N} N,$$

где δ_N - эпиморфизм, а i_N - вложение. Ясно, что $\ker \psi_N = \ker \delta_N$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \psi_N \arrow[r, "\varepsilon_N"] \arrow[d] & C_s(N) \arrow[r, "\delta_N"] \arrow[d, "\psi_N"] & s(N) \arrow[r] \arrow[d, "i_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, equal] & N \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Применяем к ней функтор T и дополняем полученное до следующей диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & im\, T(\varepsilon_N) \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & ker\, T(\psi_N) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\cap"] & ker\, T(i_N) \arrow[r] \arrow[d, "\cap"] & 0 \\
0 \arrow[r] & im\, T(\varepsilon_N) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & T(C_s(N)) \arrow[r, "T(\delta_N)"] \arrow[d, "T(\psi_N)"] & T(s(N)) \arrow[r] \arrow[d, "T(i_N)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(N) \arrow[r, equal] & T(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Нетрудно понять, что при этом верхняя строка получается точной. Из условия I) следует, что $ker\,T(\psi_N)\in\mathcal{P}(r)$, где класс $\mathcal{P}(r)$ является конаследственным, поэтому $ker\,T(i_N)\in\mathcal{P}(r)$,а это, по определению, означает, что T является S-точным.

2)$\Longrightarrow$I). Теперь допустим, что T является S-полным и S-точным. Покажем, что в этом случае для любого $N\in_S\mathcal{M}$ гомоморфизм $T(\psi_N)$ является r-колокализацией модуля $T(N)$, т.е. $ker\,T(\psi_N)$, $coker\;T(\psi_N)\in\mathcal{P}(r)$ и $T(C_s(N))\in\mathcal{B}_r$.

Для любого $N\in_s\mathcal{M}$ имеем $T(coker\,\psi_N)\cong coker\,T(\psi_N)$ и $coker\,\psi_N\in\in\mathcal{P}(s)$.Так как T является s-полным, имеем $T(coker\,\psi_N)\in\mathcal{P}(r)$, поэтому $coker\;T(\psi_N)\in\mathcal{P}(r)$.

Далее согласно определению имеем $ker\,\psi_N\in\mathcal{P}(s)$, а s-полнота функтора T влечет $T(ker\,\psi_N)\in\mathcal{P}(r)$. Поскольку $im\,T(\varepsilon_N)$ - гомоморфный образ модуля $T(ker\,\psi_N)$, а $\mathcal{P}(r)$ - конаследственный класс, получаем $im\,T(\varepsilon_N)\in\mathcal{P}(r)$. Заметим также, что $ker\,T(i_N)\in\mathcal{P}(r)$ ввиду s-точности функтора T. Значит, в верхней строке последней диаграммы крайние члены лежат в $\mathcal{P}(r)$,поэтому $ker\;T(\psi_N)\in\mathcal{P}(r)$.

Наконец, соотношение $T(C_s(N))\in\mathcal{B}_r$ следует из леммы 2.4, так как $C_s(N)\in\mathcal{B}_s$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть функтор H точный. Следующие условия равносильны:

I) функтор T сохраняет колокализации;

2) функтор T является $\mathcal{L}^*(S)$-полным и $\mathcal{L}^*(S)$-точным.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть H - точный функтор. Если T является полным и точным функтором, то он сохраняет колокализации.

Цитированная литература

I. Кашу А.И. Связь между идемпотентными радикалами двух категорий модулей в ситуации сопряженности. - В кн.: Алгебры,кольца и топологии / Математические исследования, вып. 85. - Кишинев: Штиинца, 1985, с.83 - 95.

2. Кашу А.И. Отображение кручений и локализаций модулей с помощью функторов. - В кн.: Тезисы сообщений ХУП Всесоюзной алгебраической конференции. Ч.I. - Минск, 1983, с.88 - 89.

3. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. - Кишинев:Штиинца, 1983. - 154 с.

4. Маклейн С. Гомология. - М.: Мир, 1966. - 544 с.

5. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т.I. - М.:Мир, 1977. - 688 с.

П.И.Кирку

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЛЬКО КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ ГРУППОВЫХ ТОПОЛОГИЙ

В топологической алгебре наряду с вопросом существования в алгебраических системах топологий с наперед заданными свойствами рассматривается и вопрос о количестве таких топологий (см. [I - 6]).

В настоящей статье исследуется вопрос о числе локально-компактных групповых топологий в абелевых группах без кручения. Дается характеризация абелевых групп без кручения, допускающих только конечное число локально-компактных групповых топологий (теорема 3). Предварительно выясняется их строение (теорема 2). Доказано, что решетка всех локально-компактных групповых топологий в указанных группах изоморфна решетке всех подмножеств конечного множества (теорема 4), а, стало быть, число таких топологий имеет вид 2^n, где n - неотрицательное целое число (следствие I).

Примем следующие обозначения: Σ - сумма; $\sum \oplus A_\alpha$ - прямая сумма групп A_α; ΠA_α - прямое произведение групп A_α; $\sum\limits_m \oplus A$ - прямая сумма m копий группы A; $|X|$ - мощность множества X; $\aleph_0$ - мощность счетного множества; $\tau|_X$ - след топологии τ на множестве X; $\mathbb{P}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p$ - множество всех простых, натуральных, целых, рациональных, целых p-адических, всех p-адических чисел соответственно; $\mathbb{Z}(n)$ - циклическая группа порядка n; $\mathbb{Z}(p^\infty)$ - квазициклическая группа типа p^∞.

Если a - элемент группы G, то $\langle a \rangle$ обозначает циклическую подгруппу, порожденную a.

Под топологией понимается хаусдорфовая топология.

Для каждого простого числа p под p-адической топологией абелевой группы A подразумевается групповая топология, в которой совокупность $\{p^n A \mid n \in \mathbb{N}\}$ образует базис окрестностей нуля. При этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ nA является подмножеством группы A, состоящим из всех элементов вида $na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n\,раз}$, где $a \in A$.

Для удобства ссылок приводим здесь следующие факты:

а) если абелева группа без кручения A допускает недискретную локально-компактную групповую топологию, то A содержит подгруппу вида $\mathbb{Z}_p$ при некотором $p \in \mathbb{P}$ (см. [6, теорема I]);

б) если H – подгруппа в $\mathbb{Z}_p$ и H изоморфна $\mathbb{Z}_p$, то $H = p^n \mathbb{Z}_p$, где n – неотрицательное целое число (см. [6, лемма 5]);

в) если H – подгруппа в $\mathbb{Z}_p$ со свойством $pH = H$, то $H = \{0\}$ (см. [7, лемма II]);

г) группа $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ допускает по крайней мере $2^{\aleph_0}$ различных локально-компактных групповых топологий (см. [4, лемма 2.7]).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если B – подгруппа абелевой группы A, то легко заметить, что объединение возрастающей цепи подгрупп из A, являющихся существенными расширениями группы B, является существенным расширением группы B. Поэтому, по лемме Цорна, среди существенных расширений в A подгруппы B найдутся максимальные, которые назовем максимальными существенными расширениями группы B в A.

ЛЕММА I. Пусть B – произвольная подгруппа абелевой группы без кручения A. Если H – максимальное существенное расширение группы B в A, то H является сервантной подгруппой группы A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть уравнение $nx = h \in H$ имеет решение x_0 в A. Покажем сначала, что $\langle x_0 \rangle + H$ – существенное расширение подгруппы B.

Действительно, пусть C – произвольная ненулевая подгруппа группы $\langle x_0 \rangle + H$ и c – ненулевой элемент из C. Так как $n(\langle x_0 \rangle + H) \leq H$, то $0 \neq nc \in H$. Поскольку H – существенное расширение подгруппы B, то $\langle nc \rangle \cap B \neq \{0\}$, т.е. $C \cap B \neq \{0\}$. В силу произвольности ненулевой подгруппы C из $\langle x_0 \rangle + H$ следует, что $\langle x_0 \rangle + H$ – существенное расширение группы B, причем $H \leq \langle x_0 \rangle + H$. Так как H – максимальное в A существенное расширение подгруппы B, то $\langle x_0 \rangle + H = H$. Следовательно, $x_0 \in H$. Таким образом, если уравнение $nx = h \in H$ имеет решение x_0 в A, то $x_0 \in H$, т.е. H является сервантной подгруппой группы A. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если H – существенное расширение группы $\mathbb{Z}_p$, то либо $H \simeq \mathbb{Z}_p$, либо $H \simeq \mathbb{Q}_p$.

Действительно, в силу леммы 24.2 из работы [8] можно считать, что $\mathbb{Z}_p \leq H \leq \mathbb{Q}_p$. Если $H \neq \mathbb{Q}_p$, то $H / \mathbb{Z}_p$ – истинная подгруппа группы $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}(p^\infty)$, т.е. $H / \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}(p^n)$. Тогда $H = p^{-n}\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p$.

ЛЕММА 2. Если группа $\mathbb{Z}_p$ содержится в качестве подгруппы в абелевой группе без кручения A и a такой ненулевой элемент из $\mathbb{Z}_p$, что уравнение $p^n x = a$ разрешимо в A при любом $n \in \mathbb{N}$, то A содержит в качестве подгруппы группу всех p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию I существует максимальное существенное расширение H группы $\mathbb{Z}_p$ в A. По замечанию 2 либо

$H \simeq Z_p$, либо $H \simeq Q_p$. Так как H сервантна в A (см. лемму I), и Z_p допускает компактную топологизацию, то $A = H \oplus B$ (см. [9, теорема 25.2I]). Поскольку $a \in Z_p \leq H$, то

$$a = pr_H\, a = pr_H\, (p^n x) = p^n\, (pr_H\, x).$$

Следовательно, уравнение $p^n y = a$ разрешимо в H при любом $n \in N$. Так как в группе Z_p отсутствуют ненулевые подгруппы N со свойством $pN = N$ (см. в)), то в Z_p отсутствуют ненулевые элементы b, для которых уравнение $p^n y = b$ разрешимо при любом $n \in N$ в Z_p. Следовательно, $H \not\simeq Z_p$ и, значит, $H \simeq Q_p$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I. Группа вида $Z_p \oplus Q$ допускает по крайней мере $2^{\aleph_0}$ различных локально-компактных групповых топологий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – максимальное линейно независимое множество элементов из Z_p и b – ненулевой элемент из Q. Для каждого $a \in X$ рассмотрим отображение $\varphi_a : X \to Z_p \oplus Q$, действующее по правилу

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq a; \\ a + b, & \text{если } x = a. \end{cases}$$

Продолжим φ_a до отображения $f_a : Z_p \to Z_p \oplus Q$ следующим образом. Для каждого элемента y из Z_p в силу максимальности X существуют различные элементы $x_1, \ldots, x_n$ из X и целые числа $m \neq 0$, $m_1, \ldots, m_n$ такие, что $my = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. Положим

$$f_a(y) = \begin{cases} y, & \text{если } x_i \neq a \text{ для любого } i \in \{1, \ldots, n\}; \\ y + (m_{i_0}/m) b, & \text{если } x_{i_0} = a \text{ для некоторого } i_0 \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Покажем сначала, что отображение f_a определено корректно.

Действительно, если $my = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i$ и $ty = \sum_{i=1}^{s} t_i u_i$, где $x_i, u_i \in X$, $x_i \neq x_j$, $u_i \neq u_j$ для $i \neq j$, $x_1 = a$, $m \neq 0$, $t \neq 0$, $m_1 = 0$, m_i, t_i – целые числа, то

$$t m_1 a + \sum_{i=2}^{n} m_i x_i - m \sum_{i=1}^{s} t_i u_i = tmy - mty = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости множества X следует, что некоторый элемент u_{i_0} равен a. Тогда $t m_1 a - m t_{i_0} a = 0$ и, значит, $(tm_1 = m t_{i_0} a) = 0$. Следовательно, $m_1/m = t_{i_0}/t$, откуда

$$f_a(y) = y + (m_1/m) b = y + (t_{i_0}/t) b = f_a(y),$$

т.е. f_a определено корректно. Покажем, что f_a – гомоморфизм $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$. Действительно, пусть y, z – ненулевые элементы из $\mathbb{Z}_p$ и $m_0 y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, $t_0 z = \sum_{i=1}^{s} t_i u_i$, где $x_1, \ldots, x_n$ – попарно различные элементы из X и $u_1, \ldots, u_s$ – попарно различные элементы из X; m_i, t_i – целые числа, причем $m_0 \neq 0, t_0 \neq 0$. Не умаляя общности, можно предположить, что $x_i = u_i$ для $i = 1, \ldots, k$, где $k \leq \min(n, s)$, а $\{x_i \mid k < i \leq n\} \cap \{u_i \mid k < i \leq s\} = \emptyset$. Тогда

$$m_0 t_0 (y + z) = \sum_{i=1}^{k} (t_0 m_i + m_0 t_i) x_i + \sum_{i=k+1}^{n} t_0 m_i x_i + \sum_{i=k+1}^{s} m_0 t_i u_i, \qquad (I)$$

где x_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$, u_i $(i \in \{k+1, \ldots, s\})$ – попарно различные элементы из X.

Возможны четыре случая:

1) $a \notin \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq s\}$;

2) $a \in \{x_i \mid 1 \leq i \leq k\}$;

3) $a \in \{x_i \mid k < i \leq n\}$;

4) $a \in \{u_i \mid k < i \leq s\}$.

В первом случае из определения f_a следует

$$f_a(y + z) = y + z = f_a(y) + f_a(z).$$

Во втором, не умаляя общности, можно считать $a = x_1 = u_1$. Тогда из (I) и определения f_a имеем

$$f_a(y + z) = y + z + \frac{t_0 m_1 + m_0 t_1}{m_0 t_0} b =$$

$$= (y + (m_1/m_0) b) + (z + (t_1/t_0) b) = f_a(y) + f_a(z).$$

Случай 3) можно рассматривать, предполагая (без умаления общности), что $a = x_{k+1}$. Тогда, учитывая (I) и определение f_a, имеем

$$f_a(y + z) = y + z + \frac{t_0 m_{k+1}}{m_0 t_0} b = (y + \frac{m_{k+1}}{m_0} b) + z =$$

$$= f_a(y) + f_a(z).$$

Четвертый случай рассматривается по аналогии с третьим и получается опять $f_a(y + z) = f_a(y) + f_a(z)$. Таким образом, установлено, что отображение $f_a : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ является гомоморфизмом.

Покажем теперь, что f_a является изоморфизмом.

Пусть $f_a(y) = 0$. Поскольку $f_a(y) = y$ либо $f_a(y) = y + rb$, где r – рациональное число, то следует $y = 0$ либо $y + rb = 0$. В любом случае получается $y = 0$. Следовательно, $\ker f_a = 0$ и, значит, f_a – изоморфное вложение $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ при любом $a \in X$.

Пусть теперь τ – групповая топология группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$, в которой система подмножеств $\{p^k \mathbb{Z}_p \mid k \in \mathbb{N}\}$ образует базис окрестностей нуля. Так как $(\mathbb{Z}_p, \tau|_{\mathbb{Z}_p})$ – компактно и открыто в $(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}, \tau)$, то $(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}, \tau)$ – локально-компактная группа. Поскольку $p^k \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_p$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и f_a – изоморфное вложение $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$, то для каждого $a \in X$ $\{f_a(p^k \mathbb{Z}_p) \; k \in \mathbb{N}\}$ – базис окрестностей нуля некоторой локально-компактной недискретной групповой топологии, обозначаемой нами через τ_a группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$.

Покажем, что из $a_1, a_2 \in X$, $a_1 \neq a_2$ следует $\tau_{a_1} \neq \tau_{a_2}$.

Действительно, по определению отображения f_{a_1} бесконечная подгруппа $\langle a_1 + b \rangle$ содержится в $f_{a_1}(\mathbb{Z}_p)$. Так как след топологии τ_{a_1} на $f_{a_1}(\mathbb{Z}_p)$ является компактной групповой топологией, то $\tau_{a_1}|_{\langle a_1 + b\rangle}$ – недискретная (предкомпактная) топология.

Покажем теперь, что $\langle a_1 + b \rangle \cap f_{a_2}(\mathbb{Z}_p) = \{0\}$. Действительно, поскольку $a_1 \neq a_2$, то $a_1 = f_{a_2}(a_1) \in f_{a_2}(\mathbb{Z}_p)$. Если предположить, что $m(a_1 + b)$ лежит в $f_{a_2}(\mathbb{Z}_p)$ при некотором целом m, то

$$mb = m(a_1 + b) - ma_1 \in f_{a_2}(\mathbb{Z}_p).$$

Так как $b \in \mathbb{Q}$ делится в группе $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ на любое целое число, то и элемент mb является таковым. Учитывая $mb \in f_{a_2}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ и лемму 2, заключаем, что группа $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ содержит в качестве подгруппы группу $\mathbb{Q}_p$ всех p-адических чисел, которая делима и имеет ранг $2^{\aleph_0}$. А это противоречит тому, что наибольшая делимая подгруппа группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ имеет ранг 1. Таким образом, $\langle a_1 + b \rangle \cap f_{a_2}(\mathbb{Z}_p) = \{0\}$ и, значит, топология τ_{a_2} индуцирует на подгруппе $\langle a_1 + b \rangle$ дискретную топологию. Следовательно, $\tau_{a_1} \neq \tau_{a_2}$ как топологии, индуцирующие на фиксированной подгруппе $\langle a_1 + b \rangle$ различные топологии. Поскольку каждая топология τ_a является локально-компактной и $|X| = 2^{\aleph_0}$, то группа $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ допускает по крайней мере $2^{\aleph_0}$ различных недискретных локально-компактных групповых топологий. Теорема доказана.

ЛЕММА 3. Пусть X – топологическое пространство бесконечного веса m, а Γ – группа всех гомеоморфизмов пространства X. Тогда $|\Gamma| \leq 2^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех открытых подмножеств пространства X, а B – некоторый базис в X, причем $|B| = m$. Поставим в соответствие каждому $f \in \Gamma$ отображение $\bar{f} : B \longrightarrow \mathfrak{M}$, действующее по правилу $\bar{f}(V) = f(V)$ для любого $V \in B$. Если f и g различные элементы из Γ, то существует такая точка $x \in X$, что $f(x) \neq g(x)$. Если $U \in \mathfrak{M}$ таково, что $f(x) \in U \not\ni g(x)$, то существует такое $V \in B$, что $x \in V$ и $f(V) \subseteq U$. Тогда $g(x) \in g(V) \setminus f(V)$ и, значит, $\bar{f} \neq \bar{g}$. Таким образом, отображение, действующее по правилу $f \to \bar{f}$, является мономорфизмом Γ в множестве всех отображений B в $\mathfrak{M}$. Поскольку $|\mathfrak{M}| \leq 2^m$, то

$$|\Gamma| \leq |\mathfrak{M}|^{|B|} \leq (2^m)^m = 2^m .$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Группа вида $\sum\limits_{2^{\aleph_0}} \oplus Q$ допускает $2^{2^{\aleph_0}}$ различных компактных групповых топологий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа характеров Q^* дискретной группы Q является компактной делимой группой без кручения (см. [9, теорема 24.23]), причем $|Q^*| = 2^{\aleph_0}$ (см. [9, с.502]). Следовательно, Q^* алгебраически изоморфна группе $\sum\limits_{2^{\aleph_0}} \oplus Q$. Тогда на $A = \sum\limits_{2^{\aleph_0}} \oplus Q$ существует компактная групповая топология τ веса $\aleph_0$ (см. [9, теорема 24.14]).

Пусть G – группа всех автоморфизмов группы A, а N – группа непрерывных автоморфизмов группы (A, τ). Легко заметить, что $|G| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Так как непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в себя является гомеоморфизмом (см. [10, с.195]), то, учитывая лемму 3, имеем $|N| \leq 2^{\aleph_0}$. Из каждого левого смежного класса G по N выбираем по одному элементу и обозначаем множество выбранных таким образом элементов из G через Y. Очевидно, что $|Y| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$ и $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$, то $\varphi_1^{-1}\varphi_2(\tau) = \tau$, т.е. $\varphi_1^{-1}\varphi_2$ – непрерывный автоморфизм группы (A, τ). Тогда $\varphi_1^{-1}\varphi_2 \in N$ и, учитывая построение Y, имеем $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, отображение, действующее по правилу $\varphi \longrightarrow \varphi(\tau)$, является мономорфизмом множества Y в множестве всех компактных групповых топологий группы A. Из равенства $|Y| = 2^{2^{\aleph_0}}$ следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если подгруппа H абелевой группы A допускает m различных локально-компактных групповых топологий, то A допускает по крайней мере m топологий с такими же свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если p и q - различные простые числа, то $q\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$. Действительно, $q = a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n + 0 \cdot p^{n+1} + \ldots \in \mathbb{Z}_p$, где $a_0 \neq 0$. Тогда q обладает обратным q^{-1} в кольце $\mathbb{Z}_p$. Следовательно, $\mathbb{Z}_p = 1 \cdot \mathbb{Z}_p = q q^{-1} \mathbb{Z}_p \subseteq q\mathbb{Z}_p$, т.е. $q\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$.

ЛЕММА 5. Если в абелевой группе без кручения A содержатся подгруппы $H_1 \simeq \mathbb{Z}_p$ и $H_2 \simeq \mathbb{Z}_q$, $p \neq q$ и $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$, то A допускает по крайней мере $2^{2^{\aleph_0}}$ различных локально-компактных групповых топологий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a - ненулевой элемент из $H_1 \cap H_2$. С учетом равенства $p\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}_q$ (см. замечание 4) индукцией по n легко показать, что $p^n H_2 = H_2$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, уравнение $p^n x = a$ разрешимо в A при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме 2 A содержит подгруппу вида $\mathbb{Q}_p \times \sum_{2^{\aleph_0}} \oplus \mathbb{Q}$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 4 и замечания 3.

