Die Grundlehren der ebenen analytischen oder Coordinatengeometrie

mit vielen Uebungsaufgaben.

Für höhere Lehranstalten, angehende Mathematiker und Techniker.

Von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit 10 Figurentafeln.

Stuttgart.
Verlag der Chr. Belser'schen Buchhandlung.
1852.

Die Grundlehren der ebenen analytischen oder Coordinatengeometrie;

mit vielen Uebungsaufgaben.

Für höhere Lehranstalten, angehende Mathematiker und Techniker.

Von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit Figurentafeln.

Stuttgart.
Verlag der Chr. Belser'schen Buchhandlung.
1852.

Vorwort.

Der Zweck dieses Werkchens ist: dem angehenden Mathematiker und Techniker eine möglichst einfache und elementare, aber streng wissenschaftliche Anleitung zu den Grundlehren der analytischen oder Coordinatengeometrie zu geben, welche nicht blos eine an sich höchst interessante, sondern für das Studium der theoretischen und technischen Mechanik, der Astronomie 2c. 2c. ganz unentbehrliche Wissenschaft ist, und deshalb einen Hauptzweig des gesammten höhern mathematischen Unterrichtes bildet.

Die gewöhnlichen ältern Lehrbücher von Biot, Lacroix, Ohm, 2c. enthalten von den bedeutenden neuern Fortschritten der Wissenschaft fast keine Spur, während sich die großen klassischen Werke von Poncelet, Plücker, Magnus, 2c. zum Studium für Anfänger nicht wohl eignen. Zwischen diesen beiden Klassen von Werken soll das vorliegende gewissermaßen die Mitte halten, und außer den gewöhnlichen Lehren auch das Wesentlichste von den neuern Fortschritten der höhern Geometrie: von den Polen und Polaren, von dem anharmonischen Verhältniß, von der Homographie oder Collineationsverwandtschaft, 2c. 2c. mit Anwendungen, besonders auf die Curven und Flächen des zweiten Grades, darbieten.

Da es nicht zweckmäßig gewesen wäre: die vollständige Kenntniß der höhern Analysis in dem vorliegenden Werkchen bei dem Leser vorauszusetzen, und andererseits doch die wichtigsten Untersuchungen der analytischen Geometrie wenigstens die Grundbegriffe jener Wissenschaft, d. h. die Lehre von den Grenzen veränderlicher Verhältnisse, oder von den abgeleiteten Funktionen als bekannt voraussetzen; so sind die zum Verständniß des Werkchens erforderlichen Grundzüge jener Lehre in einem besondern Anhange näher entwickelt, so daß der Anfänger in dieser Beziehung auf kein Hinderniß stoßen wird, wenn er sich zuvor mit dem Inhalte dieses Anhanges bekannt macht.

Die reine Theorie ist immer durch Beispiele erläutert, und endlich sind viele Uebungsaufgaben hinzugefügt.

Das ganze Werkchen wird aus zwei Theilen bestehen, wovon der vorliegende erste Theil die Geometrie in der Ebene enthält, und der zweite die Geometrie im Raume enthalten wird. — Uebrigens bildet jeder dieser beiden Theile ein für sich bestehendes Ganzes.

Heidelberg, 1852.

Dr. C. H. Schnuse.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Kapitel.

Von den Coordinatensystemen.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Transformation der parallelen oder geradlinigen Coordinaten.

Drittes Kapitel.

Untersuchung der Linien des ersten Grades.

Viertes Kapitel.

Construction verschiedener Gleichungen.

Fünftes Kapitel.

Tangenten im Parallelcoordinatensysteme.

Zwanzigstes Kapitel.
Theorie der Brennpunkte.

Einundzwanzigstes Kapitel.
Symbolische Geometrie.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.
Anharmonisches Verhältniß.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.
Homographie oder Collineationsverwandtschaft.

§.§. Seite.

Vierundzwanzigstes Kapitel.
Homologie.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.
Correlative Figuren.

Sechsundzwanzigstes Kapitel.
Theorie der Transversalen.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.
Construction von Kegelschnitten nach gewissen Bedingungen.

Anhang.

Coordinatengeometrie in der Ebene.

Erstes Kapitel.

Von den Coordinatensystemen.

§. 1.

Paralleles Coordinatensystem.

Wenn man in einer Ebene zwei sich unter irgend einem Winkel durchschneidende gerade Linien X_1X und Y_1Y (Fig. 1), Axen genannt, zieht, so wird die Lage eines beliebigen Punktes M dieser Ebene offenbar vermittelst des Durchschnittes der beiden Parallelen P_1P und Q_1Q zu diesen Axen bestimmt, indem die Lage dieser Parallelen selbst durch ihre Abstände OB, OA von den Axen X_1X, Y_1Y bestimmt wird, und diese Abstände als positiv, oder negativ betrachtet werden, jenachdem sie auf den Halbaxen OY, OX, oder auf den Halbaxen OY_1, OX_1 genommen sind. — Die Abstände (Längen, Strecken) OA, OB, welche die Lage der beiden Parallelen Q_1Q und P_1P bestimmen, und folglich auch die Lage des Punktes M, heißen die Coordinaten dieses Punktes. Man bezeichnet sie gewöhnlich resp. mit x und y, und nennt sie resp. die Abscisse und Ordinate des Punktes M, welchen man auch oft durch (x, y) bezeichnet. — Der Punkt M kann also bei denselben Zahlenwerthen a, b seiner Coordinaten x, y vier verschiedene Lagen M_1, M_2, M_3, M_4 (Fig. 2) haben, jenachdem $x = + a$, $y = + b$; $x = - a$, $y = + b$; $x = - a$, $y = - b$; $x = + a$, $y = - b$ ist. — Die beiden festen Geraden X_1X, Y_1Y heißen die Coordinatenaxen, und zwar die erste die Axe der x oder der Abscissen und die zweite die Axe der y oder der Ordinaten — und endlich heißt der Punkt O, von welchem aus die Coordinaten auf den beiden Axen genommen oder gezählt werden, der Anfangspunkt der Coordinaten.

Wenn man x und y sich stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ ändern läßt, so erhält man offenbar alle Punkte der Ebene.

Im Allgemeinen bilden die Coordinatenaxen einen beliebigen Winkel — und wenn dieser Winkel ein rechter ist, so heißt das Coordinatensystem ein rechtwinkliges oder orthogonales.

§. 2.

Polarcoordinatensystem.

Wenn O (Fig. 3) ein fester Punkt, der Pol genannt, und OX eine feste Axe ist, so kann man offenbar die Lage eines beliebigen Punktes M der Ebene durch die Länge ϱ des Radiusvectors OM und durch den Winkel ϑ bestimmen, welchen dieser Radiusvector mit der Axe OX bildet, indem der Winkel ϑ in dem Sinne von OX gegen OY gezählt wird. Wenn man ϱ sich von o bis ∞ und ϑ in dem Intervalle einer ganzen Umdrehung von 0^0 bis 360^0 stetig ändern läßt; so erhält man alle Punkte der Ebene.

§. 3.

Bipolarsystem.

Man kann die Lage eines Punktes M (Fig. 4) auch durch seine Abstände $OM = u$, $O_1 M = v$ von zwei Polen O, O_1 bestimmen, wobei seine Lage mittelst des Durchschnittes zweier mit den Halbmessern u, v beschriebener Kreise bestimmt wird. Allein dieses Coordinatensystem ist in theoretischer Beziehung nicht so vollkommen, als die beiden vorhergehenden; denn zunächst ist nicht jedes Werthepaar von u und v zulässig, weil die gegenseitige Entfernung OO_1 der beiden Pole kleiner als $u + v$ und größer als $u - v$ seyn muß (wenn $u > v$ gesetzt wird), und wenn diese Bedingung erfüllt wird; so schneiden sich die beiden mit den Halbmessern u, v beschriebenen Kreise in zwei Punkten M und M_1, wodurch eine unangenehme Zweideutigkeit entsteht.

§. 4.

Allgemeines Coordinatensystem.

Es gibt unendlich viele Coordinatensysteme, und im Allgemeinen bestimmt man die Lage eines Punktes in der Ebene vermittelst des Durchschnittes zweier in dieser Ebene beschriebener Linien. Wenn A', A'', A''', . . . (Fig. 5) eine Reihe von Linien derselben Art sind, welche verschiedenen Werthen u', u'', u''', . . . der Veränderlichen u entsprechen, und B', B'', B''', . . . ein zweites System von Linien, welche ebenfalls unter sich von einerlei Art sind und verschiedenen Werthen v', v'', v'''; . . . der Veränderlichen v entsprechen; so wird ein beliebiger Punkt M', M'', M''', . . . der Ebene durch das Linienpaar der Lage nach bestimmt, welches durch diesen Punkt geht, und die besondern Werthe, welche man den Veränderlichen u, v beilegen muß, um diese beiden Linien zu erhalten, heißen die Coordinaten des Punktes.

In dem parallelen Coordinatensysteme (§. 1) sind die Linien A', A'', A''', . . . parallele Gerade zu der festen Axe $Y_1 Y$ und die Linien B', B'', B''', . . . parallele Gerade zu der Axe $X_1 X$, wobei diese Parallelen durch ihre Abstände u oder x, v oder y von der Axe, zu welcher sie parallel sind, bestimmt werden, indem man diese Abstände auf der andern Axe nimmt.

In dem Polarsysteme sind die Linien A', A'', A''', . . . concentrische Kreise, welche aus dem Pole O als Mittelpunkte mit einem veränderlichen Halbmesser u oder ϱ beschrieben sind, und die Linien B', B'', B''', . . . sind gerade Linien, welche von dem Pole ausgehen und verschiedene Winkel ϑ mit OX bilden.

In dem Bipolarsysteme sind beide Reihen von Linien concentrische Kreise, welche aus den beiden Polen beschrieben sind.

§. 5.

Darstellung ebener Linien durch Gleichungen.

Wenn man u den constanten Werth u' beilegt und v sich beliebig ändern läßt, so erhält man die Durchschnittspunkte M', M'', M''', . . . der Linie A' mit den Linien B', B'', B''', . . ., so daß also die Gleichung $u = u'$ die verschiedenen Punkte der Linie A', und mithin diese Linie selbst ausdrückt. Ebenso drückt die Gleichung $v = v'$ die Linie B' aus. In dem geradlinigen Systeme drückt z. B. die Gleichung $y = y'$ eine in dem Abstande y' parallele Gerade $P_1 P$ (Fig. 1) zu der Axe der x aus, und in dem Polarsysteme die Gleichung $\varrho = \varrho'$ eine Kreislinie von dem Halbmesser ϱ'.

Wenn wir jetzt annehmen, daß die beiden Coordinaten u, v durch eine Gleichung:

$$f(u, v) = 0$$

mit einander verbunden sind, so gibt jedes Paar reeller Werthe von u und v, welche dieser Gleichung genügen, einen besondern Punkt der Ebene. Läßt man also u zwischen gewissen Grenzen sich stetig ändern, so geschieht der Gleichung gewöhnlich durch reelle

Werthe von v Genüge, welche ebenfalls stetig aneinander liegen, so daß also die auf diese Weise erhaltenen Punkte der Ebene eine stetige Reihe oder eine Linie bilden. Eine Gleichung mit zwei stetigen Veränderlichen drückt also im Allgemeinen eine ebene Linie aus, welche eine gerade oder krumme (Curve) sein kann.

Umgekehrt: jede ebene Linie kann durch eine Gleichung zwischen zwei stetig veränderlichen Größen ausgedrückt werden. Denn die geometrische Definition einer Linie ist nothwendig eine Relation zwischen gewissen veränderlichen Größen, welche geeignet sind, jeden Punkt dieser Linie zu bestimmen.

Diese Darstellung der Linien durch algebraische Zeichen, wodurch die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der Figuren auf die Untersuchung algebraischer Ausdrücke zurückgeführt wird, rührt von Descartes her, und diese Entdeckung ist von der höchsten Wichtigkeit, weil man die Methoden der Analysis auf die Geometrie anwenden kann, wodurch diese letzte Wissenschaft eine Allgemeinheit bekommt, welche sie zuvor nicht hatte. Die drei Hauptaufgaben der analytischen Geometrie oder Coordinatengeometrie sind folgende:

1) Wenn eine Figur geometrisch definirt ist, ihre Gleichung zu finden.

2) Wenn eine Gleichung gegeben ist, die ihr entsprechende Figur zu construiren.

3) Die Relationen zu finden, welche zwischen den geometrischen Eigenschaften der Figuren und den algebraischen Eigenschaften der Gleichungen stattfinden.

Wir wollen uns nun zunächst mit der ersten Aufgabe beschäftigen.

§. 6.

Bestimmung der Gleichungen der Linien.

Die geometrische Definition einer Linie bestimmt jeden ihrer Punkte und enthält folglich implicite ein gewisses Coordinatensystem. Wenn man dieses System zum Grunde legt, so ergibt sich die Gleichung der Linie unmittelbar.

Beispiel 1. Aus der geometrischen Definition des Kreises: der Kreis ist der geometrische Ort, d. h. die stetige

Folge von Punkten, welche von einem festen Punkte, Mittelpunkt genannt, gleichweit entfernt sind, ergibt sich die Polargleichung desselben sofort, wenn der Mittelpunkt zum Pole genommen wird, und ist $\varrho = r$, wo r den Halbmesser des Kreises bedeutet.

Beispiel 2. Die Ellipse (Fig. 8), Hyperbel (Fig. 9) und Lemniscate (Fig. 9a) sind Linien von solcher Beschaffenheit: daß resp. die Summe, die Differenz und das Produkt aus den Abständen jedes ihrer Punkte M von zwei festen Punkten O, O' eine constante Größe ist.

Das in dieser geometrischen Definition liegende Coordinatensystem ist das bipolare (§. 3), wenn man die beiden festen Punkte zu Polen nimmt. Bezeichnet $2a = AA'$ die constante Summe, oder Differenz und a^2 das constante Produkt, wo bei der Lemniscate $OO' = 2a$ ist; so sind die Gleichungen dieser drei Linien:

Ellipse: $u + v = 2a,$

Hyperbel: $\begin{cases} \text{erster Zweig} & v - u = 2a, \\ \text{zweiter Zweig} & u - v = 2a, \end{cases}$

Lemniscate: $uv = a^2.$

Beispiel 4. Die Parabel ist die Linie, deren Punkte von einem Pole und von einer Geraden, Richtlinie genannt, gleichweit entfernt sind.

In dieser Definition liegt ein Coordinatensystem, wovon bisher noch nicht die Rede gewesen ist, nämlich das eines Poles O (Fig. 6) und einer Richtlinie D, D. Bei Anwendung dieses Coordinatensystemes wird ein Punkt M der Ebene durch seinen Abstand $OM = u$ von dem Pole O und durch seine Entfernung $MQ = v$ von der Richtlinie bestimmt. In diesem Coordinatensysteme ist die Gleichung der Parabel: $u = v$.

Allgemein, die Gleichung der Linie, welche so beschaffen ist: daß für jeden ihrer Punkte seine Entfernung von einem Pole zu seiner Entfernung von einer Richtlinie in einem constanten Verhältnisse m steht, ist $\frac{u}{v} = m$.

Beispiel 4. Wenn man einen Pol O (Fig. 7) und eine Richtlinie D_1 D annimmt, von dem Pole aus eine beliebige Gerade zieht und von dem Punkte C aus, wo sie die Richtlinie schneidet, eine constante Länge CM = a nimmt; so heißt der geometrische Ort der auf diese Weise erhaltenen Punkte eine Conchoide. — Zieht man von dem Pole ein Perpendikel OX auf die Richtlinie, so wird irgend ein Punkt M der Curve bestimmt durch den Winkel ϑ, welchen der Radiusvector OM mit der Axe OX bildet und durch das Stück CM dieses Radiusvectors, welches zwischen der Richtlinie und dem Punkte M liegt. Da die constante Länge a sowohl in der Richtunz CM, als in der entgegengesetzten Richtung CM′ genommen werden kann, so sieht man, daß die Conchoide zwei Zweige hat, deren Gleichung in Polarcoordinaten offenbar folgende ist:

$$\varrho = OC \pm a = \frac{c}{\cos \vartheta} \pm a,$$

wo ON = c gesetzt ist.

§. 7.

Transformation der Coordinaten.

Wir haben weiter oben gesehen: daß die Gleichung einer Curve in dem durch ihre geometrische Definition angedeuteten Coordinatensysteme leicht erhalten wird; allein die allgemeinen Theorien, d. h. die allgemeinen Relationen, welche zwischen den geometrischen Eigenschaften der Figuren und den algebraischen Eigenschaften der Gleichungen stattfinden, beziehen sich in der Regel auf ein gewisses Coordinatensystem, und um diese Theorien auf eine gegebene Curve anwenden zu können, muß man die Gleichung in diesem Coordinatensysteme kennen. Man muß also vorher eine Transformation der Coordinaten vornehmen, deren Zweck ist: Wenn die Gleichung einer Curve in einem gewissen Coordinatensysteme gegeben ist, die Gleichung derselben Curve in einem andern Coordinatensysteme zu finden.

Wenn u, v die ursprünglichen und u′, v′ die neuen Coordinaten eines Punktes bezeichnen, so müssen sich zwischen u, v und u′, v′ zwei Gleichungen finden lassen, welche für alle Punkte der Ebene stattfinden, weil dieser Punkt, also auch u′, v′ bestimmt sind, wenn man u, v kennt. Sucht man also diese Gleichungen und eliminirt die ursprünglichen Coordinaten u, v zwischen ihnen und der gegebenen Gleichung f (u, v) = o der Curve, so erhält man die

Gleichung $f(u', v') = o$ dieser Curve in dem neuen Coordinatensysteme.

1) Uebergang von dem Polarsysteme zu den rechtwinkligen Parallelcoordinatensysteme.

Wenn man den Pol O (Fig. 3) zum Anfangspunkte, die Polarare OX zur Are der x und das Perpendikel OY zur Are der y nimmt; so gibt das rechtwinklige Dreieck MOA die Relationen:

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

woraus folgt:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \tang \vartheta = \frac{y}{x}.$$

Beispiel. Die Gleichung des Kreises, welche im Polarsysteme $\varrho = r$ ist, wird im rechtwinkligen Coordinatensysteme:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

2) Uebergang von dem Bipolarsysteme zu dem Polarsysteme.

Wenn man einen der ursprünglichen Pole, z. B. O (Fig. 8.) zum Pole und die durch beide Pole gehende Gerade OX zur Are nimmt; so hat man folgende Transformationsformeln:

$$u = \varrho, \; v^2 = \varrho^2 + 4c^2 - 4c\varrho \cos \vartheta,$$

wo 2c die Länge O′ O bezeichnet, und wenn man $\frac{c}{a} = e, \; p = \frac{a^2 - c^2}{a}$ setzt; so wird z. B. die Polargleichung der Ellipse:

$$\varrho = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \vartheta} = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \qquad (1)$$

Wenn man bei der Hyperbel OX (Fig. 9) zur Polarare nimmt und $\frac{c}{a} = e, \; p = \frac{c^2 - a^2}{a}$ setzt; so hat man für den

ersten Zweig: $\varrho = \dfrac{p}{1 + e \cos \vartheta}$ (2)

zweiten Zweig: $\varrho = \dfrac{p}{-1 + e \cos \vartheta}$ (3)

In der Ellipse ist $e < 1$ und in der Hyperbel ist $e > 1$.

3) Uebergang von dem Bipolarsysteme zu dem rechtwinkligen Systeme.

Wenn man den Mittelpunkt C (Fig. 8 u. 9) der Verbindungslinie O′O der beiden Pole zum Anfangspunkte, diese Gerade selbst zur Are der x und das in ihrer Mitte errichtete Perpendikel zur Are der y nimmt; so sind die Transformationsformeln:

$$u^2 = y^2 + (c - x)^2$$
$$v^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel werden also in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme:

$$\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a.$$
$$\pm (\sqrt{y^2 + (c - x)^2} - \sqrt{y^2 + (c + x)^2}) = 2a.$$

Wenn man die Wurzelgrößen fortschafft, so gehen beide in die eine Gleichung:

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\, x^2 = a^2\, (a^2 - c^2) \qquad (4)$$

über; allein man kann sie wieder von einander trennen, wenn man bemerkt, daß in der Ellipse $a > c$, aber in der Hyperbel $a < c$ ist. Setzt man daher für die Ellipse $a^2 - c^2 = b^2$ und für die Hyperbel $a^2 - c^2 = - b^2$; so erhält man

für die Ellipse: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (5)

für die Hyperbel: $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (6).

Ebenso erhält man für die Gleichung der Lemniscate:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2\, (y^2 - x^2) = o^4. \qquad (7)$$

4) Uebergang von dem Pol-Richtliniensysteme zu dem Polarsysteme und zu dem rechtwinkligen Systeme.

Wenn man den ursprünglichen Pol O wieder zum Pole und das von demselben auf die Richtlinie gefällte Perpendikel OX (Fig. 6) zur Polaraxe nimmt; so hat man:

$$u = \varrho,\ v = d - \varrho \cos \vartheta,$$

wo d den Abstand des Poles von der Richtlinie bezeichnet.

Die in dem Pol-Richtkiniensysteme durch die Gleichung $\frac{u}{v} = m$ ausgedrückte Linie hat also zur Polargleichung:

$$\varrho = \frac{md}{1 + m \cos \vartheta} \qquad (8)$$

Wenn $m < 1$ ist, so drückt die Gleichung (8) wie (1) eine Ellipse aus. Wenn $m > 1$ ist, so drückt (8) wie (2) den einen Zweig einer Hyperbel aus, deren zweiten Zweig man erhält, wenn man m negativ nimmt. Wenn endlich $m = 1$ ist, so ist die Curve eine Parabel.

Für die allgemeine Gleichung der im Pol-Richtliniensysteme durch $\frac{u}{v} = m$ ausgedrückten Curve erhält man zwischen rechtwinkligen Coordinaten:

$$y^2 + (1 - m^2)\, x^2 - 2dx + d^2 = 0, \qquad (9)$$

wenn man die Richtlinie zur Axe der y und die durch den Pol gehende, darauf senkrechte Gerade zur Axe der x nimmt. Denn die Transformationsformeln sind offenbar:

$$v = x,\ u = \sqrt{(d - x)^2 + y^2}.$$

Jede der Gleichungen (8), (9) drückt also eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel aus, jenachdem $m < 1$, $m = 1$, oder $m > 1$ ist.