ЛЕММА 6. Фактор-группа группы $\mathbb{Z}_p$ по ненулевой сервантной подгруппе H является делимой группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сервантности, H содержит элемент a, обратимый в кольце $\mathbb{Z}_p$. Тогда отображение $f(x) = ax$ является автоморфизмом группы $\mathbb{Z}_p$, переводящим единицу 1 кольца $\mathbb{Z}_p$ в a. Поскольку $\mathbb{Z}_p / \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p / \langle 1 \rangle$ является делимой группой, то и $\mathbb{Z}_p / f(\mathbb{Z}) = f(\mathbb{Z}_p)/f(\mathbb{Z})$ - делимая группа. Так как $f(\mathbb{Z})$ подгруппа в H, то

$$\mathbb{Z}_p / H \simeq (\mathbb{Z}_p / f(\mathbb{Z})) / (H / f(\mathbb{Z}))$$

и, значит, $\mathbb{Z}_p / H$ - делимая группа как фактор-группа делимой группы $\mathbb{Z}_p / f(\mathbb{Z})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если абелева группа без кручения A является гомоморфным образом группы $\mathbb{Z}_p$ $(p \in \mathbb{P})$, то либо $A \simeq \mathbb{Z}_p$, либо A - делима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ - гомоморфизм $\mathbb{Z}_p$ на A. Если $\ker\varphi = \{0\}$, то $A \simeq \mathbb{Z}_p$. Если же $\ker\varphi \neq \{0\}$, то поскольку $\mathbb{Z}_p / \ker\varphi \simeq A$ - группа без кручения, $\ker\varphi$ будет сервантной подгруппой в $\mathbb{Z}_p$ (см. [8, с.136]). Тогда по лемме 6 $A \simeq \mathbb{Z}_p / \ker\varphi$ - делимая группа. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть G - абелева группа без кручения, причем

$$G = \sum_{i=1}^{n} \oplus \mathbb{Z}_{p_i} \oplus H,$$

где p_i - попарно различные простые числа, а H - редуцированная группа, не содержащая подгрупп вида $\mathbb{Z}_q$ для $q \in \mathbb{P}$. Если в G содержится подгруппа $A \simeq \mathbb{Z}_q$, то $q = p \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ и $A = p^k \mathbb{Z}_p$ для некоторого неотрицательного целого числа k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – произвольный элемент из $\{p_1, \ldots, p_n\} \setminus \{q\}$. Тогда, учитывая замечание 4, имеем

$$p(pr_{Z_p} A) = pr_{Z_p}(pA) = pr_{Z_p} A \leq Z_p .$$

Так как в Z_p отсутствуют ненулевые подгруппы B со свойством $pB = B$ (см. в)), то $pr_{Z_p} A = \{0\}$ для любого $p \in \{p_1, \ldots, p_n\} \setminus \{q\}$. Поскольку H не содержит групп вида Z_q и является редуцированной, то в силу леммы 7 $pr_H A = \{0\}$. Тогда и проекция A на $\sum_{p \in \{p_1, \ldots, p_n\} \setminus \{q\}} \oplus Z_p \oplus$ $\oplus H$ равна нулевой подгруппе. Поскольку $A \neq \{0\}$, то

$$\sum_{p \in \{p_1, \ldots, p_n\} \setminus \{q\}} \oplus Z_p \oplus H \neq \sum_{i=1}^{n} \oplus Z_{p_i} \oplus H,$$

т.е. $q \in \{p_1, \ldots, p_n\}$. Если $q = p \in \{p_1, \ldots p_n\}$, то A – подгруппа в Z_p. Так как $A \simeq Z_p$ $(q = p)$, то с учетом б) $A = p^k Z_p$ при некотором неотрицательном целом k. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Вполне несвязная компактная абелева группа без кручения (B, τ) топологически изоморфна тихоновскому произведению

$$\prod_{q \in P} \left(\prod_{\alpha \in \Gamma_q} B_{q,\alpha} \right),$$

где $B_{q,\alpha}$ топологически изоморфна группе Z_q, рассмотренной в q-адической топологии для любых $q \in P$ и $\alpha \in \Gamma_q$, а Γ_q – множество индексов при каждом $q \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 25.8 и утверждению 25.4 из работы [9] имеет место следующий топологический изоморфизм

$$(B, \tau) \simeq \prod_{\gamma \in \Gamma} (Q^*)_\gamma \oplus \prod_{p \in P} \left(\prod_{\alpha \in \Gamma_q} B_{q,\alpha} \right),$$

где при любом $\gamma \in \Gamma$ группа $(Q^*)_\gamma$ топологически изоморфна группе характеров Q^* дискретной группы Q, а $B_{q,\alpha}$ топологически изоморфна группе Z_q, рассмотренной в q-адической топологии. Поскольку Q дискретная группа без кручения, то Q^* – связная компактная группа (см. [9, теорема 24.25]). Так как (B, τ) – вполне несвязна, то $\Gamma = \emptyset$, т.е.

$$(B, \tau) \simeq \prod_{q \in P} \left(\prod_{\alpha \in \Gamma_q} B_{q,\alpha} \right).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть абелева группа без кручения A имеет вид

$$A = \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_n} \oplus H,$$

где $p_1, \ldots, p_n$ – попарно различные простые числа, а H – редуцированная группа, не содержащая подгрупп вида $\mathbb{Z}_q$ для любого $q \in \mathbb{P}$. Для каждого подмножества M множества $\{p_1, \ldots, p_n\}$ через τ_M обозначим групповую топологию группы A, в которой совокупность

$$\{\sum_{p \in M} \oplus\, p^k\, \mathbb{Z}_p \mid k \in \mathbb{N}\}$$

образует базис окрестностей нуля A. Тогда семейство всех локально-компактных групповых топологий группы A совпадает с множеством $\{\tau_M \mid M \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что τ_M совпадает с топологией тихоновского произведения по $p \in M$ подгрупп $\mathbb{Z}_p$ топологизированных p-адической топологией и дискретных подгрупп H и $\mathbb{Z}_q$ по $q \in \{p_1, \ldots, p_n\} \setminus M$. Поскольку группа $\mathbb{Z}_p$ в p-адической топологии является компактной, то τ_M – локально-компактная групповая топология группы A при любом $M \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Пусть теперь τ – произвольная локально-компактная групповая топология группы A и C – связная компонента нуля в (A, τ). Согласно теоремам 9.14 и 24.25 из [9] C является делимой группой. Поскольку A – редуцированная группа (как прямая сумма редуцированных групп), то $C = \{0\}$. Следовательно, (A, τ) – вполне несвязная локально-компактная абелева группа. Тогда (A, τ) обладает открытой компактной подгруппой B (см. [11, с.141]). Так как B – вполне несвязно и без кручения, то по лемме 9 $(B, \tau|_B)$ топологически изоморфна тихоновскому произведению

$$\prod_{q \in \mathbb{P}} (\prod_{\alpha \in \Gamma_q} B_{q,\alpha}),$$

где $B_{q,\alpha}$ топологически изоморфна группе $\mathbb{Z}_q$ топологизированной q-адической топологией для $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \Gamma_q$. Из леммы 8 следует, что $\Gamma_q = \emptyset$ для любого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Пусть $M = \{q \in \mathbb{P} \mid \Gamma_q \neq \emptyset\}$. Тогда $M \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$ и

$$B = \prod_{q \in M} (\prod_{\alpha \in \Gamma_q} B_{q,\alpha}). \tag{2}$$

Покажем, что Γ_q – одноэлементное множество для любого $q \in M$. Предположим противное, т.е. что при некотором $q \in M$ существуют различные элементы α_1 и α_2 в Γ_q. Согласно лемме 8

$$B_{q,\alpha_1} = q^k\, \mathbb{Z}_q \text{ и } B_{q,\alpha_2} = q^t\, \mathbb{Z}_q,$$

где k, t – неотрицательные целые числа. Тогда

$$B_{q,\alpha_1} \cap B_{q,\alpha_2} = q^k \mathbb{Z}_q \cap q^t \mathbb{Z}_q = q^{\max(k,t)} \mathbb{Z}_q \neq \{0\},$$

что противоречит $B_{q,\alpha_1} \cap B_{q,\alpha_2} = \{0\}$. Следовательно, $|\Gamma_q| = 1$ для любого $q \in M \in \{p_1, \ldots, p_n\}$. Тогда, учитывая (2) и лемму 8, получаем равенство

$$B = \prod_{p \in M} p^{k_p} \mathbb{Z}_p = \sum_{p \in M} \oplus\, p^{k_p} \mathbb{Z}_p .$$

Так как $(B, \tau|_B)$ – тихоновское произведение групп $p^{k_p} \mathbb{Z}_p$, топологизированных p-адическими топологиями, и B открыто в (A, τ), то совокупность

$$\{ \sum_{p \in M} \oplus\, p^k \mathbb{Z}_p \mid k \in \mathbb{N} \}$$

является базисом окрестностей нуля топологической группы (A, τ). Поскольку групповая топология однозначно определяется базисом окрестностей нуля (см. [12, с.28]), то $\tau = \tau_M$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Абелева группа без кручения A допускает только конечное (ненулевое) число различных недискретных локально-компактных групповых топологий тогда и только тогда, когда

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_n} \oplus H,$$

где $p_1, \ldots, p_n$ – попарно различные простые числа ($n \in \mathbb{N}$), а H – редуцированная группа, не содержащая подгрупп вида $\mathbb{Z}_q$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность с очевидностью следует из теоремы 2.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть A – абелева группа без кручения, допускающая только конечное отличное от нуля число различных недискретных локально-компактных групповых топологий. Согласно теореме I из [6] A содержит подгруппу вида $\mathbb{Z}_p$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Следовательно, множество

$$\mathbb{P}_A = \{ p \in \mathbb{P} \mid \exists B \leq A,\ B \simeq \mathbb{Z}_p \}$$

непусто. Докажем, что $\mathbb{P}_A$ конечно.

Для любого $p \in \mathbb{P}_A$ через H_p обозначим одну из подгрупп группы A, изоморфных $\mathbb{Z}_p$, а через τ_p – топологию группы A, в которой совокупность $\{ p^k H_p \mid k \in \mathbb{N} \}$ образует базис окрестностей нуля A. Так как $(H_p, \tau_p|_{H_p})$ топологически изоморфна группе $\mathbb{Z}_p$, рассмотренной в p-адической топологии (которая компактна), и H_p открыто в (A, τ_p), то (A, τ_p) является локально-компактной группой при любом $p \in P_A$. Покажем, что для различных элементов p и q из P_A $\tau_p \neq \tau_q$. Действительно, τ_p индуцирует на подгруппе H компактную и, значит, недискретную групповую топологию. Поскольку A допускает лишь конечное число локально-компактных групповых топологий, то по лемме 5 $H_p \cap H_q = \{0\}$. Так как H_q открыто в (A, τ_q), то τ_q индуцирует на H_p дискретную топологию. Следовательно, $\tau_p \neq \tau_q$ как топологии, индуцирующие на фиксированной подгруппе H_p различные топологии. Таким образом, $\{\tau_p \mid p \in P_A\}$ – множество различных локально-компактных **групповых топологий группы** A. Поскольку группа A допускает только конечное число локально-компактных топологизаций, то P_A является конечным множеством, т.е.

$$P_A = \{ p_1, \ldots, p_n \},$$

где $p_1, \ldots, p_n$ – попарно различные простые числа, $n \in N$.

Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ через E_i обозначим одно из максимальных существенных расширений подгруппы H_{p_i} в группе A (см. замечание I). Так как E_i – подгруппа группы A и A допускает только конечное число локально-компактных групповых топологий, то в силу леммы 4 и замечаний 2 и 3 следует изоморфизм $E_i \simeq Z_{p_i}$ при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$. По лемме I E_i – сервантная подгруппа в A при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку E_1 допускает **компактную** групповую топологию, то по теореме 25.2I из [9] $A = E_1 \oplus B_1$, где B_1 – подгруппа в A.

Сделаем индуктивное предположение о том, что для некоторого $t < n$ установлено разложение

$$A = E_1 \oplus \ldots \oplus E_t \oplus B_t,$$

где B_t – подгруппа в A. Учитывая изоморфизм $E_i \simeq Z_{p_i}$, замечание 4 и гомоморфность проекций A на E_i $(1 \leq i \leq t)$ имеем

$$p_i (pr_{E_i} E_{t+1}) = pr_{E_i} (p_i E_{t+1}) = pr_{E_i} E_{t+1} \leq E_i .$$

Тогда в силу в) $pr_{E_i} E_{t+1} = \{0\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ и, значит,

$$pr_{E_1 \oplus \ldots \oplus E_t} E_{t+1} = \{0\} .$$

Следовательно, E_{t+1} содержится в B_t. Поскольку E_{t+1} сервантна в A и E_{t+1} $(\simeq Z_{p_{t+1}})$ допускает компактную топологизацию, то в силу теоремы 25.2I из [9] $B_t = E_{t+1} \oplus B_{t+1}$, т.е.

$$A = E_1 \oplus \ldots \oplus E_t \oplus E_{t+1} \oplus B_{t+1}.$$

Таким образом, индукцией по t доказано, что

$$A = E_1 \oplus \ldots \oplus E_t \oplus \ldots \oplus E_n \oplus B_n,$$

где $E_t \simeq \mathbb{Z}_{p_t}$. Из построения множества $\mathbb{P}_A$ следует, что B_n не имеет подгрупп вида $\mathbb{Z}_q$ для $q \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_A$. Так как A допускает только конечное число локально-компактных групповых топологий, то в силу г), теоремы I и замечания 3 B_n – редуцированная группа, не содержащая подгрупп вида $\mathbb{Z}_q$ при $q \in \mathbb{P}_A$. Обозначив B_n через H, получим, что

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_n} \oplus H,$$

где H – редуцированная группа, не содержащая групп вида $\mathbb{Z}_q$ для $q \in \mathbb{P}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть множество $\mathcal{B}$ всех локально-компактных групповых топологий абелевой группы без кручения A является конечным. Тогда $\mathcal{B}$ относительно обычного частичного порядка является решеткой, изоморфной решетке всех подмножеств конечного множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 следует, что A имеет вид

$$A = \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_n} \oplus H,$$

где $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$; H – редуцированная группа без подгрупп вида $\mathbb{Z}_q$ для $q \in \mathbb{P}$. По теореме 2 все локально-компактные групповые топологии A исчерпываются топологиями типа τ_M по $M \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$, где τ_M – групповая топология A, в которой $\{\sum_{p \in M} \oplus p^k \mathbb{Z}_p \mid k \in \mathbb{N}\}$ образует базис окрестностей нуля. Если L и M – различные подмножества из $\{p_1, \ldots, p_n\}$, то $\tau_M \neq \tau_L$. Действительно, если допустим для определенности $p \in M \setminus L$, то подгруппа $\mathbb{Z}_p$ компактна в топологии, индуцированной τ_M, и дискретна в топологии, индуцированной τ_L. Следовательно, отображение f множества $P(\{p_1, \ldots, p_n\})$ всех подмножеств множества $\{p_1, \ldots, p_n\}$ в $\mathcal{B}$, действующее по правилу $f(M) = \tau_M$ для любого $M \in P(\{p_1, \ldots, p_n\})$ является взаимно однозначным.

Покажем, что $M \subseteq L$ тогда и только тогда, когда $\tau_M \geqslant \tau_L$. Действительно, $M \subseteq L$ равносильно

$$\sum_{p \in M} p^k \mathbb{Z}_p \subseteq \sum_{q \in L} q^k \mathbb{Z}_q$$

для любого $k \in \mathbb{N}$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что $\tau_M \geqslant \tau_L$. Следовательно, f является изоморфизмом решетки всех подмножеств множества $\{p_1, \dots, p_n\}$ и частично упорядоченного относительно сравнения топологий множества $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B}$ является решеткой, изоморфной $P(\{p_1, \dots, p_n\})$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если число различных локально-компактных групповых топологий абелевой группы без кручения A конечно, то оно имеет вид 2^n, где n – неотрицательное целое число.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если абелева группа без кручения A допускает только конечное число локально-компактных групповых топологий, то точная верхняя грань (точная нижняя грань) любого семейства групповых локально-компактных топологий группы A является групповой локально-компактной топологией A.

В общем случае абелевых групп без кручения этот факт не имеет места: инфимум двух локально-компактных групповых топологий может даже не быть групповой топологией, как показывает пример 1.2.23 из [12]. Сюпремум даже двух компактных групповых топологий может не быть локально-компактной топологией, как показывает следующий

ПРИМЕР. Группа $A = \sum_{2^{\aleph_0}} \oplus \mathbb{Q}$ допускает больше одной компактной групповой топологии (см. лемму 4). Пусть τ_1 и τ_2 – различные компактные групповые топологии в A. Тогда $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$ – предкомпактная топология, которая не является даже полной групповой топологией.

Действительно, если топология $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$ была бы полной, то $\sup(\tau_1, \tau_2)$ была бы компактной топологией строго сильной, например τ_1, что является абсурдом (см. [10, с.195]).

Из теорем 2 и 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Если число локально-компактных групповых топологий абелевой группы без кручения конечно и равно m, то и число попарно неизоморфных локально-компактных групповых топологий этой группы равно m.

СЛЕДСТВИЕ 4. Абелева группа без кручения A допускает единственную недискретную локально-компактную групповую топологию тогда и только тогда, когда

$$A \simeq \mathbb{Z}_p \oplus B,$$

где $p \in \mathbb{P}$, а B – редуцированная группа, не содержащая подгрупп вида $\mathbb{Z}_q$ для $q \in \mathbb{P}$.

Цитированная литература

I. Hulanicki A. Compact abelian groups and extensions of Haar measures. - Rozprawy matematyczne, 1964, v.38, p.1 - 57.

2. Kiltinen J.O. Infinite abelian groups are higly topologizable. - Duke Math. J., 1974, v.41, N 1,p.151 - 154.

3. Kiltinen J.O. On the number of field topologies on an infinite field. - Proc. Amer. Math. Soc., 1973, v.40, N 1,p.30 - 36.

4. Podewski K.-P. The number of field topologies on countable fields. - Proc. Amer. Math. Soc., 1973, v.39, N 1,p.33 - 38.

5. Rickert N.W. Locally compact tolopogies for groups. - Trans, Amer. Math. Soc., 1967, v.126, N 2,p.225 - 235.

6. Кирку П.И. О существовании и единственности локально-компактной групповой топологии в абелевых группах. - В кн.: Алгебры, кольца и топологии / Математические исследования, вып.85. - Кишинев: Штиинца, I985, с.96 - I03.

7. Кирку П.И. О локально-компактной топологизуемости модулей над дедекиндовыми кольцами. - В кн.: Исследования по теории колец, алгебр и модулей/ Математические исследования, вып.76. - Кишинев: Штиинца, I984, с.47 - 72.

8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.I. - М.: Мир, I974. - 336 с.

9. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т.I.- М.: Наука, I975. - 654 с.

I0. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М.: Наука, I977. - 367 с.

II. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М.: Наука, I973. - 520 с.

I2. Арнаутов В.И., Водинчар М.И., Михалев А.В. Введение в теорию топологических колец и модулей. - Кишинев: Штиинца,I98I. - I76с.

Зак. 695

Ю.М.Рябухин

ПРИВЕДЕННАЯ СВОБОДА КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ АЛГЕБР, АЛГЕБР И ГРУПП

Все рассматриваемые ниже алгебры - ассоциативные алгебры над произвольным (но фиксированным) полем Φ. При этом, как правило, предполагается наличие в алгебре некоторого нетривиального тождества. Будем считать известными основные понятия и теоремы общей теории многообразий алгебраических систем и структурной теории PI-алгебр (алгебр с нетривиальным тождеством). Все необходимые нам сведения можно найти в монографиях [I - 3].

§ I. Напомним, что алгебра R называется квазирегулярной, если она является группой относительно присоединенного умножения

$$x \circ y = x + y - xy . \tag{I}$$

Из (I) легко вытекает, что для любой алгебры R группоид $R(\circ)$ всегда является полугруппой с единицей 0. Поэтому алгебра R квазирегулярна тогда и только тогда, когда для любого $r \in R$ существует такой $r^* \in R$, однозначно определенный элементом r, что $r \circ r^* = 0 = r^* \circ r$, т.е.

$$rr^* = r + r^* = r^* r . \tag{2}$$

Из (I) и (2) следует, что класс $\mathfrak{A}^*$ всех квазирегулярных алгебр можно рассматривать как многообразие алгебраических систем - алгебр с дополнительной унарной операцией взятия присоединенно обратного элемента, связанной с основными операциями тождеством (2). С помощью общей теории многообразий алгебраических систем приходим к понятиям квазирегулярного тождества и многообразия квазирегулярных алгебр (т.е. подмногообразия в $\mathfrak{A}^*$), свободной (абсолютно) и приведенно свободной (свободной в некотором многообразии) квазирегулярной алгебры, общим характеристикам многообразий квазирегулярных алгебр (типа теоремы Биркгофа), взаимосвязи между вполне характеристическими идеалами (абсолютно) свободной квазирегулярной алгебры $\hat{F}$ и подмногообразиями многообразия $\mathfrak{A}^*$ и т.д.

Будем применять соответствующие общие утверждения и понятия без особых оговорок, считая их известными. Сформулируем только

КРИТЕРИЙ ПРИВЕДЕННОЙ СВОБОДЫ (ср. [I, с.34I] и [2, с.I9I]).

Пусть R - квазирегулярная алгебра, порожденная как квазирегулярная алгебра некоторым непустым множеством X ненулевых элементов (т.е. наименьшей квазирегулярной подалгеброй в R, содержащей X, является сама алгебра R). Равносильны следующие утверждения об алгебре R :

а) R - приведенно свободная квазирегулярная алгебра с множеством X свободных порождающих;

б) существует такое многообразие $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр, что R - свободная в $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярная алгебра с множеством X свободных порождающих (т.е. $R \in \mathfrak{M}^*$ и для любой алгебры $Q \in \mathfrak{M}^*$ любое отображение $\theta : X \to Q$ продолжается и притом единственным образом до гомоморфизма $\bar{\theta} : R \to Q$);

в) существует такой вполне характеристический идеал J абсолютно свободной квазирегулярной алгебры $\hat{\mathbb{F}}$ с множеством X свободных порождающих, что $R \approx \hat{\mathbb{F}}/J$ (а именно, J - ядро канонического гомоморфизма $\bar{\varepsilon} : \hat{\mathbb{F}} \to R$ алгебры $\hat{F}$ на алгебру R , продолжающего тождественное отображение $\varepsilon : X \to X \subseteq R$);

г) любое отображение $\theta : X \to R$ продолжается до некоторого эндоморфизма алгебры R (причем продолжение единственно, так как квазирегулярная алгебра R порождается множеством X).

Хорошо известно, что аналогичный критерий справедлив для алгебр и групп (в силу тех же "общих" соображений). Отметим еще, что если множество X бесконечно, то многообразие $\mathfrak{M}^*$, о котором говорится в утверждении б), единственно (см. [I, с. 366]).

Теорем о многообразиях квазирегулярных алгебр, учитывающих специфику многообразия $\mathfrak{A}^*$, известно мало. Наиболее известна

ТЕОРЕМА КОНА [4]. Пусть $\mathbb{F}$ - абсолютно свободная алгебра с множеством X свободных порождающих, $\bar{\mathbb{F}}$ - алгебра формальных степенных рядов от X (с нулевым свободным членом!), $\hat{\mathbb{F}}$ - квазирегулярная подалгебра квазирегулярной алгебры $\bar{\mathbb{F}}$, порожденная ее подалгеброй $\mathbb{F}$. Тогда $\hat{\mathbb{F}}$ является абсолютно свободной квазирегулярной алгеброй с тем же множеством X свободных порождающих.

Одной из первых теорем, непосредственно связанных с многообразиями квазирегулярных алгебр, явилась теорема об алгебрах присоединенных дробей, доказанная в работе [5]. А именно, из основных результатов этой работы с очевидностью вытекает

ТЕОРЕМА АНДРУНАКИЕВИЧА (см. [5, 6]). Пусть $\mathbb{K}$ - свободная коммутативная алгебра с множеством X свободных порождающих (т.е. идеал алгебры $\Phi[X]$ многочленов от множества X коммутирующих переменных, состоящий из многочленов с нулевым свободным членом), $\mathbb{R} = \Phi(X)$ - поле рациональных дробей от того же множества X переменных, т.е. поле дробей алгебр K и $\Phi[X]$. Тогда

$$\hat{K} = \{ f\cdot(1-g)^{-1} / f, g \in K \}. \qquad (3)$$

- квазирегулярная подалгебра алгебры R. Полученная алгебра $\hat{K}$ является свободной коммутативной квазирегулярной алгеброй с множеством X свободных порождающих.

Для постановки основных задач, решаемых в настоящей работе, укажем сначала несколько следствий из сформулированных выше теорем.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть многообразие $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр не является нильмногообразием. Тогда оно содержит многообразие $\mathcal{K}^*$ всех коммутативных квазирегулярных алгебр.

Действительно, из теоремы Андрунакиевича легко вытекает, что все свободные коммутативные квазирегулярные алгебры являются подпрямым произведением алгебр, изоморфных свободной коммутативной квазирегулярной алгебре $\hat{K}_1$ с одной свободной порождающей. Более того, из результатов работы [5] вытекает, что $\hat{K}_1$ - абсолютно свободная квазирегулярная алгебра с одной свободной порождающей. Поэтому, если многообразие $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр не содержит многообразия $\mathcal{K}^*$, то свободная в $\mathfrak{M}^*$ алгебра $\hat{A}_1$ с одной свободной порождающей будет гомоморфным образом алгебры $\hat{K}_1$, не изоморфным этой алгебре. Между тем из (3) легко вытекает, что все собственные гомоморфные образы алгебры $\hat{K}_1$ являются нильалгебрами (точнее, конечномерными нильпотентными алгебрами). В результате окажется, что $\hat{A}_1$ - нильалгебра и потому $\mathfrak{M}^*$ - нильмногообразие (т.е. все алгебры в $\mathfrak{M}^*$ будут нильалгебрами).

СЛЕДСТВИЕ 2. Многообразие $\mathfrak{A}^*$ всех квазирегулярных алгебр порождается классом $\mathfrak{N}$ всех (конечномерных) нильпотентных алгебр. Другими словами, если $\mathfrak{M}^*$ - многообразие квазирегулярных алгебр и $\mathfrak{M}^* \supseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{A}^*$.

Действительно, абсолютно свободная квазирегулярная алгебра $\hat{F}$ обобщенно-нильпотентна, т.е. $\bigcap \hat{F}^m = 0$ в силу теоремы Кона, так как обобщенно-нильпотентна алгебра $\bar{F}$ формальных степенных рядов без свободного члена. Поэтому алгебра $\hat{F}$ является подпрямым произведением нильпотентных алгебр - свободных нильпотентных алгебр $\hat{F}/\hat{F}^m \cong F/F^m$. А из этого в силу теоремы Биркгофа легко вытекает нужное нам утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{M}^*$ - собственное многообразие квазирегулярных алгебр (т.е. $\mathfrak{M}^* \neq \mathfrak{A}^*$), не являющееся нильмногообразием. Тогда для некоторых натуральных чисел $m \geqslant 1$ алгебра $[\hat{K}]_m$

всех $m \times m$-матриц над свободной коммутативной квазирегулярной алгеброй $\hat{K}$ со счетным множеством свободных порождающих принадлежит многообразию $\mathfrak{M}^*$, т.е. $\{m/[\hat{K}]_m \in \mathfrak{M}^*\}$ – непустое множество натуральных чисел. Более того, это множество ограничено сверху и потому существует число

$$\mu^*(\mathfrak{M}^*) = max\ \{m/[\hat{K}]_m \in \mathfrak{M}^*\}. \tag{4}$$

Достаточно доказать ограниченность (т.е. конечность) множества, стоящего в правой части равенства (4), поскольку его непустота вытекает из следствия I.

Учтем, что все алгебры $[\hat{K}]_m$ квазирегулярны, как алгебры матриц над квазирегулярными алгебрами, и что для каждой пары натуральных чисел $1 \leqslant m < n$ алгебра $[\hat{K}]_m$ изоморфно вкладывается в $[\hat{K}]_n$.

Допустим, что множество $\{m/[\hat{K}]_m \in \mathfrak{M}^*\}$ неограничено. Это означает, что оно совпадает с множеством всех натуральных чисел, т.е. $[\hat{K}]_m \in \mathfrak{M}^*$ для всех $m \geqslant 1$. Тогда для всех натуральных $m \geqslant 2$, алгебра $T_m(K)$ всех верхнетреугольных $m \times m$-матриц над K с нулями на главной диагонали тоже принадлежит многообразию $\mathfrak{M}^*$, как квазирегулярная (нильпотентная!) подалгебра алгебры $[\hat{K}]_m \in \mathfrak{M}^*$. Но тогда и все алгебры $T_m(\Phi)$ попадают в многообразие $\mathfrak{M}^*$, как гомоморфный образ соответствующей алгебры $T_m(K) \in \mathfrak{M}^*$ (основное поле Φ является, конечно, гомоморфным образом алгебры K !). Поэтому все конечномерные нильпотентные алгебры тоже попадут в $\mathfrak{M}^*$, как квазирегулярные подалгебры некоторых алгебр $T_m(\Phi) \in \mathfrak{M}^*$. В результате в силу следствия 2 оказалось, что $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{A}^*$.

В связи с доказанным следствием напомним, что с каждым собственным многообразием $\mathfrak{M}$ алгебр, не являющимся нильмногообразием, связывается его сложность (в смысле Латышева-Амицура) – число

$$\mu(\mathfrak{M}) = max\ \{m \mid [\Phi]_m \in \mathfrak{M}\}. \tag{5}$$

Учитывая (4) и (5), будем называть число $\mu^*(\mathfrak{M}^*)$ сложностью соответствующего многообразия $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\hat{A}$ – ненулевая приведенно свободная квазирегулярная алгебра с множеством X свободных порождающих; $A = \langle X \rangle$ – подалгебра алгебры $\hat{A}$, порожденная ее непустым подмножеством X; $G = gr^\circ(X)$ – подгруппа присоединенной группы $\hat{A}(o)$, порожденная X. Тогда:

а) алгебра A является приведенно свободной алгеброй с множеством X свободных порождающих. Более того, любое отображение $\theta: X \to \hat{A}$ продолжается до гомоморфизма $\varphi: A \to \hat{A}$ алгебры $\mathbb{A}$ в алгебру $\hat{\mathbb{A}}$. Поэтому, если $\mathbb{A}$ - PI-алгебра, то и $\hat{\mathbb{A}}$ - $\hat{PI}$-алгебра. Если множество $\mathbb{X}$ бесконечно, то алгебры $\mathbb{A}$ и $\hat{\mathbb{A}}$ имеют одинаковые тождества;

б) группа $\mathcal{G}$ является приведенно свободной группой с множеством $\mathbb{X}$ свободных порождающих. Более того, любое отображение $\theta: \mathbb{X} \to \hat{\mathbb{A}}$ продолжается до гомоморфизма $\varphi: \mathcal{G} \to \hat{\mathbb{A}}$ группы $\mathcal{G}$ в группу $\hat{\mathbb{A}}(o)$. Поэтому, если в группе $\mathcal{G}$ выполнено некоторое нетривиальное тождество, то тем же свойством обладает и группа $\hat{\mathbb{A}}(o)$. Если множество $\mathbb{X}$ бесконечно, то группы $\mathcal{G}$ и $\hat{\mathbb{A}}(o)$ имеют одинаковые тождества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно критерию приведенной свободы любое отображение $\theta: \mathbb{X} \to \hat{\mathbb{A}}$ продолжается до эндоморфизма $\bar{\theta}$ квазирегулярной алгебры $\hat{\mathbb{A}}$. Однако в силу (I) и (2) $\bar{\theta}$ будет одновременно и эндоморфизмом алгебры $\hat{\mathbb{A}}$ и эндоморфизмом присоединенной группы $\hat{\mathbb{A}}(o)$. Поэтому, сужая эндоморфизм $\bar{\theta}$ на подалгебру $\mathbb{A}$ и подгруппу $\mathcal{G}$, мы получаем, по построению, некоторые гомоморфизмы $\varphi: \mathbb{A} \to \hat{\mathbb{A}}$ алгебры $\mathbb{A}$ в алгебру $\hat{\mathbb{A}}$ и $\varphi: \mathcal{G} \to \hat{\mathbb{A}}$ группы $\mathcal{G}$ в группу $\hat{\mathbb{A}}(o)$.

Если $\theta(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{A}$, то по построению подалгебры $\mathbb{A}$ имеем, что $\varphi(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$. Поэтому любое отображение $\mathbb{X} \to \mathbb{A}$ продолжается до эндоморфизма алгебры $\mathbb{A}$. Это означает согласно критерию приведенной свободы для алгебр, что $\mathbb{A}$ - приведенно свободная алгебра с множеством $\mathbb{X}$ свободных порождающих. Аналогично, с помощью критерия приведенной свободы для групп, используя гомоморфизм φ, получаем, что $\mathcal{G}$ - приведенно свободная группа, свободно порожденная множеством $\mathbb{X}$.

Пусть $g(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ - произвольное тождество группы $\mathcal{G}$ (т.е. такой элемент абсолютно свободной группы со счетным множеством $\{t_1, t_2, \ldots\}$ свободных порождающих, что $g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = o$ для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{G}$).

Если множество $\mathbb{X}$ бесконечно, то, выбирая попарно различные $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$, имеем согласно определению тождества, что $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = o$, так как $\mathbb{X} \subseteq \mathcal{G}$. Но тогда, построив для любых заданных элементов $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \hat{\mathbb{A}}$ отображение $\theta: \mathbb{X} \to \hat{\mathbb{A}}$ такое, что $\theta(x_i) = r_i$, получаем для соответствующего гомоморфизма $\varphi: \mathcal{G} \to \hat{\mathbb{A}}(o)$ равенство $g(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \varphi(g(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \hat{o}$. А это означает, что g остается тождеством и во всей группе $\hat{\mathbb{A}}(o)$.

Если множество $\mathbb{X}$ конечно, но $|\mathbb{X}| \geqslant 2$, то учтем, что в абсолютно свободной 2-порожденной группе есть подгруппа, изоморфная абсолютно свободной группе со счетным множеством свободных порождающих. В результате получаем, что если g - нетривиальное тождество в G, то в этой группе есть нетривиальное тождество вида $h(t_1, t_2)$ (а именно, $h = g\,(u_1(t_1, t_2), u_2(t_1, t_2), \ldots, u_n(t_1, t_2))$ для некоторых элементов $u_1, u_2, \ldots$ абсолютно свободной 2-порожденной группы). Но тогда, повторяя проведенные выше рассуждения для h и учитывая, что $|X| \geqslant 2$, получаем, что в группе $\hat{A}(o)$ выполнено нетривиальное тождество h.

Наконец, если $|X| = 1$, то в группах G и $\hat{A}(o)$ выполнено, очевидно, нетривиальное тождество – тождество коммутативности.

Следовательно, справедливо утверждение б).

Аналогично в силу уже доказанного заканчивается доказательство утверждения а), так как в абсолютно свободной 2-порожденной алгебре есть подалгебра, изоморфная абсолютно свободной алгебре со счетным множеством свободных порождающих.

В связи с доказанным возникает несколько вопросов. Согласно следствию 4, с каждой приведенно свободной квазирегулярной алгеброй $\hat{A}$ однозначно связываются приведенно свободная алгебра A и приведенно свободная группа G с тем же множеством X свободных порождающих, что и $\hat{A}$.

ВОПРОС I. Будет ли в группе G выполняться некоторое нетривиальное тождество, если A и $\hat{A}$ – PI-алгебры?

Если множество X бесконечно, то существует точно одно многообразие $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр, в котором свободна $\hat{A}$, и точно одно многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр, в котором свободна алгебра A. Будем говорить, что многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр соответствует многообразию $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр. Из следствия 4 легко вытекает, что при этом $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ совпадает с многообразием алгебр $Var(\mathfrak{M}^*)$, порожденным классом $\mathfrak{M}^*$.

ВОПРОС 2. Пусть собственное многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр соответствует многообразию $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр и не является нильмногообразием. Как связаны числа $\mu^*(\mathfrak{M}^*)$ и $\mu(\mathfrak{M})$?

ВОПРОС 3. Какие многообразия алгебр соответствуют многообразиям квазирегулярных алгебр?

ВОПРОС 4. Может ли разным многообразиям квазирегулярных алгебр соответствовать одно и то же многообразие алгебр?

В настоящей работе мы дадим полный ответ на вопросы I, 2 и частичный ответ на вопрос 3. Вопрос 4 остается открытым.

§ 2. Для ответа на первые два вопроса нам необходимы некоторые конкретные приведенно свободные квазирегулярные алгебры.

Пусть m – натуральное число, $m \geqslant 2$.

Строим свободную коммутативную алгебру K и свободную коммутативную квазирегулярную алгебру $\hat{K}$ с одним и тем же счетным множеством T свободных порождающих, записанном в виде

$$\mathbb{T}=\left\{ t_{ij}^{(k)} \mid i,\ j,\ k \text{ - целые числа},\ 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant m,\ k\geqslant 1 \right\}. \tag{6}$$

Учитывая (6), строим в алгебре $[\mathbb{R}]_m$ всех $m\times m$-матриц над полем $\mathbb{R}=\Phi(\mathbb{T})$ рациональных дробей общие матрицы:

$$x_k=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} t_{ij}^{(k)} E_{ij} . \tag{7}$$

Хорошо известно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Подалгебра $\mathbb{M}_m$ алгебры $[\mathbb{K}]_m$, порожденная множеством $\mathbb{X}$ всех матриц вида (7),

$$\mathbb{X}=\left\{x_k / k \text{ - целое число},\ k\geqslant 1\right\} \tag{8}$$

называется алгеброй общих $m\times m$-матриц (над $\mathbb{X}$).

По аналогии дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квазирегулярная подалгебра $\hat{\mathbb{M}}_m$ квазирегулярной алгебры $[\hat{\mathbb{K}}]_m$, порожденная множеством $\mathbb{X}$, как квазирегулярная алгебра, называется квазирегулярной алгеброй общих $m\times m$-матриц (над $\mathbb{X}$).

Хорошо известно, что алгебра $\mathbb{M}_m$ является приведенно свободной алгеброй (с множеством $\mathbb{X}$ свободных порождающих) - свободной алгеброй многообразия $Var([\mathbb{K}]_m)$ алгебр, порожденного указанной алгеброй матрицы $[\mathbb{K}]_m$. Более того, в силу классических структурных теорем с первичных PI-алгебрах $\mathbb{M}_m$ - PI-алгебра без делителей нуля и с бесконечным центром $\mathfrak{Z}_m$ и ее алгебра центральных частных, т.е. алгебра

$$\mathbb{M}_m\,\mathfrak{Z}_m^{-1}=\left\{\mathcal{A}z^{-1}/\mathcal{A}\in\mathbb{M}_m,\ 0\neq z\in\mathfrak{Z}_m\right\} \tag{9}$$

является телом, конечномерным над своим центром

$$\mathfrak{Z}_m\,\mathfrak{Z}_m^{-1}=\left\{\mathcal{C}z^{-1}/\mathcal{C}\in\mathfrak{Z}_m,\ 0\neq z\in\mathfrak{Z}_m\right\}. \tag{10}$$

В этом параграфе мы покажем, что алгебра $\hat{\mathbb{M}}_m$ обладает аналогичными свойствами, т.е. что оказывается справедливой

ТЕОРЕМА I. Для любого натурального числа $m\geqslant 2$ квазирегулярная алгебра $\hat{\mathbb{M}}$ общих $m\times m$-матриц является приведенно свободной квазирегулярной алгеброй (с множеством $\mathbb{X}$ свободных порождающих)- свободной квазирегулярной алгеброй многообразия $Var^*([\hat{\mathbb{K}}]_m)$ квазирегулярных алгебр, порожденного алгеброй $[\hat{\mathbb{K}}]_m$) всех $m\times m$-матриц над свободной коммутативной квазирегулярной алгеброй $\hat{\mathbb{K}}$ (со счетным множеством $\mathbb{T}$ свободных порождающих). Более того:

а) любое отображение $\theta: X \to [\hat{K}]_m$ продолжается до некоторого эндоморфизма $\bar{\theta}$ квазирегулярной алгебры $[\hat{K}]_m$;

б) приведенно свободной алгеброй, соответствующей (по следствию 4) приведенно свободной квазирегулярной алгебре $\hat{M}_m$, является алгебра M_m общих $m \times m$-матриц, а соответствующая приведенно свободная группа G – абсолютно свободная группа с тем же множеством X свободных порождающих;

в) алгебра $\hat{M}_m$ является PI-алгеброй без делителей нуля и с бесконечным центром $\hat{\mathfrak{Z}}_m$, причем ее алгебра частных

$$\hat{M}\,\hat{\mathfrak{Z}}_m^{-1} = \left\{ \mathcal{A} z^{-1} \,\middle|\, \mathcal{A} \in \hat{M}_m,\ 0 \neq z \in \hat{\mathfrak{Z}}_m \right\} \qquad (11)$$

совпадает (с точностью до изоморфизма тождественного на M_m) с телом центральных частных $M_m \mathfrak{Z}_m^{-1}$ алгебры M_m.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько лемм.

ЛЕММА 1. Пусть квазирегулярная алгебра Q является подалгеброй алгебры R с единицей 1. Тогда отображение $\delta: Q \to R$, определенное правилом $\delta(q) = 1 - q$, является изоморфным вложением присоединенной группы $Q(\circ)$ в группу $U(R)$ всех обратимых элементов алгебры R. В частности,

$$\forall q \in Q \;/\; q^* = -q\,(1-q)^{-1}. \qquad (12)$$

Действительно, из (1) и (2) легко вытекает, что

$$\begin{aligned} &\forall q_1, q_2 \in Q \;/\; (1-q_1)(1-q_2) = 1 - (q_1 \circ q_2);\\ &\forall q \in Q \;/\; (1-q)(1-q^*) = 1 = (1-q^*)(1-q), \end{aligned} \qquad (13)$$

а из (13) с очевидностью – требуемое.

ЛЕММА 2. Пусть алгебра R с единицей 1 содержит в качестве подалгебры некоторое тело S с той же единицей 1 и квазирегулярную алгебру Q. Тогда $Q \cap S$ – квазирегулярная подалгебра алгебры R.

Это с очевидностью вытекает из леммы 1 в силу равенства (12).

ЛЕММА 3. Пусть $\hat{K}$ – свободная коммутативная квазирегулярная алгебра со счетным множеством T свободных порождающих. Для любых попарно различных $t_1, t_2, t \in T$ матрицы

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} t & t_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t_2 & t \end{pmatrix} \qquad (14)$$

порождают в присоединенной группе $[\hat{K}]_2(\circ)$ подгруппу, изоморфную абсолютно свободной группе с двумя свободными порождающими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая теорему Андрунакиевича (см. (3)), канонически вложим алгебру $[\mathbb{K}]_2$ в алгебру $[\mathbb{R}]_2$ всех 2x2-матриц над полем $\mathbb{R} = \Phi(\mathbb{T})$ рациональных дробей и положим

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 1-t & -t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t_2 & 1-t \end{pmatrix}. \tag{I5}$$

Сравнивая (I4) и (I5), получаем в силу леммы I, что подгруппа присоединенной группы $[\hat{\mathbb{K}}]_2(o)$, порожденная матрицами $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, изоморфна подгруппе $\mathbb{H}$ группы $U([R]_2)$ всех обратимых в $[\mathbb{R}]_2$ матриц, порожденной матрицами $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. Поэтому нам достаточно доказать, что $\mathbb{H}$ – абсолютно свободная группа со свободными порождающими $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. Для этого согласно конструктивному построению свободной группы (см., например, [7, с.I60 – I62]) достаточно доказать, что для любых ненулевых целых чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{2k-1}, s_{2k}, \ldots$ все матрицы

$$\mathcal{B}_1^{s_1},\ \mathcal{B}_1^{s_1}\mathcal{B}_2^{s_2},\ \mathcal{B}_1^{s_1}\mathcal{B}_2^{s_2}\mathcal{B}_1^{s_3},\ \mathcal{B}_1^{s_1}\mathcal{B}_2^{s_2}\mathcal{B}_1^{s_3}\mathcal{B}_2^{s_4}, \ldots$$

$$\ldots, \mathcal{B}_1^{s_1}\mathcal{B}_2^{s_2}\ldots\mathcal{B}_1^{s_{2i-1}}\mathcal{B}_2^{s_{2i}}\ldots\mathcal{B}_1^{s_{2k-1}}\mathcal{B}_2^{s_{2k}}, \tag{I6}$$

$$\mathcal{B}_1^{s_1}\mathcal{B}_2^{s_2}\ldots\mathcal{B}_1^{s_{2i-1}}\mathcal{B}_2^{s_{2i}}\ldots\mathcal{B}_1^{s_{2k-1}}\mathcal{B}_2^{s_{2k}}\mathcal{B}_1^{s_{2k+1}}, \ldots$$

отличны от единичной матрицы.

Полагая $C = 1-t$, легко выводим из (I5) по индукции, что

$$\mathcal{B}_1^{s} = \begin{pmatrix} C^s & -\frac{t_1}{t}(1-C^s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{B}_2^{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t_2}{t}(1-C^s) & C^s \end{pmatrix} \tag{I7}$$

для любого целого числа s. А из (I7) вытекает, что

$$\mathcal{B}_1^{s}\mathcal{B}_2^{\bar{s}} = \begin{pmatrix} C^s + \frac{t_1 t_2}{t^2}(1-C^s)(1-C^{\bar{s}}) & -\frac{t_1}{t}(1-C^s)C^{\bar{s}} \\ -\frac{t_2}{t}(1-C^{\bar{s}}) & C^{\bar{s}} \end{pmatrix} \tag{I8}$$

для любых целых чисел s, $\bar{s}$.

Но тогда, учитывая, что $C = 1-t$, и порождающие t_1, t_2, t являются попарно различными свободными порождающими, с очевидностью получаем в силу (I8), что первые два члена последовательности (I6) являются не единичными матрицами.

Сравнивая (I7) и (I8), получаем, что коэффициентами матриц из (I6) являются многочлены от t_1, t_2 (с коэффициентами из поля $\Phi(t)$ рациональных дробей от переменной t). При этом в силу (I8) у $2k$-го члена последовательности (I6) на месте (I,I) стоит

$$(t_1 t_2)^k t^{-2k} \prod_{i=1}^{k} (1-c^{s_{2i-1}})(1-c^{s_{2i}})+\ldots, \tag{I9}$$

а у $(2k+1)$-го члена на том же месте стоит многочлен

$$(t_1 t_2)^k t^{-2k} c^{s_{2k+1}} \prod_{i=1}^{k} (1-c^{s_{2i-1}})(1-c^{s_{2i}})+\ldots, \tag{20}$$

где опущенные одночлены имеют строго меньшую степень по переменным t_1, t_2. А из (I9), (20) вытекает, что выписанные многочлены отличны от 1 (не являются константами), так как все целые числа s_1, $s_2, \ldots, s_{2k-1}$, s_{2k}, s_{2k+1} – ненулевые.

Таким образом, все матрицы из последовательности (I6) не являются единичными и лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть приведенно свободная алгебра $\mathbb{A}$ с множеством $\mathbb{X} = \{x_k \mid k \geqslant 1\}$ свободных порождающих является подалгеброй алгебры C, причем алгебры $\mathbb{A}$ и C имеют одинаковые тождества. Тогда центры этих алгебр связаны равенством

$$\xi(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \cap \xi(C). \tag{2I}$$

Действительно, из условий вытекает, что любое **отображение** $\theta: \mathbb{X} \to C$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\theta}: \mathbb{A} \to C$ алгебры $\mathbb{A}$ в алгебру C.

Учитывая сказанное, берем любой элемент $z \in \xi(\mathbb{A})$.

Для записи элемента z через свободные порождающие достаточно некоторого непустого конечного $\Delta \subseteq \mathbb{X}$. Фиксируя Δ и учитывая бесконечность $\mathbb{X}$, выбираем $x \in \mathbb{X} \setminus \Delta$. По определению центра, $zx = xz$. Берем любой $c \in C$ и строим любое такое отображение $\theta: \mathbb{X} \to C$, тождественное на Δ, что $\theta(x) = c$. Продолжая θ до гомоморфизма $\bar{\theta}: \mathbb{A} \to C$, получаем $zc = \bar{\theta}(zx) = \bar{\theta}(xz) = cz$. Следовательно, $z \in \xi(C)$.

Лемма доказана, так как мы доказали включение $\xi(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A} \cap \xi(C)$, а обратное включение очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Возьмем любое отображение $\theta: \mathbb{X} \to [\widehat{\mathbb{K}}]_m$. Тогда для подходящих элементов алгебры $\widehat{\mathbb{K}}$ получаем равенства

$$\theta(x_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{(k)} E_{ij}. \tag{22}$$

Сравнивая (7) и (22), получаем в силу (6), что θ индуцирует отображение $\xi : T \to \hat{K}$, действующее по правилу

$$\xi\,(t_{ij}^{(k)}) = r_{ij}^{(k)}\,. \tag{23}$$

Однако $\hat{K}$ – свободная коммутативная квазирегулярная алгебра с множеством T свободных порождающих, поэтому ξ продолжается до некоторого эндоморфизма алгебры $\hat{K}$. Обозначая этот эндоморфизм тем же символом ξ и полагая

$$\bar{\theta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(k)} E_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi\,(a_{ij}^{(k)})\,E_{ij} \tag{24}$$

для любой матрицы из $[\hat{K}]_m$, получаем в силу (24) и построения алгебры матриц, что $\bar{\theta}$ – эндоморфизм алгебры $[\hat{K}]_m$. При этом в силу выражений (6), (7), (22), (23), (8) и (24) этот эндоморфизм $\bar{\theta}$ продолжает заданное отображение θ.

Следовательно, справедливо утверждение а) теоремы I. Но тогда, рассматривая сужения эндоморфизов алгебры $[\hat{K}]_m$ на ее подалгебру $\hat{M}_m$, получаем в силу определений I и 2, критерия приведенной свободы и следствия 4, что квазирегулярная алгебра $\hat{M}_m$ общих матриц является приведенно свободной квазирегулярной алгеброй с множеством X свободных порождающих, а алгебра M_m общих матриц – соответствующей ей приведенно свободной алгеброй.