Auch der zweite Pol O′ der Ellipse und Hyperbel, sowie die constante Summe, oder Differenz 2a läßt sich leicht finden; denn man braucht nur die auf der Axe der x liegenden Punkte A, A′ zu suchen und $O'A' = OA$ zu nehmen. Diesem zweiten Pole entspricht eine zweite Richtlinie D''_1D', welche dieselbe Curve gibt.

5) Wenn man bei der Conchoide (Fig. 7) die Richtlinie zur Axe der y, das durch den Pol darauf gezogene Perpendikel zur Axe der x und den Durchschnittspunkt N dieser beiden Geraden zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt; so hat man die Transformationsformeln:

$$\cos\vartheta = \frac{c + x}{\varrho},\ \varrho = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$$

worin c den Abstand des Poles von der Richtlinie bezeichnet, und die Gleichung der Curve im rechtwinkligen Coordinatensysteme wird:

$$xy = \pm (c + x)\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (10)$$

§. 8.

Bemerkung über das Polarsystem.

Weiter oben haben wir bemerkt: daß man in diesem Coordinatensysteme den Winkel ϑ nur innerhalb einer ganzen Umdrehung, etwa von $-\pi$ bis $+\pi$, sich ändern zu lassen braucht, um alle Punkte der Ebene zu erhalten; gleichwohl ist es oft zweckmäßig, denselben diese Grenzen überschreiten zu lassen, z. B. bei der Archimedischen Spirale (Fig. 10), welche entsteht, wenn sich eine Gerade um einen festen Punkt O drehet und auf derselben ein anfangs in O liegender Punkt so fortrückt, daß die von demselben durchlaufenen Längen den von der Geraden beschriebenen Winkeln proportional sind. Diese Curve besteht aus einer Reihe von

Windungen OB, BAB', ... Wenn man den festen Punkt zum Pole und die anfängliche Lage der Geraden zur Polaraxe nimmt; so wird der Theil OB durch die Gleichung $\varrho = a\vartheta$ ausgedrückt, indem sich ϑ von 0 bis π ändert, und die successiven Windungen BAB', ... durch ebensoviele verschiedene Gleichungen $\varrho = a(\vartheta + 2\pi)$, . . ., indem sich ϑ von $-\pi$ bis $+\pi$ ändert. Aber wenn man ϑ sich von o bis ∞ ändern läßt, so wird die ganze Curve durch die Gleichung $\varrho = a\vartheta$ ausgedrückt. Wenn man die Lage der Geraden, nachdem sie sich um den Winkel α gedrehet hat, zur Polaraxe genommen hätte, so wäre die Gleichung der Spirale $\varrho = a(\vartheta + \alpha)$, worin sich ϑ von $-\alpha$ bis ∞ ändern muß.

Einen ähnlichen Vortheil bietet die Anwendung negativer Radienvectoren dar. Man erhält z. B. den ersten Hyperbelzweig (Fig. 9), wenn man in der Gleichung:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$$

den Winkel ϑ sich von $-(\pi - \alpha)$ bis $+(\pi - \alpha)$ ändern läßt, und den zweiten Hyperbelzweig, wenn in der Gleichung:

$$\varrho = \frac{p}{-1 + e\cos\vartheta}$$

der Winkel ϑ sich von $-\alpha$ bis $+\alpha$ ändert, wo α den spitzen Winkel bezeichnet, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$ ist. Wenn man aber negative Radienvectoren anwendet, welche in einem den positiven entgegengesetzten Sinne genommen werden; so werden beide Hyperbelzweige durch die eine Gleichung:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$$

ausgedrückt, worin sich ϑ von $-\pi$ bis $+\pi$ ändert. Denn gibt man ϑ einen zwischen $-\pi$ und $-(\pi - \alpha)$ liegenden Werth, welcher mit $-(\pi - \vartheta')$ bezeichnet werde, indem ϑ' zwischen o und α liegt; so ist OM' die entsprechende Richtung des Radiusvectors, und:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos(\pi - \vartheta')} = -\frac{p}{-1 + e\cos\vartheta'}.$$

Es muß also der absolute Werth von:

$$\frac{p}{-1 + e\cos\vartheta'}$$

in entgegengesetztem Sinne, d. h. auf OM_1 genommen werden, und da OM_1 mit OX den Winkel ϑ' bildet, so ist der Punkt M_1, welcher der Gleichung des zweiten Hyperbelzweiges genügt, ein Punkt dieses Zweiges, so daß man folglich den obern Theil des zweiten Zweiges erhält, und den untern Theil erhält man, wenn man ϑ sich von $\pi - \alpha$ bis π ändern läßt.

§. 9.

Uebungsaufgaben zur Ableitung der Gleichungen der Curven aus ihren geometrischen Definitionen.

1) Es ist ein Kreis O (Fig. 11) und ein fester Durchmesser A_1A gegeben; OB ist ein beweglicher Halbmesser und BT eine Tangente; in dem Punkte T, wo sie den festen Durchmesser schneidet, errichtet man ein Perpendikel, welches den verlängerten Halbmesser OB in M trifft; man soll die Gleichung des geometrischen Ortes des Punktes M finden.

Wenn man den Mittelpunkt O zum Pole und OX zur Polarare nimmt, so ist die gesuchte Gleichung in Polarcoordinaten:

$$\varrho = \frac{r}{\cos^2 \vartheta}$$

und in rechtwinkligen Parallelcoordinaten:

$$x^4 - r^2 (x^2 + y^2) = o,$$

wo r den Halbmesser des Kreises bedeutet.

2) Pascals Schneckenlinie. — Durch einen auf einem gegebenen Kreise liegenden festen Punkt O (Fig. 12) wird eine bewegliche Sehne OC gezogen, auf welcher zu der einen, oder andern Seite des Punktes C eine constante Länge $CM = CM' = a$ genommen wird; man soll die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte M oder M' finden.

Wenn man den Punkt O zum Pole und den Durchmesser OX zur Polarare nimmt, so ist die Polargleichung der Curve:

$$\varrho = 2r \cos \vartheta \pm a.$$

3) Epicycloide. — Es sind zwei gleiche Kreise gegeben (Fig. 13), wovon der eine C festliegt und der andere C_1 über dem ersten ohne Gleiten fortrollt; man soll die Gleichung der Linie finden, welche ein Punkt M des beweglichen Kreises beschreibt.

Betrachtet man den besondern Fall, wo der Punkt M mit dem Berührungspunkte O zusammenfällt, nimmt O zum Pole und OX zur Polarare; so ist die Polargleichung der Curve:

$$\varrho = 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 2r\,(1 - \cos \vartheta),$$

wo r den Halbmesser des Kreises bezeichnet.

4) Cissoide. — Es ist ein Kreis (Fig. 14), ein Durchmesser **OA** und eine Tangente im Endpunkte dieses Durchmessers gegeben; vom Punkte **O** wird eine sich drehende Gerade **OD** gezogen, und auf derselben eine Länge **OM** genommen, welche der zwischen dem Kreise und der festen Tangente liegenden Länge **CD** gleich ist. Man soll die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte **M** finden.

Die Polargleichung der Curve (Cissoide genannt) ist:

$$\varrho = 2r \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} = 2r \sin \vartheta \operatorname{tang} \vartheta,$$

und ihre Orthogonalgleichung:

$$x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0.$$

5) Es sind zwei aufeinander senkrechte Gerade **GX**, **GH** (Fig. 15) und auf einer derselben ein Punkt **I** gegeben. Ein rechtwinkliges Dreieck **IEF** bewegt sich so, daß eine Winkelspitze stets in **I** liegt, die Spitze **E** auf **GH** fortgleitet und die Seite **EF** stets = **GI** ist. Man soll die Gleichung der Linie finden, welche der Mittelpunkt **M** von **EF** beschreibt.

Wenn man die Mitte **O** von **GI** zum Pole und **OX** zur Polarare nimmt, so ist die gesuchte Gleichung:

$$\varrho = 2r \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta},$$

wo **IG** = 2r gesetzt ist. Die Curve ist mithin eine Cissoide.

6) Die beiden Enden einer Geraden von constanter Länge l bewegen sich auf zwei rechtwinkligen Aren **OX**, **OY**; man soll die Gleichung des geometrischen Ortes der Fußpunkte der von **O** auf diese Gerade gefällten Perpendikel finden.

Wenn man **OX**, **OY** zu Coordinatenaren nimmt, so ist die Orthogonalgleichung der Curve:

$$(x^2 + y^2)^3 - l^2x^2y^2 = 0,$$

und ihre Polargleichung:

$$\varrho = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta.$$

7) Wenn die Ordinate des Kreises **AMB** (Fig. 16) so weit verlängert wird, daß sich verhält:

$$PM : AB = MN : AN,$$

so ist die Gleichung des Ortes des Punktes **P**:

$$xy^2 = 4a^2(2a - x),$$

wo **AC** = x, **PN** = y und **AC** = a gesetzt ist.

8) Quadratrix des Dinostratus. — Diese Curve ist der Ort des Durchschnittspunktes P des sich gleichförmig um C drehenden Halbmessers CQ (Fig. 17) eines Kreises und der sich gleichförmig parallel zu sich selbst fortbewegenden Ordinate MN desselben. Die Gleichung dieser Curve ist:

$$y = (x - a) \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right),$$

wo a den Halbmesser des Kreises bedeutet. Sie besteht aus unendlich vielen Zweigen, welche die Axe der x in den Abständen $\pm$ a, $\pm$ 3a, $\pm$ 5a, . . . von C schneiden und zwischen Parallelen zur Axe der y liegen, die von C um die Längen $\pm$ 2a, $\pm$ 4a, $\pm$ 6a, . . . entfernt sind.

9) Cycloide. — So heißt die Curve OMQR (Fig. 18), welche irgend ein Punkt M eines Kreises C beschreibt, der ohne Gleiten auf einer unbegrenzten Geraden (Basis) XX^1 fortrollt, so daß also jeder Bogen MN immer dem Stücke ON der Basis gleich ist. Setzt man $CM = r$, $\angle MCN = \varphi$, $OP = x$ und $PM = y$, so ist offenbar nach der geometrischen Definition der Cycloide:

$$ON = r\varphi,\ PN = MI = r \sin\varphi,\ PM = IN = r\,(1 - \cos\varphi);$$

folglich:

$$x = r\,(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = r\,(1 - \cos\varphi),$$

und um die Orthogonalgleichung der Curve zu erhalten, muß man φ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren. Aus der letzten folgt aber:

$$\cos\varphi = \frac{r - y}{r},\ \sin\varphi = \pm\frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}$$

und wenn man in die erste Gleichung substituirt:

$$x = r \,.\, \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{r - y}{r}\right) \pm \sqrt{2ry - y^2}. \qquad (\mu)$$

Da sich der erzeugende Kreis auf der Basis zur Linken und Rechten des Anfangspunktes O beliebig weit fortbewegen kann, so folgt, daß die Cycloide aus unendlich vielen Bogen wie OMQR besteht, welche auch alle durch die Gleichung (μ) gegeben werden. — Offenbar ist OR dem Umfange und SQ dem Durchmesser des Erzeugungskreises gleich.

Wenn man den höchsten Punkt Q zum Anfangspunkte, QS zur

Axe der x und QV zur Axe der y nimmt, so ist die Orthogonalgleichung der Cycloide:

$$y = r \text{ arc. cos} \left(\frac{r-x}{r}\right) \pm \sqrt{2rx - x^2}. \qquad (\mu')$$

10) Begleiterin der Cycloide. — Diese Curve erhält man, wenn man die Ordinate NQ des Kreises O (Fig. 19) so weit verlängert, daß NP = Bogen CQ wird. Setzt man CO = r, CN = x PN = y und $\angle COQ = \varphi$, so ist:

$$x = r(1 - \cos\varphi),\ y = r\varphi,$$

woraus sich durch Elimination von φ als Orthogonalgleichung ergibt:

$$y = r. \text{arc. cos} \frac{r-x}{r}.$$

11) Trochoide. — Diese Curve entsteht, wenn der beschreibende Punkt M (Fig. 18) nicht in der Peripherie des rollenden Kreises, sondern innerhalb, oder außerhalb desselben liegt. Als ihre Gleichungen findet man leicht:

$$x = r(\varphi - n \sin\varphi),$$
$$y = r(1 - n\cos\varphi),$$

wo n das Verhältniß der Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte des Kreises zu dem Halbmesser desselben bedeutet.

12) Epitrochoide und Hypotrochoide. — Diese Curven entstehen, wenn der bewegliche Kreis C nicht auf einer Geraden, wie bei der Trochoide, sondern auf der äußern, oder innern Seite eines festen Kreises O (Fig. 20 und 21) fortrollt.

Es sei anfangs der Punkt Q mit A in Berührung, P der beschreibende Punkt, R der Halbmesser des festen, r der des beweglichen Kreises, CP = h, OM = x, PM = y, $\angle AOB = \varphi$, also $\angle QCB = \frac{R}{r}.\varphi$; so ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= OH + MH = (R+r)\cos\varphi - h\cos\left(\frac{R+r}{r}.\varphi\right), \\ y &= CH + CK = (R+r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R+r}{r}.\varphi\right). \end{aligned}\right\} \text{(Fig. 20.)}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\varphi + h\cos\left(\frac{R-r}{r}.\varphi\right), \\ y &= (R-r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R-r}{r}.\varphi\right). \end{aligned}\right\} \text{(Fig. 21.)}$$

13) Epicycloide und Hypocycloide. — Diese Curven entstehen, wenn der beschreibende Punkt P im Umfange des rol-

lenden Kreises C liegt; also $h = r$ ist. Um die Gleichungen der in Rede stehenden Curven zu erhalten, braucht man folglich in den vier letzten Gleichungen nur $h = r$ zu setzen, wodurch sich ergibt:

$$x = (R+r)\cos\varphi - r\cos\left(\frac{R+r}{r}.\varphi\right),$$

$$y = (R+r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R+r}{r}.\varphi\right);$$

$$x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\left(\frac{R-r}{r}.\varphi\right),$$

$$y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R-r}{r}.\varphi\right).$$

Wenn $R = r$ ist, so sind die Gleichungen der Epicycloide:

$$x = r\,(2\cos\varphi - \cos 2\varphi),$$

$$y = r\,(2\sin\varphi - \sin 2\varphi),$$

oder:

$$x = r\,[1 + 2\cos\varphi\,(1 - \cos\varphi)],$$

$$y = 2r\sin\varphi\,(1 - \cos\varphi).$$

Erhebt man diese beiden letzten Gleichungen zum Quadrate und addirt, so kommt:

$$x^2 + y^2 = r^2\,[1 + 4\,(1 - \cos\varphi)].$$

Es ist aber auch:

$$(x-r)^2 + y^2 = 4r^2\,(1 - \cos\varphi^2);$$

folglich die Orthogonalgleichung:

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 4r^2\,[(x-r)^2 + y^2].$$

Wenn man in den Gleichungen der Hypotrochoide $h = r$ und $r = \frac{R}{4}$ setzt, so ergibt sich durch Elimination von φ:

$$(r^2 - x^2 - y^2)^3 = 27r^2 x^2 y^2$$

oder:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$$

als Orthogonalgleichung dieser Hypocycloide.

Setzt man in den Gleichungen der Hypotrochoide $r = \frac{R}{2}$, so erhält man:

$$x = \left(\frac{R}{2} + h\right)\cos\varphi,\ y = \left(\frac{R}{2} - h\right)\sin\varphi,$$

folglich:

$$\left(\frac{R}{2} - h\right)^2 x^2 + \left(\frac{R}{2} + h\right)^2 y^2 = \left(\frac{R^2}{4} - h^2\right)^2,$$

d. h. die Gleichung einer Ellipse, deren Axen gleich $\frac{R}{2} + h$, und $\frac{R}{2} - h$ sind.

Wenn $h = \frac{R}{2}$ ist, so geht die Hypotrochoide in eine Gerade über, welche im Durchmesser des festen Kreises ist.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Transformation der parallelen oder geradlinigen Coordinaten.

§. 10.

Wir haben im vorhergehenden Kapitel verschiedene Coordinatensysteme betrachtet, wovon jedes in besondern Fällen eigenthümliche Vortheile darbieten kann; allein das Coordinatensystem, welches zur Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Figuren am besten geeignet ist, scheint das geradlinige oder parallele Coordinatensystem zu seyn. Auch haben wir bereits die Gleichungen von verschiedenen Curven in diesem Coordinatensysteme gefunden, wobei es jedoch eine ganz particuläre Lage in der Figur hatte. Es ist daher von Wichtigkeit: zu zeigen, wie man die Gleichung einer Curve im parallelen Coordinatensysteme erhalten kann, wenn dasselbe eine beliebige Lage in ihrer Ebene hat. Diese Aufgabe ist nur ein besonderer Fall der Transformation der Coordinaten überhaupt, und läßt sich so ausdrücken: Wenn die Gleichung einer Curve in einem Systeme paralleler Coordinaten gegeben ist, ihre Gleichung in einem andern Systeme solcher Coordinaten zu finden — und nach dem weiter oben Gesagten (§. 7) kommt es darauf an: zwischen den Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes der Ebene in dem ursprünglichen Coordinatensysteme und den Coordinaten x′, y′ desselben Punktes in dem neuen Systeme zwei Gleichungen zu finden.

§. 11.

Verlegung des Anfangspunktes.

Wir wollen zunächst den Anfangspunkt der Coordinaten von O nach O′ (Fig. 22) verlegen, ohne die Richtung der Axen zu ändern, so daß die neuen Axen X_1, X', Y_1, Y' zu den ursprünglichen $X_1 X$, $Y_1 Y$ parallel sind, und außerdem wollen wir annehmen: daß die positiven x und x′, sowie die positiven y und y′ in demselben Sinne genommen werden; so wird die Lage der neuen Axen durch die Coordinaten a, b des neuen Anfangspunktes O′ in Beziehung auf die ursprünglichen Axen vollständig bestimmt.

Es sei M ein beliebiger Punkt der Ebene, so kann man auf zwei Wegen von O nach M gelangen; nämlich auf der geraden Linie OM und auf der gebrochenen Linie OO′M. Nach der allgemeinen Theorie der Projectionen sind aber die Projectionen dieser beiden Wege auf die Axe der x, parallel zu der Axe der y, einander gleich. Die Projection von OO′ ist $= a$, die von O′M ist $= x'$ und die von OM ist $= x$; folglich $x = a + x'$. Projicirt man ebenso auf die Axe der y parallel zu der der x, so erhält man $y = b + y'$. Man hat also:

$$\left.\begin{array}{ll} x = a + x', & x' = x - a, \\ y = b + y' & y' = y - b \end{array}\right\} \quad (1)$$

§. 12.

Richtungsveränderung der Axen.

Es seien YOX, Y′OX′ (Fig. 23) resp. das ursprüngliche und das neue Axensystem, OA irgend eine Gerade in ihrer Ebene, von welcher aus die Winkel in einem bestimmten Sinne, etwa von OX gegen OY, gezählt werden, α, β; α, β' resp. die Winkel, welche die Axen OX, OY; OX′, OY′ mit OA bilden und ihre Lage in der Ebene bestimmen, M ein beliebiger Punkt dieser Ebene und MP, MP′ resp. parallel zu den Axen der y und der y′; so führen zwei Wege von O nach M, nämlich OPM und OP′M. Endlich sei OH eine Gerade, welche mit OA einen Winkel λ ubildet, so macht sie mit OX, OY; OX′, OY′ resp. die Winkel $\alpha - \lambda$, $\beta - \lambda$, $\alpha' - \lambda$, $\beta' - \lambda$. Projicirt man nun die beiden Wege OPM und OP′M auf die Gerade OH, so sind ihre Projectionen resp.:

$$x \cos(\alpha - \lambda) + y \cos(\beta - \lambda),$$
$$x' \cos(\alpha' - \lambda) + y' \cos(\beta' - \lambda),$$

und da diese Projectionen einander gleich sind; so hat man die Relation:

$$x \cos(\alpha - \lambda) + y \cos(\beta - \lambda) = x' \cos(\alpha' - \lambda) + y' \cos(\beta' - \lambda).$$

Gibt man jetzt λ successive die Werthe $\beta - \frac{\pi}{2}$, $\alpha - \frac{\pi}{2}$, $\beta' - \frac{\pi}{2}$, $\alpha' - \frac{\pi}{2}$, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{x' \sin(\alpha' - \beta) + y' \sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}, \\
y &= \frac{x' \sin(\alpha' - \alpha) + y' \sin(\beta' - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}, \\
x' &= \frac{x \sin(\alpha - \beta') + y \sin(\beta - \beta')}{\sin(\alpha' - \beta')}, \\
y' &= \frac{x \sin(\alpha - \alpha') + y \sin(\beta - \alpha')}{\sin(\beta' - \alpha')},
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wenn man die Richtung **OA** mit **OX** zusammenfallen läßt, so ist $\alpha = o$, β der Winkel der ursprünglichen Axen, welchen man gewöhnlich mit ϑ bezeichnet, und α', β' sind die Winkel, welche die neuen Axen **OX'**, **OY'** mit **OX** machen, und welche die Lage dieser Axen gegen die ursprünglichen bestimmen. Läßt man endlich der Kürze wegen die Accente von α', β' hinweg, so gehen die Formeln (2) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{x' \sin(\vartheta - \alpha) + y \sin(\vartheta - \beta)}{\sin \vartheta}, \\
y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \vartheta}; \\
x' &= \frac{x \sin \beta + y \sin(\beta - \vartheta)}{\sin(\beta - \alpha)}, \\
y' &= \frac{- x \sin \alpha - y \sin(\alpha - \vartheta)}{\sin(\beta - \alpha)}.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. das ursprüngliche System rechtwinklig ist, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \\
y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta; \\
x' &= \frac{x \sin \beta - y \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}, \\
y' &= \frac{- x \sin \alpha + y \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wenn das neue System rechtwinklig ist, so kann man $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, oder $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$ haben. Im ersten Falle ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\vartheta - \alpha) - y' \cos(\vartheta - \alpha)}{\sin \vartheta}, \\ y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \vartheta}; \\ x' &= x \cos \alpha + y \cos(\vartheta - \alpha), \\ y' &= - x \sin \alpha + y \sin(\vartheta - \alpha), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und für den zweiten Fall braucht man nur $-y'$ für y' zu setzen.