Из счетности X и T вытекает существование отображения множества X на множество $T \times \{E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Поэтому в силу а) существует гомоморфизм подалгебры $\hat{M}_m$ на всю алгебру $[\hat{K}]_m$. Но тогда очевидно, что для порожденных этими алгебрами многообразий квазирегулярных алгебр получаем равенство

$$Var^*(\hat{M}_m) = Var^*([K]_m). \tag{25}$$

Из тех же и близких к ним соображений (см. следствие 4) вытекает, что для соответствующих многообразий алгебр справедливо равенство

$$Var(M_m) = Var(\hat{M}_m) = Var([\hat{K}]_m) = Var([R]_m). \tag{26}$$

В силу (25) квазирегулярная алгебра $\hat{M}_m$ общих матриц является свободной квазирегулярной алгеброй многообразия $Var^*([\hat{K}]_m)$ квазирегулярных алгебр, порожденного алгеброй $[\hat{K}]_m$.

В силу (26) все выписанные алгебры имеют одинаковые тождества. Поэтому в силу (25), (26) и леммы 4 для центров этих алгебр справедливо в силу (21) соотношение

$$\xi_m \subseteq \hat{\xi}_m \subseteq \hat{K} E \subseteq R E. \tag{27}$$

Из (27) вытекает, что все ненулевые элементы центров алгебр M_m и $\hat{M}_m$ обратимы в алгебре $[R]_m$, так как R – поле. Поэтому в силу классических теорем об алгебрах дробей из (27) вытекает, что с точностью до изоморфизмов, тождественных на алгебрах M_m и $\hat{M}_m$, их алгебры центральных частных (см. (9) и (11)) являются подалгебрами алгебры $[R]_m$

$$M_m \subseteq M_m \xi_m^{-1} \subseteq [R]_m, \quad \hat{M}_m \subseteq \hat{M}_m \hat{\xi}_m^{-1} \subseteq [R]_m. \tag{28}$$

Но $M_m \xi_m^{-1}$ – тело с той же единицей E, что и алгебра $[R]_m$, а $\hat{M}_m$ – квазирегулярная подалгебра алгебры $[R]_m$. Поэтому в силу леммы 2 $\hat{M}_m \cap M_m \xi_m^{-1}$ – квазирегулярная подалгебра алгебры $\hat{M}_m$, содержащая подалгебру M_m. Между тем, по построению, единственной квазирегулярной подалгеброй в $\hat{M}_m$, содержащей подалгебру M_m, является сама алгебра $\hat{M}_m$. Следовательно,

$$M_m \subseteq \hat{M}_m \subseteq M_m \xi_m^{-1}, \tag{29}$$

а из (28) и (29) вытекает утверждение в) теоремы 1.

В силу всего доказанного выше осталось доказать, что приведенно свободная группа $G = gr^{\circ}(K)$, соответствующая приведенно свободной квазирегулярной алгебре $\hat{M}_m$ абсолютно свободна. В силу бесконечности K и приведенной свободы группы G достаточно доказать, что в группе G нет нетривиальных тождеств. Но в абсолютно свободной группе с двумя свободными порождающими нет нетривиальных тождеств, поэтому остается доказать, что среди гомоморфных образов G есть абсолютно свободная 2-порожденная группа.

Из утверждения а) легко вытекает, что все не более чем счетно порожденные подгруппы в $[\hat{K}]_m(o)$ являются гомоморфными образами G. Остается заметить, что матрицы $A_1 = t E_{11} + t_1 E_{12}$, $A_2 = t_2 E_{21} + t E_{22}$, где t_1, t_2, t – попарно различные элементы из T, порождают в группе $[\hat{K}]_m(o)$ абсолютно свободную подгруппу в силу леммы 3.

Следовательно, утверждение б) справедливо и теорема 1 доказана.

§ 3. Для сравнения чисел $\mu^*(\mathfrak{M}^*)$ и $\mu(\mathfrak{M})$, т.е. для ответа на вопрос 2, нам необходимо продолжить исследование свойств алгебр M_m и $\hat{M}_m$, а также установить взаимосвязь между нильрадикалами алгебр A и $\hat{A}$ в условиях следствия 4. В связи с этим отметим, что нет необходимости уточнять, о каком именно нильрадикале идет речь, так как в рассматриваемом нами случае PI-алгебр все нильрадикалы совпадают (см., например, [8, гл. I]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $\hat{\mathbb{A}}$ – приведенно свободная квазирегулярная алгебра со счетным множеством $\mathbb{X}$ свободных порождающих, $\mathbb{A}$ – соответствующая ей приведенно свободная алгебра. Пусть алгебра $\mathbb{A}$ является PI–алгеброй, но не является нильалгеброй. Тогда нильрадикал $b(\hat{\mathbb{A}})$ алгебры $\hat{\mathbb{A}}$ является собственным вполне характеристическим идеалом алгебры $\hat{\mathbb{A}}$, нильрадикал $b(\mathbb{A})$ алгебры $\mathbb{A}$ – собственным вполне характеристическим идеалом алгебры $\mathbb{A}$ и

$$b(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \cap b(\hat{\mathbb{A}}). \tag{30}$$

В частности, $\hat{\mathbb{B}} = \hat{\mathbb{A}}/b(\hat{\mathbb{A}})$ – приведенно свободная квазирегулярная алгебра, $\mathbb{B} = \mathbb{A}/b(\mathbb{A})$ – соответствующая ей приведенно свободная алгебра (если отождествить изоморфные в силу (30) алгебры $\mathbb{A}/b(\mathbb{A})$ и $\mathbb{A} + b(\hat{\mathbb{A}})/b(\hat{\mathbb{A}})$), причем $b(\mathbb{B}) = b(\hat{\mathbb{B}}) = 0$. Более того, если алгебра $\mathbb{B}$ некоммутативна, то она изоморфна алгебре $\mathbb{M}_m$ для некоторого $m \geqslant 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – любая из алгебр $\mathbb{A}$, $\hat{\mathbb{A}}$, удовлетворяющих поставленным условиям.

Возьмем любой элемент $r \in R$ и любой эндоморфизм ξ в R.

Для записи элемента r достаточно некоторого конечного непустого $\Delta \subseteq \mathbb{X}$. Поэтому в силу бесконечности $\mathbb{X}$ существует такое отображение $\theta : \mathbb{X} \to R$, совпадающее с эндоморфизмом ξ на Δ, что $\theta(\mathbb{X}) \supseteq \mathbb{X}$. Зафиксировав θ, продолжим его до эндоморфизма $\bar{\theta}$ алгебры R. По построению, $\bar{\theta}(R) = R$, $\bar{\theta}(r) = \xi(r)$.

В частности, если $r \in b(R)$, то $\xi(r) = \bar{\theta}(r) \in \bar{\theta}(b(R)) \subseteq \subseteq b(\bar{\theta}(R)) = b(R)$ и мы доказали, что $b(R)$ – вполне характеристический идеал алгебры R. При этом $R \neq b(R)$, так как алгебра R не является нильалгеброй.

Согласно классическим структурным теоремам о нильподалгебрах в PI-алгебрах степень $[b(\mathbb{A})]^n$ нильрадикала алгебры $\mathbb{A}$ содержится в сумме всех нильпотентных идеалов для некоторого целого $n \geqslant 2$. В частности, взяв конечное $\Delta \subseteq \mathbb{X}$, достаточное для записи элемента $r \in b(\mathbb{A})$ и попарно различные $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{X} \setminus \Delta$, получаем, что элемент $a = y_1 r y_2 r \ldots y_n r y_{n+1}$ порождает в алгебре $\mathbb{A}$ нильпотентный идеал. Поэтому, выбирая в бесконечном множестве $\mathbb{X} \setminus (\Delta \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$ попарно различные элементы $z_1, z_2, \ldots$, мы получаем в алгебре $\mathbb{A}$ равенство $z_1 a z_2 a \ldots z_p a z_{p+1} = 0$ для некоторого достаточно большого целого числа $p > 2$.

Возьмем любые элементы $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1} \in \hat{\mathbb{A}}$ и рассмотрим элемент $q = r_1 r r_2 r \ldots r_n\ r\ r_{n+1}$. Применяя гомоморфизм $\bar{\theta}: \mathbb{A} \to \hat{\mathbb{A}}$, тождественный на Δ, переводящий элементы y_i в r_i, а элементы z_j – в произвольные элементы алгебры $\hat{\mathbb{A}}$, получаем равенство $\hat{\mathbb{A}}_q\ \hat{\mathbb{A}}_q \ldots \ldots \hat{\mathbb{A}}_q\ \hat{\mathbb{A}} = 0$. А это означает, что элемент q порождает в алгебре $\hat{\mathbb{A}}$ нильпотентный идеал. В частности, $q \in b(\hat{\mathbb{A}})$.

Тогда в силу произвольности выбора элементов $r_i \in \hat{\mathbb{A}}$ некоторая степень идеала алгебры $\hat{\mathbb{A}}$, порожденного элементом r, принадлежит ее нильрадикалу $b(\hat{\mathbb{A}})$. Поэтому $r \in b(\hat{\mathbb{A}})$, так как алгебра $\hat{\mathbb{B}} = \hat{\mathbb{A}} / b(\hat{\mathbb{A}})$ не имеет нильпотентных идеалов.

Из доказанного вытекает включение $b(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A} \cap b(\hat{\mathbb{A}})$. Поскольку обратное включение очевидно, то справедливо равенство (30).

Из равенства (30) и доказанного вытекает, что $\hat{B} = \hat{A} / b(\hat{\mathbb{A}})$ – приведенно свободная квазирегулярная алгебра и ей соответствует приведенно свободная алгебра $\mathbb{B} = \mathbb{A} + b(\hat{\mathbb{A}}) / b(\hat{\mathbb{A}}) \approx \mathbb{A} / b(\mathbb{A})$. При этом согласно свойствам радикалов $b(\mathbb{B}) = b(\hat{\mathbb{B}}) = 0$.

Допустим теперь, что алгебра $\mathbb{B}$ некоммутативна. Тогда в силу следствия 4 и алгебра $\hat{\mathbb{B}}$ некоммутативна, причем $Var(\hat{\mathbb{B}}) = Var(\mathbb{B})$. Кроме того, в силу равенства $b(\hat{\mathbb{B}}) = 0$ алгебра $\hat{\mathbb{B}}$ является подпрямым произведением некоторого семейства квазирегулярных первичных PI-алгебр $\{Q_i \,/\, i \in I\}$. Поэтому многообразие $Var(\mathbb{B}) = Var(\hat{\mathbb{B}})$ является объединением (в решетке многообразий) соответствующих многообразий $Var(Q_i)$.

Однако конечных квазирегулярных первичных алгебр не существует, поэтому все Q_i – первичные PI-алгебры с бесконечным центром. Из этого вытекает согласно классическим структурным теоремам о первичных PI-алгебрах, что $Var(Q_i) = Var([\mathbb{R}]_{m_i})$ для некоторых целых чисел $m_i \geqslant 1$ (вместо поля $\mathbb{R}$ можно взять любое другое бесконечное поле и получится то же самое многообразие алгебр), причем все числа m_i ограничены сверху одним и тем же целым числом – сложностью многообразия $Var(\mathbb{B})$ в силу (5).

В результате получаем, что многообразия $Var(Q_i)$ образуют конечную цепь, т.е. $Var(\mathbb{B}) = Var([\mathbb{R}]_m)$, где $m = max\{m_i \,/\, i \in I\}$. При этом $m \geqslant 2$, так как алгебра $\mathbb{B}$ некоммутативна. Тогда с точностью до изоморфизма $\mathbb{B} \cong \mathbb{M}_m$, поскольку алгебры $\mathbb{M}_m$ и $\mathbb{B}$ оказались свободными алгебрами одного и того же многообразия $Var(\mathbb{M}_m) = Var([\mathbb{K}]_m) = Var([\mathbb{R}]_m)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть алгебра $\mathbb{M}_m$ общих $m \times m$-матриц (от счетного множества $\mathbb{X}$ свободных порождающих) содержится в качестве подалгебры в первичной квазирегулярной PI-алгебре C, причем алгебры M_m и C имеют одинаковые тождества. Тогда квазирегулярная подалгебра алгебры C, порожденная ее подалгеброй M_m, совпадает (с точностью до изоморфизма тождественного на алгебре M_m) с квазирегулярной алгеброй $\hat{M}_m$ общих матриц. В частности, если приведенно свободная квазирегулярная алгебра $\hat{B}$ со счетным множеством свободных порождающих является некоммутативной первичной PI-алгеброй, то $\hat{B}$ изоморфна алгебре $\hat{M}_m$ для некоторого $m \geqslant 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 все элементы центра ξ_m алгебры M_m остаются центральными и в алгебре C. При этом в силу первичности алгебры C все ее центральные элементы не являются делителями нуля. Поэтому мы можем построить по обычным классическим правилам алгебру центральных частных $C\xi_m^{-1} = \{cz^{-1} / c \in C,\ 0 \neq z \in \xi_m\}$ и в эту алгебру изоморфно вложить и тело $M_m \xi_m^{-1}$, и алгебру C. Тогда в силу теоремы I и леммы 2 $C \supseteq C \cap M_m \xi_m^{-1} \supseteq \hat{M}_m$. Значит, квазирегулярная подалгебра алгебры C, порожденная ее подалгеброй M_m, совпадает с $\hat{M}_m$. Остальное вытекает из предложения I.

Теперь мы можем дать полный ответ на вопрос 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть собственное многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр соответствует многообразию $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр и не является нильмногообразием. Тогда

$$\mu^*(\mathfrak{M}^*) = \mu(\mathfrak{M}). \tag{31}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий вытекает, что $\mathfrak{M}^*$ - не нильмногообразие и потому в силу следствия I многообразие $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр содержит многообразие $\mathcal{K}^*$ всех коммутативных квазирегулярных алгебр. Из этого легко получаем, что заданное нам многообразие $\mathfrak{M} = Var(\mathfrak{M}^*)$ алгебр содержит $\mathcal{K}^*$, а значит, и все многообразие $\mathcal{K}$ всех коммутативных алгебр. Но тогда в силу (4) и (5)

$$1 \leqslant \mu^*(\mathfrak{M}^*) \leqslant \mu(\mathfrak{M}) = m. \tag{32}$$

В частности, если $m = 1$, то из соотношения (32) вытекает (31), поэтому всюду ниже в доказательстве считаем, что $m \geqslant 2$.

Пусть $\hat{A}$ - свободная квазирегулярная алгебра (со счетным множеством свободных порождающих) многообразия $\mathfrak{M}^*$, A - соответствующая ей приведенно свободная алгебра, т.е. свободная алгебра (с тем же множеством X свободных порождающих) многообразия $\mathfrak{M}$. В силу (5) и (32), алгебра A отображается гомоморфно на алгебру матриц $[\Phi]_m$, но не отображается гомоморфно на алгебру $[\Phi]_{m+1}$. При этом, по построению, A - PI-алгебра и $m \geqslant 2$.

Учитывая предложение I, переходим к приведенно свободной квазирегулярной алгебре $\hat{\mathbb{B}} = \hat{\mathbb{A}}/b(\hat{\mathbb{A}})$. В силу того же предложения приведенно свободной квазирегулярной алгебре $\hat{\mathbb{B}}$ соответствует приведенно свободная алгебра $\mathbb{B} = \mathbb{A}/b(\mathbb{A})$. При этом, по построению нильрадикала, алгебра $\mathbb{B}$ отображается гомоморфно на алгебру матриц $[\Phi]_m$, но не отображается гомоморфно на $[\Phi]_{m+1}$. Поэтому, проводя стандартные рассуждения с помощью стандартных тождеств, получаем в силу предложения I, что $\mathbb{B} = \mathbb{M}_m$ - алгебра общих $m \times m$-матриц именно для заданного $m \geqslant 2$ (см. (32)). При этом в силу бесконечности $\mathbb{K}$ алгебры $\mathbb{B}$ и $\hat{\mathbb{B}}$ имеют одинаковые тождества, т.е. $Var(\mathbb{B}) = Var(\hat{\mathbb{B}})$ в силу следствия 4.

Рассмотрим частично упорядоченное (относительно теоретико-множественного включения) множество $\mathcal{Y} = \{I \mid I$ - идеал алгебры $\hat{\mathbb{B}}$, $I \cap \mathbb{B} = 0\}$. Ясно, что это множество непусто и индуктивно. Поэтому в силу леммы Куратовского-Цорна в этом множестве существуют максимальные элементы. Пусть J - один из них.

По построению, J - идеал алгебры $\hat{\mathbb{B}}$, $J \cap \mathbb{B} = 0$, но для любого идеала I алгебры $\hat{\mathbb{B}}$ такого, что $I \supseteq J$, $I \neq J$, уже $I \cap \mathbb{B} \neq 0$.

Рассмотрим фактор-алгебру $C = \hat{\mathbb{B}}/J$ и возьмем два ее любых ненулевых идеала $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$. Переходя к полным прообразам при естественном гомоморфизме $\hat{\mathbb{B}} \to C$, получаем, $I_1 \cap \mathbb{B} \neq 0 \neq I_2 \cap \mathbb{B}$. Но, по доказанному, $\mathbb{B} = \mathbb{M}_m$, поэтому $(I_1 \cap \mathbb{B})(I_2 \cap \mathbb{B}) \neq 0$. В результате имеем, что $I_1 I_2 \nsubseteq J$, так как $\mathbb{B} \cap J = 0$.

Следовательно, C - первичная квазирегулярная PI-алгебра, содержащая подалгебру $\mathbb{B} + J/J \cong \mathbb{B} = \mathbb{M}_m$. Кроме того, по построению, $Var(\hat{\mathbb{B}}) \supseteq Var(C) \supseteq Var(\mathbb{B}) = Var(\hat{\mathbb{B}})$ и потому все выписанные алгебры имеют одинаковые тождества.

В силу предложения 2 $\hat{\mathbb{M}}_m \in \mathfrak{M}^*$, так как $C \in \mathfrak{M}^*$.

В силу (4) $\mu^*(\mathfrak{M}^*) \geqslant m = \mu(\mathfrak{M})$, а значит, в силу (32), справедливо равенство (31). Теорема доказана.

§ 4. Для ответа на вопрос I нам необходима некоторая информация о коммутаторных идеалах.

Напомним, что коммутаторным идеалом $C(R)$ алгебры R называется наименьший среди всех таких идеалов I алгебры R, что фактор-алгебра R/I - коммутативна. Нетрудно увидеть, что идеал $C(R)$ совпадает с идеалом алгебры R, порожденным всеми ее коммутаторами $[a,b] = ab - ba$. Этим и объясняется название.

ЛЕММА 5. Пусть A - подалгебра алгебры R, $\varphi : R \to \bar{R}$ - гомоморфизм алгебры R. Тогда

$$C(A) \subseteq A \cap C(R), \quad \varphi(C(R)) = C(\varphi(R)). \qquad (33)$$

Действительно, $A/A\cap C(R)\approx A+C(R)/C(R)$ - коммутативная алгебра, как подалгебра коммутативной алгебры $R/C(R)$. Поэтому справедливо первое из соотношений (33). Кроме того, переходя к образам и прообразам при гомоморфизме φ, получаем, что алгебра $R/\varphi^{-1}(C(\varphi(R)))$ коммутативна, так как она изоморфна алгебре $\varphi(R)/C(\varphi(R))$, а алгебра $\varphi(R)/\varphi(C(R))$ коммутативна, как гомоморфный образ алгебры $R/C(R)$. А из этого с очевидностью вытекает второе из соотношений (33).

С каждой алгеброй R будем связывать алгебру $R^{\#}$, полученную присоединением внешним образом единицы I к алгебре R. Напомним, что алгебра $R^{\#}$ строится по правилам

$$\begin{aligned}
&R^{\#}=R\dot{+}\Phi 1=\{a+\alpha 1\,/\,a\in R,\ \alpha\in\Phi\};\\
&a+\alpha 1=a'+\alpha' 1 \iff a=a',\quad \alpha=\alpha';\\
&(a+\alpha 1)(b+\beta 1)=(a+b)+(\alpha+\beta)1;\\
&(a+\alpha 1)(b+\beta 1)=(ab+\beta a+\alpha b)+(\alpha\beta)1.
\end{aligned}\tag{34}$$

Из правил (34) с очевидностью вытекает, что R - идеал алгебры $R^{\#}$, I - единица алгебры $R^{\#}$ и $R^{\#}/R\approx\Phi$.

ЛЕММА 6. Пусть квазирегулярная алгебра $\hat{R}$ порождается, как квазирегулярная алгебра, своей подалгеброй R. Тогда идеал алгебры $\hat{R}$, порожденный коммутаторным идеалом $C(R)$ алгебры R, совпадает с коммутаторным идеалом $C(\hat{R})$ алгебры $\hat{R}$. В частности, если коммутативна алгебра R, то коммутативна и вся алгебра $\hat{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая квазирегулярность алгебры $\hat{R}$, связываем с подалгеброй R цепь подалгебр R_n алгебры $\hat{R}$ (n - целые числа, $n\geqslant 0$) по правилу

$$R_0=R,\quad R_{n+1}=\langle R_n\cup R_n^{*}\rangle,\tag{35}$$

где $R_n^{*}=\{r^{*}/r\in R_n\}$ и для каждого непустого подмножества M символом $\langle M\rangle$ обозначается подалгебра, порожденная этим подмножеством. Из (35) с очевидностью следует, что $\bigcup_{n\geqslant 0}R_n$ - квазирегулярная подалгебра алгебры $\hat{R}$, и поэтому $\hat{R}=\bigcup_{n\geqslant 0}R_n$.

Пусть мы уже доказали, что из коммутативности алгебры R вытекает коммутативность алгебры $\hat{R}$.

Пусть $C=C(R)$, $\hat{C}$ - идеал алгебры $\hat{R}$, порожденный ее подмножеством C. Переходя к образам при естественном гомоморфизме $\hat{R}\to\hat{R}/\hat{C}$, получаем, что алгебра $\hat{R}/\hat{C}$ квазирегулярна и порождается, как квазирегулярная алгебра, своей коммутативной подалгеброй $R+\hat{C}/\hat{C}\approx$ $\approx R/R\cap\hat{C}$. Поэтому, по предположению, коммутативна и вся алгебра $\hat{R}/\hat{C}$.

Следовательно, $\hat{C}\supseteq C(\hat{R})$. Так как обратное включение вытекает из включения $C(\hat{R})\cap R\supseteq C(R)=C$, то $\hat{C}=C(\hat{R})$.

Итак, остается доказать, что из коммутативности алгебры R вытекает коммутативность алгебры $\hat{R}$.

Присоединим внешним образом единицу I ко всем алгебрам R_n. Тогда получаем в силу (34), что подалгебры $R_n^{\#}$ алгебры $\hat{R}^{\#}$ образуют цепь и $\hat{R}^{\#}=\bigcup\limits_{n\geqslant 0} R_n^{\#}$. При этом в силу леммы I для любого $q\in\hat{R}$ в алгебре $\hat{R}^{\#}$ существует элемент $(1-q)^{-1}$ и

$$R_{n+1}^{\#}=\langle\{a,\ (1-b)^{-1}/a,b\in R_n\}\rangle \tag{36}$$

в силу (35) для всех целых чисел $n\geqslant 0$. Однако если $ab=ba$, то

$$a(1-b)=(1-b)a,\quad (1-a)(1-b)=(1-b)(1-a).$$

Следовательно,

$$a(1-b)^{-1}=(1-b)^{-1}a,\quad (1-a)^{-1}(1-b)^{-1}=(1-b)^{-1}(1-a)^{-1}.$$

Поэтому, в силу (36) для любого целого $n\geqslant 0$ из коммутативности алгебры R_n вытекает коммутативность алгебры $R_{n+1}^{\#}$, а значит, и коммутативность алгебры R_{n+1}. По индукции получаем, что если коммутативна алгебра $R=R_0$, то коммутативны все подалгебры R_n, т.е. коммутативна алгебра $\hat{R}$.

ЛЕММА 7. Пусть $\hat{\mathbb{A}}$ – приведенно свободная квазирегулярная алгебра (со счетным множеством X свободных порождающих), $\mathbb{A}$ – соответствующая приведенно свободная алгебра, причем алгебра $\mathbb{A}$ не является нильалгеброй. Тогда коммутаторный идеал $C(\mathbb{A})$ алгебры $\mathbb{A}$ порождает в алгебре $\hat{\mathbb{A}}$ идеал, совпадающий с коммутаторным идеалом $C(\hat{\mathbb{A}})$ алгебры $\hat{\mathbb{A}}$. При этом справедливо равенство

$$C(\mathbb{A})=\mathbb{A}\cap C(\hat{\mathbb{A}}) \tag{37}$$

и в каждой из алгебр $\mathbb{A},\hat{\mathbb{A}}$ коммутаторный идеал содержит нильрадикал этой алгебры. В частности, коммутаторный идеал $C(\mathbb{A})$ является нильалгеброй тогда и только тогда, когда коммутаторный идеал $C(\hat{\mathbb{A}})$ является нильалгеброй, т.е. равенства $C(\mathbb{A})=$ $=b(\mathbb{A})$, $C(\hat{\mathbb{A}})=b(\hat{\mathbb{A}})$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\hat{A}$ - не нильалгебра. Поэтому из леммы I вытекает, что тождественное отображение $\varepsilon : X \to X$ продолжается (и притом единственным образом) до канонического гомоморфизма $\bar{\varepsilon} : \hat{A} \to \hat{K}$ приведенно свободной квазирегулярной алгебры $\hat{A}$ на свободную коммутативную квазирегулярную алгебру $\hat{K}$ с тем же множеством X свободных порождающих, а сужением $\bar{\varepsilon}$ на A является канонический гомоморфизм $\bar{\varepsilon}' : A \to K$ приведенно свободной алгебры A, соответствующей $\hat{A}$, на свободную коммутативную алгебру K.

Очевидно, что с $C(\hat{A}) = Ker\,\bar{\varepsilon}$, $C(A) = Ker\,\bar{\varepsilon}'$, поэтому выполнено равенство (37). Кроме того, справедливы включения $C(A) \supseteq b(A)$ и $C(\hat{A}) \supseteq b(\hat{A})$, так как K и $\hat{K}$ - алгебры без делителей нуля.

Из леммы 6 вытекает, что коммутаторный идеал $C(A)$ алгебры A порождает в алгебре $\hat{A}$ идеал, совпадающий с ее коммутаторным идеалом $C(\hat{A})$. Учитывая это, допускаем, что $C(A)$ - нильалгебра. Если $C(A) = 0$, то и $C(\hat{A}) = 0$, в силу леммы 6. Если $C(A) \neq 0$, то алгебра A оказывается PI-алгеброй, так как в абсолютно свободной алгебре нет делителей нуля. Поэтому в силу доказанного из предложения I вытекает справедливость равенства $C(A) = b(A) = A \cap b(\hat{A})$. В частности, $C(A) \subseteq b(\hat{A})$. Тогда в силу леммы 6 $C(\hat{A}) \subseteq b(\hat{A})$. Поэтому $C(\hat{A}) = b(\hat{A})$ - нильалгебра. Лемма доказана.

Теперь можно дать полный ответ на вопрос I.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\hat{A}$ - приведенно свободная квазирегулярная алгебра со счетным множеством X свободных порождающих, A - соответствующая приведенно свободная алгебра и G - соответствующая приведенно свободная группа. Пусть алгебра A - PI-алгебра, но не нильалгебра. Тогда равносильны следующие утверждения:

а) алгебра A отображается гомоморфно на алгебру $[\Phi]_2$, т.е. многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр, соответствующее приведенно свободной алгебре A, имеет сложность $\mu(\mathfrak{M}) \geq 2$;

б) идеал $C(A)$ алгебры A не является нильалгеброй;

в) идеал $C(\hat{A})$ алгебры $\hat{A}$ не является нильалгеброй;

г) алгебра $\hat{A}$ отображается гомоморфно на алгебру $[\hat{K}]_2$, т.е. многообразие $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр, соответствующее алгебре $\hat{A}$, имеет сложность $\mu^*(\mathfrak{M}^*) \geq 2$;

д) группа G - абсолютно свободная группа с тем же множеством X свободных порождающих.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а), г) равносильны в силу теоремы 2, утверждения б), в) - в силу леммы 7, а равносильность утверждений а), б) хорошо известна. Поэтому все утверждения а) - г) равносильны. Остается связать их с утверждением д).

г) $\Rightarrow$ д). Пусть $\mu^*(\mathfrak{M}^*) \geqslant 2$, т.е. $[\hat{K}]_2 \in \mathfrak{M}^*$. Тогда в силу теоремы I и $\hat{M}_2 \in \mathfrak{M}^*$. Поэтому приведенно свободная группа $\mathfrak{G}$, соответствующая приведенно свободной квазирегулярной алгебре $\hat{A}$, абсолютно свободна, так как снова в силу теоремы I среди ее гомоморфных образов есть абсолютно свободная группа со счетным множеством свободных порождающих.

д) $\Rightarrow$ б). Пусть коммутативный идеал алгебры A является ниль-алгеброй. Тогда в силу леммы 5 во всех алгебрах многообразия $\mathfrak{M}$ коммутаторный идеал является нильидеалом. Поэтому во всех конечно-порожденных подалгебрах алгебры $\hat{A}$ коммутаторный идеал нильпотентен, так как во всех конечно-порожденных PI-алгебрах любой нильидеал нильпотентен.

Возьмем любое натуральное число $n \geqslant 2$ и рассмотрим подгруппу $\mathfrak{G}_n$ присоединенной группы $\hat{A}(o)$, порожденную свободными порождающими x_i с $1 \leqslant i \leqslant n$. Ясно в силу (I) и (2), что подалгебра $B_n = \langle \mathfrak{G}_n \rangle$ алгебры $\hat{A}$, порожденная $\mathfrak{G}_n$, конечно-порождена (указанными x_i и присоединенно обратными к ним элементами x_i^*). Поэтому коммутаторный идеал $C_n = C(B_n)$ нильпотентен.

Переходя к образам при естественном гомоморфизме $\nu: B_n \to \bar{B}_n = B_n / C_n$, получаем снова в силу (I) и (2), что $\nu(\mathfrak{G}_n)$ - подгруппа присоединенной полугруппы $\bar{B}_n(o)$. Поэтому ν индуцирует гомоморфизм $\nu': \mathfrak{G}_n \to \nu(\mathfrak{G}_n)$ группы $\mathfrak{G}_n$ на коммутативную группу $\bar{\mathfrak{G}}_n = \nu(\mathfrak{G}_n)$. Из этого вытекает, что $C_n \cap \mathfrak{G}_n = Ker\, \nu'$ - нормальный делитель группы $\mathfrak{G}_n$, содержащий коммутант $\mathfrak{G}_n'$.

Итак, коммутант $\mathfrak{G}_n'$ группы $\mathfrak{G}_n$ содержится в коммутаторном идеале C_n алгебры B_n. Но алгебра C_n нильпотентна, поэтому, рассматривая цепь $C_n \supseteq C_n^2 \supseteq \ldots$ степеней алгебры C_n, получаем, что $C_n(o)$ является группой, а указанная цепь ее идеалов - конечным центральным рядом этой группы. Следовательно, группа $C_n(o)$ нильпотентна, а значит, нильпотентна и группа $\mathfrak{G}_n'$.

В результате имеем, что группа $\mathfrak{G}_n$ разрешима, так как ее коммутант нильпотентен.

Как известно, все подгруппы абсолютно свободной группы сами являются абсолютно свободными. Поэтому группа $\mathfrak{G}$ не абсолютно свободна, так как она оказалась локально разрешимой приведенно свободной группой со счетным множеством свободных порождающих. Теорема доказана.

§ 5. Если основное поле Φ бесконечно, то нетрудно дать полный ответ и на вопрос 3. Оказывается, что в этом случае любое многообразие алгебр соответствует некоторому многообразию квазирегулярных алгебр. Чтобы это показать, мы укажем еще одну общую конструкцию, приводящую к приведенно свободным квазирегулярным алгебрам.

Напомним, что алгебра R называется обобщенно нильпотентной, если пересечение $R^{\omega}=\bigcap R^{n}$ всех ее степеней (n - целые числа, $n\geqslant 2$) равно нулю. Так, например, если основное поле Φ бесконечно, то все приведенно свободные алгебры обобщенно нильпотентны. Учитывая это и будем проводить рассуждения.

Пусть A - любая обобщенно-нильпотентная алгебра, $A\neq 0$. Для любого целого числа $m\geqslant 2$ обозначим символом δ_m естественный гомоморфизм алгебры A на фактор-алгебру A/A^{m}. Полагая

$$\forall a\in A\ /\ \delta(a)=(\delta_m(a)/\ m\geqslant 2), \tag{38}$$

получаем гомоморфизм алгебры A в прямое произведение

$$\widetilde{A}=\prod_{m\geqslant 2} A/A^{m}. \tag{39}$$

Более того, из (38) и (39) вытекает, что δ - изоморфное вложение алгебры A в алгебру $\widetilde{A}$, так как $Ker\,\delta=A^{\omega}=0$ в силу обобщенной нильпотентности алгебры A.

Будем отождествлять алгебры A и $\delta(A)$, т.е. считать, что A - подалгебра алгебры $\widetilde{A}$.

ЛЕММА 8. Для любой обобщенно-нильпотентной алгебры $A\neq 0$ алгебры A и $\widetilde{A}$ имеют одинаковые тождества, причем алгебра $\widetilde{A}$ квазирегулярна. При этом любой гомоморфизм $\varphi: A\to\widetilde{A}$ продолжается до некоторого эндоморфизма алгебры $\widetilde{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что алгебры A и $\widetilde{A}$ имеют одинаковые тождества, вытекает из равенства (39), так как A - подалгебра в $\widetilde{A}$. Из того же равенства вытекает, что алгебра $\widetilde{A}$ квазирегулярна, как прямое произведение квазирегулярных (нильпотентных) алгебр.

Возьмем любой гомоморфизм $\varphi: A\to\widetilde{A}$. Обозначая символом π_n проектирование алгебры $\widetilde{A}$ на соответствующую m-ю проекцию A/A^{m}, связываем с гомоморфизмом φ серию гомоморфизмов $\varphi_n=\varphi\pi_n$ алгебры A на соответствующие алгебры A/A^{n}. Замечаем, что

$$\forall n\geqslant 2\ \ \forall a_n,\ b_n\in A\ /\ (a_n\delta_n=b_n\delta_n\Rightarrow a_n\varphi\pi_n=b_n\varphi\pi_n) \tag{40}$$

Действительно,

$$a_n\delta_n=b_n\delta_n\Rightarrow a_n-b_n\in A^{n}\Rightarrow (a_n-b_n)\varphi\in\widetilde{A}^{n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_n-b_n)\varphi\pi_n=0\Rightarrow a_n\varphi\pi_n=b_n\varphi\pi_n$$

в силу (39). Из (40) вытекает, что правило

$$(a_n \delta_n \mid n \geq 2)\tilde{\varphi} = (a_n \varphi \pi_n \mid n \geq 2) \tag{41}$$

корректно и задает некоторое отображение $\tilde{\varphi}$ алгебры $\tilde{A}$ в себя. Но тогда в силу (41) отображение $\tilde{\varphi}$ является эндоморфизмом алгебры $\tilde{A}$, так как δ_n, φ и π_n – гомоморфизмы. Остается заметить, что построенный эндоморфизм $\tilde{\varphi}$ продолжает заданный гомоморфизм $\varphi: A \to \tilde{A}$ в силу (38) и (41). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть приведенно свободная алгебра A (с некоторым непустым множеством X свободных порождающих) обобщенно-нильпотентна. Тогда квазирегулярная подалгебра $\hat{A}$ квазирегулярной алгебры $\tilde{A}$, порожденная ее подалгеброй A, будет приведенно свободной квазирегулярной алгеброй с тем же множеством свободных порождающих. Поэтому, если основное поле Φ бесконечно, то любая приведенно свободная алгебра A соответствует некоторой приведенно свободной квазирегулярной алгебре $\hat{A}$ с тем же множеством X свободных порождающих. В частности, любое многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр над бесконечным полем соответствует некоторому многообразию $\mathfrak{M}^*$ квазирегулярных алгебр. А именно, в качестве $\mathfrak{M}^*$ можно взять многообразие квазирегулярных алгебр, порожденное классом $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$ всех нильпотентных алгебр из $\mathfrak{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая обобщенную нильпотентность алгебры A, мы считаем ее подалгеброй квазирегулярной алгебры $\tilde{A}$, построенной в (39). Согласно формулировке, строим квазирегулярную подалгебру $\hat{A}$ алгебры $\tilde{A}$, порожденную ее подалгеброй A. Тогда очевидно, что $\hat{A}$ порождается, как квазирегулярная алгебра, тем же множеством X, что и A.

Возьмем любое отображение $\theta: X \to \hat{A}$. В силу леммы 8 алгебры A и $\hat{A}$ имеют одинаковые тождества. Поэтому отображение θ продолжается до гомоморфизма $\varphi: A \to \hat{A}$. Снова в силу леммы 8 гомоморфизм φ продолжается до эндоморфизма $\tilde{\varphi}$ алгебры $\tilde{A}$. Сужая $\tilde{\varphi}$ на подалгебру $\hat{A}$, получаем эндоморфизм $\bar{\theta}$ алгебры $\hat{A}$, если $\theta(X) \subseteq \hat{A}$, причем он будет продолжать заданное отображение θ.

В силу критерия приведенной свободы $\hat{A}$ – приведенно свободная квазирегулярная алгебра с множеством X свободных порождающих и, по построению, A – соответствующая приведенно свободная алгебра.

Допустим теперь, что основное поле Φ бесконечно и $\mathfrak{M}$ – произвольное (невырожденное!) многообразие алгебр.

Строим свободную в $\mathfrak{M}$ алгебру A со счетным множеством X свободных порождающих. Строим, как и выше, приведенно свободную квазирегулярную алгебру $\hat{A}$ - квазирегулярную подалгебру квазирегулярной алгебры $\tilde{A}$, порожденную ее подалгеброй A.

Применяя проектирования $\mathcal{K}_n$, получаем в силу (39), что

$$\forall n \geqslant 2 / \mathcal{K}_n(\tilde{A}) = \mathcal{K}_n(\hat{A}) = \mathcal{K}_n(A) = A/A^n. \tag{42}$$

Однако, для любого целого числа $n \geqslant 2$ алгебра A/A^n является приведенно свободной нильпотентной алгеброй, из которой получаются в качестве гомоморфного образа все нильпотентные алгебры многообразия $\mathfrak{M} = Var(A) = Var(\hat{A})$, удовлетворяющие тождеству $x_1 x_2 \dots x_n = 0$. Поэтому из (42) вытекает, что

$$\forall n \geqslant 2 / \hat{A}/\hat{A}^n \approx A/A^n. \tag{43}$$

Замечая, что алгебра $\hat{A}$ тоже обобщенно-нильпотентна, как подалгебра обобщенно-нильпотентной алгебры $\tilde{A}$, получаем в силу (43), что многообразие $\mathfrak{M}^* = Var^*(\hat{A})$ квазирегулярных алгебр, которому соответствует многообразие $\mathfrak{M} = Var(A)$, порождается, как многообразие квазирегулярных алгебр, классом $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$ всех нильпотентных алгебр из заданного многообразия $\mathfrak{M}$. Предложение доказано.

Цитированная литература

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. - М.: Наука, 1970. - 392 с.

2. Кон П. Универсальная алгебра. - М.: Мир, 1968. - 352 с.

3. Rowen L.H. Polynomial Idemtities in Ring Iheory. - N.Y.:Academic Press, 1980. - 365p.

4. Cohn P.M. Free radical rings. - Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, 6. Rings, modules and radicals. - Keszthety (Hungary),1971, p.135 - 145.

5. Андрунакиевич В.А. Полурадикальные кольца. - Известия АН СССР, сер. математическая, 1948, т.12, с.129 - 178.

6. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Алгебры без квазирегулярных подалгебр. - ДАН СССР, 1984, т.275, № 3, с.521 - 524.

7. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. - М.: Наука, 1973. - 396 с.

8. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. - М.: Наука, 1979. - 496 с.

В.А.Уфнаровский

О ПОДХОДЯЩИХ МАТРИЦАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе [I] было введено понятие **ортогонального разложения** простой алгебры Ли. Первым нерешенным среди вопросов, связанных с этим понятием, является вопрос существования ортогонального разложения в алгебре Ли A_5 (проблема Винни-Пуха). В настоящей статье приведена классификация всех подходящих матриц шестого порядка, которая должна указать реальный подход к транзитивному варианту проблемы Винни-Пуха, если ответ на вопрос отрицательный, и, быть может, подход к самой общей формулировке проблемы, если ответ положительный. Статья носит технический характер, что, видимо, отвечает характеру проблемы, так как решаемая здесь задача есть по существу решение большой нелинейной системы уравнений. Впрочем, это лишний раз подчеркивает основную трудность собственно проблемы Винни-Пуха, которая связана с еще более грандиозной системой уравнений.

Итак, наша цель - описать все такие подходящие матрицы X размера 6 x 6, что $X^2=\alpha E$ $(\alpha \neq 0)$. (Автоморфизм, отвечающий сопряжению такой матрицей, будет **автоморфизмом второго порядка алгебры Ли A_5**.)

Пусть $X=(x_{ij})$, $X^{-1}=(y_{ij})$. Напомним, что для того, чтобы X была подходящей, необходимо условие

$$6x_{ij}\,y_{ji}=1.$$

Если же мы предполагаем, что $X^{-1}=\alpha X$, то

$$6\alpha x_{ij}\,x_{ji}=1.$$

Осуществив перенормировку $x_{ij}=\frac{1}{\sqrt{6\alpha}}a_{ij}$, мы можем ограничиться случаем

$$a_{ij}\,a_{ji}=1. \qquad (I)$$

В частности, $a_{jj}^2=1 \Rightarrow a_{jj}=\pm 1$.

Заменив, если надо, матрицу $A=(a_{ij})$ на матрицу λA мы с самого начала можем дополнительно предположить, что

$$a_{66}=1. \qquad (2)$$

Так как, по предположению, $A^2 = 6E$, то мы имеем

$$\sum_j a_{ij} a_{jk} = 0 \quad (i \neq k).$$

Ввиду (I) получаем

$$\sum_j \frac{a_{ij}}{a_{kj}} = 0 \quad (i \neq k). \tag{3}$$

Положим $b_{ij} = (a_{ij} a_{j6})/a_{i6}$. (Эта замена отвечает сопряжению диагональной матрицей $diag(a_{16}, a_{26}, \ldots, a_{66})$). Тогда $b_{jj} = a_{jj}$, т.е.

$$b_{jj} = \pm 1. \tag{4}$$

Кроме того, в силу (2) выполнено

$$b_{i6} = 1. \tag{5}$$

Из (I) легко следует

$$b_{ij} b_{ji} = 1, \tag{6}$$

а из (3) вытекает, что

$$\sum_j \frac{b_{ij}}{b_{kj}} = 0 \quad (i \neq k). \tag{7}$$

Обычно условия (7) мы будем называть условием ортогональности i-й и k-й строк.

Таким образом, наша задача - изучить все матрицы $B = (b_{ij})$, удовлетворяющие условиям (4) - (7). **Решив последнюю, мы решим** и исходную. Для этого достаточно будет полученную матрицу B сопрячь диагональной и умножить на скаляр - результатом будут всевозможные матрицы X.

Нам придется изучить довольно большое количество вариантов, для которых мы применим лексикографическую нумерацию: так, если мы рассматриваем вариант I2I3, то к нему относится все, что сказано в пп. I, I2, I2I, и не относится сказанное в п. I2I2. Кроме того, нам понадобится умение решать нелинейные системы, часть из которых мы выделим в отдельные леммы.

ЛЕММА I. Система уравнений

$$\begin{cases} A + B + KC + KD = 0; \\ \dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B} + \dfrac{K}{C} + \dfrac{K}{D} = 0 \end{cases}$$

имеет следующие решения при $K \neq 0$:

а) $B = -A$; $D = -C$;

б) $B=-C\,\dfrac{KC+A}{KA+C}$; $D=\dfrac{AB}{C}$

при $KA+C\neq 0,\ A+B\neq 0$;

в) $C=-AK;\ D=-BK$. Этот вариант возможен только при $K=\pm 1$.

В частности, если $K=1$, то либо $A+B=0$, либо $A+C=0$, либо $A+D=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко увидеть, что вариант а) приводит к решению. Допустим, что $A+B\neq 0$. Из второго уравнения системы имеем:

$$\frac{A+B}{AB}+\frac{KC+KD}{CD}=0 .$$

Пользуясь первым уравнением, получаем:

$$\frac{A+B}{AB}-\frac{A+B}{CD}=0 ,$$

откуда

$$AB=CD\Rightarrow D=\frac{AB}{C}\Rightarrow A+B+KC+\frac{KAB}{C}=$$

$$=0\Rightarrow(KC+A)+\frac{B}{C}(KA+C)=0 .$$

Если $KA+C\neq 0$, то сразу приходим к п. б). Если же $KA+C=0$, то $KC+A=0\Longrightarrow K^2=1\Rightarrow K=\pm 1$, $D=-KB$ и мы попали в п. в).

ЛЕММА 2. Если $b_{ii}\,b_{kk}=-1$, то шесть чисел b_{ij}/b_{kj} $(j=1,2,\dots,6)$ разбивается на три такие пары, что сумма чисел в каждой из них равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (7) имеем

$$\sum_j \frac{b_{ij}}{b_{kj}}=0, \qquad \sum_j \frac{b_{kj}}{b_{ij}}=0 .$$

Так как $b_{ik}\,b_{ki}=1$, а $b_{ii}\,b_{kk}=-1$, то согласно (4) первую такую пару дают числа b_{ik}/b_{kk} и b_{ii}/b_{ki}. Для оставшихся четырех чисел уже можно применить лемму I с $K=1$.

Лемму 2 мы особенно часто будем использовать в том частном случае, когда $b_{ii}=-1$. Тогда из (5) и (6) вытекает, что четыре числа b_{ij} $(j\neq i,6)$ разбиваются на такие пары, что сумма чисел в каждой из них равна нулю $(k=6)$.

ЛЕММА 3. Если $b_{11}=-1$, то первые две строчки матрицы могут быть только следующего вида:

$$(i)\ \begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & -1 & -1/a & \lambda c/a & -\lambda c/a & 1 \end{pmatrix};$$

$$(ii)\ \begin{pmatrix} -1 & a & c & -a & -c & 1 \\ 1/a & -1 & \lambda c/a & -1/a & -\lambda c/a & 1 \end{pmatrix};\quad \lambda^2=1,\ a^2+1+2(\lambda-1)a=0;$$

$$(iii)\ \begin{pmatrix} -1 & a & c & -c & -a & 1 \\ 1/a & -1 & \lambda c/a & -\lambda c/a & -1/a & 1 \end{pmatrix};$$

$$(iv)\ \begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & 1 & a & \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix};$$

$$(v)\ \begin{pmatrix} -1 & a & c & -a & -c & 1 \\ 1/a & 1 & \lambda & a & \lambda & 1 \end{pmatrix};\quad \lambda^2=1,\ a^2+1+2(\lambda+1)a=0;$$

$$(vi)\ \begin{pmatrix} -1 & a & c & -c & -a & 1 \\ 1/a & 1 & \lambda & \lambda & a & 1 \end{pmatrix};$$

$$(vii)\ \begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & -1 & x & -1/a & -x & 1 \end{pmatrix};$$

$$(viii)\ \begin{pmatrix} -1 & a & -a & -c & c & 1 \\ 1/a & -1 & x & -x & -1/a & 1 \end{pmatrix};$$

$$(ix)\ \begin{pmatrix} -1 & a & c & -c & -a & 1 \\ 1/a & -1 & -1/a & -x & x & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{cases} \frac{1}{x}(a-c)=1-2a-ac; \\ x(a-c)=1+2c-ac; \end{cases}$$

$$(x)\ \begin{pmatrix} -1 & a & -c & c & -a & 1 \\ 1/a & -1 & -x & -1/a & x & 1 \end{pmatrix};$$

$$(xi)\ \begin{pmatrix} -1 & a & c & -a & -c & 1 \\ 1/a & -1 & -1/a & x & -x & 1 \end{pmatrix};$$

$$(xii)\ \begin{pmatrix} -1 & a & -c & -a & c & 1 \\ 1/a & -1 & -x & x & -1/a & 1 \end{pmatrix};$$

$$(xiii)\begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & 1 & x & -c & -cx/a & 1 \end{pmatrix};$$

$$(xiv)\begin{pmatrix} -1 & a & -a & -c & c & 1 \\ 1/a & 1 & x & -cx/a & -c & 1 \end{pmatrix};$$

$$(xv)\begin{pmatrix} -1 & a & c & -a & -c & 1 \\ 1/a & 1 & -c & x & -cx/a & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x(a-c) = -1-2a+ac\ ; \\ \frac{1}{x}(a-c) = -1+2c+ac\,. \end{cases}$$

$$(xvi)\begin{pmatrix} -1 & a & -c & -a & c & 1 \\ 1/a & 1 & -cx/a & x & -c & 1 \end{pmatrix};$$

$$(xvii)\begin{pmatrix} -1 & a & c & -c & -a & 1 \\ 1/a & +1 & -c & -cx/a & x & 1 \end{pmatrix};$$

$$(xviii)\begin{pmatrix} -1 & a & -c & c & -a & 1 \\ 1/a & 1 & -cx/a & -c & x & 1 \end{pmatrix};$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны два существенно различных случая: $b_{22} = -1$ и $b_{22} = +1$. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

I. $b_{22} = -1$. Чтобы не иметь дела с индексами, выберем обозначения для первых двух строк:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b & c & d & 1 \\ 1/a & -1 & x & y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 2 с точностью до перестановки столбцов, можем считать, что $b = -a$, $d = -c$. Тогда первые две строки имеют вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & -1 & x & y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие ортогональности (7) между ними дает:

$$-2a-\frac{a}{x}+\frac{c}{y}-\frac{c}{z}+1=0; \tag{8}$$

$$-\frac{2}{a}-\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-\frac{z}{c}+1=0. \tag{9}$$

Лемма 2, примененная ко второй строке, приводит к одной из трех возможностей:

$$\begin{cases} x+1/a=0; \\ y+z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1/a+y=0; \\ x+z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1/a+z=0; \\ x+y=0. \end{cases}$$

Последние две возможности получаются одна из другой перестановкой столбцов и переобозначением, так что достаточно рассмотреть только первые две.