Wenn beide Coordinatensysteme rechtwinklig sind, so kann man wieder $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ setzen, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha; \\ x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= - x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§. 13.

Allgemeine Coordinatenverwandlung.

D. h. wenn sowohl der Anfangspunkt verlegt, als die Richtung der Axen verändert wird. Die Lage des neuen Coordinatensystemes $Y'O'X'$ (Fig. 23 a) bestimmt man durch die Coordinaten a, b des neuen Anfangspunktes O' in Bezug auf die frühern Axen und durch die Winkel α, β, welche die neuen Axen $O'X'$, $O'Y'$ mit der Axe OX bilden. Wenn man durch den Punkt O' zwei Hülfsaxen $O'X_1$, $O'Y_1$ legt, welche resp. zu OX, OY parallel sind, so hat man zwischen den Coordinaten des ersten Systemes und denen des Hülfssystemes die Relationen:

$$\begin{aligned} x &= a + x_1, \\ y &= b + y_1, \end{aligned} \qquad \text{oder:} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x - a, \\ y_1 &= y - b, \end{aligned}$$

und endlich zwischen diesen und denen des neuen Systemes die Relationen des vorhergehenden §., wenn man darin x_1, y_1 resp. für x, y setzt. Man erhält folglich die allgemeinsten Transformationsformeln, wenn man in den Relationen (3), (4), (5) und (6) resp. $x - a$ und $y - b$ für x, y setzt.

§. 14.

Gegenseitige Entfernung zweier Punkte.

Es seien x', y' die Coordinaten des ersten Punktes M' (Fig 24), x'', y'' die des zweiten Punktes M'', D die gesuchte Entfernung und x_1, y_1 die Coordinaten von M'' in Bezug auf zwei durch M' zu den ursprünglichen als rechtwinklig vorausgesetzten Axen parallele Axen; so ist $x_1 = x'' - x'$ und $y_1 = y'' - y'$, und endlich gibt das in P rechtwinklige Dreieck, M'PM'' die Relation:

$$D = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}. \quad (7)$$

Wenn die Axen schiefwinklig sind (Fig. 25), so legt man durch M' zwei Axen, wovon die eine zu der Axe der x parallel und die andere darauf senkrecht ist. Alsdann ist noch:

$$D = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

und man muß die beiden letzten der Transformationsformeln (5) nehmen, worin $\alpha = o$, $x = x'' - x'$, $y = y'' - y'$ ist; folglich:

$$x_1 = (x'' - x') + (y'' - y') \cos \vartheta,$$
$$y_1 = (y'' - y') \sin \vartheta,$$

und endlich:

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y') \cos \vartheta}, \quad (8)$$

was auch unmittelbar aus dem Dreiecke M'P'M'' folgt. Die Formeln (7) und (8) haben allgemeine Gültigkeit, welche Lagen die Punkte M', M'' in der Ebene auch haben mögen; nur muß man nicht unterlassen, ihre Coordinaten mit den gehörigen Zeichen zu nehmen.

In Polarcoordinaten ist die gegenseitige Entfernung zweier Punkte M', M'' (Fig. 26) offenbar:

$$M'M'' = r = \sqrt{\varrho'^2 + \varrho''^2 - 2\varrho'\varrho'' \cos(\vartheta'' - \vartheta')}, \quad (8')$$

wo $OM' = \varrho'$, $OM'' - \varrho''$, Winkel $M'OX = \vartheta$ und Winkel $M''OX = \vartheta'$ gesetzt ist.

§. 15.

Allgemeine Gleichung einer Gattung von Curven.

1) Lemniscaten. — Die Gleichung der Lemniscate in Bezug auf zwei Pole ist $uv = a^2$, worin a eine Constante oder einen Parameter bezeichnet; aber diese Gleichung drückt nicht alle Lemniscaten aus. Denn wenn man a auch verschiedene Zahlenwerthe gibt, so erhält man doch nur die Lemniscaten, welche zwei feste Punkte zu ihren Polen haben. Ferner haben wir gefunden (§. 7), daß die Gleichung der Lemniscate in Beziehung auf zwei auf eine specielle Weise mit der Curve verbundene rechtwinklige Axen O'X', O'Y' (Fig. 27) folgende ist:

$$\left.\begin{array}{l} (x'^2 + y'^2)^2 + 2a^2 (y'^2 - x'^2) = o, \\ \text{oder: } (x'^2 + y'^2 + a^2)^2 - 4ax'^2 - a^4 = o \end{array}\right\} \quad (9)$$

welche **alle** Lemniscaten ausdrückt, wenn man dem Parameter a verschiedene Zahlenwerthe beilegt, die aber **besondere** Lagen in der Ebene haben.

Nun seien OX, OY zwei beliebig in der Ebene der Curve angenommene Axen, welche wir der Einfachheit wegen **rechtwinklig** voraussetzen wollen; so wird die Lage der beweglichen Axen O'X', O'Y' durch die Coordinaten p, q des beweglichen Anfangspunktes O' und durch den veränderlichen Winkel α bestimmt, welchen O'X' mit OX bildet. Setzt man also in der Gleichung (9) für x', y' ihre Werthe:

$$x' = (x - p)\cos\alpha + (y - q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x - p)\sin\alpha + (y - q)\cos\alpha,$$

so erhielt man die Gleichung:

$$[(x-p)^2 + (y-q)^2 + a^2]^2 - 4a^2[(x - p)\cos\alpha + (y-q)\sin\alpha]^2 - a^4 = o, \qquad (10)$$

welche **vier** willkürliche Parameter a, p, q, α enthält, und **alle** Lemniscaten ausdrückt, welche Lage sie in der Ebene auch haben mögen. Diese Gleichung (10) ist folglich die **allgemeine Gleichung der Gattung** der Lemniscatencurven.

Von der Gleichung $uv = a^2$ ausgehend, kann man auch durch eine einzige Operation zu der allgemeinen Gleichung (10) gelangen. Denn wenn p', q' und p'', q'' die Coordinaten der beiden Pole sind und der Ausdruck (7) für die gegenseitige Entfernung zweier Punkte benutzt wird; so erhält man für die allgemeine Gleichung der Lemniscaten:

$$[(x-p')^2+(y-q')^2][(x-p'')^2+(y-q'')^2] - a^4 = o. \quad (11)$$

Diese Gleichung enthält wie (10) **vier** willkürliche Parameter, so daß beide gleichgeltend sind; und in der That läßt sich die eine in die andere transformiren, wenn man zwischen den vier Parametern die folgenden Relationen festsetzt:

$$a = a,\ p = \frac{p'+p''}{2},\ q = \frac{q'+q''}{2},$$

$$\tang\alpha = \frac{q''-q'}{p''-p'},\ a^2 = \frac{1}{4}[(p''-p')^2 + (q''-q')^2].$$

2) **Ellipse, Hyperbel und Parabel.** Die Gleichung $\frac{u}{v} = m$ drückt die Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln aus, welche denselben Pol und dieselbe Richtlinie haben; die Gleichung:

$$y'^2 + (1 - m^2)x'^2 - 2dx' + d^2 = o$$

drückt alle Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln aus, aber nur in besondern Lagen, und endlich führt die Transformation der Coordinaten auf die allgemeine Gleichung:

$$(1 - m^2 \cos^2 \alpha) x^2 + (1 - m^2 \sin^2 \alpha) y^2 + 2m^2 \sin \alpha \cos \alpha xy + \ldots = o \qquad (12)$$

mit fünf willkürlichen Parametern m, d, p, q, α.

Setzt man:

$$\frac{A}{1-m^2\cos^2\alpha} = \frac{B}{2m^2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{C}{1-m^2\sin^2\alpha} = \ldots = \frac{1}{\ldots},$$

so treten an die Stelle der fünf ursprünglichen Parameter die neuen A, B, C, D, E, und die allgemeine Gleichung der Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln nimmt folgende Form an:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1 = o. \qquad (13)$$

Die Relationen:

$$1 - m^2 \cos^2 \alpha = A,$$
$$1 - m^2 \sin^2 \alpha = C,$$
$$2m^2 \sin \alpha \cos \alpha = B,$$

geben:

$$4(1-m^2) = 4AC - B^2,$$

und da in der Gleichung (12) die charakteristischen Merkmale der Ellipse, Parabel und Hyperbel resp. sind:

$$m^2 < 1,\ m^2 = 1 \text{ und } m^2 > 1;$$

so sind dieselben Merkmale in der Gleichung (13) resp.:

$$B^2 - 4AC < o,\ B^2 - 4AC = o \text{ und } B^2 - 4AC > o.$$

3) Kreise. Die Gleichung des Kreises in Beziehung auf rechtwinklige Axen und seinen Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten ist:

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

und die angedeutete Transformation gibt für die allgemeine Gleichung der Kreise:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \qquad (14)$$

welche nur noch drei willkürliche Parameter, nämlich die Coordinaten p, q des Mittelpunktes und den Halbmesser r enthält.

Wenn die Axen schief sind, so muß man die Formeln (5) anwenden, worin resp. $x - p$, $y - q$ für x, y zu setzen ist und ϑ den Winkel der Axen bedeutet, und man erhält:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + 2(x-p)(y-q)\cos\vartheta = r^2,$$

oder entwickelt:

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\vartheta + mx + ny + 1 = o. \qquad (15)$$

Der Kreis wird also allgemein durch eine Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt, worin die Glieder mit x^2, y^2 die Einheit und das Glied mit xy den doppelten Cosinus des Axenwinkels als Coefficienten haben.

Die allgemeine Gleichung einer Curvengattung ist also diejenige, welche sich auf zwei feste Coordinatinatenaxen bezieht und so beschaffen ist: daß sie, wenn man den darin vorkommenden willkürlichen Constanten oder Parametern entsprechende Werthe beilegt, alle Curven der Gattung ausdrücken kann, welche Lage diese in der Ebene auch haben mögen. Gewöhnlich sucht man die Gleichung der Curve erst in Beziehung auf besondere Axen, so daß die Rechnungen möglichst einfach werden — und dann bezieht man die Curve durch eine Coordinatenverwandlung auf beliebige feste Axen.

Die Anzahl μ der in der allgemeinen Gleichung einer Gattung von Curven vorkommenden willkürlichen Parameter ist deshalb wohl zu beachten, weil sie angibt, wieviele Bedingungen zur Bestimmung irgend einer dieser Gattung von Curven erforderlich sind. In der That muß man, um eine particulare Curve zu bestimmen, entweder unmittelbar die Zahlenwerthe der μ willkürlichen Parameter, oder μ Relationen zwischen ihnen geben.

§. 16.

Classification der Linien.

Man unterscheidet die Linien in algebraische und transcendente, jenachdem ihre Gleichungen im parallelen Coordinatensysteme algebraische, oder transcendente sind. Wir werden uns vorzugsweise nur mit algebraischen Curven beschäftigen. Eine algebraische Gleichung kann immer auf eine ganze Form gebracht werden, und es sei:

$$f(x, y) = 0$$

eine solche Gleichung vom m^{ten} Grade. Um die Gleichung derselben Curve in einem andern Systeme paralleler Coordinaten zu erhalten, muß man für x und y die in §. 12 abgeleiteten Werthe setzen, und da diese Werthe in Beziehung auf x, y; x', y' linear und von der Form:

$$x = a + dx' + ey',$$
$$y = b + fx' + gy'$$

sind; so ist die transformirte Gleichung:

$$f(a + dx' + ey', b + fx' + gy') = 0$$

ebenfalls vom m^{ten} Grade, so daß also dieselbe Linie in allen parallelen Coordinatensystemen durch Gleichungen von demselben Grade ausgedrückt wird, was als ein charakteristisches Merkmal der Linie betrachtet werden kann, weshalb man die Linien auch nach dem Grade ihrer Gleichungen in Linien des ersten, zweiten, dritten, . . . Grades klassificirt.

Soll eine Gleichung des m^{ten} Grades wirklich eine Linie des m^{ten} Grades ausdrücken, so darf sich ihr erster Theil nicht in ein Produkt ganzer Factoren von x, y zerlegen lassen. Denn wenn man die Gleichung auf die Form:

$$\varphi\,(x, y)\,.\,\psi\,(x, y) = 0$$

bringen könnte, wo $\varphi\,(x, y)$ vom n^{ten} und $\psi\,(x, y)$ vom $(m-n)^{ten}$ Grade ist; so würde sie zwei Linien $\varphi\,(x, y) = 0$, $\psi\,(x, y) = 0$ resp. von der n^{ten} und $(m-n)^{ten}$ Ordnung ausdrücken.

Wenn $f\,(x, y) = 0$ und $F\,(x, y) = 0$ zwei ganze algebraische Gleichungen resp. vom m^{ten} und vom n^{ten} Grade sind, so erhält man die gemeinschaftlichen Punkte der durch diese Gleichungen ausgedrückten Linien, wenn man sie als zwei simultane Gleichungen mit zwei Unbekannten betrachtet. Wenn man z. B. y eliminirt, so erhält man eine Gleichung mit x, welche höchstens vom $m.n^{ten}$ Grade ist, und deren Wurzeln die Abscissen der Durchschnittspunkte sind. Die beiden Linien schneiden sich also höchstens in m.n Punkten.

Der Grad einer Linie gibt im Allgemeinen an, in wie vielen Punkten sie von einer geraden Linie geschnitten wird; denn wenn man diese Gerade zur Axe der x nimmt, so ist $y = 0$ die Gleichung derselben, und um y zu eliminiren, braucht man in der Gleichung der Curve $f\,(x, y) = 0$ nur $y = 0$ zu setzen, was eine Gleichung mit x gibt, die höchstens vom m^{ten} Grade ist. Eine Linie des m^{ten} Grades kann also von einer geraden Linie höchstens in m Punkten geschnitten werden.

Wenn die durch die Gleichungen $f\,(x, y) = 0$, $F\,(x, y) = 0$ ausgedrückten Linien einen gemeinschaftlichen Zweig haben, so haben die beiden Polynome $f\,(x, y)$, $F\,(x, y)$ einen gemeinschaftlichen Divisor $\varphi\,(x, y)$, und die Gleichung $\varphi\,(x, y) = 0$ drückt den gemeinschaftlichen Curvenzweig aus. Wenn also zwei nicht zerlegbare Gleichungen dieselbe Linie ausdrücken, so müssen sie identisch, d. h. ihre Coefficienten proportional sein.

Drittes Kapitel.

Untersuchung der Linien des ersten Grades.

§. 17.

Construction der Gleichung des ersten Grades.

Die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen x, y ist:

$$Ax + By + C = o, \qquad (1)$$

worin A und B nicht zugleich Null sein können, weil sonst auch $C = o$ wäre. Wenn $A = o$, oder $B = o$ ist, so reducirt sich die Gleichung (1) resp. auf:

$$y = -\frac{C}{B} = b, \text{ oder } x = -\frac{C}{A} = a',$$

und wenn B nicht $= o$ ist; so kann man sie auf die Form:

$$y = ax + b \qquad (2)$$

bringen, wenn man $a = -\frac{A}{B}$ und $b = -\frac{C}{B}$ setzt. Beide Formen werden wir gleichzeitig anwenden.

Die Gleichung $y = b$ drückt offenbar eine Parallele zu der Axe der x und die Gleichung $x = a'$ eine Parallele zur Axe der y aus. Wenn $b = o$ und $a' = o$ wird, so reduciren sich diese Gleichungen auf $y = o$, $x = o$ und drücken resp. die Axe der x und die der y aus.

Wenn in der Gleichung (2) die Größe $b = o$ ist, so reducirt sie sich auf $y = ax$ oder $\frac{y}{x} = a$, d. h. das Verhältniß zwischen der Ordinate und Abscisse jedes Punktes des entsprechenden geometrischen Ortes ist constant und $= a$. Wenn a positiv ist, so haben y und x gleiche Zeichen, und folglich liegen alle Punkte des Ortes in den beiden Winkeln YOX und $Y_1 OX_1$ (Fig. 28). Nimmt man eine beliebige Abscisse OP und zieht durch den Punkt P eine Parallele zur Axe der y, so kann man auf dieser Parallele immer einen Punkt M von solcher Beschaffenheit finden, daß $\frac{MP}{OP} = a$, also M ein Punkt des geometrischen Ortes ist. Construirt man ebenso verschiedene Punkte M′, M″, . . . dieses Ortes, so hat man:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \ldots$$

Die Dreiecke OPM, OP′M′, OP″M″, . . . sind also einander ähnlich, mithin die Winkel MOP, M′OP′, M″OP″, . . . einander gleich, und folglich liegen die Punkte M, M′, M″, . . . alle in derselben durch den Anfangspunkt O gehenden Geraden A_1A, welche folglich durch die Gleichung $y = ax$ ausgedrückt wird, weil man vermittelst derselben immer beliebig viele Punkte dieser Geraden erhalten kann.

Wenn a negativ ist, so haben die Coordinaten y, x entgegengesetzte Zeichen, und folglich liegen alle Punkte des Ortes in den Winkeln Y_1OX, YOX, (Fig. 29). Construirt man verschiedene Punkte M, M′, M″, . . . desselben, wie vorhin, so hat man:

$$\frac{MP}{-OP} = \frac{M'P'}{-OP'} = \frac{-M''P''}{OP''} = \ldots$$

oder:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \ldots$$

und folglich liegen alle Punkte des Ortes in einer durch den Anfangspunkt O gehenden geraden Linie A_1A.

Werden nun die Parallelen PM, P′M′, P″M″, . . . zur Axe der y verlängert, und von den Punkten M, M′, M″, . . . aus in der positiven, oder negativen Richtung, jenachdem b positiv, oder negativ ist, die Längen MN, M′N′, M″N″. . . genommen, deren absoluter Werth dem von b gleich ist; so wird der Ort der Punkte N, N′, N″, . . . durch die Gleichung $y = ax + b$ ausgedrückt. Dieser Ort ist aber eine zu A_1A parallele gerade Linie B_1B, und mithin drückt die Gleichung $y = ax + b$ die Gerade B_1B aus. Jede Gleichung des ersten Grades mit zwei Veränderlichen x, y drückt also eine gerade Linie aus.

§. 18.

Gleichung einer Geraden.

Umgekehrt: die Gleichung jeder geraden Linie ist vom ersten Grade. Denn wenn die Gerade zur Axe der x, oder der y parallel ist, so ist ihre Gleichung resp. $y = b$ oder $x = c$, und wenn sie durch den Anfangspunkt geht und mit keiner der beiden Axen zusammenfällt; so hat sie eine der Lagen A_1A (Fig. 28 u. 29). Alsdann hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{M'P'}{OP'} = \dfrac{-MP''}{-OP''} = \ldots \\ \dfrac{-MP}{OP} = \dfrac{-M'P'}{OP'} = \dfrac{M''P''}{-OP''} = \ldots \end{array}\right\} \text{d. h. } \frac{y}{x} = a,$$

wo a eine Constante ist. Die Gleichung der Geraden ist folglich $y = ax$. Ist die Gerade zu keiner der Axen parallel und geht auch nicht durch den Anfangspunkt, so ist ihre Gleichung:

$$y = ax + b,$$

weil ihre Ordinaten die zu denselben Abscissen gehörigen Ordinaten der durch den Anfangspunkt zu ihr gezogenen Parallelen um dieselbe constante Größe b übertreffen.

Die Gleichung jeder geraden Linie, welche nicht durch den Anfangspunkt geht und zu keiner der Coordinatenaxen parallel ist, hat also die Form:

$$y = ax + b, \qquad (2)$$

oder kann wenigstens immer auf diese Form gebracht werden. Die Constante b ist die Ordinate des Punktes, wo die Gerade die Axe der y schneidet, und wird die Ordinate im Anfangspunkte genannt. Die Constante a hängt blos von der Richtung der Geraden ab, ist für alle parallele Gerade dieselbe — und heißt deshalb der Richtungscoefficient. Denn für die durch den Anfangspunkt gezogene Parallele A_1A (Fig. 28 u. 29) hat man, wenn $\angle AOX = \alpha$ und $\angle YOX = \vartheta$ gesetzt wird:

$$a = \frac{y}{x} = -\frac{MP}{OP} = \frac{\sin MOP}{\sin OMP} = \frac{\sin}{\sin(\vartheta-\alpha)},$$

$$a = \frac{y}{x} = \frac{MP}{-OP} = \frac{\sin MOP}{-\sin OMP} = \frac{\sin\alpha}{-\sin(\alpha-\vartheta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\vartheta-\alpha)}.$$

Es ist also in allen Fällen:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\vartheta-\alpha)}, \qquad (3)$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\vartheta}{1 + a\cos\vartheta} = \frac{-A\sin\vartheta}{B - A\cos\vartheta}. \qquad (4)$$

Wenn die Axen rechtwinklig sind, so wird:

$$\operatorname{tang}\alpha = a = -\frac{A}{B}.$$

Umgekehrt: wenn die Ordinate b im Anfangspunkte und der

Winkel α gegeben ist, welchen die Gerade mit der Axe der x bildet; so ist diese Gerade vollständig bestimmt, und ihre Gleichung in schiefwinkligen Coordinaten:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\vartheta-\alpha)} \, . \, x + b,$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$y = \text{tang}\,\alpha \, . \, x + b.$$

Daß der Ort einer Gleichung des ersten Grades:

$$Ax + By + C = o \text{ oder } y = ax + b \qquad (\mu)$$

eine gerade Linie ist, läßt sich auch wie folgt zeigen: Es seien x', y' und x'', y'' die Coordinaten irgend zweier Punkte dieses Ortes, so müssen sie der Gleichung (μ) genügen, so daß man hat:

$$Ax' + By' + C = o \text{ oder } y' = ax' + b,$$
$$Ax'' + By'' + C = o \text{ oder } y'' = ax'' + b,$$

woraus folgt:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{A}{B} = a.$$

Denkt man sich nun die beiden Punkte (x', y') und (x'', y'') durch eine gerade Linie verbunden, und bezeichnet α den Winkel, welchen sie mit der Axe der x macht; so ist in schiefwinkligen Coordinaten nach dem Obigen:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\vartheta-\alpha)} = -\frac{A}{B} = a,$$

woraus folgt:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a\sin\vartheta}{1 + a\cos\vartheta} = \frac{-A\sin\vartheta}{B - A\cos\vartheta},$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\text{tang}\,\alpha = a = -\frac{A}{B}.$$

Hieraus sieht man: daß die gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte des geometrischen Ortes der Gleichung (1) oder (2) verbindet, einen constanten Winkel mit der Axe der x bildet, und mithin dieser Ort selbst eine gerade Linie sein muß.