II. $x=-1/a$, $z=-y$. Из выражений (8) и (9) имеем

$$-2a+a^2+2\frac{c}{y}+1=0;$$

$$-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+2\frac{y}{c}+1=0.$$

Применим лемму I, взяв $K=2$, $A=a^2$, $B=1$, $C=-a$, $D=c/y$.

Согласно этой лемме возможны два варианта, отвечающие пп. а) и б). Рассмотрим каждый из них.

III. $1=-a^2$, $c/y=a$, что отвечает п. а). Отсюда $a^2+1=0, y=c/a$. Мы пришли к варианту (i), отвечающему $\lambda=1$.

II2.

$$1=a\,\frac{-2a+a^2}{2a^2-a}; \quad \frac{c}{y}=\frac{a^2\cdot 1}{-a}$$

Это отвечает п. б). Из первого уравнения $a^2-4a+1=0$, из второго – $y=-c/a$. Мы пришли к варианту (i), отвечающему $\lambda=-1$. Варианты (ii) и (iii) получаются из (i) перестановкой столбцов.

I2. $y=-1/a$, $z=-x$. Из (8) и (9) имеем:

$$-2a-\frac{a}{x}-ac+\frac{c}{x}+1=0;$$

$$-\frac{2}{a}-\frac{x}{a}-\frac{1}{ac}+\frac{x}{c}+1=0,$$

откуда

$$\frac{1}{x}(a-c)=1-2a-ac;$$

$$x(a-c)=1+2c-ac.$$

Мы пришли к варианту (vii). Варианты $(viii)-(xii)$ получаются из него перестановкой столбцов.

2. Рассмотрим теперь случай $b_{22} = +1$. Как и в п.I можем считать, что первые две строчки имеют вид

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & 1 & x & y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие ортогональности второй и шестой строчек дает

$$\frac{1}{a} + x + y + z + 2 = 0; \qquad \text{(10)}$$

$$a + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2 = 0. \qquad \text{(11)}$$

Согласно лемме 2, примененной к первым двум строчкам, возможны следующие три случая:

а) $\begin{cases} -\frac{a}{x} - 1 = 0; \\ \frac{c}{y} - \frac{c}{z} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -\frac{a}{x} - \frac{c}{z} = 0; \\ \frac{c}{y} + 1 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = 0; \\ -\frac{c}{z} + 1 = 0. \end{cases}$

Варианты в) и б) совпадают с точностью до перестановки столбцов и переобозначения. Поэтому достаточно рассмотреть только первые два.

21. $\frac{a}{x} = 1$; $\frac{c}{y} = \frac{c}{z} \Rightarrow x = a$, $y = z$. Из (10), (11) имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + a + 2y + 2 = 0 \\ a + \frac{1}{a} + \frac{2}{y} + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{2}{y} = 2y \Rightarrow y^2 = 1.$$

С точностью до обозначений мы пришли к варианту (iv). Варианты (v) - (vi) получаются из него перестановкой столбцов.

22. $\frac{a}{x} + \frac{c}{z} = 1$; $\frac{c}{y} + 1 = 0 \Rightarrow y = -c$, $z = \frac{-cx}{a}$. Из (10),(11) имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + x - c - \frac{cx}{a} + 2 = 0 \\ a + \frac{1}{x} - \frac{1}{c} - \frac{a}{cx} + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(a-c) = -1 - 2a + ac; \\ \frac{1}{x}(a-c) = -1 + 2c + ac. \end{cases}$$

Мы пришли к $(xiii)$; оставшиеся варианты следуют из него перестановкой столбцов.

Нами разобраны все случаи и, тем самым, закончено доказательство леммы.

Проанализируем полученные 18 вариантов со следующей точки зрения.

ЛЕММА 4. Пусть $b_{11}=-1$ и $b_{12}=b_{23}=a$, где a удовлетворяет уравнению

$$a^2+1+2(1-\bar{\lambda})a=0 \qquad (12)$$

при $\bar{\lambda}^2=1$. Тогда возможны только следующие из вариантов, перечисленных в лемме 3:

(i) – при $\bar{\lambda}=\lambda=1$;

(ii), (iii) – при $\lambda=\bar{\lambda}=1$, $c=a^2$;

(iv) – при $\bar{\lambda}=-\lambda$;

(vii), $(viii)$ – при $\bar{\lambda}=1$, $x=a$, $c=-1$;

(ix), (xi) – при $\bar{\lambda}=1$;

$(xiii)$, (xiv) – при $x=a$, $c=\bar{\lambda}$;

(xv) $(xvii)$ – при $c=-a$, $x=-\bar{\lambda}$.

При этом варианты (vii), $(viii)$ являются частными случаями варианта (i), а варианты $(xiii)$, (xiv), (xv), $(xvii)$ – частными случаями варианта (iv).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все варианты по порядку.

$(i)-(iii)$. Если $\bar{\lambda}=-1$, то $a^2+1+4a=0$, что не согласуется с уравнением $a^2+1+2(\lambda-1)a=0$. Таким образом, $\bar{\lambda}=\lambda=1$. В случае (ii), (iii) равенство $a=\lambda c/a$ даст $c=a^2$.

$(iv)-(vi)$. Сравнение уравнения на a с (12) дает $\bar{\lambda}=-\lambda$. Однако случаи (v), (vi) отбрасываются, так как $a\neq\lambda$ ввиду (12).

(vii), $(viii)$. По условию $a=x$. Определяющие уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}(a-c)=1-2a-ac \\ a(a-c)=1+2c-ac \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c(a^2-1)=-2a^2 \\ a^2-1=2c \end{cases} \Rightarrow (a^2-1)^2=-4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2+1)^2=0 \Rightarrow a^2+1=0 \Rightarrow \bar{\lambda}=1,\ c=-1.$$

Легко убедиться, что мы пришли к частным случаям варианта (i) при $\lambda=1$ и $c=-1$, $c=+1$.

$(x)(xii)$. $a=-x$. Тогда определяющие уравнения примут вид:

$$\begin{cases} -\frac{1}{a}(a-c) = 1-2a-ac \\ -a(a-c) = 1+2c-ac \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c(1+a^2) = 2a-2a^2 \\ -a^2-1 = c(2-2a) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -(a^2+1)^2 = 4a(1-a)^2.$$

В силу (I2) получаем

$$-4(1-\bar\lambda)^2 a^2 = 4a(1-a)^2 \Rightarrow -a(1-\bar\lambda)^2 = (1-a)^2.$$

Так как $a \neq 1$, то с учетом (I2) запишем

$$\bar\lambda = -1 \Rightarrow -4a = (1-a)^2 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1,$$

что противоречит (I2).

$(ix), (xi)$. Пусть $a = -1/a \Rightarrow \bar\lambda = 1$.

$(xiii), (xiv)$. Имеем $a = x$. Тогда первое из определяющих уравнений примет вид

$$a(a-c) = -1-2a+ac \Rightarrow a^2+2a(1-c)+1 = 0.$$

Из (I2) заключаем, что $c = -\bar\lambda$. Легко увидеть, что мы попали в вариант (iv) с $\lambda = -\bar\lambda$.

$(xv), (xvii)$. Имеем $a = -c$. Тогда первое определяющее уравнение запишется как

$$x \cdot 2a = -1-2a-a^2 \Rightarrow a^2+1+2a(1+x) = 0.$$

Из (I2) заключаем, что $x = -\bar\lambda$. Мы опять попали в частний случай варианта (iv).

$(xvi), (xviii)$. Пусть

$$a = -\frac{cx}{a} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{c}.$$

Тогда определяющие уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{-a^2}{c}(a-c) = -1 - 2a + ac \\ \dfrac{-c}{a^2}(a-c) = -1 + 2c + ac \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a^3 + a^2c = -c - 2ac + ac^2; & (13) \\ -ac + c^2 = -a^2 + 2a^2c + a^3c\ . & (14) \end{cases}$$

Умножив (13) на a и сложив с (14), получим

$$-a^4 + c^2 = a^2c^2 - a^2 \Rightarrow (a^2 + c^2)(a^2 - 1) = 0\ .$$

В силу (12) находим $a^2 + c^2 = 0$. Тогда из (13) выводим $a^2c^2 = -c - 2ac \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0$, что противоречит (12).

Теперь наша ближайшая цель – описать все те матрицы B, у которых хоть для одного i выполнено $b_{ii} = -1$. Заметим, что мы всегда в этом случае можем предполагать, что таких индексов i не меньше трех (иначе с самого начала заменим A на $-A$ и произведем соответствующую перестановку строк и столбцов, чтобы выполнялось (2)). Поэтому без ограничения общности мы будем пользоваться этим допущением.

ЛЕММА 5. Предположим, что в матрице B найдутся две такие строчки с номерами i и k, что $b_{ii} = b_{kk} = -1$, и столбец с номером j такой, что $b_{ij} = -b_{ik}$, $b_{kj} = -b_{ki}$ (в частности, $b_{ij} \times b_{kj} = 1$). Тогда с точностью до сопряжения матрицей-перестановкой (т.е. одновременной перестановкой каких-то строк и столбцов) матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & a & -a & -\lambda & \lambda & 1 \\ 1/a & 1 & a & \lambda & \lambda & 1 \\ -1/a & 1/a & -1 & -1/a & 1/a & 1 \\ -\lambda & \lambda & -a & -1 & a & 1 \\ \lambda & \lambda & a & 1/a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$a^2+1+2(\lambda+1)a=0, \quad \lambda^2=1. \qquad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что $i=1, j=3, k=2$. Если вернуться к доказательству леммы 3, то это в точности означает рассмотрение пункта под номером II, а он, как мы выяснили из доказательства леммы 3, приводит к варианту (i). Итак, пользуясь перестановкой строк и столбцов, можем добиться, чтобы первые две строки имели вид, указанный в пункте (i). Однако в этом случае будет неудобно пользоваться самой леммой 3, поэтому мы переставим в (i) вторую и третью строки (и столбцы, соответственно) и введем черточки, чтобы не путать обозначения. Итак, отныне мы можем считать, что первые три строки имеют вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\bar{a} & \bar{a} & \bar{c} & -\bar{c} & 1 \\ \cdot & \cdot & -\bar{a} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/\bar{a} & -1/\bar{a} & -1 & \bar{\lambda}\bar{c}/\bar{a} & -\bar{\lambda}\bar{c}/\bar{a} & 1 \end{pmatrix},$$

где $\bar{a}^2+1+2(\bar{\lambda}-1)\bar{a}=0, \quad \bar{\lambda}^2=1.$

Единственный указанный элемент второй строки появился в силу условия (6). Наша задача теперь - восстановить вторую строку, а с ней и все остальные. Для этого необходимо перебрать 18 возможностей, указанных в лемме 3. В любой из них, однако, $b_{12}=a$, следовательно, $a=-\bar{a}$ и должно удовлетворять уравнению (12). Так как, кроме того, выполнено $b_{12}=b_{23}$, то мы попадем в условия леммы 4, что облегчит перебор вариантов. Прежде чем приступить к нему, еще раз выпишем для удобства три первые строки.

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & \bar{c} & -\bar{c} & 1 \\ 1/a & \cdot & a & \cdot & \cdot & 1 \\ -1/a & 1/a & -1 & -\bar{\lambda}\bar{c}/a & +\bar{\lambda}\bar{c}/a & 1 \end{pmatrix}.$$

(i). $\bar{\lambda}=\lambda=1$. Из равенства первых строк заключаем, что $\bar{c}=c$. Значит, три первые строки имеют вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & -1 & -1/a & c/a & -c/a & 1 \\ -1/a & 1/a & -1 & -c/a & c/a & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие (7) при $i=2$, $k=3$ (как и раньше будем называть это условие условием ортогональности):

$$-1-a+1/a-1-1+1=0,$$

что противоречит (I2).

(ii), (iii). Из равенства первых строк найдем, что $c=-a$. Однако это противоречит лемме 4, согласно которой $c=a^2$.

(ix), (xi). $\bar{\lambda}=1$. Сравнение первых строк дает $c=-a$. Тогда из второго определяющего уравнения имеем $x\cdot 2a=1-2a+a^2$. Сравнение с (I2) показывает, что $x=-1$. Теперь легко увидеть, что мы попали в частный случай варианта (i), отвечающий $\lambda=1$ и $c=a$, $c=-a$ для каждой из возможностей соответственно, а этот вариант уже был рассмотрен.

Согласно лемме 4 нам осталось только изучить вариант (iv). Здесь $\bar{\lambda}=-\lambda$, так что выполнено (I5). Теперь выпишем четыре строки. Так как $b_{22}=+1$, то согласно нашему допущению, переставляя, если надо, четвертые и пятые строки и столбцы, можно считать, что $b_{44}=-1$. Сравнение первых строк дает $\bar{c}=c$. Применяя (6), выписываем четыре строки:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & 1 & a & \lambda & \lambda & 1 \\ -1/a & 1/a & -1 & \lambda c/a & -\lambda c/a & 1 \\ 1/c & \lambda & \lambda a/c & -1 & u & 1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 2, примененной к четвертой (и последней) строке, мы должны рассмотреть три возможности:

$$\begin{cases} 1/c+\lambda=0; \\ \lambda a/c+u=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1/c+u=0; \\ \lambda+\lambda a/c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1/c+\lambda a/c=0; \\ \lambda+u=0. \end{cases}$$

Последняя из них невозможна, так как ввиду (I5) $a+\lambda\neq 0$. Оставшиеся две рассмотрим отдельно

I. $1/c+\lambda=0$, $u+\lambda a/c=0 \Rightarrow c=-\lambda$, $u=a$.

Мы получили как раз ту матрицу, которая указана в формулировке леммы (пятая строка восстанавливается однозначно из условия (6), причем $b_{55}=1$ ввиду (I5) и (7)).

2. $1/c+u=0$; $\lambda+\lambda a/c=0 \Rightarrow c=-a$, $u=1/a$.

Матрица опять восстанавливается однозначно, однако нетрудно проверить, что перестановкой первых и третьих столбцов и строк и заменой $a \to 1/a$ она переходит в матрицу, указанную в формулировке леммы.

ЛЕММА 6. Если для некоторого i выполнено $b_{ii}=-1$, то с точностью до сопряжения перестановочной матрицей B имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} -1 & a & -a & -c & c & 1 \\ 1/a & 1 & x & -cx/a & -c & 1 \\ -1/a & 1/x & -1 & 1/a & -1/x & 1 \\ -1/c & -a/cx & a & 1 & 1/x & 1 \\ 1/c & -1/c & -x & x & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{cases} x(a-c)=-1-2a+ac; & (16) \\ 1/x\,(a-c)=-1+2c+ac. & (17) \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что матрица в лемме 5 есть частный случай указанной матрицы при $c=-\lambda$, $x=a$ и переставленными четвертой и пятой строками и столбцом. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что никакая пара строк не удовлетворяет лемме 5. Далее согласно нашему допущению мы можем предположить, что существует такое k, что $b_{kk}=-1$. Переставляя строки и столбцы, мы можем считать, что $i=1$, $k=2$. Теперь опять будем использовать лемму 3. Переставляя еще раз строки и столбцы, мы можем ограничиться только случаями (i) и (vii). Первый из них сразу ведет к лемме 5. Остается только случай (vii).

Как и в предыдущей лемме, удобно переставить вторую и третью строки. Итак, будем считать, что первые три строки имеют вид

$$\begin{pmatrix} -1 & -\bar a & \bar a & \bar c & -\bar c & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1/\bar a & \bar x & -1 & -1/\bar a & -\bar x & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом выполнены уравнения

$$\begin{cases} 1/x\,(\bar a-\bar c)=1-2\bar a-\bar a\bar c; \\ \bar x\,(\bar a-\bar c)=1+2\bar c-\bar a\bar c. \end{cases}$$

Заметим, что из них вытекает $\bar{c} \neq \bar{a}, \bar{x} \neq 1/a$. Первое очевидно, а из предположения $\bar{x} = 1/a$ сразу следует

$$\begin{cases} \bar{a}^2 = 1 - 2\bar{a} \\ -\bar{c} = 2\bar{c}\bar{a} - \bar{a}^2\bar{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}^2 + 2\bar{a} = 1 \ ; \\ \bar{a}^2 - 2\bar{a} = 1 \ , \end{cases}$$

т.е. противоречие.

Далее, если $\bar{c} = -\bar{a}$, то мы попадаем в условие леммы 5 с $i = 1$, $k = 3$, $j = 4$, а если $\bar{x} = -1/\bar{a}$, то в условия этой же леммы с $i = 1$, $k = 3$, $j = 2$. Значит, $\bar{c} \neq \pm \bar{a}, 1/x \neq \pm \bar{a}$. Переходим к рассмотрению вариантов (i)-$(xviii)$ для второй строки. Во всех них $b_{12} = a$, следовательно, $\bar{a} = -a$.

Итак, $\bar{c} \neq \pm a, 1/x \neq \pm a$ и первые три строки имеют вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & \bar{c} & -\bar{c} & 1 \\ 1/a & \cdot & 1/\bar{x} & \cdot & \cdot & 1 \\ -1/a & \bar{x} & -1 & 1/a & -\bar{x} & 1 \end{pmatrix},$$

причем

$$\begin{cases} -1/\bar{x}\,(a + \bar{c}) = 1 + 2a + a\bar{c} \ ; & \text{(I8)} \\ -\bar{x}\,(a + \bar{c}) = 1 + 2\bar{c} + a\bar{c} \ . & \text{(I9)} \end{cases}$$

Благодаря лемме 5 сразу отбрасываются варианты (i) - (iv). Условие $\bar{c} \neq \pm a$ и сравнение первых строк позволяют не рассматривать варианты (v)-(vi), (ix)-(xii), (xv)-$(xviii)$. Условие $\bar{x} \neq 1/a$ отбрасывает вариант (iv) благодаря сравнению вторых строк. Итак, остались варианты (vii), $(viii)$ $(xiii)$, (xiv), которые мы и изучим в отдельности.

(vii). Сравнение первых строк дает $\bar{c} = c$, сравнение вторых приводит к $1/\bar{x} = x$. Таким образом, имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & -1 & x & -1/a & -x & 1 \\ -1/a & 1/x & -1 & 1/a & -1/x & 1 \end{pmatrix}.$$

Применима лемма 5 с $i = 2$, $j = 5$, $k = 3$.

$(viii)$. Сравнение первых строк дает $\bar{c} = -c$, сравнение вторых - $\bar{x} = 1/x$. Из второго определяющего уравнения имеем

$$x(a - c) = 1 + 2c - ac \ , \qquad (20)$$

в то время как из (18) следует

$$-x(a-c)=1+2a-ac\ .$$

Вычитая эти уравнения, находим, что $2x(a-c)=2(c-a)$. Однако $c=-\bar{c}\neq\pm a$, так что получим $x=-1$. Тогда из (20) следует $0=1+a+c-ac$. В то же время из (19) вытекает $1(a-c)=1-2c-ac \Rightarrow 1-a-c-ac=0 \Rightarrow a+c=0$, что невозможно.

$(xiii)$. Сравнение первых строк дает $\bar{c}=c$, сравнение вторых – $\bar{x}=1/x$.

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & c & -c & 1 \\ 1/a & 1 & x & -c & -cx/a & 1 \\ -1/a & 1/x & -1 & 1/a & -1/x & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие ортогональности второй и третьей строк приводит к уравнению

$$-1+x-x-ac+cx^2/a+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a \Rightarrow 1/\bar{x}=\pm a\ ,$$

что невозможно.

(xiv). Сравнение первых строк дает $\bar{c}=-c$, сравнение вторых – $\bar{x}=1/x$. Кроме того, выполнены уравнения (16) и (17). Выпишем все пять строчек:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & -c & c & 1 \\ 1/a & 1 & x & -cx/a & -c & 1 \\ -1/a & 1/x & -1 & 1/a & -1/x & 1 \\ -1/c & -a/cx & a & b_{44} & u & 1 \\ 1/c & -1/c & -x & 1/u & b_{55} & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с нашим соглашением либо $b_{55}=-1$, либо $b_{44}=-1$. Если $b_{55}=-1$, то лемма 2, примененная к пятой строке, дает $u=1/x$ и мы приходим к матрице, описанной в формулировке леммы. Поэтому пусть $b_{55}=1 \Rightarrow b_{44}=-1$. Условия ортогональности пятой и шестой строк дают

$$\begin{cases} 1/c-1/c-x+1/u+2=0 \\ c-c-1/x+u+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ux - 1 = 2u \\ 1 - ux = 2x \end{cases} \Rightarrow u = -x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + \frac{1}{u} + 2 = 0 \Rightarrow u = -1, \ x = 1 .$$

Однако тогда из (I6) и (I7) следует, что $c = a$, т.е. $\bar{c} = a$, что невозможно. Лемма доказана.

Благодаря лемме 6 мы можем теперь заняться случаем, когда $b_{ii} = 1$ для всех i. Он особенно трудный, так как в нашем распоряжении не будет леммы, аналогичной лемме 2, и придется решать довольно большие системы уравнений. Тем не менее, весьма похожий результат, но из значительно более хитроумных соображений получить удается. В первую очередь мы выпишем общий вид матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c & d & 1 \\ 1/a & 1 & x & y & z & 1 \\ 1/b & 1/x & 1 & t & u & 1 \\ 1/c & 1/y & 1/t & 1 & v & 1 \\ 1/d & 1/z & 1/u & 1/v & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и часть уравнений ортогональности (слева указаны номера, соответствующие числам i и k в (7)):

(I; 6): $a + b + c + d + 2 = 0;$ (2I)

(6; I): $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 2 = 0;$ (22)

(2; 6): $\frac{1}{a} + x + y + z + 2 = 0;$ (23)

(I; 2): $2a + \frac{b}{x} + \frac{c}{y} + \frac{d}{z} + 1 = 0;$ (24)

(2; I): $\frac{2}{a} + \frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{d} + 1 = 0.$ (25)

Остальные уравнения мы пока выписывать не будем, зато будем пользоваться следующим принципом симметрии: если получено какое-либо уравнение, то справедливо также уравнение, которое получается заменой переменных, отвечающей любой одновременной **перестановке** столбцов и строк (разумеется, принцип справедлив, только если все сделанные допущения выдерживают соответствующую замену). Например, если мы получим уравнение $2a + bx = 0$, то перестановка (2,3), отвечающая перестановке вторых и третьих строк и столбцов, дает $2b + a\frac{1}{x} = 0$, так как при этой перестановке $a \leftrightarrow b$, $x \leftrightarrow \frac{1}{x}$. Использование принципа симметрии существенно сократит нашу работу.