§. 19.

Es ist bereits bemerkt: daß die Lage der durch die Gleichung:

$$Ax + By + C = o \text{ oder } y = ax + b$$

ausgedrückten Geraden durch die Constanten $a = -\dfrac{A}{B}$ und $b =$

$-\frac{C}{B}$ bestimmt wird. Man kann aber die Lage dieser Geraden auch dadurch finden: daß man ihre Durchschnittspunkte $(0, y_0)$, $(x_0, 0)$ mit den Coordinatenaxen sucht, indem man in der Gleichung successive $x = 0$ und $y = 0$ setzt, wodurch man

$$y_0 = -\frac{C}{B} = b \text{ und } x_0 = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{a}$$

erhält. Diese Bestimmungsart ist aber nicht mehr anwendbar, wenn die Gleichung die Form hat:

$$Ax + By = 0 \text{ oder } y = ax,$$

weil man $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ erhalten würde, wodurch die Lage der Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, nicht völlig fixirt wird. In diesem Falle wird jedoch die Lage der Geraden durch die Constante $a = -\frac{A}{B}$ allein bestimmt.

§. 20.

Andere Formen der Gleichung einer Geraden.

1) Wenn man x_0, y_0 in die allgemeine Gleichung der Geraden einführt, so bekommt sie folgende Form:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \qquad (5)$$

2) Wenn man in der Gleichung:

$$y = ax + b$$

für a seinen Werth $\tang \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ bei rechtwinkligen Coordinaten setzt, so erhält man:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = b \cos \alpha = p, \qquad (6)$$

wo p das aus dem Anfangspunkte O (Fig. 30) auf die betrachtete Gerade $A_1 A$ gefällte Perpendikel OQ bedeutet.

Diese Form der allgemeinen Gleichung einer Geraden ergibt sich auch sofort durch Coordinatenverwandlung aus der Gleichung $x = p$ der Parallele zur Axe der y, indem man die Axen um den Winkel $-\alpha$ drehet, also $y \cos \alpha - x \sin \alpha$ für x setzt.

3) Wenn man auf der Geraden $A_1 A$ (Fig. 31) einen Punkt M_0 annimmt, so muß man von diesem Punkte aus zwei einander gerade entgegengesetzte Richtungen $M_0 A$ und $M_0 A_1$ unterscheiden, und wenn α, β resp. die Winkel bedeuten, welche $M_0 A$ mit OX, OY bildet, x_0, y_0 die Coordinaten des Punktes M_0, x, y die eines

beliebigen Punktes M von $M_0 A$ und ϱ die Länge $M_0 M$; so ist die Gleichung von $M_0 A$ in rechtwinkeligen Coordinaten.

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \varrho, \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Um die Gleichung von $M_0 A_1$ zu erhalten, müßte man die Zeichen von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ verändern, oder ϱ negativ nehmen. Die Gleichung der ganzen Geraden $A_1 A$ ist also:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta}. \qquad (7)$$

4) Wenn α, β die Winkel bedeuten, welche das aus dem Anfangspunkte O (Fig. 32) auf die betrachtete Gerade $A_1 A$ gefällte Perpendikel $OQ = p$ mit den schiefwinkligen Axen OX, OY bildet, so hat man offenbar:

$$p = x_0 \cos\alpha = y_0 \cos\beta,$$

wo x_0, y_0 resp. die von den Axen der x und der y durch die Gerade $A_1 A$ abgeschnittenen Stücke bezeichnen, und die Gleichung der Geraden $A_1 A$ ist folglich, wenn man die Werthe von x_0, y_0 in die Gleichung (5) setzt:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta = p, \ \alpha + \beta = o. \qquad (8)$$

§. 20.

Allgemeine Gleichung der durch einen Punkt (x′, y′) gehenden Geraden.

Da die Gerade durch den Punkt (x′, y′) geht, so müssen x′ und y′ der Gleichung:

$$Ax + By + C = o \text{ oder } y = ax + b \qquad (1)$$

genügen, so daß man hat:

$$Ax' + By' + C = o \text{ oder } y' = ax' + b \qquad (1')$$

durch welche Relation einer der beiden willkürlichen Parameter, z. B. $b = -\frac{C}{B}$ als Function des andern $a = -\frac{A}{B}$ bestimmt wird, welcher allein willkürlich bleibt. Um den ersten zu eliminiren, braucht man nur (1′) von (1) abzuziehen, wodurch man die Gleichung:

$$A(x - x') + B(y - y') = o \text{ oder } y - y' = a(x - x') \quad (9)$$

erhält, worin blos noch der eine willkürliche Parameter, nämlich der Richtungscoefficient vorkommt, und welche alle durch den Punkt (x′, y′) gehenden Geraden ausdrückt. Dieser Gleichung geschieht in der That durch x = x′ und y = y′ Genüge.

§. 21.

Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt (x', y') geht und mit der Axe der x einen gegebenen Winkel α bildet.

Diese Gleichung ist offenbar in schiefwinkligen Coordinaten:

$$y - y' = \frac{\sin\alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)}(x - x'), \qquad (10)$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} y - y' = \operatorname{tang}\alpha\,(x - x')' \\ \text{oder:} \\ (y - y')\cos\alpha - (x - x')\sin\alpha = o. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Dieses sind offenbar auch die Gleichungen einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt (x', y') geht und zu einer gegebenen Geraden, die mit der Abscissenaxe einen Winkel α bildet, parallel ist.

§. 22.

Gleichung einer durch zwei Punkte (x', y'), (x'', y'') gehenden Geraden.

Soll die durch den Punkt (x', y') gehende Gerade (9) auch durch den Punkt (x'', y'') gehen, so müssen x'', y'' der Gleichung (9) genügen, wenn sie für x, y gesetzt werden, und man hat folglich die Gleichung:

$$A(x'' - x') + B(y'' - y') = o \text{ oder } y'' - y' = a(x'' - x'),$$

und wenn man für $a = -\frac{A}{B}$ den sich aus dieser letzten Gleichung ergebenden Werth $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ in (9) setzt; so erhält man für die verlangte Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} y - y' = \dfrac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'), \\ \text{oder:} \\ (x'' - x')y - (y'' - y')x + x'y'' - x''y' = o. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Wenn einer der gegebenen Punkte, etwa (x', y'), der Anfangspunkt, also $x' = o$, $y' = o$ ist; so reducirt sich die Gleichung (12) auf:

$$y = \frac{y''}{x''}x \text{ oder } x''y - y''x = o.$$

Wenn endlich der eine gegebene Punkt (x', y') auf der Axe der x und der andere auf der Axe der y liegt, also $y' = o$ und $x'' = o$ ist; so wird die Gleichung (12):

$$x'y + y''x - x'y'' = 0,$$

oder:

$$\frac{y}{y''} + \frac{x}{x'} = 1,$$

übereinstimmend mit (5).

Soll die durch die Punkte (x', y), (x'', y'') gehende Gerade auch durch den dritten Punkt (x''', y''') gehen, so müssen seine Coordinaten x''', y''' der Gleichung (12) genügen, und man hat folglich zwischen den Coordinaten dreier in gerader Linie liegender Punkte die Bedingungsgleichung:

$$y''' - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x''' - x'). \qquad (13)$$

§. 23.

Parallelismus und Perpendikularität zweier Geraden.

Sollen zwei Gerade:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \text{ oder } y = ax + b, \\ A'x + B'y + C' = 0 \text{ oder } y = a'x + b' \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

zu einander parallel sein, so muß $a = a'$ oder $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ sein, weil nach dem Obigen (§. 18) in rechtwinkligen Coordinaten

$$\operatorname{tang}\alpha = a = -\frac{A}{B},\ \operatorname{tang}\alpha' = a' = -\frac{A'}{B'},$$

und in schiefwinkligen

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)} = a = -\frac{A}{B},\ \frac{\sin\alpha'}{\sin(\vartheta - \alpha')} = a' = -\frac{A'}{B'}$$

ist. Sollen die beiden Geraden (β) aufeinander senkrecht sein, so muß $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ sein, also:

$$\operatorname{tang}\alpha' = -\operatorname{cotg}\alpha \text{ oder } \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = -1; \qquad (14)$$

folglich ist die gesuchte Bedingungsgleichung bei rechtwinkligen Coordinaten:

$$a . a' = -1, \text{ also: } a' = -\frac{1}{a}, \text{ oder } \frac{A'}{B'} = -\frac{B}{A}, \qquad (15)$$

und in schiefwinkligen Coordinaten ist (§. 18):

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\vartheta}{1 + a\cos\vartheta} = \frac{-A\sin\vartheta}{B - A\cos\vartheta},$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{a'\sin\vartheta}{1 + a'\cos\vartheta} = \frac{-A'\sin\vartheta}{B' - A'\cos\vartheta};$$

mithin die verlangte Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l} (1 + a\cos\vartheta)(1 + a'\cos\vartheta) + aa'\sin^2\vartheta = 0, \\ \text{oder:} \\ (A\cos\vartheta - B)(A'\cos\vartheta - B') + AA'\sin^1\vartheta = 0, \end{array}\right\} \quad (16)$$

oder:

$$A'(A - B\cos\vartheta) + B'(B - A\cos\vartheta) = 0,$$

wo α, α' und ϑ ihre frühere Bedeutung haben (§. 18).

Aus diesen verschiedenen Bedingungen folgt: 1) im rechtwinkligen Systeme, daß:

$$\left.\begin{array}{lcl} Ax + By + C = 0 & \text{oder:} & y = ax + b \\ Ax + By + C' = 0 & & y = ax + b' \end{array}\right\} \quad (18)$$

zwei parallele Gerade, und:

$$\left.\begin{array}{lcl} Ax + By + C = 0 & \text{oder:} & y = ax + b \\ Bx - Ay + C' = 0 & & y = -\dfrac{1}{a}x + b' \end{array}\right\} \quad (19)$$

zwei aufeinander senkrechte Gerade ausdrücken, und wenn die Parallele, oder Senkrechte durch einen gegebenen Punkt (x', y') gehen soll; so sind ihre Gleichungen resp.

$$A(x - x') + B(y - y') = 0 \text{ oder } y - y' = a(x - x'), \quad (20)$$

$$B(x - x') - A(y - y') = 0 \text{ oder } y - y' = -\frac{1}{a}(x - x'). \quad (21)$$

2) In schiefwinkligen Coordinaten bleiben die Gleichungen der Parallele dieselben, und die der durch den Punkt (x', y') gehenden Senkrechten werden:

$$\left.\begin{array}{l} -(B - A\cos\vartheta)(x - x') + (A - B\cos\vartheta)(y - y') = 0, \\ \text{oder:} \\ y - y' = -\dfrac{1 + a\cos\vartheta}{a + \cos\vartheta}(x - x'). \end{array}\right\} \quad (22)$$

§. 24.

Durchschnittspunkt zweier Geraden.

Um die Coordinaten dieses Durchschnittpunktes zu erhalten, braucht man nur x und y aus den Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl} Ax + By + C = 0, & \text{oder:} & y = ax + b \\ A'x + B'y + C' = 0 & & y = a'x + b' \end{array}$$

der beiden Geraden abzuleiten, weil diese Gleichungen für diesen Punkt gleichzeitig erfüllt werden müssen. Man findet leicht:

$$x = \frac{B'C - BC'}{A'B - AB'},\quad y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B'} \quad \text{oder:} \quad \left. \begin{array}{l} x = \dfrac{b' - b}{a - a'}, \\ y = \dfrac{ab' - a'b}{a - a'}. \end{array} \right\} \quad (23)$$

§. 25.

Winkel zweier Geraden.

Es seien:

$$\begin{array}{ll} Ax + By + C = o, & \quad y = ax + b, \\ A'x + B'y + C' = o & \text{oder:} \quad y = a'x + b' \end{array}$$

die Gleichungen der beiden Geraden, und φ, α, α' resp. die Winkel, welche sie unter sich und mit der Axe der x machen; so ist $\varphi = \pm(\alpha' - \alpha)$, folglich:

$$\tan \varphi = \pm \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \tan \alpha.}$$

Nun ist aber (§. 18):

$$\tan \alpha = \frac{a \sin \vartheta}{1 + a \cos \vartheta},\quad \tan \alpha' = \frac{a' \sin \vartheta}{1 + a' \cos \vartheta},$$

und wenn man diese Werthe in den Werth von tang φ substituirt; so erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \tan \varphi = \pm \dfrac{(a' - a) \sin \vartheta}{1 + aa' + (a + a') \cos \vartheta} \\ \qquad\;\; = \pm \dfrac{(AB' - BA') \sin \vartheta}{AA' + BB' - (AB' + BA' \cos \vartheta}. \end{array} \right\} \quad (24)$$

Wenn die Axen rechtwinklig sind, so hat man:

$$\tan \varphi = \pm \frac{a' - a}{1 + aa'} = \pm \frac{AB' - BA'}{AA' + BB'}. \qquad (25)$$

Die beiden gleichen und entgegengesetzten Werthe von tang φ beziehen sich auf die beiden Nebenwinkel, welche die beiden geraden Linien mit einander bilden.

Sollen die beiden Geraden aufeinander senkrecht sein, so muß $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also tang $\varphi = \infty$ sein; folglich in schiefwinkligen Coordinaten:

$$1 + aa' + (a + a') \cos \vartheta = o$$

oder:

$$AA' + BB' - (AB' + BA') \cos \vartheta = o,$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$1 + aa' = 0 \text{ oder } AA' + BB' = 0,$$

übereinstimmend mit §. 23.

§. 26.

Länge des Perpendikels von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade.

Wenn (x_1, y_1) der gegebene Punkt und:

$$Ax + By + C = 0 \text{ oder } y = ax + b \qquad (1)$$

die Gleichung des gegebenen Geraden ist, so ist nach §. 23 die Gleichung des von diesem Punkte auf diese Gerade gefällten Perpendikels in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1 = -\dfrac{1}{a}(x - x_1) \\ \text{oder:} \\ A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0 \end{array}\right\} \qquad (26)$$

und wenn man die Gleichungen (1), (26) als simultane betrachtet; so sind die sich daraus ergebenden Werthe von x, y die Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Geraden. Um aber die Elimination leichter zu bewirken, bringe man die Gleichung (1) auf die Form:

$$\left.\begin{array}{l} A(x-x_1) + B(y-y_1) + Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ \text{oder:} \\ y - y_1 = a(x - x_1) + ax_1 + y_1 + b; \end{array}\right\} \qquad (\mu)$$

alsdann ergibt sich aus (26) und (μ) leicht:

$$x - x_1 = \frac{a(y_1 - ax_1 - b)}{1 + a^2}, \quad y - y_1 = -\frac{y_1 - ax_1 - b}{1 + a^2}, \qquad (27)$$

woraus sich x, y leicht ergeben.

Setzt man nun die Werthe (27) von $x - x_1$ und $y - y_1$ in den allgemeinen Ausdruck der gegenseitigen Entfernung zweier Punkte (x_1, y_1), (x, y), d. h. in:

$$P = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2};$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} P = \pm \dfrac{y_1 - ax_1 - b}{\sqrt{1 + a^2}} \\ \quad = \pm \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \end{array}\right\} \qquad (28)$$

wo das Zeichen so zu nehmen ist, daß P positiv wird.

Wenn die Coordinaten schiefwinklig sind, so ist die Gleichung des Perpendikels:

$$y-y_1=\frac{-1-a\cos\vartheta}{a+\cos\vartheta}(x-x_1), \qquad (29)$$

und wenn man diese Gleichung mit (μ) verbindet; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} x-x_1&=\frac{(a+\cos\vartheta)(y_1-ax_1-b)}{1+a^2+2a\cos\vartheta}, \\ y-y_1&=\frac{-(1+a\cos\vartheta)(y_1-ax_1-b)}{1+a^2+2a\cos\vartheta}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Setzt man diese Werthe von $x-x_1$, $y-y_1$ in den Ausdruck:

$$P=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+2(x-x_1)(y-y_1)\cos\vartheta}$$

der gegenseitigen Entfernung zweier Punkte (x, y), (x_1, y_1) in schiefwinkligen Coordinaten, so erhält man nach verrichteten Reductionen:

$$\left.\begin{aligned} P&=\pm\frac{(y_1-ax_1-b)\sin\vartheta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\vartheta}} \\ &=\pm\frac{(Ax_1+By_1+C)\sin\vartheta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\vartheta}}. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Wenn der Punkt (x_1, y_1) der Anfangspunkt, also $x_1=o$, $y_1=o$ ist, so reduciren sich die Ausdrücke (28) und (31) resp. auf:

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{\pm b}{\sqrt{1+a_2}}=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ P&=\pm\frac{b\sin\vartheta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\vartheta}}=\pm\frac{C\sin\vartheta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\vartheta}}. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

§. 27.

Länge L einer Geraden, welche mit der Axe der x einen Winkel ϑ bildet und von einem gegebenen Punkte (h, k) nach einer Geraden $Ax+By+C=o$ gezogen ist.

Wenn (x,y) der Durchschnittspunkt der beiden Geraden ist, so ist offenbar in rechtwinkligen Coordinaten:

$$x=h+L\cos\vartheta,\ y=k+L\sin\vartheta,$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung $Ax + By + C = o$, welcher sie genügen müssen, substituirt; so erhält man:

$$L\,(A \cos\vartheta + B \sin\vartheta) + Ah + Bk + C = o;$$

folglich:

$$L = \frac{-(C + Ah + Bk)}{A \cos\vartheta + B \sin\vartheta}. \qquad (34)$$

§. 28.

Gleichung einer Geraden, welche mit der Geraden $Ax + By + C = o$ einen gegebenen Winkel φ bildet.

Wenn α' den Winkel bedeutet, welchen die erste und α den, welchen die zweite Gerade mit der Axe der x bildet, so ist $\alpha' = \alpha \pm \varphi$; folglich:

$$\tang \alpha' = \frac{\tang \alpha \pm \tang \varphi}{1 \pm \tang \alpha \tang \varphi} = \frac{-\frac{A}{B} \pm \tang \varphi}{1 \mp \frac{A}{B} \cdot \tang \varphi}$$

$$= \frac{-A \cos\varphi \pm B \sin\varphi}{B \cos\varphi \pm A \sin\varphi}.$$

Nun sei:

$$A'x + B'y + C' = o$$

die verlangte Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten, so wird dieselbe, wenn man den vorhergehenden Werth von $\tang \alpha = -\frac{A'}{B'}$ substituirt:

$$(B \cos\varphi \mp A \sin\varphi)\, y + (A \cos\varphi \mp B \sin\varphi)\, x + C'' = o. \quad (35)$$

Die ähnliche Gleichung in schiefwinkligen Coordinaten zu finden.

§. 29.

Gleichung der Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden $Ax + By + C = o$, $A'x + B'y + C' = o$ geht.

Diese Gleichung ist offenbar:

$$M\,(Ax + By + C) \pm N\,(A'x + B'y + C' = o, \quad (36).$$

wo **M** und **N** willkürliche Parameter sind, und es ist sofort einleuchtend, daß die durch diese letzte Gleichung ausgedrückte Gerade durch den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Geraden geht, weil die letzte Gleichung durch dieselben Werthe von x, y erfüllt wird, welche den gegebenen Gleichungen genügen. Die gesuchte Gleichung enthält eigentlich nur einen willkürlosen Parameter, weil man (36) immer durch M, oder N dividiren kann, ohne ihre Allgemeinheit zu beschränken, so daß die Gleichung von der Form:

$$Ax + By + C \pm \lambda\,(A'x + B'y + C') = o \qquad (36)$$

ist.

§. 30.

Winkel zweier Richtungen.

Wenn α, β und α', β' die Winkel bezeichnen, welche die beiden Richtungen (halben Geraden) mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen bilden, und man denkt sich durch den Anfangspunkt O (Fig. 33) zwei Parallelen zu diesen Geraden gezogen und auf denselben resp. die willkürlichen Längen OM, OM′ genommen; so gibt das Dreieck OMM′:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 - \overline{MM'}^2}{2\,OM\,.\,OM'} = \frac{x^2+y^2+x'^2+y'^2-(x-x')^2-(y-y')^2}{2\,l\,l'}$$

$$= \frac{xx' + yy'}{ll'},$$

wo x, y; x′, y′ resp. die Coordinaten der Punkte M, M′ und l, l′ die Längen OM, OM′ bedeuten. Folglich ist:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\,\cos\alpha' + \cos\beta\,\cos\beta'. \qquad (37)$$

§. 31.

Polargleichung einer Geraden.

Es sei O (Fig. 34) der Pol, OX die Polaraxe, M ein beliebiger Punkt der Geraden AA_1, deren Polargleichung gesucht wird, $OP = a$, Winkel $MOP = \vartheta$, Winkel $MPX = \beta$ und der Radiusvector $OM = \varrho$; so gibt das Dreieck MOP sofort:

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \vartheta)} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\vartheta)},$$

welches die Polargleichung der Geraden AA_1 ist.

Oder man setzt die Werthe $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$ in die Orthogonalgleichung:

$$Ax + By + C = o \text{ oder } y = ax + b$$

der Geraden, wodurch sich ergibt:

$$\varrho = \frac{-C}{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta} \text{ oder } \varrho = \frac{b}{\sin\vartheta - a\cos\vartheta}.$$

Umgekehrt kann man, wenn die Polargleichung einer Geraden gegeben ist, letztere leicht construiren.

Die Lage der Geraden AA_1 wird offenbar schon durch den $\vartheta = o$ entsprechenden Werth $OP = a$ von ϱ und durch den $\varrho = \infty$ entsprechenden Werth $NOP = \beta$ von ϑ vollständig bestimmt.

Wenn OP (Fig. 34a) senkrecht auf AA_1 ist, $\angle POX = \alpha$, $\angle MOX = \vartheta$ und $OP = p$ gesetzt wird; so gibt das rechtwinklige Dreieck MOP:

$$\varrho \cos(\vartheta - \alpha) = p \text{, also: } \varrho = \frac{p}{\cos(\vartheta - \alpha)}$$

als Polargleichung der Geraden AA_1.

§. 32.

Aufgaben und Lehrsätze zur Uebung.