Второй принцип - принцип обращения: если получено какое-либо уравнение, то справедливо также уравнение, в котором все переменные заменены на обратные (ср. (25) и (24), (21) и (22)). Справедливость этого принципа вытекает из его справедливости для исходных уравнений ортогональности.

ЛЕММА 7. Если в i-й строке матрицы B все элементы b_{ij} ($j = i, 6$) попарно различны, то их можно разбить на две пары взаимно обратных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественно, мы можем предположить, что указанная строка - первая. Итак, все элементы a, b, c, d попарно различны. Покажем вначале, что сумма любых двух из них отлична от нуля. Действительно, пусть, например, $c+d=0$. Тогда из (21) и (22) имеем

$$\begin{cases} a+b+2=0 \\ 1/a+1/b+2=0 \end{cases} \Rightarrow ab=1 \Rightarrow a+\frac{1}{a}+2=0 \Rightarrow a=b=-1,$$

что противоречит нашему допущению. Теперь покажем, что если есть одна пара обратных элементов, то элементы второй пары тоже обратимы. Действительно, допустим, например, что $d=1/c$. Тогда из (21), (22)

$$\begin{cases} a+b+2+c+1/c=0 \\ 1/a+1/b+2+c+1/c=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow ab=1,$$

так как мы показали, что $a+b\neq 0$.

Итак, будем считать, что не только все четыре числа различны, но и что сумма любых двух из них не равна нулю, а произведение отлично от единицы. Отметим, что это допущение симметрично и мы можем пользоваться принципом симметрии. Наша задача - привести это предположение к противоречию.

Из формул (23) и (25) вытекает

$$\frac{r}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+1=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}+x+y+2\right).$$

В соответствии с принципом обращения

$$2a+\frac{b}{x}+\frac{c}{y}+1=d\left(a+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2\right). \qquad (26)$$

Исключая y из этих двух уравнений, получаем:

$$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)(c-d)=\left[\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}+x+2\right)-\left(\frac{2}{a}+\frac{x}{b}+1\right)\right]\times$$
$$\times\left[d\left(a+\frac{1}{x}+2\right)-\left(2a+\frac{b}{x}+1\right)\right]. \qquad (27)$$

Применим принцип симметрии, отвечающий перестановке (4,5), т.е. в нашем случае замене $c \leftrightarrow d$:

$$\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)(d-c)=\left[\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+x+2\right)-\left(\frac{2}{a}+\frac{x}{b}+1\right)\right]\times$$

$$\times\left[c\left(a+\frac{1}{x}+2\right)-\left(2a+\frac{b}{x}+1\right)\right]. \qquad (28)$$

Положим

$$A=\frac{1}{a}+x+2\,; \qquad B=\frac{2}{a}+\frac{x}{b}+1\,;$$

$$C=a+\frac{1}{x}+2\,; \qquad D=2a+\frac{b}{x}+1\,.$$

Тогда из (27), (28) имеем

$$2-\frac{c}{d}-\frac{d}{c}=\left(\frac{1}{d}A-B\right)\left(dC-D\right); \qquad (29)$$

$$2-\frac{c}{d}-\frac{d}{c}=\left(\frac{1}{c}A-B\right)\left(cC-D\right). \qquad (30)$$

Сравнивая (29) и (30), получаем:

$$AC-\frac{1}{d}AD-dBC+BD=AC-\frac{1}{c}AD-cBC+BD,$$

т.е. $(c-d)BC=\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)AD$, а так как $c\neq d$, то

$$AD=cd\,BC \qquad (31)$$

или

$$\left(\frac{1}{a}+x+2\right)\left(2a+\frac{b}{x}+1\right)=cd\left(a+\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{x}{b}+1\right).$$

Раскрывая скобки, находим

$$\left(4+\frac{b}{ax}+\frac{1}{a}+2ax+b+x+4a+\frac{2b}{x}\right)=$$

$$=cd\left(4+\frac{ax}{b}+a+\frac{2}{ax}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}+\frac{4}{a}+\frac{2x}{b}\right).$$

Применение принципа симметрии, отвечающего перестановке (2,3), т.е. замене $x\leftrightarrow\frac{1}{x}$, $a\leftrightarrow b$, дает:

$$\left(4+\frac{ax}{b}+\frac{1}{b}+\frac{2b}{x}+a+\frac{1}{x}+4b+2ax\right)=$$

$$=cd\left(4+\frac{b}{ax}+b+\frac{2x}{b}+\frac{1}{a}+x+\frac{4}{b}+\frac{2}{ax}\right).$$

Вычитая эти два уравнения, получаем, что

$$\frac{1}{x}\left(\frac{b}{a}-1\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+3(a-b)+x\left(1-\frac{a}{b}\right)=$$

$$=cd\left[x\left(\frac{a}{b}-1\right)+(a-b)+3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{b}{a}\right)\right].$$

Так как $a\neq b$, то после сокращения имеем

$$\left(3-\frac{1}{ab}-\frac{x}{b}-\frac{1}{ax}\right)=cd\left(1+\frac{x}{b}+\frac{1}{ax}-\frac{3}{ab}\right). \qquad (32)$$

Складывая (29) и (30), записываем

$$2\left(2-\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)=2AC+2BD-\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{c}\right)AD-(c+d)BC,$$

а с учетом (31) –

$$2\left(2-\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)=2AC+2BD-2(c+d)BC$$

или

$$\left(2-\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)=\left(\frac{1}{a}+x+2\right)\left(a+\frac{1}{x}+2\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{a}+\frac{x}{b}+1\right)\left(2a+\frac{b}{x}+1\right)+(c+d)\left(\frac{2}{a}+\frac{x}{b}+1\right)\left(a+\frac{1}{x}+2\right);$$

$$\left(2-\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)=\left[6+\frac{1}{ax}+ax+2a+\frac{2}{a}+2x+\frac{2}{x}\right]+$$

$$+\left[6+\frac{2b}{ax}+\frac{2ax}{b}+\frac{2}{a}+2a+\frac{x}{b}+\frac{b}{x}\right]+$$

$$+(c+d)\left(4+\frac{2}{ax}+\frac{4}{a}+\frac{ax}{b}+\frac{1}{b}+\frac{2x}{b}+a+\frac{1}{x}\right).$$

В соответствии с принципом симметрии

$$\left(2-\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)=\left[6+\frac{x}{b}+\frac{b}{x}+2b+\frac{2}{b}+\frac{2}{x}+2x\right]+$$

$$+\left[6+\frac{2ax}{b}+\frac{2b}{ax}+2b+\frac{2}{b}+\frac{1}{ax}+ax\right]+$$

$$+(c+d)\left(4+\frac{2x}{b}+\frac{4}{b}+\frac{b}{ax}+\frac{1}{a}+\frac{2}{ax}+b+x\right).$$

Составляя разность двух последних уравнений, получаем:

$$0=4\left(a+\frac{1}{a}\right)-4\left(b+\frac{1}{b}\right)+$$

$$+(c+d)\left[x\left(\frac{a}{b}-1\right)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{b}{a}\right)+3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+a-b\right].$$

Сокращая это уравнение на $a-b$, приходим к

$$0=4-\frac{4}{ab}+(c+d)\left(\frac{x}{b}+\frac{1}{ax}+1-\frac{3}{ab}\right),$$

откуда

$$\frac{x}{b}+\frac{1}{ax}+1-\frac{3}{ab}=\frac{4(1-ab)}{ab(c+d)}$$

(деление возможно, так как $c-d\neq 0$) и

$$3-\left(\frac{x}{b}+\frac{1}{ax}+\frac{1}{ab}\right)=4-\frac{4}{ab}-\frac{4(1-ab)}{ab(c+d)}=$$

$$=\frac{4(ab-1)}{ab(c+d)}(c+d+1).$$

Воспользовавшись уравнением (32), получим:

$$\frac{4(ab-1)(c+d+1)}{ab(c+d)}=\frac{4cd(1-ab)}{ab(c+d)}.$$

Однако

$$ab\neq 1\Longrightarrow\frac{c+d+1}{c+d}=-\frac{cd}{c+d}\Longrightarrow c+d+cd+$$

$$+1=0\Longrightarrow(c+1)(d+1)=0\Longrightarrow \text{либо } d=-1, \text{ либо } c=-1.$$

Тогда, так как $a=-1=b$, получаем равенство, а это противоречие.

ЛЕММА 8. В матрице B ни один элемент не равен (-1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Переставив строки и столбцы, можем считать, что $b_{12}=a=-1$. Тогда из (21) и (22) имеем

$$\begin{cases} b+c+d+1=0;\\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1=0.\end{cases}$$

Следовательно, по лемме I хотя бы еще один элемент в строке равен -1, а сумма двух остальных – нулю. Не теряя общности, мы можем предположить, что $b=-1$, а $d=-c$. Итак, первые две строки имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & c & -c & 1 \\ -1 & 1 & x & y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

Те же рассуждения, но примененные ко второй строке, показывают, что хотя бы один из элементов x, y, z равен -1, а сумма двух других – нулю. Из трех возможных вариантов достаточно рассмотреть только два: $x=-1$ и $y=-1$.

I. $x=-1$, $z=-y$. Условие ортогональности первой и второй строк дает

$$-1-1+\frac{c}{y}+1+\frac{c}{y}+1=0$$

– противоречие.

2. $y=-1$, $z=-x$. Условие ортогональности:

$$\begin{cases} -1-1-\dfrac{1}{x}-c+\dfrac{c}{x}+1=0 \\ -1-1-x-\dfrac{1}{c}+\dfrac{x}{x}+1=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -1-\dfrac{1}{x}-c+\dfrac{c}{x}=0 \\ -1-x-\dfrac{1}{c}+\dfrac{x}{c}=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=1+\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{c}(x-1)=1+x \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2-\frac{1}{x}-x=2+\frac{1}{x}+x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x+\frac{1}{x}=0 \Longrightarrow c=\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=$$

$$=\frac{x^2-2x+1}{-2}=x, \quad x^2=-1.$$

Построим третью строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & x & -x & 1 \\ -1 & 1 & x & -1 & -x & 1 \\ -1 & -x & 1 & u & v & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как есть элемент, равный -1, то либо $u=-1$, $v=x$, либо, наоборот, $v=-1$, $u=x$.

Выпишем уравнение ортогональности второй и третьей строк:

$$1-\frac{1}{x}+x-\frac{1}{u}-\frac{x}{v}+1=0.$$

Если $u=-1$, то $v=x$. Получаем противоречие: $2-\frac{1}{x}+x=0$. Значит, $v=-1$, $u=x \Longrightarrow 2-\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}+x=0$ – все равно противоречие.

ЛЕММА 9. Если в i-й строке два из четырех элементов b_{ij} $(j\neq i,b)$ равны между собой, то они равны произведению двух оставшихся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, можем считать, что требуемая строка – первая, и что $c=d$. Тогда из (21), (22) имеем

$$\begin{cases} a+b+2c+2=0; \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+2=0. \end{cases}$$

По лемме 1 либо $c=-1$, что невозможно ввиду леммы 8, либо $1=\frac{ab}{c}$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 10. Ситуация, описанная в лемме 9, невозможна вообще.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем, естественно, считать, что указанная строка – первая, а в соответствии с предыдущей леммой, что $c=d=ab$.

Тогда (21) запишется как

$$a+b+2ab+2=0. \tag{33}$$

Из формулы (26), полученной без всяких дополнительных предположений, вытекает

$$2a+\frac{b}{x}+1=ab\left(a+\frac{1}{x}+2\right) \tag{34}$$

или

$$\frac{1}{x}(ab-b)=2a+1-a^2b-2ab. \tag{35}$$

В соответствии с принципом обращения

$$x\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{b}\right)=\frac{2}{a}+1-\frac{1}{a^2b}-\frac{2}{ab}$$

или

$$x(a-a^2)=2ab+a^2b-1-2a.$$

Складывая полученное с (35), находим

$$\frac{b}{x}(a-1)+ax(1-a)=0$$

или

$$(a-1)\left(\frac{b}{x}-ax\right)=0 .$$

Возможны два случая:

I) $a=1$. Тогда из (33) $3b+3=0 \Longrightarrow b=-1$, что противоречит лемме 8;

2) $\frac{b}{x}=ax$, т.е.

$$b=ax^2 . \tag{36}$$

Заметим, что это условие симметрично относительно замены $\begin{cases} a \leftrightarrow b; \\ x \leftrightarrow 1/x, \end{cases}$ поэтому можем пользоваться принципом симметрии, согласно которому из (34) вытекает, что

$$2b+ax+1=ab(b+x+2).$$

Составляя разность с (34), имеем

$$2(a-b)+\left(\frac{b}{x}-ax\right)=ab\left[(a-b)-x+\frac{1}{x}\right]\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2(a-b)=ab(a-b)-abx+a^2x ;$$

$$2(a-b)=ab(a-b)-ax(b-a);$$

$$(a-b)(2-ab-ax)=0.$$

Возможны два случая.

2I. $a=b$; тогда из (36) $x^2=1$ и ввиду леммы 8 $x=1$. Из (33) $2+2a+2a^2=0 \Longrightarrow a^3=1$. Из (34), в свою очередь, $2a+a+1=$ $=a^2(a+1+2)$; $3a+1=1+a^2+2a^2$ – противоречие.

22. $2-ab-ax=0$. В силу (36) имеем

$$2-a^2x^2-ax=0 \Longrightarrow (2+ax)(1-ax)=0.$$

Возможны два случая:

22I. $ax=-2$. Тогда из (36) $b=-2x$, а из (34)

$$-\frac{4}{x}-2+1=4\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x}+2\right);$$

$$-\frac{4}{x}-1=-\frac{4}{x}+8 \quad \text{– противоречие.}$$

222. $ax=1$, $x=\frac{1}{a}$. Из (36) имеем $b=x=\frac{1}{a} \Longrightarrow c=ab=1$. Этот случай –

последний, поэтому мы **уже можем уточнить формулировку леммы** 8: два равных числа в одной строке равны единице, а оставшиеся обратны друг другу. Применение этого результата к третьей строке дает следующий вывод: так как $b_{31} = 1/b = 1/x = b_{32}$, то оба эти числа равны единице и, следовательно, все элементы первой строки также равны единице – противоречие.

Итак, нам остался только один случай, когда все элементы в строке разбиваются на пары взаимно обратных. Приведем и его к противоречию.

ЛЕММА II. Не существует матрицы B, у которой $b_{ii}=1$ для всех i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, предположим, что $ab=1, cd=1$. Это предположение симметрично относительно перестановок (2,3) и (4,5). Тогда справедливо все доказательство леммы 7 вплоть до формулы (32), из которой имеем:

$$3-1-ax-\frac{1}{ax} = 1\left(1+ax+\frac{1}{ax}-3\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ax+\frac{1}{ax}-2=0 \Longrightarrow ax=1 \Longrightarrow x=\frac{1}{a}.$$

Теперь во второй строке есть два равных элемента – противоречие с предыдущей леммой.

Таким образом, мы закончили анализ подходящих матриц второго порядка и можем сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА. Если X такая подходящая матрица, что $X^2=\alpha E$, то с точностью до сопряжения мономиальной матрицей и умножения на скаляр, она имеет вид, указанный в формулировке леммы 6.

Цитированная литература

I. Кострикин А.И., Кострикин А.И., Уфнаровский В.А. Ортогональные разложения простых алгебр Ли (тип A_n). – В кн.: Труды Математического ин-та АН СССР, 1981, т.158, с.105 – 120.

Д.И.Юнусова

ПРОДОЛЖЕНИЕ НОРМЫ ГРУППЫ И КОЛЬЦА НА ИХ ГРУППОВОЕ КОЛЬЦО

При рассмотрении групповых колец возникает вопрос: какие дополнительные структуры, заданные на группы и кольца, можно продлить на их групповое кольцо? В работах [1 – 3] изучены вопросы о продолжении топологий группы и кольца на их групповое кольцо. В настоящей статье исследуется продолжение нормы и псевдонормы группы и кольца на их групповое кольцо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа G называется псевдонормированной с помощью неотрицательной действительнозначной псевдонормой, если существует такое отображение $\eta : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$, что

$$\eta(g_1 \cdot g_2) \leq \eta(g_1) \cdot \eta(g_2) \text{ для любых } g_1, g_2 \in G.$$

Пусть A – линейно упорядоченная группа в мультипликативной записи. Рассмотрим полугруппу $A' = A \cup \{0\}$ с операцией

$$a \cdot b = \begin{cases} a \cdot b, & \text{если } a, b \in A; \\ 0, & \text{если } a = 0 \text{ или } b = 0. \end{cases}$$

Продлим на A' имеющийся на A порядок, положив $0 < a$ для любого $a \in A$.

Линейно упорядоченная полугруппа A' называется линейно упорядоченной группой с внешне присоединенным нулем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа G называется нормированной группой с помощью линейно упорядоченной группы A, если задано такое отображение $\eta : G \longrightarrow A$, что

$$\eta(g_1 \cdot g_2) = \eta(g_1)\,\eta(g_2) \text{ для любых } g_1, g_2 \in G.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Кольцо R называется псевдонормированной с помощью неотрицательной действительнозначной псевдонормой, если существует такое отображение $\xi : R \longrightarrow \mathbb{R}^+$, что:

1) $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;

2) $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$;

3) $\xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$*.

---

* Если $\xi(r_1 \cdot r_2) = \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$, то R – нормированное кольцо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Кольцо R называется неархимедово-нормированным с помощью линейно упорядоченной группы A' с внешне присоединенным нулем, если задано такое отображение $\xi : R \longrightarrow A'$, что:

1) $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;

2) $\xi(r_1 + r_2) \leq \max\{\xi(r_1), \xi(r_2)\}$ для любых $r_1, r_2 \in R$;

3) $\xi(r_1 \cdot r_2) = \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$.

ТЕОРЕМА I. Пусть (G, η) – псевдонормированная группа с помощью неотрицательной действительнозначной псевдонормой η, а (R, ξ) – псевдонормированное кольцо с помощью неотрицательной действительнозначной псевдонормой ξ. Если $\xi(1) = \eta(e) = 1$, то существует неотрицательная действительнозначная псевдонорма $\hat{\xi}$ на RG, что $(RG, \hat{\xi})$ – псевдонормированное кольцо, причем $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ и $\hat{\xi}(1 \cdot g) = \eta(g)$ для любых $r \in R$ и $g \in G$, где e – единица группы G, 1 – единица кольца R.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \in RG,$$

где $\alpha_i \in R, h_i \in G$ и $h_i \neq h_j$, если $i \neq j$. Определим отображение $\hat{\xi}$: $RG \longrightarrow R^+$ следующим образом:

$$\hat{\xi}(u) = \sum_{i=1}^{n} \xi(\alpha_i)\, \eta(h_i).$$

Ясно, что $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ и $\hat{\xi}(1 \cdot g) = \eta(g)$ для любых $r \in R, g \in G$.

Проверим другие свойства отображения $\hat{\xi}$.

1. $\hat{\xi}(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. Пусть $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$.

Если $u = 0$, то $\alpha_i = 0$, и, следовательно,

$$\hat{\xi}(u) = \sum_{i=1}^{n} \xi(\alpha_i)\, \eta(h_i) = 0.$$

Если же $u \neq 0$, то существует некоторое $\alpha_i \neq 0$ такое, что

$$\hat{\xi}(u) = \sum_{i=1}^{n} \xi(\alpha_i)\, \eta(h_i) > 0.$$

2. Пусть

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \quad \text{и} \quad v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j.$$

Тогда $\hat{\xi}(u + v) \leq \hat{\xi}(u) + \hat{\xi}(v)$.

Так как

$$\hat{\xi}\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i + \sum_{i=n+1}^{m} 0 h_i\Big) = \hat{\xi}\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i\Big),$$

то можем считать, что

$$u = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i \quad \text{и} \quad v = \sum_{i=1}^{n}\beta_i h_i .$$

Тогда

$$\hat{\xi}(u+v) = \hat{\xi}\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i h_i\Big) = \hat{\xi}\Big(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i) h_i\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\xi(\alpha_i+\beta_i)\eta(h_i) \leq \sum_{i=1}^{n}(\xi(\alpha_i)+\xi(\beta_i))\eta(h_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\xi(\alpha_i)\eta(h_i) + \sum_{i=1}^{n}\xi(\beta_i)\eta(h_i) = \hat{\xi}(u) + \hat{\xi}(v) .$$

3. $\hat{\xi}(uv) \leq \hat{\xi}(u)\cdot\hat{\xi}(v)$ для любых $u, v \in RG$. Пусть

$$u = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i \quad \text{и} \quad v = \sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j .$$

Тогда

$$\hat{\xi}(u\cdot v) = \hat{\xi}\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i \cdot \sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j\Big) = \hat{\xi}\Big(\sum_{h_i g_j = h'_e}\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}\alpha_i\beta_j\Big) h'_e\Big) =$$

$$= \sum_{h_i g_j = h'_e}\xi\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}\alpha_i\beta_j\Big)\eta(h'_e) \leq \sum_{h_i g_j = h'_e}\xi\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)\xi\Big(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\Big)\eta(h'_e) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\xi(\alpha_i)\eta(h_i)\cdot\sum_{j=1}^{m}\xi(\beta_j)\eta(g_j) = \hat{\xi}(u)\cdot\hat{\xi}(v) .$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – линейно упорядоченная группа с внешне присоединенным нулем, G – группа, допускающая такой линейный порядок $\prec$, относительно которого G является правоупорядоченной группой, R – кольцо с единицей, $\eta : G \to A$ и $\xi : R \to A$.

Если (G, η) – нормированная группа с помощью линейно упорядоченной группы $A \setminus \{0\}$, а (R, ξ) – неархимедово-нормированное кольцо с помощью линейно упорядоченной группы A с внешне присоединенным нулем, то существует такое отображение $\hat{\xi}$: $RG \longrightarrow A$, что $(RG, \hat{\xi})$ является неархимедово-нормированным кольцом с помощью линейно упорядоченной группы A с внешне присоединенным нулем. Причем $\hat{\xi}(1 \cdot g) = \eta(g)$ и $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ для $g \in G$ и $r \in R$, где 1 – единица кольца R, e – единица группы G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i \in RG$, где $\alpha_i \in R$, $h_i \in G$ и $h_i \neq h_j$, если $i \neq j$. Определим отображение $\hat{\xi}: RG \longrightarrow A$ следующим образом:

$$\hat{\xi}(u) = max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \mid i = 1, \ldots, t\}.$$

Так как $\xi(1) = 1$ и $\eta(e) = 1$, то $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ и $\hat{\xi}(1 \cdot g) = \eta(g)$ для любых $r \in R, g \in G$. Проверим другие свойства отображения $\hat{\xi}$.

1. $\hat{\xi}(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. Пусть $u = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i$. Если $u = 0$, то $\alpha_i = 0$, и, следовательно,

$$\hat{\xi}(u) = max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \mid i = 1, \ldots, t\} = 0.$$

Если же $u \neq 0$, то существует некоторое $\alpha_i \neq 0$, и, таким образом,

$$\hat{\xi}(u) = max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \mid i = 1, \ldots, t\} > 0.$$

2. Пусть

$$u = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i, \quad v = \sum_{i=1}^{t'} \alpha'_i h'_i.$$

Тогда $\hat{\xi}(u+v) \leq max\{\hat{\xi}(u), \hat{\xi}(v)\}$, причем, если $\{h_i \mid i = 1, \ldots, t\} \cap$ $\cap \{h'_i \mid i = 1, \ldots, t'\} = \phi$, то $\hat{\xi}(u+v) = max\{\hat{\xi}(u), \hat{\xi}(v)\}$.

Так как

$$\hat{\xi}\Big(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i + \sum_{i=t+1}^{t'} 0 \cdot h_i\Big) = max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i), 0 \mid i = 1, \ldots, t\} =$$

$$= max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\} = \hat{\xi}(\sum_{i=1}^{t}\alpha_i h_i),$$

то можем считать, что $t=t'$, $h_i=h'_i$, т.е. $u=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i h_i$ и $v=\sum_{i=1}^{t}\alpha'_i h_i$.