1) Die Fläche F des Dreieckes BPB' (Fig. 35) zu finden, wenn die Gleichungen:

$$y = ax + b,\ y = a'x + b' \qquad (\alpha)$$

der Geraden BP, $B'P$ gegeben sind.

Wenn man OQ senkrecht auf OY zieht, so ist offenbar:

$$2F = BB' . PQ = (OB - OB')\, PQ = (b - b')\, PQ,$$

und da PQ nichts anders ist, als die Abscisse x des gemeinschaftlichen Punktes P der beiden Geraden BP, $B'P$; so muß man x aus den gleichzeitig stattfindenden Gleichungen (α) suchen, wodurch man erhält:

$$x = \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Also ist endlich:

$$F = \tfrac{1}{2} . \frac{(b - b')^2}{a - a'}.$$

2) Die Fläche F eines Dreieckes $PP'P''$ (Fig. 36) zu finden, wenn die Gleichungen:

$$y = ax + b,\ y = a'x + b',\ y = a''x + b''$$

seiner drei Seiten BP, $B'P'$, $B''P''$ gegeben sind.

Verlängert man diese Seiten, bis sie die Axe OY resp. in B, B', B'' schneiden, so ist:

$$F = BPB' + B'P''B'' - BP'B'',$$

und folglich nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$F = \tfrac{1}{2}\left[\frac{(b-b')^2}{a-a'} + \frac{(b'-b'')^2}{a'-a''} + \frac{(b-b'')^2}{a-a''}\right].$$

3) Die Fläche F eines Dreieckes PP'P'' (Fig. 37) durch die Coordinaten x, y; x', y'; x'', y'' seiner Eckpunkte P, P', P'' auszudrücken.

Es ist offenbar:

$$\begin{aligned} F &= PMM'P' + P'M'M''P'' - PMM''P'' \\ &= \tfrac{1}{2}(y'+y)(x'-x) + \tfrac{1}{2}(y''+y')(x''-x') - \tfrac{1}{2}(y''+y)(x''-x) \\ &= \tfrac{1}{2}[(y'+y)(x'-x) + (y''+y')(x''-x') + (y+y'')(x-x'')]. \end{aligned}$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man für den Flächeninhalt F eines beliebigen Vieleckes, dessen Eckpunkte die Coordinaten x, y; x', y'; x'', y'' . . . . x^n, y^n haben, den symmetrischen Ausdruck:

$$\begin{aligned} F = \tfrac{1}{2}[&(y'+y)(x'-x) + (y''+y')(x''-x) + (y'''+y'')(x'''-x'') \\ &+ \ldots + (y+y^n)(x-x^n)]. \end{aligned}$$

Bei dieser Formel ist zu bemerken: daß die Eckpunkte des Vieleckes, wie sie in demselben Sinne aufeinander folgen, numerirt werden müssen. Das Vieleck braucht jedoch nicht in demselben Winkel der Coordinatenaxen zu liegen, sondern diese können dasselbe beliebig durchschneiden, ohne daß die Formel unbrauchbar wird. Denn wenn die Axen das Vieleck nicht durchschneiden und man läßt sie sich parallel zu sich selbst so weit fortbewegen, bis sie das Vieleck durchschneiden; so gehen die Coordinaten x, y; x' y', . . . resp. in x + a, y + b; x' + a, y' + b; . . . über, wodurch aber die Formel nicht verändert wird, weil sich alle Glieder mit a und b gegenseitig aufheben.

Wenn sich die Seiten des Vieleckes durchkreuzen, so wird die Formel unbrauchbar. Aber alsdann kann man die Coordinaten der Durchkreuzungspunkte nach dem Vorhergehenden leicht finden, und die Formel auf die einzelnen Theile des Vieleckes anwenden.

4) Den geometrischen Ort der Punkte zu finden, welche von zwei gegebenen Punkten (x', y'), (x'', y'') gleichweit abstehen.

5) Den geometrischen Ort der Punkte zu finden,

welche von zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden gleichweit entfernt sind.

6) Wenn die Gleichung $y = ax + b$ einer Geraden und außerhalb derselben ein Punkt (x', y') gegeben ist, durch diesen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit der ersten einen gegebenen Winkel bildet.

7) Durch einen Punkt (x', y) eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ gleiche Winkel bildet.

8) Wenn die Gleichungen zweier Geraden folgende sind:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = p$$
$$y \cos \alpha' - x \sin \alpha' = p',$$

zu zeigen: daß die, den von ihnen gebildeten Winkel halbirende Gerade durch die Gleichung:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha - p = y \cos \alpha' - x \sin \alpha' - p'$$

ausgedrückt wird.

9) Es ist B (Fig. 38) ein fester Punkt in der Axe OY, Q ein beweglicher Punkt in der Axe OX, $\angle BQP = 90^0$ und das Verhältniß $BQ : QP$ constant; man soll den Ort des Punktes P finden.

10) Wenn O (Fig. 39) die Mitte einer Seite YY' eines Dreieckes YXY' ist, und durch irgend einen Punkt M von OX die Geraden Y'P, YP' gezogen werden, zu zeigen: daß PP' zu YY' parallel ist und OX in den Punkten M, N harmonisch getheilt wird, d. h. so: daß die reciproken Werthe von OM, ON und OX eine arithmetische Proportion bilden.

Nimmt man OX und OY zu den Coordinatenaxen, setzt $OY = OY' = b$, $OM = a$ und $OX = a'$,; so sind die Gleichungen von Y'P und YX resp.:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, \; \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

Für den Punkt P finden diese Gleichungen gleichzeitig statt, und durch Addition ergibt sich daraus:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) x = 2; \quad (\nu)$$

also die Abscisse x des Punktes P:

$$x = \frac{2\,aa'}{a + a'}.$$

Die Gleichungen von YP′ und Y′X sind ferner:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a'} + \frac{y}{-b} = 1,$$

woraus sich ebenso für die Abscisse des Punktes P′ ergibt:

$$x = \frac{2aa'}{a + a'}.$$

Die Punkte P, P′ haben also dieselbe Abscisse, und mithin ist PP′ parallel zu YY′. Endlich ist nach (ν):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{x},$$

woraus erhellet, daß $\frac{1}{x}$ das arithmetische Mittel zwischen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$ ist, also a, x, a′ eine harmonische Proportion bilden, wie auch schon aus dem Werthe von x selbst erhellet (s. §. 34).

11) Wenn von den beiden sich schneidenden Geraden OX, OY (Fig. 40) die eine OX von den von demselben Punkte P ausgehenden Geraden PB, PB′, PB″, ... harmonisch getheilt wird, so wird auch die andere OY durch dieselben Geraden harmonisch getheilt; d. h. wenn OA, OA′, OA″, ... eine harmonische Progression bilden, so bilden auch OB, OB′, OB″ ... eine solche.

Es sei OA = a, OA′ = a_1, OA″ = a_2, ...; OB = b, OB′ = b_1. OB″ = b_2, ... und h, k die Coordinaten des Punktes P; so sind die Gleichungen von AB, A′B′, A″B″, ... resp.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1, \text{ ꝛc.}$$

und da sich diese Geraden alle in P schneiden, so hat man auch:

$$\frac{h}{a} + \frac{k}{b} = 1, \frac{h}{a_1} + \frac{k}{b_1} = 1, \text{ ꝛc.}$$

Aus diesen letzten Gleichheiten ergibt sich durch Subtraction:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) h + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right) k = o, \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) h + \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) k = o, \text{ ꝛc.}$$

und da a, a_1, a_2, ... eine harmonische Progression bilden; so ist:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \ldots\ldots$$

also auch:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} = \ldots\ldots$$

und mithin bilden b, b_1, b_2, . . . eine harmonische Progression.

12) **Die beiden Winkelspitzen A, B eines beweglichen Dreieckes ABC liegen stets in zwei festen Geraden OX, OY und die Richtungen der Seiten dieses Dreieckes gehen stets durch drei feste, in gerader Linie liegende Punkte; man soll zeigen: daß sich die Winkelspitze C stets auf einer durch O gehenden Geraden befindet.**

Die Gleichungen der Geraden AB, AC, BC in Beziehung auf OX, OY als Axen seien resp.:

$$\alpha x + \beta y = 1, \quad (1)$$

$$\alpha x + \beta' y = 1, \quad (2)$$

$$\alpha' x + \beta y = 1. \quad (3)$$

Da AB und AC sich auf OX schneiden, so müssen die Gleichungen (1) und (2) für $y = o$ denselben Werth von x geben, und da AB, BC sich auf OY schneiden, so müssen (1) und (3) für $y = o$ denselben Werth von x geben. Ferner seien (h, k), (h′, k′), (h″, k″) die drei Punkte, durch welche die Geraden (1), (2), (3) stets gehen, und die Gleichung der Geraden, worin diese Punkte liegen, sei:

$$mx + ny = 1. \qquad (4)$$

Da die Punkte (h, k′), (h′, k″), (h″, k) resp. (1) und (4), (2) und (4), (3) und (4) gemeinschaftlich sind, so müssen diese drei Paare von Gleichungen durch die resp. Coordinaten dieser Punkte gleichzeitig erfüllt werden, und man hat:

$$(1) - (4) \ldots\ldots (\alpha - m)\, h + (\beta - n)\, k = o,$$

$$(2) - (4) \ldots\ldots (\alpha - m)\, h' + (\beta' - n)\, k' = o,$$

$$(3) - (4) \ldots\ldots (\alpha' - m)\, h'' + (\beta - n)\, k'' = o,$$

woraus erhellet: daß die Größen $\alpha - m$, $\beta - n$), $\alpha' - m$ und $\beta' - n$ in einem constanten Verhältniß zu einander stehen, so daß auch $[(\alpha - m) - (\alpha' - m)] : [(\beta - n) - (\beta' - n)]$ ein constantes Verhältniß $\frac{A}{B}$ ist, und folglich:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} = \frac{A}{B}. \qquad (5)$$

Für den Durchschnittspunkt C von (2) und (3) müssen diese beiden Gleichungen gleichzeitig stattfinden, so daß man hat:

$$(2) - (3) \ldots (\alpha - \alpha')\, x - (\beta - \beta')\, y = o,$$

oder wegen (5):

$$Ax - By = o,$$

welches die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden ist, worauf sich die Spitze C immer befindet.

13) Wenn zwei Dreiecke ABC, A'B'C' so beschaffen sind: daß die Durchschnittspunkte von AB und A'B', von BC und B'C', von AC und A'C' in derselben Geraden liegen, zu zeigen: daß sich die drei Geraden AA', BB', CC' in demselben Punkte schneiden.

14) Wenn OX, OY, AB (Fig. 41) drei feste Gerade sind und A'B' eine sich um den Punkt P drehende Gerade ist, zu zeigen: daß, wenn stets $OA' + OB' = OA + OB$ ist, das Verhältniß $B'P : B'A'$ constant ist.

15) Wenn sich die Gerade DE (Fig. 42) so bewegt, daß sie stets zu der Seite BC des Dreieckes ABC parallel ist, den Ort des Punktes O zu finden.

Wenn man AC, AB zu den Coordinatenaxen nimmt und $AC = a$, $BA = b$ setzt, so ist die Gleichung der Geraden BC:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Setzt man ferner $AE = x'$, $AD = y'$, so ist die Gleichung der Geraden DE:

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1,$$

und da diese beiden Geraden parallel sein sollen; so ist:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}. \qquad (\mu)$$

Weiter sind die Gleichungen der Geraden CD, BE resp.:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{y'} = 1, \frac{x}{x'} + \frac{y}{b} = 1,$$

und da diese Gleichungen für den Durchschnittspunkt O gleichzeitig stattfinden müssen; so erhält man durch Subtraction der letzten von der ersten:

$$\left(\frac{1}{y'} - \frac{1}{b}\right) y + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x'}\right) x = o.$$

Wegen (μ) ist aber $y' = \dfrac{bx'}{a}$, und wenn man diesen Werth in die letzte Gleichung setzt und dann durch $\frac{a}{x'} - 1$ dividirt; so ergibt sich endlich:

$$y = \frac{b}{a}\, x,$$

welches die Gleichung des geometrischen Ortes des Punktes O ist. Da derselben sowohl durch $x = o$, $y = o$, als durch $x = \frac{a}{2}$ $y = \frac{b}{2}$ genügt wird, so folgt: daß der gesuchte Ort nichts anders ist, als eine durch die Winkelspitze A und durch die Mitte der Seite BC gehende Gerade. Diese Aufgabe ist theilweise die Umkehrung von Aufgabe 10.

16) Wenn die Gleichungen $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ zweier Geraden gegeben sind, die Gleichung des geometrischen Ortes des Punktes P zu finden, dessen Abstände von diesen Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

17) Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch die beiden Durchschnittspunkte der Geraden:

$$y + ax + b = o,\ y + a'x + b' = o, \qquad (1)$$

und der Geraden:

$$y + mx + n = o,\ y + m'x + n' = o, \qquad (2)$$

geht.

Die Gleichungen der beiden Geraden, welche resp. durch die Durchschnittspunkte der Geraden (1) und (2) gehen, sind nach §. 29:

$$(y + ax + b) + \lambda(y + a'x + b') = o, \qquad (3)$$

$$(y + mx + n) + \lambda'(y + m'x + n') = o, \qquad (4)$$

und damit die Geraden (3), (4) in eine zusammenfallen, müssen die beiden letzten Gleichungen identisch, d. h.:

$$y + \frac{a + \lambda a'}{1 + \lambda} x + \frac{b + \lambda b'}{1 + \lambda} = y + \frac{m + \lambda' m'}{1 + \lambda'} x + \frac{n + \lambda' n'}{1 + \lambda'},$$

folglich:

$$\frac{a + \lambda a,}{1 + \lambda} = \frac{m + \lambda' m'}{1 + \lambda'} \text{ und } \frac{b + \lambda b'}{1 + \lambda} = \frac{n + \lambda' n'}{1 + \lambda'} \quad (5)$$

sein. Aus den beiden Gleichungen (5) ergeben sich die Werthe der willkürlichen Multiplicatoren λ, λ', und wenn man ihre Werthe in (3) und (4) setzt; so erhält man die gesuchte Gleichung zweimal. Man könnte auch zuerst den Durchschnittspunkt der Geraden (1), so wie den von (2) suchen (§. 24), und dann die Gleichung der Geraden, welche durch diese beiden Punkte geht. (§. 22).

18) Es ist ein fester Punkt A (Fig. 43) und eine feste Gerade BC gegeben; ferner ist der Winkel PAM $= P'AM' = \ldots$ und $\frac{AP}{AM} = \frac{AP'}{AM'} = \ldots$ Man soll zeigen: daß der Ort der Punkte M, M', ... eine Gerade ist.

19) Von einem festen Punkte werden nach einer festen Geraden beliebig viele gerade Linien gezogen und alle in demselben Verhältnisse getheilt; man soll den Ort der Theilungspunkte finden.

20) Durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche in diesem Punkte halbirt wird.

§. 33.

Harmonische Proportion.

Auf derselben geraden Linie seien a' und a (Fig. 44) zwei feste Punkte, und b, b' zwei andere Punkte von solcher Beschaffenheit, daß:

$$\frac{ab}{a'b} : \frac{ab'}{a'b'} = -1 \qquad (1)$$

ist; so sagt man: diese vier Punkte bilden eine harmonische Proportion, oder die beiden Punkte b, b' sind in Bezug auf a und a' harmonisch conjugirt, wobei übrigens die Abstände positiv, oder negativ sind, jenachdem sie in dem einen, oder in dem andern Sinne genommen sind. Offenbar liegt der eine harmonisch conjugirte Punkt, z. B. b, in dem Intervalle aa', während der andere b' außerhalb desselben liegt. Denn wenn ein Punkt außerhalb des Intervalles liegt, so haben seine beiden Abstände einerlei Zeichen, und folglich ist der entsprechende Quotient positiv; aber wenn dieser Punkt in dem Intervalle liegt, so haben seine Abstände entgegengesetzte Zeichen, und folglich ist der entsprechende Quotient negativ. Umgekehrt, da die Relation (1) auch folgendermaßen gestellt werden kann:

$$\frac{ba}{b'a} : \frac{ba'}{b'a'} = -1,$$

so sind auch a, a' in Beziehung auf b, b' harmonisch conjugirt.

Wenn ein Punkt b gegeben ist, so kann man leicht seinen harmonisch conjugirten b′ finden. Dann zieht man durch a und a′ zwei Parallelen am = ab und a′m′ = a′b, so schneidet die Gerade mm′ die gegebene Gerade in dem gesuchten conjugirten Punkte b′. Wenn der Punkt b′ gegeben wäre, so nähme man an = ab′ und in entgegengesetztem Sinne a′n′ = a′b′, und alsdann bestimmt nn′ den Punkt b.

Für die Mitte i von aa′ wird die Relation (1):

$$bi : b'i = \overline{ai}^2 \text{ oder } \frac{bi}{b'i} = \frac{\overline{ba}^2}{\overline{b'a}^2} = \frac{\overline{ba'}^2}{\overline{b'a'}^2}.$$

§. 34.

Harmonischer Strahlenbüschel.

Wenn man irgend einen Punkt O (Fig. 45) der Ebene mit den vier Punkten a, a′, b, b′ durch die Geraden A, A′, B, B′ verbindet, so findet die Relation statt:

$$\frac{\sin(A, B)}{\sin(A', B)} : \frac{\sin(A, B')}{\sin(A', B')} = -1, \qquad (2)$$

wobei die in dem einen Sinne gezählten Winkel als positiv und die in dem entgegengesetzten Sinne als negativ betrachtet werden. Denn wenn das von dem Punkte O auf aa′ gefällte Perpendikel mit h bezeichnet wird, so hat man:

$$ab = \frac{oa \cdot ob \cdot \sin(A, B)}{h}, \ldots,$$

und wenn man in die Relation (1) substituirt; so erhält man die Relation (2), und umgekehrt aus (2) ergibt sich (1). Die vier Geraden A,A′, B,B′, welche Strahlen heißen, bilden alsdann ein sogenanntes harmonisches Strahlenbüschel.

Man kann für eine Gerade ihre Verlängerung setzen, wenn man zu zwei Winkeln π addirt; denn alsdann ändern zwei Sinus ihr Zeichen, und die Relation (2) findet noch statt. Die vier Geraden können folglich in beiden Richtungen unbestimmt verlängert gedacht werden. Wenn man durch das harmonische Strahlenbüschel irgend eine Sekante zieht, so bestimmt dasselbe auf dieser Geraden vier harmonische Punkte. Wenn die Sekante zu einer der vier Geraden (Strahlen) parallel ist, so entfernt sich der Punkt b′ ins Unendliche; es wird $\frac{ab'}{a'b'} = 1$, ab = — a′b und der

Punkt b die Mitte von aa'. Wenn zwei conjugirte Gerade **B,B'** einen rechten Winkel bilden, so halbiren sie die beiden von **A** und **A'** gebildeten Winkel. Denn alsdann ist $(\mathbf{A},\mathbf{B}') = \frac{\pi}{2} + (\mathbf{A},\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}',\mathbf{B}') = \frac{\pi}{2} + (\mathbf{A}',\mathbf{B})$, und die Relation (2) wird:

$$\operatorname{tang}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = -\operatorname{tang}(\mathbf{A}',\mathbf{B}),$$

also:

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}',\mathbf{B}),$$

und mithin ist **B** eine Halbirungslinie. *)

---

*) Man sagt nämlich, daß drei Größen oder Zahlen α, β, γ eine harmonische Proportion bilden, wenn man hat:

$$\alpha - \beta : \beta - \gamma = \alpha : \gamma, \qquad (1')$$

d. h. wenn sich die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl oder Größe zu der zwischen der zweiten und dritten, wie die erste zur dritten verhält. Die zweite Zahl oder Größe β heißt das harmonische Mittel zwischen der ersten und dritten α, γ.

Aus (1') folgt:

$$\alpha\beta + \beta\gamma = 2\,\alpha\gamma, \qquad (2')$$

also:

$$\beta = \frac{2\,\alpha\beta}{\alpha + \gamma}.$$

Wenn eine Reihe von Größen oder Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ so beschaffen sind, daß je drei aufeinanderfolgende eine harmonische Proportion bilden, so heißt jene Reihe eine harmonische Progression, und hat die Eigenschaft: daß die reciproken Werthe ihrer Glieder eine arithmetische Progression bilden, und umgekehrt: die reciproken Werthe der Glieder einer arithmetischen Progression bilden eine harmonische Progression. Denn sind $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ die Glieder der arithmetischen Progression, so ist:

$$\beta' - \alpha' = \gamma' - \beta' = \delta' - \gamma' = \ldots.$$

also:

$$\alpha' + \gamma' = 2\beta',\ \beta' + \delta' = 2\chi', \ldots.$$

und wenn man jede dieser letzten Gleichungen resp. durch das Produkt der drei darin vorkommenden Größen, d. h. resp. durch $\alpha'\beta'\gamma'$, $\beta'\gamma'\delta'$, ... dividirt; so kommt:

$$\frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\alpha'\beta'} = \frac{2}{\alpha'\gamma'},\ \frac{1}{\gamma'\delta'} + \frac{1}{\beta'\gamma'} = \frac{2}{\beta'\delta'}, \ldots.$$

Wegen $\alpha = \frac{1}{\alpha'}$, $\beta = \frac{1}{\beta'}$, $\gamma = \frac{1}{\gamma'}$, $\delta = \frac{1}{\gamma'}$, ... hat man also:

$$\beta\gamma + \alpha\beta = 2\,\alpha\gamma,\ \gamma\delta + \beta\gamma = 2\beta\,\delta, \ldots$$

Umgekehrt, wenn **B** einen der von **A** und **A′** gebildeten Winkel halbirt, so ist **B′** die Halbirungslinie des andern Winkels, und die beiden conjugirten Geraden sind aufeinander senkrecht.

§. 35.

Wenn man von einem festen Punkte **I** (Fig. 46)

---

und mithin bilden $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ wegen (2′) eine harmonische Progression.