Тогда

$$\hat{\xi}(u+v)=\hat{\xi}(\sum_{i=1}^{t}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{t}\alpha'_i h_i)=\hat{\xi}(\sum_{i=1}^{t}(\alpha_i+\alpha'_i)h_i)=$$

$$= max\{\xi(\alpha_i+\alpha'_i)\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\} \leq$$

$$\leq max\{max\{\xi(\alpha_i),\xi(\alpha'_i)\}\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\} =$$

$$= max\{max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\},$$

$$max\{\xi(\alpha'_i)\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\} = max\{\hat{\xi}(u),\hat{\xi}(v)\}.$$

Пусть теперь $\{h_i \mid i=1,\dots,t\}\cap\{h'_i \mid i=1,\dots,t'\}=\phi$. Тогда $u+v=\sum_{i=1}^{t+t'}\alpha''_i h''_i$, где $\alpha''_i=\alpha_i$ и $h''_i=h_i$, если $i\leq t$, $\alpha''_i=\alpha'_{i-t}$ и $h''_i=h'_{i-t}$, если $t<i\leq t+t'$, причем $h''_i\neq h''_j$ для $i\neq j$ и, значит,

$$\hat{\xi}(u+v)= max\{\xi(\alpha''_i)\eta(h''_i) \mid i=1,\dots,t+t'\}=$$

$$= max\{max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\}, max\{\xi(\alpha'_i)\eta(h'_i) \mid i=1,\dots,t'\}=$$

$$= max\{\hat{\xi}(u),\hat{\xi}(v)\}.$$

3. $\hat{\xi}(u)=\hat{\xi}(-u)$ для любого $u\in RG$. В самом деле, пусть $u=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i h_i$. Так как $\xi(\alpha_i)=\xi(-\alpha_i)$, то

$$\hat{\xi}(u)= max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\}= max\{\xi(-\alpha_i)\eta(h_i) \mid i=1,\dots,t\}=\hat{\xi}(-u).$$

4. Пусть $u, v \in RG$. Если $\hat{\xi}(u) \gneq \hat{\xi}(v)$, то $\hat{\xi}(u+v)=\hat{\xi}(u)$. По свойству 2 $\hat{\xi}(u+v) \leq \max\{\hat{\xi}(u), \hat{\xi}(v)\} = \hat{\xi}(u)$. С другой стороны, $\hat{\xi}(u)=\hat{\xi}(u+v-v) \leq \max\{\hat{\xi}(u+v), \hat{\xi}(-v)\}$. Так как $\hat{\xi}(v) \lneq \hat{\xi}(u)$, то $\hat{\xi}(u) \leq \hat{\xi}(u+v)$. Итак, $\hat{\xi}(u+v)=\hat{\xi}(u)$.

5. $\hat{\xi}(uv) \leq \hat{\xi}(u)\hat{\xi}(v)$ для любых $u, v \in RG$. Если

$$u=\sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i, \quad v=\sum_{j=1}^{s} \beta_j g_j \in RG,$$

то существуют такие элементы $h'_k \in G$, где $k=1,\dots,t'$, что $h'_i \neq h'_j$, если $i \neq j$ и

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j h_i g_j = \sum_{k=1}^{t'} \Big(\sum_{h_i g_j = h'_k} \alpha_i \beta_j \Big) h'_k .$$

Тогда

$$\hat{\xi}(uv) = \max\Big\{\xi\Big(\sum_{h_i g_j = h'_k} \alpha_i \beta_j\Big) \eta(h'_k) \,|\, k=1,\dots,t'\Big\} \leq$$

$$\leq \max\{\max\{\xi(\alpha_i \beta_j)\ \eta(h'_k)\} \,|\, (i,j)$$

- такие, что

$$h_i g_j = h'_k\} \,|\, k=1,\dots,t'\} = \max\{\max\{\xi(\alpha_i)\xi(\beta_j)\eta(h_i)\eta(g_j)\} \,|\, (i,j)$$

- такие, что

$$h_i g_j = h'_k\} \,|\, k=1,\dots,t'\} = \max\{\xi(\alpha_i)\eta(h_i) \,|\, i=1,\dots,t\} \cdot \max\{\xi(\beta_j)\eta(g_j) \,|\, j=1,\dots,s\} = \hat{\xi}(u)\cdot\hat{\xi}(v).$$

6. Если $\hat{\xi}(u_1) \gneq \hat{\xi}(u_2)$ и $\hat{\xi}(u_1 v) = \hat{\xi}(u_1)\hat{\xi}(v)$, то $\hat{\xi}(u_1 v) \gneq \hat{\xi}(u_2 v)$ и $\hat{\xi}(v u_1) \gneq \hat{\xi}(v u_2)$. По свойству 5 $\hat{\xi}(u_2 v) \leq \hat{\xi}(u_2) \times \hat{\xi}(v) \lneq \hat{\xi}(u_1)\hat{\xi}(v) = \hat{\xi}(u_1 v)$. Аналогично проверяется, что $\hat{\xi}(v u_1) \gneq \hat{\xi}(v u_2)$

7. Если $\hat{\xi}(u_1) \gneq \hat{\xi}(u_2)$, $\hat{\xi}(v_1) \gneq \hat{\xi}(v_2)$ и $\hat{\xi}(u_1 v_1) = \hat{\xi}(u_1)\hat{\xi}(v_1)$, то

$\hat{\xi}((u_1+u_2)(v_1+v_2))=\hat{\xi}(u_1+u_2)\hat{\xi}(v_1+v_2)$. Так как по свойству 6 $\hat{\xi}(u_1 v_2)\leq\hat{\xi}(u_1 v_1)$, $\hat{\xi}(u_2 v_1)\lneqq\hat{\xi}(u_1 v_1)$ и $\hat{\xi}(u_2 v_2)\lneqq$ $\lneqq\hat{\xi}(u_1 v_2)$, то $\hat{\xi}(u_1 v_2+u_2 v_1+u_2 v_2)\leq max\{\hat{\xi}(u_1 v_2),\hat{\xi}(u_2 v_1),$ $\hat{\xi}(u_2 v_2)\}\lneqq\hat{\xi}(u_1 v_1)$. Тогда согласно свойству 4

$$\hat{\xi}((u_1+u_2)(v_1+v_2))=\hat{\xi}(u_1 v_1+u_1 v_2+u_2 v_1+u_2 v_2)=$$

$$=\hat{\xi}(u_1 v_1)=\hat{\xi}(u_1)\hat{\xi}(v_1)=\hat{\xi}(u_1+u_2)\cdot\hat{\xi}(v_1+v_2).$$

8. $\hat{\xi}(uv)=\hat{\xi}(u)\cdot\hat{\xi}(v)$ для любых $u,v\in RG$. Пусть

$$u=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i h_i \quad \text{и} \quad v=\sum_{j=1}^{s}\beta_j g_j .$$

Можно считать, что $\alpha_i h_i$ и $\beta_j g_j$ пронумерованы таким образом, что $\hat{\xi}(\alpha_i h_i)\geqslant\hat{\xi}(\alpha_{i+1} h_{i+1})$ и $\hat{\xi}(\beta_j g_j)\geqslant\hat{\xi}(\beta_{j+1} g_{j+1})$. Тогда существуют такие числа t' и s', что $\hat{\xi}(\alpha_i h_i)=\hat{\xi}(\alpha_1 h_1)$ для любого $i\leq t'$; $\hat{\xi}(\alpha_i h_i)\lneqq\hat{\xi}(\alpha_1 h_1)$ для $i>t'$ и $\hat{\xi}(\beta_j g_j)=\hat{\xi}(\beta_1 g_1)$ для любого $j\leq s'$; $\hat{\xi}(\beta_j g_j)\lneqq\hat{\xi}(\beta_1 g_1)$ для $j>s'$. Пусть

$$u'=\sum_{i=1}^{t'}\alpha_i h_i \quad \text{и} \quad v'=\sum_{j=1}^{s'}\beta_j g_j$$

Тогда $\hat{\xi}(u')=\xi(\alpha_1)\eta(h_1)$ и $\hat{\xi}(v')=\xi(\beta_1)\eta(g_1)$.

Поскольку G – правоупорядоченная группа, то можно предположить, что h_i пронумерованы таким образом, что $h_1\prec h_2\prec\ldots\prec h_{t'}$ (где $\prec$ – порядок на группе G). Далее в силу свойств правоупорядоченной группы для любого j имеем $h_1 g_j\prec h_2 g_j\prec\ldots\prec h_{t'} g_j$.
Пусть $h_1 g_{j_1}=min\{h_1 g_j\,|\,j=1,\ldots,s'\}$. (Здесь j_1 определен однозначно, так как, если $h_1 g_{j_1}=h_1 g_{j_2}$, то $g_{j_1}=g_{j_2}$, и, значит, $j_1=j_2$.) Тогда $h_1 g_{j_1}\prec h_i g_j$, если $(i,j)\neq(1,j_1)$, т.е. $h_1 g_{j_1}\neq h_i g_j$, если $(i,j)\neq(1,j_1)$. Тогда в произведении $u'v'$ элемент $\alpha_1\beta_{j_1}h_1 g_{j_1}$ не имеет подобных членов. Поэтому

$$\hat{\xi}(u'v')=\hat{\xi}(\alpha_1\beta_{j_1}h_1 g_{j_1}+\sum_{i,j}\alpha_i'\beta_j' h_i' g_j'),$$

где $\sum\limits_{i,j} \alpha_i' \beta_j' h_i' g_j'$ – оставшаяся сумма после выбора $\alpha_1 \beta_{j_1} h_1 g_{j_1}$. По свойству 2

$$\hat{\xi}(u'v') = \hat{\xi}(\alpha_1 \beta_{j_1} h_1 g_{j_1} + \sum_{i,j} \alpha_i' \beta_j' h_i' g_j') \geqslant$$

$$\geqslant \hat{\xi}(\alpha_1 \beta_{j_1} h_1 g_{j_1}) = \hat{\xi}(\alpha_1 h_1)\hat{\xi}(\beta_{j_1} g_{j_1}) = \hat{\xi}(u')\hat{\xi}(v').$$

Но по свойству 5 $\hat{\xi}(u'v') \leqslant \hat{\xi}(u')\hat{\xi}(v')$. Итак, $\hat{\xi}(u'v') = \hat{\xi}(u')\hat{\xi}(v')$.

Теперь перейдем к элементам

$$u = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i \quad , \quad v = \sum_{j=1}^{s} \beta_j g_j \quad .$$

Пусть

$$u'' = \sum_{i=t'+1}^{t} \alpha_i h_i \quad \text{и} \quad v'' = \sum_{j=s'+1}^{s} \beta_j g_j \quad .$$

Считаем, что $u''=0$ или $v''=0$, если $t'=t$ или $s'=s$ соответственно. Тогда $u = u' + u''$, $v = v' + v''$, причем $\hat{\xi}(u') \not\geqslant \hat{\xi}(u'')$ и $\hat{\xi}(v') \not\geqslant \hat{\xi}(v'')$ по выбору элементов u', v'. Так как $\hat{\xi}(u'v') = \hat{\xi}(u')\hat{\xi}(v')$, то по свойству 7 $\hat{\xi}(uv) = \hat{\xi}(u)\hat{\xi}(v)$. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если (R, ξ) – неархимедово-нормированное кольцо и (G, η) – нормированная группа, то на групповом кольце RG существует неархимедова норма $\hat{\xi}$, продолжающая ξ и η в каждом из следующих случаев:

G-абелева группа без кручения;

G-свободная группа;

G-группа автоморфизмов линейно упорядоченного множества;

G-свободная полинильпотентная группа;

G-RN-группа в смысле Куроша-Черникова;

G-свободная разрешимая группа;

G-группа с инфраинвариантной системой, факторы которой – абелевы группы без кручения;

G-полное прямое произведение упорядочиваемых групп;

G-свободное произведение упорядоченных групп;

G-сплетение упорядочиваемых групп;

G-группа, аппроксимируемая упорядоченными группами.

В самом деле, группа G в каждом из перечисленных случаев допускает линейный порядок, относительно которого G является право-упорядоченной группой (см. [4 - 6]).

Следующий пример показывает, что требование неархимедовости нормы в теореме 2 существенно.

ПРИМЕР. Пусть (R, ξ) - поле действительных чисел с обычной нормой ξ, а (G, η) - циклическая группа без кручения с нормой η определенной таким образом:

$\eta(a^k) = 2^k$, где a - образующая группы G.

Допустим, что норму ξ можно продлить на RG до нормы $\hat{\xi}$. Тогда RG - коммутативное кольцо без делителей нуля. Рассмотрим поле частных $\hat{R}$. Пусть на поле частных $\hat{R}$ определено отображение $\hat{\xi}$:

$$\hat{\xi}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\xi(a)}{\xi(b)} .$$

Проверим следующие свойства $\hat{\xi}$:

1. Если $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, то $\hat{\xi}\left(\frac{a}{b}\right) = \hat{\xi}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$.

2. $\hat{\xi}(a/b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a/b = 0$.

Пусть $a/b = 0$, тогда $a = 0$ и, следовательно, $\hat{\xi}(a/b) = 0$. Если же $a/b \neq 0$, то $a \neq 0$, значит, $\hat{\xi}(a/b) > 0$.

3. $\hat{\xi}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \leq \hat{\xi}\left(\frac{a}{b}\right) + \hat{\xi}\left(\frac{c}{d}\right)$ для любых $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \hat{R}$.

В самом деле,

$$\hat{\xi}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \hat{\xi}\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) = \frac{\xi(ad + bc)}{\xi(bd)} \leq$$

$$\leq \frac{\xi(ad) + \xi(bc)}{\xi(bd)} = \hat{\xi}\left(\frac{a}{b}\right) + \hat{\xi}\left(\frac{c}{d}\right) .$$

4. $\hat{\xi}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \hat{\xi}\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \hat{\xi}\left(\frac{c}{d}\right)$ для любых $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \hat{R}$.

Действительно,

$$\hat{\xi}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \hat{\xi}\left(\frac{ac}{bd}\right) = \frac{\xi(ac)}{\xi(bd)} =$$

$$= \frac{\xi(a)\xi(c)}{\xi(b)\xi(d)} = \hat{\xi}\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \hat{\xi}\left(\frac{c}{d}\right) .$$

Таким образом, мы проверили, что $\hat{R}$ - нормированное поле и, значит, $\hat{R}$ - поле с локально ограниченной топологией. Так как $\hat{R}$

не совпадает с подполем поля комплексных чисел, то мы получили противоречие с теоремой 5 из [7,8].

Автор выражает благодарность В.И.Арнаутову, под руководством которого выполнена работа.

Цитированная литература

I. Арнаутов В.И., Михалев А.В. Пример коммутативной вполне регулярной топологической полугруппы, не допускающей вложений в мультипликативные полугруппы топологических колец. - Вестник МГУ. Сер. Математика, механика, 1981, № 6, с.68 - 70.

2. Арнаутов В.И., Михалев А.В. Продолжение топологий на групповые и полугрупповые кольца. - В кн.: Труды Ленинградской международной топологической конференции. - Л.,23-27 авг.,1982,с.27 - 31.

3. Арнаутов В.И., Михалев А.В. Достаточные условия для продолжения топологий группы и кольца на их групповое кольцо. - Вестник МГУ. Сер. Математика, механика, 1983, № 5, с.25 - 33.

4. Бовди А.А. Групповые кольца. - Ужгород, 1974. - 118 с.

5. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. - М.: Мир, 1972. - 342 с.

6. Кокорин А.И., Копытов В.М. Линейно упорядоченные группы. - М.: Наука, 1972. - 200 с.

7. Мутылин А.Ф. Пример нетривиальной топологизации поля рациональных чисел. Полные локально ограниченные поля. - Известия АН СССР, сер. математическая, 1966, т.30, вып.4, с.873 - 891.

8. Мутылин А.Ф. Исправления к работе "Пример нетривиальной топологизации поля рациональных чисел. Полные локально ограниченные поля". - Известия АН СССР, 1968, т.32, вып.1, с.245 - 246.

УДК 519.48

Бесолов О.К. О многообразиях строго регулярных алгебр, I.- В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 3 - 27.

В работе начато изучение многообразий строго регулярных алгебр - подмногообразий многообразия $\mathcal{Y}$ всех строго регулярных алгебр, рассматриваемых как мультиоператорные алгебры, полученные из обычных алгебр введением дополнительной унарной операции $x \to x'$, связанной тождествами $x = x^2 x'$, $x' = (x')^2 x$.

Дано полное описание всех вполне характеристических идеалов абсолютно свободной строго регулярной алгебры ранга I, которое существенно зависит от выбора основного поля. В качестве приложения получены континуальные семейства бесконечно базируемых многообразий строго регулярных алгебр.

Библиогр. 20 назв.

УДК 519.48+513.8

Ботнару Д.В. Относительные теории кручения категории отделимых локально-выпуклых пространств. - В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 28 - 40.

В категории C_2V - отделимых локально-выпуклых топологических векторных пространств рассматривается связь между относительными теориями кручения и сопряженными парами подкатегорий. Если $(\mathcal{K}, R)$ - сопряженная пара подкатегорий, а $\mathcal{P}$ - пополнение категории C_2V, то указываются необходимые и достаточные условия, чтобы пара $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ образовала относительную теорию кручения категории C_2V; строится биективное соответствие между классом $(\mathcal{K}, R)$ сопряженных пар подкатегорий категории C_2V таких, что $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ - относительная теория кручения, и классом $(\mathcal{K} \cap \mathcal{P}, R \cap \mathcal{P})$ сопряженных пар подкатегорий категории $\mathcal{P}$. Даются примеры.

Библиогр. 21 назв.

УДК 512.552.4

Верников Б.М. О формульных многообразиях ассоциативных колец.- В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 41 - 47.

Класс многообразий ассоциативных колец S назовем формульным, если существует такая формула языка первого порядка $\Phi(x)$ с одной свободной переменной x в сигнатуре решеточных операций объединения и пересечения, что $\Phi(\mathfrak{X})$ истинно для всякого $\mathfrak{X} \in S$ и $\Phi(\mathfrak{M})$ ложно для всякого многообразия ассоциативных колец $\mathfrak{M} \notin S$. Если $S = \{\mathfrak{X}\}$ - формульный класс, то многообразие $\mathfrak{X}$ также называется формульным. Совокупность всех формульных многообразий ассоциативных колец образует счетную подрешетку решетки всех многообразий ассоциативных колец. Описаны атомы решетки формульных многообразий ассоциативных колец и доказана формульность класса всех локально-конечных и класса всех кроссовых многообразий ассоциативных колец.

Библиогр. 8 назв. Ил. 1.

УДК 512.55

Григор Р.С., Рябухин Ю.М. Абсолютно свободная строго регулярная алгебра ранга один. - В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 48 - 60.

Рассматривается класс φ строго регулярных алгебр как многообразие мультиоператорных алгебр, задаваемых одной дополнительной унарной операцией $x \to x'$, связанной с основными операциями алгебр тождествами $x = x^2 x'$, $x' = (x')^2 x$.

В многообразии φ строится абсолютно свободная строго регулярная алгебра $\mathbf{S}_1$ ранга один. При этом указываются несколько способов ее построения. Они позволяют указать некоторый "канонический" базис и соответствующую таблицу умножения базисных элементов алгебры $\mathbf{S}_1$.

Библиогр. 6 назв.

УДК 512.55

Кашу А.И. Отображение кручений и локализаций модулей с помощью функторов. - В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 61 - 75.

Изучается пара сопряженных функторов ${}_R\mathcal{M} \underset{T}{\overset{H}{\rightleftarrows}} {}_S\mathcal{M}$ и соответствующие отображения $\mathcal{I}(R) \underset{\alpha'}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}(S)$ идемпотентных радикалов категорий ${}_R\mathcal{M}$ и ${}_S\mathcal{M}$. Указываются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы α сохраняло кручения, а α' - кокручения. Кроме того, показываются критерии сохранения локализаций функтором H и колокализаций функтором T. Полученные условия являются ослаблениями полноты и точности функторов H и T.

Библиогр. 5 назв.

УДК 512.55

Кирку П.И. Абелевы группы без кручения, допускающие только конечное число локально-компактных групповых топологий. - В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 76 - 89.

Описываются абелевы группы без кручения, допускающие только конечное число локально-компактных групповых топологий. Выясняется строение этих топологий. Устанавливается, что множество всех локально-компактных групповых топологий в указанных группах относительно обычного сравнения топологий является решеткой, изоморфной решетке всех подмножеств конечного множества.

Библиогр. 12 назв.

УДК 519.48

Рябухин Ю.М. Приведенная свобода квазирегулярных алгебр, алгебр и групп. - В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 90 - 112.

Если $\hat{A}$ - приведенно свободная квазирегулярная алгебра со счетным множеством X свободных порождающих, то подалгебра $A = \langle X \rangle$ - приведенно свободная алгебра, подгруппа $G = gr^{\circ}\{X\}$ присоединенной группы $\hat{A}(\circ)$ - приведенно свободная группа с тем же множеством X свободных порождающих, причем алгебры $A, \hat{A}$ и группы $\hat{G}$, $\hat{A}(\circ)$ имеют одинаковые тождества. Доказывается, что если $A, \hat{A}$ - PI-алгебры, то группа G может оказаться абсолютно свободной. Это происходит тогда и только тогда, когда соответствующие многообразия $\mathfrak{M}^*, \mathfrak{M}$ квазирегулярных алгебр и алгебр имеют сложность $\mu \geqslant 2$, т.е. содержат хотя бы одну некоммутативную первичную алгебру.

Библиогр. 8 назв.

УДК 512

Уфнаровский В.А. О подходящих матрицах второго порядка. - В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с. 113 - 136.

Дано описание всех подходящих матриц второго порядка для алгебры Ли A_5. Указан метод решения нелинейных систем уравнений, основанный на принципе симметрии и принципе обращения. Статья дает основу для решения проблемы существования ортогонального разложения алгебры Ли A_5.

Библиогр. I назв.

УДК 519.48

Юнусова Д.И. Продолжение нормы группы и кольца на их групповое кольцо. - В кн.: Алгебры и кольца. - Кишинев: Штиинца, 1986, с.137-146.

Рассматривается вопрос о возможности продолжения нормы и псевдонормы группы и кольца на их групповое кольцо. Показано, что псевдонормы группы и кольца продолжаются на их групповое кольцо всегда, а в случае, когда на кольце норма является неархимедовой, то ее можно продлить на групповое кольцо до нормы для достаточно широкого класса нормированных групп.

Библиогр. 8 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Бесолов О.К. О многообразиях строго регулярных алгебр, I . . 3

Ботнару Д.В. Относительные теории кручения категории отделимых локально-выпуклых пространств 28

Верников Б.М. О формульных многообразиях ассоциативных колец 4I

Григор Р.С., Рябухин Ю.М. Абсолютно свободная строго регулярная алгебра ранга один 48

Кашу А.И. Отображение кручений и локализаций модулей с помощью функторов 6I

Кирку П.И. Абелевы группы без кручения, допускающие только конечное число локально-компактних групповых топологий 76

Рябухин Ю.М. Приведенная свобода квазирегулярных алгебр, алгебр и групп 90

Уфнаровский В.А. О подходящих матрицах второго порядка II3

Юнусова Д.И. Продолжение нормы группы и кольца на их групповое кольцо I37

Рефераты I47

АЛГЕБРЫ И КОЛЬЦА

Математические исследования
вып. 90

Утверждено к изданию
Редакционно-издательским советом АН МССР

Редакторы Л.Н.Носкова, И.И.Владимирова
Художественный редактор И.А.Ростова
Технический редактор Л.И.Жукова
Корректоры Р.А.Биглер, М.М.Рабинович
Оператор-наборщик М.В.Чурбакова

ИБ № 2953

Подписано в печать 26.02.86. АБ 02938. Формат 60х90 I/16. Бумага офсетная № I. Печать ротапринтная. Усл.печ.л. 9,5. Усл.кр.-отт. 9,8. Уч.-изд.л. 8,35. Тираж 650. Заказ 695. Цена I р. 30 к.
Издательство "Штиинца". 277028, Кишинев, ул.Академика Я.С.Гросула, 3

Типография издательства "Штиинца". 277004, Кишинев, ул.Берзарина, 8

1 р. 30 к.

КИШИНЕВ «ШТИИНЦА» 1986