Wenn also $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ eine harmonische Progression bilden, so bilden $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}, \ldots$ eine arithmetische, und folglich ist:

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} = \ldots = \text{const.}$$

Aus (2′) folgt ferner durch Division mit $\alpha\beta\gamma$:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}. \qquad (3')$$

Verhält sich nun (Fig. 44):

$$ab : a'b = ab' : a'b' \text{ oder } a'b' : a'b = ab' : ab, \qquad (4')$$

so bilden die drei Linien ab′, aa′ und ab eine harmonische Proportion, weil man die vorhergehende Proportion auch wie folgt schreiben kann:

$$ab' - aa' : aa' - ab = ab' : ab,$$

und man sagt aus diesem Grunde: die Gerade aa′ werde in den Punkten b,b′ harmonisch getheilt.

Umgekehrt wird auch die Gerade bb′ durch die Punkte a,a′ harmonisch getheilt; denn aus der Proportion (4′) folgt:

$$ab : a'b = ab' : a'b' \qquad (5')$$

wofür man setzen kann:

$$ab' - bb' : bb' - a'b' = ab' : a'b'.$$

Aus der Proportion (5′) folgt ferner:

$$ab - a'b : ab + a'b : ab' - a'b' : ab' + a'b'$$

d. h.:

$$2\,ib : 2\,ai = 2\,ai : 2\,ib',$$

also:

$$\overline{ai}^2 = ib \,.\, ib'. \qquad (6')$$

Endlich folgt aus der Proportion (5′):

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{a'b}{a'b'} = \frac{ab - a'b}{ab' - a'b'} : \frac{ib}{ia},$$

folglich:

$$\frac{\overline{ab}^2}{\overline{ab'}^2} : \frac{\overline{a'b}^2}{\overline{a'b'}^2} = \frac{\overline{ib}^2}{\overline{ia}^2} = \frac{\overline{ib}^2}{ib \,.\, ib'} = \frac{ib}{ib'},$$

indem man die Relation (6′) beachtet.

noch zwei sich in O schneidenden Geraden OX, OY zwei beliebige Sekanten IBA, IB'A' zieht und die Durchschnittspunkte B, A' und A, B' durch gerade Linien verbindet; so ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes K der Verbindungslinien eine durch O gehende Gerade.

Nimmt man OX, OY zu den Coordinatenaxen, bezeichnet die Coordinaten des Punktes I mit x_1, y_1 die Abscissen der Punkte A, A' mit x', x'' und die Ordinaten der Punkte B, B' mit y', y''; so sind die Gleichungen der Geraden AB und A'B' resp.:

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1 \text{ und } \frac{x}{x''} + \frac{y}{y''} = 1,$$

und da diese Geraden durch den Punkt I oder (x_1, y_1) gehen; so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x_1}{x'} + \frac{y_1}{y'} = 1 \text{ und } \frac{x_1}{x''} + \frac{y_1}{y''} = 1. \qquad (3)$$

Die Gleichungen der Geraden BA', AB' sind ferner:

$$\frac{x}{x''} + \frac{y}{y'} = 1, \frac{x}{x'} + \frac{y}{y''} = 1, \qquad (4)$$

und wenn man diese letzten Gleichungen als simultane betrachtet, so sind x, y die Coordinaten des Durchschnittspunktes K. Durch Subtraktion ergibt sich aus (4):

$$\frac{x' - x''}{x' x''} x - \frac{y' - y''}{y' y''} y = 0,$$

und ebenso aus (3):

$$\frac{x' - x''}{x' x'} x_1 - \frac{y' - y''}{y' y''} y_1 = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}. \qquad (5)$$

Der Ort des Punktes K ist also eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade OK, welche allen Punkten von OI entspricht; und umgekehrt: alle Punkte von OK geben denselben Ort OI. Die Gerade OK wird die Polare des Punktes I in Beziehung auf das System der beiden Geraden OX, OY genannt.

Da man hat:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(XOK)}{\sin(YOK)}, \frac{y_1}{x_1} = -\frac{\sin(XOI)}{\sin(YOI)},$$

so wird die Gleichung (5):

$$\frac{\sin(X,K)}{\sin(Y,K)} : \frac{\sin(X,I)}{\sin(Y,I)} = -1.$$

Die beiden Geraden OI, OK sind also in Beziehung auf OX, OY harmonisch conjugirt.

Der Punkt H ist also in Beziehung auf A, B der harmonisch conjugirte von I, und wenn man durch den Punkt I verschiedene Sekanten AB durch den Winkel XOI zieht; so kann die Polare des Punktes I als der Ort des harmonisch conjugirten Punktes von I in Bezug auf die beiden Endpunkte B, A jeder Sekante betrachtet werden.

Ein System von vier unbegrenzten Geraden (Fig. 47), welche sich in sechs Punkten schneiden, heißt ein vollständiges Viereck, dessen Winkelspitzen diese Durchschnittspunkte sind. Wenn man die gegenüberliegenden Spitzen paarweise durch gerade Linien verbindet, so erhält man drei Diagonalen AA', BB', CC', wovon jede durch die beiden andern harmonisch getheilt wird; denn nach dem vorhergehenden Satze bilden die vier Geraden MA, MB, MA' und MC ein harmonisches Strahlenbüschel, und mithin die vier Punkte A, A', N, P eine harmonische Proportion.

Es läßt sich auch leicht zeigen, daß die Mittelpunkte D, E, F der drei Diagonalen AA', BB', CC' eines vollständigen Viereckes in gerader Linie liegen. Denn nimmt man AC, AC' resp. zu den Axen der x, y und setzt $AB = x'$, $AC = x''$, $AB' = y'$, $AC' = y''$, so sind die Coordinaten des Punktes E : $\frac{x'}{2}$, $\frac{y'}{2}$ und die des Punktes F : $\frac{x''}{2}$, $\frac{y''}{2}$. Sind ferner x_1, y_1 die Coordinaten des Punktes A', so sind die des Punktes D offenbar $\frac{x_1}{2}$, $\frac{y_1}{2}$. Um nun zu beweisen, daß die drei Punkte D, E, F in gerader Linie liegen, braucht man nur zu zeigen, daß die Winkel- oder Richtungscoefficienten der beiden Geraden, welche einen der drei fraglichen Punkte D mit den beiden andern E, F verbinden, gleich sind, und folglich diese beiden Geraden zusammenfallen.

Da die drei Punkte B, A', C' in gerader Linie liegen, so haben die beiden Geraden A'B, A'C' gleiche Richtungscoefficienten:

$$\frac{y_1}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y''}{x_1},$$

und ebenso haben die Geraden A′C, A′B′ gleiche Richtungscoefficienten:

$$\frac{y_1}{x_1 - x''} = \frac{y_1 - y'}{x_1}.$$

Durch Division folgt aus diesen beiden Relationen:

$$\frac{x_1 - x'}{x_1 - x''} = \frac{y_1 - y'}{y_1 - y''},$$

oder:

$$\frac{\frac{y_1}{2} - \frac{y'}{2}}{\frac{x_1}{2} - \frac{x'}{2}} = \frac{\frac{y_1}{2} - \frac{y''}{2}}{\frac{x_1}{2} - \frac{x''}{2}}.$$

Die beiden Geraden DE, DF haben also gleiche Richtungscoefficienten, fallen also in eine Gerade zusammen, und mithin liegen die drei Punkte D, E, F in gerader Linie.

§. 36.

Mittelpunkt der proportionalen Abstände.

1) Wenn zwei Punkte A, B (Fig. 47a) gegeben sind, auf der Geraden AB einen solchen Punkt M zu finden, daß seine Abstände von A, B sich wie m : n verhalten.

Der Abstand AM wird als positiv, oder negativ betrachtet, jenachdem derselbe in dem Sinne AB, oder in entgegengesetztem Sinne genommen ist, und der Abstand BM als positiv, oder negativ, jenachdem er in dem Sinne BA, oder in entgegengesetztem Sinne gezählt wird. Wenn also m und n dasselbe Zeichen haben, so liegt der Punkt M in dem Intervalle AB, und wenn m, n entgegengesetzte haben, so liegt derselbe auf der Verlängerung von AB, und zwar auf der Seite von A, oder von B, jenachdem $m \lessgtr n$ ist. Wenn x', y'; x'', y'' die Coordinaten der gegebenen Punkte A, B und x, y die des gesuchten Punktes M bezeichnen, so hat man offenbar:

$$x - x' : x'' - x = m : n,$$
$$y - y' : y'' - y = m : n,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{nx' + mx''}{m + n},\ y = \frac{ny' + my''}{m + n}, \qquad (6)$$

und wenn $m = n$ ist; so erhält man den **Mittelpunkt** von AB:

$$x = \frac{x' + x''}{2}, y = \frac{y' + y''}{2}.$$

2) In einer Ebene seien n Punkte A, B, C, D, ... (Fig. 47 b) oder (x', y'), (x'', y''), ... $(x^{(n)}, y^{(n)})$ und n Größen $m', m'', \ldots m^{(n)}$, welche diesen Punkten entsprechen, gegeben. Auf der die beiden ersten Punkte A, B verbindenden Geraden AB nimmt man einen solchen Punkt N_1, daß die Abstände desselben von den beiden ersten Punkten in dem Verhältnisse $m'' : m'$ stehen, dann auf der Geraden N_1C, welche N_1 mit dem dritten gegebenen Punkte C verbindet, einen solchen Punkt N_2, daß seine Abstände von N_1 und dem dritten gegebenen Punkte C in dem Verhältnisse $m''' : (m'+m'')$ stehen, hierauf auf der Geraden N_2D, welche N_2 mit dem vierten gegebenen Punkte D verbindet, einen solchen Punkt N_3, daß seine Abstände von N_2 und diesem vierten Punkte D in dem Verhältnisse $m'''' : (m' + m'' + m''')$ stehen, u. s. f. bis zu dem letzten gegebenen Punkte. Man soll die Coordinaten des **letzten Theilungspunktes** finden.

Wenn die Coordinaten der successiven Theilungspunkte N_1, N_2, N_3, ... N resp. mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ...; x, y bezeichnet werden; so ist nach den Formeln (6):

$$x_1 = \frac{m'x' + m''x''}{m' + m''},$$

$$x_2 = \frac{(m'+m'')x_1 + m'''x'''}{m' + m'' + m'''} = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x'''}{m' + m'' + m'''},$$

$$x_3 = \frac{(m'+m''+m''')x_2 + m''''x''''}{m' + m'' + m''' + m''''} = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + m''''x''''}{m' + m'' + m''' + m''''}$$

rc. = rc.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m'x' + m''x'' + \ldots + m^{(n)}x^{(n)}}{m' + m'' + \ldots + m^{(n)}}, \\ &\text{und ebenso:} \\ y &= \frac{m'y' + m''y'' + \ldots + m^{(n)}y^{(n)}}{m' + m'' + \ldots + m^{(n)}}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hieraus sieht man: daß die Lage des **letzten Theilungspunktes** von der **Ordnung**, in welcher man die gegebenen Punkte nimmt, unabhängig ist. Dieser Punkt kann der **Mittelpunkt der den Größen** $m', m'', m''' \ldots m^{(n)}$ **proportionalen Abstände** genannt werden, und wenn $m' = m'' = m''' = \ldots = m^{(n)}$ ist; so erhält man den **Mittelpunkt der mitt-**

lern Abstände oder Entfernungen, dessen Coordinaten sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + x'' + x''' + \ldots + x^{(n)}}{n}, \\ y &= \frac{y' + y'' + y''' + \ldots + y^{(n)}}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

§. 37.

Anwendung auf das Dreieck.

Wenn blos drei Punkte A, B, C (Fig. 47c) gegeben sind, welche die Winkelspitzen eines Dreieckes bilden; so kann man auf drei verschiedene Arten verfahren. Man kann nämlich zuerst den Theilungspunkt A′ der Seite BC und dann den Mittelpunkt O auf AA′ suchen, oder den Theilungspunkt B′ der Seite CA und darauf den Mittelpunkt O auf BB′, oder ꝛc. Der Mittelpunkt O der proportionalen Abstände ist also der Durchschnittspunkt der drei Geraden AA′, BB′, CC′. Wenn m′, m″, m‴ die den drei Punkten A, B, C entsprechenden Größen sind, so werden die drei Punkte A′, B′, C′ durch die Relationen:

$$\frac{BA'}{m'''} = \frac{CA'}{m''}, \quad \frac{CB'}{m'} = \frac{AB'}{m'''}, \quad \frac{AC'}{m''} = \frac{BC'}{m'}$$

bestimmt, woraus folgt:

$$BA' \,.\, CB' \,.\, AC' = BC' \,.\, AB' \,.\, CA'. \qquad (9)$$

Umgekehrt, wenn die drei Punkte A′, B′, C′ der Relation (9) genügen, so kann man die drei Größen m′, m″, m‴ finden. Hieraus folgt:

1) Wenn man auf den drei Seiten eines Dreieckes drei Punkte von solcher Beschaffenheit nimmt, daß das Produkt aus drei nicht aneinanderliegenden Seitenabschnitten dem Produkte der drei andern Abschnitte gleich ist; so durchschneiden sich die drei Geraden, welche diese Punkte mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen verbinden, in demselben Punkte.

2) Wenn m′ = m″ = m‴ ist, so sind A′, B′, C′ die Mitten der Dreiecksseiten; folglich gehen die drei Medianen eines Dreieckes durch denselben Punkt, welches der

Schwerpunkt des Dreieckes ist. Die Coordinaten dieses Punktes sind:

$$x = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \; y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

3) Wenn $m' = a$, $m'' = b$, $m''' = c$ ist, wo a, b, c die drei Seiten des Dreieckes bedeuten; so sind die Geraden AA', BB', CC' die Halbirungslinien der Winkel des Dreieckes. Folglich gehen die Halbirungslinien der Winkel eines Dreieckes durch denselben Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises und seine Coordinaten sind:

$$x = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \; y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

4) Wenn man aus den Winkelspitzen des Dreieckes Perpendikel auf die Gegenseiten zieht, so geben die dadurch entstehenden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke:

$$a \, . \, BA' = c \, . \, BC', \; b \, . \, CB' = a \, . \, CA', \; c \, . \, AC' = b \, . \, AB',$$

woraus folgt:

$$BA' \, . \, CB' \, . \, AC' = BC' \, . \, AB' \, . \, CA',$$

und mithin gehen die drei Höhen eines Dreieckes durch denselben Punkt. Dasselbe Resultat erhält man, wenn man setzt:

$$m' = a \cos B \cos C, \; m'' = b \cos A \cos C, \; m''' = c . \cos A \cos B;$$

denn alsdann sind AA', BB', CC' die Höhen des Dreieckes, und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes sind:

$$x = \frac{ax' \cos B \cos C + bx'' \cos A \cos C + cx''' \cos A \cos B}{a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c \cos A \cos B},$$

$$y = \frac{ay' \cos B \cos C + by'' \cos A \cos C + cy''' \cos A \cos B}{a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c . \cos A \cos B}.$$

§. 38.

Transversalen.

Zwei Punkte B', C' (Fig. 48) können willkürlich angenommen werden und der dritte A' wird durch die Gerade OA bestimmt. Die willkürliche Transversale $B'C'$ trifft die dritte Seite in dem Punkte A_1, welcher der harmonisch conjugirte von A' ist (§. 35), so daß man hat:

$$\frac{BA'}{CA'} : \frac{BA_1}{CA_1} = -1,$$

und wenn man in die Relation (9) substituirt:

$$BA_1 \,.\, CB' \,.\, AC' = - BC', \, AB' \,.\, CA_1 \,. \qquad (10)$$

Umgekehrt, wenn drei Punkte A_1, B', C' der Gleichheit (10) genügen, so liegen sie in derselben Geraden.

Wenn man also auf den drei Seiten eines Dreieckes drei Punkte von solcher Beschaffenheit nimmt, daß das Produkt aus drei nicht aneinanderstoßenden Seitenstücken dem Produkte aus den drei andern Stücken gleich ist, aber ein entgegengesetztes Vorzeichen hat; so liegen diese drei Punkte in gerader Linie.

Ebenso liegen die drei conjugirten Punkte A_1, B_1, C_1 von A', B', C' in gerader Linie, und wenn man einen Punkt A', so wie die conjugirten Punkte B_1, C_1 mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen verbindet; so schneiden sich die Verbindungslinien in demselben Punkte. Ferner liegen die Mittelpunkte von $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ in gerader Linie, d. h. die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Viereckes liegen in derselben Geraden, wie bereits früher direkt gezeigt ist (§. 35).

§. 39.

Man kann auch leicht den Ort der Punkte finden, welche so beschaffen sind: daß die Summe der Produkte aus den Quadraten ihrer Entfernungen von einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte (x', y'), (x'', y''), . . . und ebensovielen constanten Größen m', m'', ... einer gegebenen Größe K gleich ist.

Denn in rechtwinkligen Coordinaten ist die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$m'[(x-x')^2+(y-y')^2]+m''[(x-x'')^2+(y-y'')^2]+\ldots=K.$$

oder:

$$\left[x-\frac{m'x'+m''x''+\ldots}{m'+m''+\ldots}\right]^2+\left[y-\frac{m'y'+m''y''+\ldots}{m'+m''+\ldots}\right]^2=\text{Const.} (11)$$

Der gesuchte Ort ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem der proportionalen Entfernungen zusammenfällt. Wenn $m'+m''+\ldots=0$ ist, so ist der Ort eine Gerade.

Wenn man $m'=m''=\ldots=1$ setzt, und den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der mittlern Entfernungen verlegt; so reducirt sich die Gleichung (11) auf:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{n} (K - x'^2 - y'^2 - x''^2 - y''^2 - \ldots).$$

Bezeichnet man also mit D', D'', . . . 𝔇 die Entfernungen irgend eines Punktes (x, y) von den gegebenen Punkten und vom Mittelpunkte ihrer mittlern Abstände, und mit d', d'', . . . die Abstände des Kreismittelpunktes von denselben Punkten; so hat man:

$$K = \Sigma \,.\, D^2 = \Sigma \,.\, d^2 + n\, \mathfrak{D}^2.$$

Hieraus sieht man: daß die Summe der Quadrate der Entfernungen eines beweglichen Punktes von den verschiedenen Punkten eines Systemes ein M i n i m u m ist, wenn dieser Punkt mit dem Mittelpunkte der mittlern Entfernungen zusammenfällt.

Als besonderer Fall ergibt sich aus dem Vorhergehenden für den Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten a, a' sich wie m : n verhalten, die Gleichung:

$$n^2[(x-x')^2 + (y-y')^2] - m^2[(x-x'')^2 + (y-y'')^2] = 0.$$

Theilt man die Gerade aa' im Punkte b in zwei Theile, welche sich wie m : n verhalten und sucht zu b den harmonisch conjugirten Punkt b'; so ist bb' der Durchmesser des Kreises; welcher den geometrischen Ort bildet.

§. 40.

Wenn A', A'', A''', . . . mehrere in derselben Geraden liegende Punkte und x', x'', x''' . . . ihre Abscissen in Bezug auf den Punkt I derselben Geraden sind, so nennt man den Mittelpunkt der den Größen $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{x''}$, $\frac{1}{x'''}$, ... proportionalen Entfernungen den M i t t e l p u n k t d e r h a r m o n i s c h e n M i t t e l jener Punkte in Beziehung auf I. Ist G dieser Mittelpunkt, und man zieht aus einem beliebigen Punkte M der Ebene die Geraden MA', MA'', . . . MI, MG und eine Transversale, welche diese in den Punkten a', a'', . . . i, g schneidet; so ist g der Mittelpunkt der harmonischen Mittel von a', a'', . . . in Beziehung auf I.

§. 41.

Wenn A', A'', A''', . . . mehrere in derselben Ebene liegende Punkte, OX eine in dieser Ebene liegende Gerade und y', y'', y''', . . . die recht- oder schiefwinkligen Ordinaten von A', A'', A''', . . . in Bezug auf OX sind; so nennt man den Mittelpunkt der den Größen $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{y''}$, $\frac{1}{y'''}$, . . . proportionalen Abstände oder Entfernungen den **Mittelpunkt der harmonischen Mittel** (G) der Punkte A', A'', A''', . . . in Bezug auf OX. Man soll nun beweisen: daß, wenn man von irgend einem Punkte M von OX die Geraden MA', MA'', MA''', . . . MX, MG zieht, das so erhaltene Strahlenbüschel dieselben Eigenschaften hat, wie das in §. 30.

Uebungsaufgaben.

1) Den Ort der Punkte der Ebene zu finden, von welchen aus eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel erscheint.

2) Man soll den Ort des Punktes M finden, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ stehen.

3) Es sind OX, OY (Fig. 48b) zwei auf einander senkrechte Gerade, und OACB ist ein veränderliches Rechteck von einem gegebenen Umfange 2a; man soll zeigen: daß das aus der Ecke C auf die Diagonale AB gefällte Perpendikel CP stets durch den festen Punkt $y = a$, $x = a$ geht.

4) Man soll den Ort der Mittelpunkte der Kreise finden, welche von zwei gegebenen Punkten aus unter gegebenen Winkeln erscheinen.

5) Den Ort der Mittelpunkte der Kreise zu finden, welche zwei gegebene Kreise in diametral gegenüberliegenden Punkten schneiden.

6) Man soll den Ort der Punkte finden, welche so beschaffen sind, daß die Summe der Abstände eines jeden von zwei, oder mehrern Geraden eine **constante** Größe sei.

7) Es ist ein Kreis (Fig. 48a) und eine Sehne AB in demselben gegeben, durch deren einen Endpunkt B eine Sekante gezogen wird, worauf man CM = CA nimmt; man soll den geometrischen Ort des Punktes M finden.

8) Welchen Ort beschreibt die Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreieckes, wenn die Endpunkte der Hypotenuse sich auf zwei rechtwinkligen Axen bewegen?

9) Welches ist der Ort der Punkte von der Beschaffenheit: daß

die Entfernung eines jeden von der Basis eines gleichschenkligen Dreieckes die mittlere Proportionale zwischen seinen Entfernungen von den Schenkeln des Dreieckes ist?

10) Den geometrischen Ort der Punkte von solcher Beschaffenheit zu finden, daß zwei Abschnitte derselben Geraden von jedem dieser Punkte aus unter gleichen Winkeln erscheinen.

11) Den Ort der Punkte von solcher Beschaffenheit zu finden, daß zwei gegebene Kreise von jedem dieser Punkte aus unter gleichen Winkeln erscheinen.

12) Durch einen Punkt A (Fig. 48c) eines Kreises zieht man eine Sekante und nimmt darauf eine Länge AM von solcher Beschaffenheit, daß $AM \cdot AB = k^2$ ist; man soll den Ort des Punktes M finden.

13) Wenn man durch einen Punkt A (Fig. 48c) eines Kreises eine Sekante zieht, und darauf eine solche Länge AM nimmt, daß sich verhält $AB : BM = p : q$, den Ort des Punktes M zu finden.

14) Den Ort der Punkte M von solcher Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man jeden derselben mit den Endpunkten zweier gegebener Geraden AB, CD verbindet, die Dreiecke MAB, MCD sich wie zwei gegebene Längen verhalten.

15) Welches ist der Ort der Spitze der Dreiecke, die die Grundlinie und die Mediane einer der beiden andern Seiten gemeinschaftlich haben?

16) In einem Kreise von dem Durchmesser AB (Fig. 48d) wird eine Sekante BCD gezogen und $CD = BC$ genommen, dann der Punkt D mit dem Mittelpunkte O, und der Punkt C mit A verbunden; man soll den Ort des Durchschnittspunktes M der beiden Geraden AC, OD finden.

17) Von einem beliebigen Punkte A (Fig. 48e) der Verlängerung des Durchmessers eines Kreises wird die Tangente AC, so wie die Halbirungslinie des Winkels CAO gezogen; man soll den Ort des Punktes M finden, wo das aus dem Mittelpunkte O auf die Halbirende AM gefällte Perpendikel diese trifft.

18) Durch einen Punkt O (Fig. 48f) der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreieckes ABC zieht man eine beliebige Sekante DE und beschreibt die beiden Kreise OBE, OCD; man soll den Ort des Durchschnittpunktes M dieser beiden Kreise finden.

19) Von einem Punkte A (Fig. 48g) zieht man zwei beliebige Gerade AB, AM unter einem gegebenen Winkel, verlängert

die erste Gerade so weit, bis sie eine gegebene Gerade CD schneidet und nimmt endlich auf der zweiten einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, daß sich verhält:

$$AM : AB = p : q;$$

man soll den Ort des Punktes M bestimmen.

20) Den Ort des Punktes M zu finden, wenn in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Geraden CD ein Kreis tritt.

21) Wenn von einem gegebenen Punkte Sekanten an einen gegebenen Kreis gezogen werden, den Ort der Mitten der in dem Kreise liegenden Sehnen zu finden.

22) Man soll den Ort der Punkte von solcher Beschaffenheit finden, daß die Fußpunkte der von jedem auf die Seiten eines Dreieckes gefällten Perpendikel in gerader Linie liegen.

23) Wenn in einem gegebenen Kreise (Fig. 48h) auf dem Halbmesser OC ein Stück OM = dem Perpendikel CD genommen wird, den Ort des Punktes M zu finden. Ebenso den Ort des Punktes M zu finden, wenn OM = OD genommen wird.

24) Wenn zur Construktion eines Viereckes ABCD nur die drei Seiten AB, BC, CD und die Diagonale AC gegeben sind, so daß das Viereck unbestimmt ist, zu finden: 1) den Ort der vierten Winkelspitze D, 2) den der Mitte der Diagonale BD, und 3) den Ort der Mitte der Geraden, welche die Mitten der beiden Diagonalen verbindet.

Viertes Kapitel.

Construction verschiedener Gleichungen.

§. 41.

Construction der binomischen Gleichung.

Die binomische Gleichung bietet zwei Hauptformen dar, nämlich:

$$y^n = x^m, \quad x^m y^n = 1,$$

und bei jeder dieser Formen sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich wenn die Exponenten m, n beide ungerade Zahlen sind, oder wenn der eine eine gerade und der andere eine ungerade Zahl ist. Beide Exponenten können nicht gerade sein, weil sich sonst die Gleichung in zwei Gleichungen niedrigerer Grade zerlegen ließe.

1) bei der ersten Form:

$$y^{2q+1} = x^{2p+1} \text{ oder } y = \sqrt[2q+1]{x^{2p+1}}$$

entspricht jedem reellen Werthe von x ein reeller Werth von y von demselben Zeichen. Für $x = o$ ist auch $y = o$, und wenn man x stetig von $x = o$ bis $x = +\infty$ zunehmen läßt; so wächst auch y stetig von o bis $+\infty$, wodurch man den in dem Winkel **YAX** (Fig. 49) liegenden unendlichen Curvenzweig **OA** erhält. Wenn sich x stetig von o bis $-\infty$ ändert, so ändert sich y stetig von o bis $-\infty$, wodurch man den in dem Winkel Y_1OX_1 liegenden Curvenzweig OA_1 erhält. Die Punkte M, M_1 deren Abscissen gleich und entgegengesetzt sind, haben auch gleiche und entgegengesetzte Ordinaten; die Dreiecke MOP, M_1OP_1 sind einander gleich, MOM_1 ist eine gerade Linie und $MO = M_1O$. Jede durch den Anfangspunkt gezogene und zu beiden Seiten desselben von der Curve begrenzte Gerade wird also in diesem Punkte in zwei gleiche Theile getheilt, und folglich ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein Mittelpunkt der Curve, d. h. ein Punkt von solcher Beschaffenheit: daß jede durch denselben gehende Gerade die Curve in Punkten schneidet, welche paarweise auf beiden Seiten desselben liegen und gleichweit von demselben entfernt sind.

2) Bei der zweiten Form:

$$y^{2q} = x^{2p+1} \text{ oder } y = \pm \sqrt[2q]{x^{2p+1}}$$

gibt jeder positive Werth von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für y, während negativen Werthen von x imaginäre Werthe von y entsprechen. Die Curve besteht also aus den beiden Zweigen **OA**, OA_1 (Fig. 50), welche über und unter der Axe der x eine symmetrische Lage haben; sie hat keinen Punkt zur Linken der Axe YY_1, und die Axe **OX** wird bei rechtwinkligen Coordinaten eine Axe der Curve genannt. Denn unter Axe einer Curve versteht man überhaupt jede Gerade, welche die Curve in zwei symmetrische Theile theilt, so daß die Punkte der Curve paarweise auf Perpendikeln auf der Axe und in gleichen Abständen von dieser liegen. Wenn x von o bis $+\infty$ wächst, so wächst auch y dem absoluten Werthe nach von o bis $+\infty$; die beiden Curvenzweige erstrecken sich also auf der Seite der positiven x ins Unendliche und entfernen sich von der Axe der x unendlich weit.

3) Wenn:

$$x^{2p+1}\, y^{2q+1} = 1 \text{ oder } y = \frac{1}{\sqrt[2q+1]{x^{2p+1}}}$$

ist, so entspricht jedem reellen Werthe von x ein reeller Werth von y mit demselben Zeichen, und wenn x von o bis $+\infty$ zunimmt, so nimmt y von $+\infty$ bis o ab, so daß der erste Curvenzweig **BCA** (Fig. 51) in dem Winkel **YOX** liegt. Wenn x von o bis $-\infty$ abnimmt, so nimmt y von $-\infty$ bis o zu, und der zweite Curvenzweig $B_1C_1A_1$ liegt in dem Winkel Y_1OX_1. Der Anfangspunkt **O** der Coordinaten ist ein Mittelpunkt der Curve. Die Curvenzweige **CA**, **CB** nähern sich den Axen **OX**, **OY** unendlich; denn je größer x wird, desto kleiner wird y und kann mit zunehmendem x kleiner werden, als jede gegebene, oder angebbare, noch so kleine Größe — und wenn y unendlich wächst, so nimmt x unendlich ab. Man nennt aber jede Gerade, welcher sich ein Curvenzweig unendlich oder unbeschränkt nähert, eine Asymptote desselben; folglich sind **OX**, **OY** resp. die Asymptoten von **CA**, **CB** — und ebenso sind OX_1, OY_1 Asymptoten der unendlichen Curvenzweige C_1A_1, C_1B_1.

4) Wenn:

$$y^{2q}\, x^{2p+1} = 1 \text{ oder } y = \frac{\pm 1}{\sqrt[2q]{x^{2p+1}}}$$

ist, so liegt die Curve ganz auf der rechten Seite der Axe Y_1Y (Fig. 52), die Axe der x ist eine Axe der Curve, und Y_1Y, **OX** sind Asymptoten von **BCA**, $B_1C_1A_1$.

§. 42.

Construction der Gleichung der Conchoide:

$$y = \pm \frac{c+x}{x}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (\alpha)$$

Offenbar ist y nur für die zwischen — a und + a liegenden Werthe von x reell, so daß, wenn man durch die in der Entfernung a vom Anfangspunkte O liegenden Punkte **A**, **D** (Fig. 53) Parallelen zur Axe der y zieht, die Curve ganz zwischen diesen Parallelen liegt. Da ferner jeder zwischen $-a$ und $+a$ liegende Werth von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y gibt, so folgt: daß die Curve aus zwei in Beziehung auf die Axe der x symmetrischen Theilen besteht, so daß man nur einen derselben, etwa den dem Zeichen $+$ entsprechenden, zu construiren braucht. Wenn x von o bis $+a$ zunimmt, so nimmt y von $+\infty$ bis o ab, und folglich ist die Axe der y eine Asymptote des Curvenzweiges BAB_1. Hinsichtlich des zur Linken der Axe der y liegenden Curvenzweiges sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1) Es ist $a < c$. Wenn in diesem Falle x von o bis $-a$ abnimmt, so nimmt y von ∞ bis o ab und man erhält den Curvenzweig EDE_1 (Fig. 53). Für $x = -c$ ist $y = o$, welches den isolirten Punkt C gibt, der als mit in der Gleichung (α) enthalten angesehen werden muß.

2) Wenn $a = c$ ist, so fällt C mit D zusammen, und es gibt keinen isolirten Punkt mehr (Fig. 54).

3) Wenn $a > c$ ist, und x ändert sich von o bis $-c$, so nimmt y von $+\infty$ bis o ab, wodurch man den Curvenzweig EC (Fig. 55) erhält. Wenn x von $-c$ bis $-a$ abnimmt, so geht y von o aus und wird wieder o, ohne in dem Intervalle unendlich zu werden, welches den Bogen CD gibt.

§. 43.

Construction der Gleichung.

$$(y^2 + x^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = a^4 - c^4. \qquad (\mu)$$

Da sie nur Glieder mit geraden Potenzen von y enthält, so gibt jeder Werth von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y; und folglich ist X_1X eine Axe der Curve. Aus demselben Grunde ist Y_1Y eine Axe der Curve. Die Curve besteht also aus vier gleichen Theilen, welche in den vier Coordinatenwinkeln liegen, so daß je zwei Punkte derselben auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden und in gleicher Entfernung von diesem Punkte liegen. Der Anfangspunkt ist folglich ein Mittelpunkt der Curve.

Aus der Gleichung (μ) folgt zunächst:

$$y^2 = -(c^2+x^2) \pm \sqrt{a^4 + 4c^2x^2},$$

und hieraus, wenn man nur das positive Zeichen der Wurzelgröße nimmt, weil das negative blos imaginäre Werthe für y gibt:

$$y = \pm\sqrt{\sqrt{a^4+4c^2x^2}-(c^2+x^2)} = \pm\sqrt{\frac{(a^2+c^2-x^2)(a^2-c^2+x^2)}{a^2+x^2+\sqrt{a^4+4c^2x^2}}}.$$

Da der Nenner dieses Ausdruckes für y nothwendig positiv ist, so kann man davon abstrahiren, und da die beiden Factoren des Zählers nicht zugleich negativ sein können; so müssen sie beide positiv sein. Es ist folglich:

1) $x^2 < a^2 + c^2$, $d^2 = a^2 + c^2$,
$\quad < d^2$

2) $x^2 > c^2 - a^2$, $e^2 = c^2 - a^2$,
$\quad > e^2$.

Nimmt man $OA = OA_1 = d$ (Fig. 56, 57 . . . .), so liegt die Curve zwischen den durch die Punkte A, A_1 zu der Axe der y gezogenen Parallelen. Hinsichtlich der zweiten Bedingung müssen mehrere Fälle unterschieden werden.

1) Es ist $a > c$. In diesem Falle wird die zweite Bedingung immer erfüllt. Es ändert sich also x von $-d$ bis $+d$. Wenn x von o bis $+d$ wächst, so ändert sich y von $OB = \sqrt{a^2-c^2}$ bis o, und man hat eine geschlossene Curve (Fig. 56 und 57).

2) Es ist $a = c$. In diesem Falle vereinigen sich die beiden Punkte B, B_1 in O, und man hat die Curve in Fig. 58, welche eine Lemniscate ist.

3) Es ist $a < c$. In diesem Falle ändert sich x von $+e$ bis $+d$ und von $-e$ bis $-d$; und wenn man $OC = OC_1 = e$ nimmt; so erhält man zwei geschlossene Curven (Fig. 59).

§. 44.

Construction der Gleichung:

$$y = x \pm \frac{2}{x^2}\sqrt{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}.$$

Wenn man zunächst die Gerade DD_1 (Fig. 60) construirt, deren Gleichung $y = x$ ist, so erhält man die irgend einer Abscisse OP entsprechenden beiden Punkte M, M_1 der Curve, wenn man auf der Parallele zur Axe der y von dem Punkte I aus zwei Längen:

$$IM = IM_1 = \frac{2}{x_2}\sqrt{x^3+2x^2-5x-6}$$
$$= \frac{2}{x^2}\sqrt{(x+1)(x+3)(x-2)}$$

nimmt. Die Gerade DD_1, welche die zur Axe der y parallelen Sehnen in zwei gleiche Theile theilt, heißt ein Durchmesser der Curve.

§. 45.

Construction der Gleichung:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{x+a}},\ a > o,\ b > o.$$

Die Ordinate y ist von $x = -a$ bis $x = -\infty$ reell; für $x = -a = OA_1$ ist $y = \infty$, und wenn x sich von $-a$ bis $-\infty$ (Fig. 61) ändert; so nimmt y von $+\infty$ bis zu einem gewissen Werthe ab, und wächst dann wieder gegen $+\infty$, wodurch man den Curvenzweig EFG erhält. Die Axe der x ist eine Axe der Curve.

Wenn $b > a$ ist, so ist y von $x = o$ bis $x = a$ reell, und man erhält die geschlossene Curve OA.

Von $x = a$ bis $x = b$ ist y imaginär, und wenn endlich x von b bis $+\infty$ wächst, so wächst y von o bis $+\infty$, wodurch man den unendlichen Curvenzweig BCD (Fig. 61, 62 u. 63) erhält.

Wenn $b < a$ ist, so hat man Fig. 63 wieder.

Wenn $b = a$ ist, so fallen die Punkte A, B zusammen (Fig. 64).

§. 46.

Die gegebene Gleichung, und folglich ihre Construction, wird oft durch eine Coordinatenverwandlung vereinfacht. Es sei z. B. die Gleichung:

$$(4x + 3y - 3)^2 - 25(x + 7y - 7) = o$$

oder:

$$(4x + 3(y - 1))^2 - 25(x + 7(y - 1)) = o.$$

in Bezug auf rechtwinklige Axen OX, OY zu construiren, so erhellet auf der Stelle: daß sich diese Gleichung auf:

$$(4x + 3y_1)^2 - 25(x + 7y_1) = o$$

reducirt, wenn man den Anfangspunkt auf der Axe der y um die Länge $OO' = 1$ verrückt, indem die Axen ihre frühere Richtung beibehalten.

Nimmt man nun an, daß sich die neuen Axen um einen beliebigen Winkel α drehen, so daß O'X' und OX den Winkel α mit einander bilden, und man substituirt die entsprechenden Transformationsformeln in die letzte Gleichung; so geht sie über in:

$$[(4\cos\alpha + 3\sin\alpha)x' + (3\cos\alpha - 4\sin\alpha)y']^3$$
$$- 25[(\cos\alpha + 7\sin\alpha)x' + (7\cos\alpha - \sin\alpha)y'] = 0.$$

Nun kann man den Winkel α so annehmen: daß der Coefficient von x', oder von y' in der ersten Klammer verschwindet, so daß die Gleichung in Bezug auf x' oder y' vom ersten Grade wird. Läßt man z. B. den Coefficienten von y' verschwinden, und setzt zu dem Ende:

$$3\cos\alpha - 4\sin\alpha = 0 \text{ oder } \tan\alpha = \frac{3}{4};$$

so nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$y' = x'^3 - x' = x'(x'^2 - 1),$$

welche sich leicht construiren läßt.

§. 47.

Wenn man die Gleichung:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

welche das Descartes'sche Folium ausdrückt, ähnlich behandelt, indem man die Axen um einen Winkel von 45° drehet; so geht sie in folgende über:

$$3(x' + a')y'^2 + (x' - 3a')x'^2 = 0, \text{ wo } a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

folglich:

$$y' = \mp x'\sqrt{\frac{3a' - x'}{3(x' + a')}},$$

und die entsprechende Curve ist Fig. 65.

§. 48.

Reduction der allgemeinen Gleichung einer Curvengattung.

Es sei:

$$F(x, y, A, B, \ldots H) = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung einer Curvengattung, wo $A, B, \ldots H$ willkürliche Parameter von der Zahl n bedeuten und die Axen als rechtwinklig vorausgesetzt sind; so kann man, statt diese allgemeine Gleichung zu construiren, sie zuerst vereinfachen, indem man sie auf bewegliche Axen OX', OY' (Fig. 27) bezieht. Werden diese beweglichen Axen ebenfalls als rechtwinklig angenommen, sind p, q die Coordinaten des Anfangspunktes O' und ist α der Winkel, welchen OX' mit OX bildet; so wird die Gleichung (1):

$$f(x', y', A, B, \ldots H, p, q, \alpha) = 0. \qquad (2)$$

Nun lassen sich aber im Allgemeinen zwischen den n Parametern A, B, . . . H und den n andern Parametern a, b, . . . e, p, q, α immer n Relationen aufstellen, so daß die Gleichung (2) nur noch die n — 3 willkürlichen Parameter a, b, . . . e enthält. Wenn z. B. die Gleichung n Coefficienten enthält, welche Functionen der willkürlichen Parameter sind, so macht man drei derselben verschwinden und setzt die n — 3 übrigen gleich a, b, . . . e, so daß die Gleichung (2) in folgende übergeht:

$$\varphi(x', y', a, b, \ldots e) = o, \qquad (3)$$

welche nur n — 3 willkürliche Parameter enthält.

Die n ursprünglichen Parameter A, B, . . . H sind also durch die n Parameter a, b, . . . e, p, q, α ersetzt, wovon die 3 letzten p, q, α, welche sich auf die Beweglichkeit der Axen O'X', O'Y' beziehen, nicht explicite in der Gleichung (3) vorkommen. Wenn die Axen O'X', O'Y' fest liegen, aber a, b, . . . e sich ändern, so gibt die Gleichung (3) alle Curven der Gattung nur in besondern Lagen, weil die damit verbundene Aenderung von p, q, α nur eine Veränderung der Curven in ihrer Ebene, aber keine Formveränderung derselben bewirkt.

Man kann sogar die Anzahl der in der Gleichung (1) explicite vorkommenden willkürlichen Parameter um 4 vermindern. Denn wenn die beweglichen Axen nicht wie vorhin einen constanten, sondern einen veränderlichen Winkel ϑ mit einander bilden, und man in die Gleichung (1) für x, y die Werthe (§. 12):

$$x = p + x' \cos\alpha + y \cos(\vartheta + \alpha),$$
$$y = q + x' \sin\alpha + y' \sin(\vartheta + \alpha)$$

setzt, und endlich die vier Größen p, q, α, ϑ so bestimmt, daß 4 Coefficienten verschwinden; so erhält man, wenn man die n — 4 andern Coefficienten gleich a, b, . . . d setzt, eine Gleichung:

$$\psi(x', y', a, b, \ldots \alpha) = o, \qquad (4)$$

welche nur n — 4 willkürliche Parameter enthält. Diese Gleichung (4) drückt in Bezug auf dasselbe Axensystem nicht alle Curven der Gattung aus, wie die Gleichung (3). Gibt man dem Winkel ϑ einen gewissen Werth, construirt die in der Gleichung (4) enthaltenen Curven und läßt dann ϑ sich ändern; so wird die Form der Curven geändert.

Später werden wir diese Reductionsmethode auf die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen anwenden. Die erste Reduction läßt sich auf mehrere Arten bewerkstelligen, und die allgemeine Gleichung des zweiten Grades wird entweder auf die Form:

$$y^2 + ax^2 + bx = 0,$$

oder auf eine der drei Formen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px$$

zurückgeführt. Die zweite Reduction gibt für die Ellipse:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

und für die Hyperbel:

$$xy = a^2.$$

§. 49.

Zuweilen läßt sich die Gleichung der Curve nach keiner der beiden Veränderlichen auflösen, und man muß zu diesem Zwecke eine Hülfsveränderliche anwenden. Ist z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^4 y^4 + (x^2 - 4)(y - x)^4 = 0, \qquad (1)$$

und man setzt:

$$xy = t(y - x),$$

so ergibt sich:

$$x = \pm \sqrt{4 - t^4}, \qquad (2)$$

und:

$$y = \frac{tx}{t-x} = \frac{\pm t\sqrt{4-t^4}}{t \mp \sqrt{4-t^4}}. \qquad (3)$$

Die Gleichung (1) kann nun durch die beiden Gleichungen (2) und (3) ersetzt werden, worin t als unabhängige Veränderliche zu betrachten ist. Nur für die zwischen $-\sqrt{2}$ und $+\sqrt{2}$ liegenden Werthe von t sind x und y reell, und x ändert sich von -2 bis $+2$. Nimmt man folglich $OA = OA_1 = 2$ (Fig. 66), so liegt die Curve ganz zwischen den durch die Punkte A und A_1 zu der Axe der y gezogenen Parallelen. Wenn man zunächst das Zeichen + nimmt, so hat man:

$$x = \sqrt{4 - t^4},$$

$$y = \frac{tx}{t-x} = \frac{t\sqrt{4-t^4}}{t-\sqrt{4-t^4}} = \frac{t\sqrt{4-t^4}\,(t+\sqrt{4-t^4})}{t^4 + t^2 - 4},$$

und wenn man die Wurzeln der Gleichung $t^4 + t^2 - 4 = 0$ mit t'^2, t''^2 bezeichnet; so ist:

$$y = \frac{t\sqrt{4-t^4}\,(t+\sqrt{4-t^4})}{(t^2+t''^2)\,(t^2-t'^2)}, \qquad (4)$$

$$t'^2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, t' = \pm 1,25.$$

Wenn sich t von $-\sqrt{2}$ bis o ändert, so wächst x von o bis $+2$, die Ordinate $y = \frac{tx}{t-x}$ ist in diesem Intervalle positiv, wächst von o bis zu einem gewissen Werthe und nimmt dann wieder bis zu o ab, wodurch man den Curvenzweig **OBA** erhält.

Wenn sich t von o bis $+\sqrt{2}$ ändert, so nimmt x von $+2$ bis o ab, die Ordinate (4) ist in dem Intervalle von $t = o$ bis $t = t'$ negativ und ändert sich von o bis $-\infty$, so daß man den unendlichen Curvenzweig **AC** erhält. Von $t = t'$ bis $t = +\sqrt{2}$ ist die Ordinate positiv und ändert sich von $+\infty$ bis o, so daß man den unendlichen Curvenzweig **DO** erhält. Dem Zeichen — entspricht der zur Linken der Axe der y liegende Theil der Curve, welchen man sofort erhält, wenn man bemerkt: daß der Anfangspunkt ein Mittelpunkt der Curve ist.

§. 50.

Construction von Curven, deren Gleichungen in Polarcoordinaten gegeben sind.

Epicycloide (§. 9):

$$\varrho = 2a(1 - \cos\vartheta) = 4a \sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Wenn ϑ von o bis π wächst, so nimmt ϱ stetig von o bis 4a zu, so daß man den Curvenzweig **OMB** (Fig. 13) erhält, und wenn sich ϑ von o bis $-\pi$ ändert, so durchläuft ϱ dieselben Werthe wieder wie zuvor, so daß man einen zweiten Curvenzweig OM_1B erhält, welcher gegen die Polaraxe eine symmetrische Lage hat. Es ist überflüssig ϑ größere Werthe als π zu geben, da dieselben Werthe von ϱ periodisch wiederkehren.

Construction der Curve $\varrho = f(\mu\vartheta)$, wo $f(\mu\vartheta)$ irgend eine Function trigonometrischer Linien des Bogens $\mu\vartheta$ bedeutet. Wenn ϑ sich von o bis $\frac{2\pi}{\mu}$ ändert, so ändert sich $\mu\vartheta$ von o bis 2π, und wenn ϑ sich von $\frac{2\pi}{\mu}$ bis $\frac{4\pi}{\mu}$ ändert, so ändert sich $\mu\vartheta$ von 2π bis 4π, und ϱ nimmt wieder dieselben Werthe und in derselben Ordnung wie zuvor an, so daß man einen zweiten dem ersten gleichen Curvenzweig erhält, u. s. f. Die Curve besteht also aus einer Reihe gleicher Undulationen, wovon jede einen Winkel $\frac{2\pi}{\mu}$ umfaßt.

Wenn μ eine ganze Zahl m ist und man theilt den Kreisumfang in m gleiche Theile, so umfaßt jede Undulation den Winkel $\frac{2\pi}{\mu}$ und die $(m+1)^{te}$ Undulation fällt mit der ersten zusammen, u. s. f.

Wenn μ ein nicht reducirbarer Bruch $\frac{m}{n}$ ist, und der Kreisumfang wird wieder in m gleiche Theile getheilt; so umfaßt jede Undulation n solcher Theile. Nimmt man immer den nten Theilungspunkt nach der Reihe, so werden nach n Umläufen alle Theilungspunkte durchlaufen und nach m Undulationen kommt man wieder auf den Ausgangspunkt.

Allgemein: k Undulationen umfassen einen Winkel oder Bogen $= \frac{2k\pi}{\mu} = \frac{k}{\mu} . 2\pi$. Wenn also μ incommensurabel ist, so kann $\frac{k}{\mu}$ keine ganze Zahl sein, man kommt niemals auf den Ausgangspunkt zurück, und die Undulationen folgen in unendlicher Anzahl auf einander. Es sei z. B.:

$$\varrho = a + \cos\frac{5\,\vartheta}{n},$$

wo n und 5 prim unter sich sind.

1) Ist $a > 1$, so liegt ϱ zwischen $a + 1$ und $a - 1$, und wenn man mit den Halbmessern $Oa = a - 1$, $OA = a + 1$ (Fig. 67) um den Pol O zwei Kreise beschreibt; so liegt die Curve zwischen diesen Kreisen. Die volle Curve entspricht $n = 1$ und die punktirte entspricht $n = 2$.

2) Wenn $a = 1$ ist, so variirt ϱ zwischen o und 2, und der innere Kreis reducirt sich auf den Pol O (Fig. 68).

3) Ist $a < 1$ und $n = 1$, so verschwindet ϱ für einen Werth α von ϑ, der kleiner als $\frac{\pi}{5}$ ist, so daß man von $\vartheta = o$ bis $\vartheta = \alpha$ den Curvenzweig ABO (Fig. 69) erhält. Von $\vartheta = \alpha$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{5}$ ändert sich ϱ von o bis $-(1 - a)$ und man erhält den kleinen Zweig oba. Von $\vartheta = \frac{\pi}{5}$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{5} + \alpha$ variirt ϱ von $1 - a$ bis o, welches den Zweig oca gibt. — Endlich von

$\vartheta = \frac{\pi}{5} + \alpha$ bis $\vartheta = \frac{2\pi}{5}$ ändert sich ϱ von o bis $1 + a$, welches den Zweig OC'A' gibt. Die Undulation ist also hier AB bac OCA'.

§. 51.

Construction transcendenter Curven.

1) Es sei $y = \sin x$, so erhält man, wenn x sich von o bis 2π ändert, eine aus zwei gleichen Theilen OAI, IBO' (Fig. 70) bestehende erste Undulation OAIBO', welche sich von 2π bis 4π, von 4π bis 6π ... wiederholt.

2) Es sei $y = \tang x$, so erhält man, wenn x sich von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ ändert, einen ersten Zweig AOB (Fig. 71), welcher sich von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = \frac{3\pi}{2}$, ... wiederholt, so daß die Curve aus unendlich vielen gleichen Zweigen besteht, wovon jeder ein Intervall $= \pi$ umfaßt.

3) Es sei $\cos y = m - \cos x$, wo m positiv ist und zwischen 1 und 2 liegt. Da $\cos y < 1$ sein muß, so muß $\cos x > m - 1$ sein. Es sei α der kleinste Bogen oder Winkel, dessen Cosinus $= m - 1$ ist. Wenn x sich von $-\alpha$ bis o und von o bis $+\alpha$ ändert, so ändert sich y von o bis α und von α bis o, oder von o bis $-\alpha$ und von $-\alpha$ bis o, so daß man um den Anfangspunkt eine geschlossene Curve erhält. Setzt man ferner $2k\pi + x'$, $2k'\pi + y'$ resp. für x, y, d. h. verlegt man den Anfangspunkt in einen Punkt O', dessen Coordinaten $2k\pi$, $2k'\pi$ sind; so wird die gegebene Gleichung nicht geändert, und man erhält um den Punkt O' dieselbe geschlossene Curve, wie um O. Zieht man also in dem gegenseitigen Abstande 2π Parallelen zu den Axen der x und der y, so kann man jeden Durchschnittspunkt derselben zu dem neuen Anfangspunkte O' nehmen, und man erhält um jeden dieselbe geschlossene Curve (Fig. 72). Wenn $m = 2$ ist, so reduciren sich diese Curven auf Punkte.

4) Es sei $\sin y = m \sin x$, wo m positiv und < 1 ist. Ist α der kleinste Winkel oder Bogen, dessen Sinus $= m$ ist, und x ändert sich von o bis $\frac{\pi}{2}$, von $\frac{\pi}{2}$ bis π, von π bis $\frac{3\pi}{2}$, von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π; so ändert sich y einerseits von o bis α, von α bis o, von

o bis $-\alpha$, von $-\alpha$ bis o, und andererseits von π bis $\pi-\alpha$, von $\pi-\alpha$ bis π, von π bis $\pi+\alpha$, von $\pi+\alpha$ bis α, so daß man die beiden Undulationen **OAIBO'**, **CDEFC'** (Fig. 73) erhält, welche sich längs der Axe der x unaufhörlich wiederholen. — Wenn man zu y die Größe $2k\pi$ addirt, so wird die Gleichung nicht geändert, und die beiden Curven OO', CC' wiederholen sich folglich unaufhörlich über und unter XX_1.

§. 52.

Das bisher zur Untersuchung einer Curve angewandte Verfahren bestand darin: daß man eine der beiden Coordinaten, z. B. die Abscisse x, als ursprüngliche oder unabhängige Veränderliche und die andere, die Ordinate y, als eine durch die gegebene Gleichung der Curve bestimmte Function der Abscisse x betrachtet, und untersucht, für welche Werthe von x die Ordinate y reell ist, wodurch man die Anzahl und Grenzen der Curvenzweige erhält. Untersucht man alsdann die Veränderungen der Ordinate y zwischen den gefundenen Grenzen, so bekommt man eine erste, noch sehr unvollkommene Skizze der Curve; denn die genaue Form der Curve, ihre Richtung und Krümmung in jedem Punkte, 2c. 2c. bleiben noch zu bestimmen, womit wir uns in den nächsten Kapiteln beschäftigen wollen.

§. 53.

Uebungsaufgaben.

Man soll folgende Curven construiren:

1) die Cissoide: $y^2(2r-x) - x^3 = 0$, (Fig. 14),

2) Pascals Schneckenlinie: $\varrho = 2r\cos\vartheta \pm a$, (Fig. 12),

3) $x^4 - r^2(x^2+y^2) = 0$ oder $\varrho = \dfrac{r}{\cos^2\vartheta}$, (Fig. 11),

4) $(x^2+y^2)^3 - l^2x^2y^2 = 0$ oder $\varrho = \dfrac{1}{2}\sin 2\vartheta$,

5) $(x+y)[x^2+y^2+a(x+y)] - axy = 0$. Die Axen um 45° gedrehet.

6) $y = x \pm \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$,

7) $y = x \pm \sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}$,

8) $y^2 = x - x^3$,
9) $y^2 = x^3 - x^4$,
10) $y^2 = \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 4}$,
11) $y^2 = \frac{x^3 - a^3}{x + b}$, (Fig. 74),
12) $y^3 = \frac{x^4 - a^2x^2}{2x - a}$, (Fig. 75),
13) $\varrho = a \cos\vartheta + b$, $b > a$, (Fig. 76),
14) $\varrho = a \sin 3\vartheta$, (Fig. 77),
15) $\varrho = a(\sin 2\vartheta - \sin\vartheta) = a \sin\vartheta\,(2\cos a - 1)$, (Fig. 78),
16) $\varrho = a^2 . \frac{\sin 3\vartheta}{\cos\vartheta}$, (Fig. 79),
17) $\varrho = a(\operatorname{tang}\vartheta - 1)$, (Fig. 66),
18) $\varrho = \frac{a\,\vartheta^2}{\vartheta^2 - 1}$, (Fig. 81),
19) $x^4 - ax^2y + by^3 = o$, (Fig. 82),
20) $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = o$, (Fig. 83),
21) $x^4 - x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = o$, (Fig. 84),
22) $x^5 + bx^4 - a^3y^2 = o$, (Fig. 85),
23) $(by - cx)^2 = (x - a)^5$, (Fig. 86),
24) $x^4 - ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = o$, (Fig. 87),
25) $a^3y^2 - 2abx^2y - x^5 = o$, (Fig. 88),
26) $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = o$, (Fig. 89),
27) $(y - c)^2 = (x - a)^6 (x - b)$, $a > b$, (Fig. 90),
28) $xy^2 + 2a^2y - x^3 = o$, (Fig. 80).
29) $xy = a(x + y)$,
30) $\sqrt{y} \pm \sqrt{x} = \sqrt{a}$,
31) $y = \sin x \pm \cos x$,
32) $y = \operatorname{arc.} \cos(1 - x)$,
33) $y = \operatorname{arc.} \operatorname{tang}(a + x)$,
34) $y = (\log x)^3$,
35) $y = e^{\cos x}$,
36) $\varrho = a \sec\vartheta - b$,
37) $\varrho = a(1 + \cos\vartheta)$,
38) $\varrho = a \cos\vartheta$,
39) $\varrho = a \operatorname{tang}\vartheta$,
40) $\varrho = a(\cos\vartheta - \sin\vartheta)$,
41) $\varrho = a \sin 2\vartheta$,

42) $\varrho = a(1 + 2\sin\frac{1}{2}\vartheta)$,
43) $\varrho = a\sec\vartheta$,
44) $\varrho = a\sec\vartheta.\tan^2\vartheta$.
45) $x^2y - aby + a^2x = o$, (Fig. 93),
46) $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 4ay^3 - 4ax^2y + 8a^2y^2 - 8a^3y = o$, (Fig. 94),
47) $x^4 - 2ax^3\sqrt{2} + 2a^2x^2 - ay^3 - a^2y^2 = o$, (Fig. 95),
48) $y^4 - 6ay^3 + 14a^2y^2 - 16a^3y - x^4 + 4a^2x^2\sqrt{2} = o$, (Fig. 96),
49) $x^4 - 2a^2x^2 - 4ay^3 + a^4 = o$, (Fig. 97),
50) $y^4 - 4ay^3 - 8a^2y^2 + 4x^4 - 8a^2\sqrt{2}x^2 + 8a^4 = o$, (Fig. 98),
51) $x^4 - 2ax^2y - 2a^2y^2 + ay^3 + y^4 = o$, (Fig. 91),
52) $y^4 - axy^2 + x^4 = o$, (Fig. 92).

Fünftes Kapitel.

Tangenten im Parallelcoordinatensysteme.

§. 54.

Wenn man eine Sekante MM′ (Fig. 99 und 100) einer Curve AB sich um den Punkt M so drehen läßt, daß sich der Punkt M′ dem Punkt M unendlich nähert; so nähert sich diese Sekante einer Grenzlage MT, welche die Tangente der Curve im Punkte M genannt wird.

Es seien x, y die Coordinaten des Punktes M und $x' = x + h$, $y' = y + k$ die des Punktes M′, so ist die Gleichung der Sekante MM′:

$$Y - y = \frac{y' - y}{x' - x}(X - x) = \frac{k}{h}(X - x),$$

wo X, Y die laufenden (veränderlichen) Coordinaten bedeuten. Wenn sich nun der Punkt M′ dem Punkte M unendlich oder unbeschränkt nähert, so nähern sich h und k gleichzeitig unbeschränkt der Grenze Null, und das Verhältniß $\frac{k}{h}$ nähert sich unbeschränkt einer gewissen Grenze I; folglich wird die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Curve:

$$Y - y = I.(X - x).$$

Tangente im Anfangspunkte. — Geht die Curve durch den Anfangspunkt O (Fig. 101) der Coordinaten und ist M ein benachbarter Punkt der Curve, dessen Coordinaten x, y sind, so ist die Gleichung der Sekante OM:

$$Y = \frac{y}{x} X,$$

und die Gleichung der Tangente OT im Anfangspunkte wird erhalten, wenn man die Grenze von $\frac{y}{x}$ sucht, indem sich der Punkt M dem Anfangspunkte O unbeschränkt nähert.

Beispiel 1. Es sei $y^n = x^m$, so ist $\frac{y}{x} = x^{\frac{m}{n} - 1}$, und und wenn x gegen Null convergirt; so convergirt das Verhältniß $\frac{y}{x}$ gegen o, oder gegen ∞, jenachdem m $\gtrless$ n ist. Im ersten Falle ist die Axe der x und im zweiten Falle die der y eine Tangente der Curve im Anfangspunkte der Coordinaten.

Beispiel 2. Es sei $y = \sin x$, so ist die Grenze von $\frac{y}{x}$ = Grenze von $\frac{\sin x}{x} = 1$, wofür wir der Kürze wegen immer setzen wollen: Gr. $\frac{y}{x}$ = Gr. $\frac{\sin x}{x}$; und folglich halbirt die Tangente OT (Fig. 70) im Anfangspunkte den Winkel der Axen. Da ferner $\frac{\sin x}{x} < 1$ ist, so folgt: daß die Curve OA zwischen der Tangente und der Axe der x liegt. Um die Tangente im Punkte I′ zu erhalten, verlegt man den Anfangspunkt nach I, d. h. man setzt $\pi + x'$ statt x in die Gleichung der Curve, wodurch man erhält:

$$y = \sin(\pi + x') = -\sin x', \text{ Gr. } \frac{y}{x'} = -1,$$

und folglich ist die Halbirungslinie IT eine Tangente in I′.

Beispiel 3. Es sei $y = \tang x$, so ist:

$$\text{Gr. } \frac{y}{x} = \text{Gr. } \frac{\tang x}{x} = 1,$$

und folglich ist die Halbirungslinie OT (Fig. 71) wieder die Tangente der Curve im Anfangspunkte. So lange x zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegt, ist bekanntlich $\frac{\tang x}{x} > 1$, und folglich liegt der Curvenzweig OA über der Tangente, also in dem von der Tangente und der Axe der y gebildeten Winkel.

Beispiel 4. Es sei $\sin y = m \sin x$, so ist:

$$\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y}{x} = m \frac{\sin x}{x}, \text{ Gr. } \frac{y}{x} = m.$$

Beispiel 5. Es sei:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2a^2 (y^2 - x^2) = 0,$$

oder mit x^2 dividirt:

$$\left(\frac{y}{x} y + x\right)^2 + 2a^2 \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right] = 0.$$

Zunächst sieht man, daß $\frac{y}{x} < 1$ ist, dem absoluten Werthe nach, und wenn x, y gleichzeitig gegen Null convergiren; so verschwindet das erste Glied der Gleichung: und man hat:

$$\left(\text{Gr.} \frac{y}{x}\right)^2 - 1 = 0, \text{ also Gr. } \frac{y}{x} = \pm 1.$$

Es gibt also zwei Tangenten in O (Fig. 58), nämlich die beiden Halbirungslinien der Coordinatenwinkel; und in der That gehen zwei Curvenzweige durch den Anfangspunkt O. Da ferner dem absoluten Werthe nach $\frac{y}{x} < 1$ ist, so liegen die beiden Curvenzweige zwischen der Tangente und der Axe der x.

§. 55.

Tangente in einem beliebigen Punkte M (Fig. 99 u. 100) der Curve.

Die Gleichung der Curve sei zunächst:

$$y = f(x), \qquad (\mu)$$

so hat man, da die Punkte M, M′ auf der Curve liegen, und mithin ihre Coordinaten x, y; $x' = x + h$, $y' = y + k$ der Gleichung (μ) genügen müssen:

$$y = f(x),\; y' = f(x') \text{ oder } y + k = f(x + h),$$

folglich:

$$y' - y = f(x') - f(x) \text{ oder } k = f(x + h) - f(x),$$

und es kommt nun darauf an:

$$\text{Gr.} \frac{y' - y}{x' - x} = \text{Gr.} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \text{ oder Gr.} \frac{k}{h} = \text{Gr.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

zu finden.

Nach dem Anhange ist aber allgemein:

$$\text{Gr.} \frac{k}{h} = \text{Gr} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

also die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

Der Neigungs- oder Richtungscoefficient I der Tangente in irgend einem Punkte der Curve $y = f(x)$ ist also nichts anders, als die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$.

Beispiel. — Es sei $y = f(x) = x^3 - x$, so ist $f'(x) = 3x^2 - 1$; also für den Anfangspunkt $I = -1$, und für die Punkte A, A_1 (Fig. 102), wo die Curve die Axe der x schneidet, $I = 2$.

§. 56.

Wenn die Gleichung der Curve von der Form ist:

$$f(x, y) = 0,$$

d. h. unentwickelt; so kommt es wieder darauf an, aus derselben den Werth von Gr. $\frac{k}{h}$ abzuleiten.

Erste Methode. — Nach Anhang, Formel (33) hat man:

$$\text{Gr.}\ \frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{f'_x}{f'_y};$$

folglich ist die Gleichung der Tangente:

$$\left.\begin{array}{l} Y - y = -\dfrac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(X - x) \\ \text{oder:} \\ (X - x) f'_x(x, y) + (Y - y) f'_y(x, y) = 0, \end{array}\right\} \quad (A)$$

Zweite Methode. — Die Gleichung der Sekante MM' ist von der Form:

$$Y - y = I_1 (X - x), \qquad (1)$$

und die gemeinschaftlichen Auflösungen der simultanen Gleichungen (1) und:

$$f(X, Y) = 0, \qquad (2)$$

geben die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Sekante mit der Curve. Jede aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen entspringende Gleichung gestattet aber dieselben Auflösungen, und wenn man den aus der Gleichung (1) abgeleiteten Werth von Y in (2) setzt; so erhält man die Gleichung mit X:

$$f(X, y + I_1 (X - x)) = 0, \qquad (3)$$

deren Wurzeln, worunter sich auch x und x' befinden, die Abscissen der fraglichen Durchschnittspunkte sind, so daß der erste Theil der Gleichung (3) den Factor $(X - x)(X - x')$ enthält. Läßt man nun die Sekante sich um den Punkt M drehen, so ändert sich I_1

so, daß die Wurzel x′ gegen x convergirt, und der erste Theil der Gleichung (3) den Factor $(X - x)^2$ enthält; d. h. der der Tangente entsprechende Werth I von I_x ist so beschaffen, daß die Gleichung (3) die doppelte Wurzel x hat.

Diese Bedingung ist zur Bestimmung von I hinreichend, und wird erhalten, wenn man ausdrückt, daß x die Ableitung des ersten Theiles der Gleichung (3) verschwinden macht. Diese Ableitung ist aber:

$$f'_X(X, Y) + I \,.\, f'_Y(X, Y),$$

und da dieselbe für x verschwinden muß; so hat man die Gleichung:

$$f_x(x, y) + I \,.\, f'_y(x, y) = 0,$$

woraus folgt:

$$I = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

wie vorhin.

§. 57.

Normale.

Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete senkrechte Gerade wird die Normale der Curve genannt. Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, so ist die Gleichung der Normale:

$$Y - y = \frac{f'_y(x, y)}{f'_x(x, y)}(X - x),$$

oder:

$$\frac{X - x}{f'_x(x, y)} = \frac{Y - y}{f'_y(x, y)}.$$

Subtangente und Subnormale nennt man ferner die Stücke der Abscissenaxe, welche resp. zwischen den Durchschnittspunkten der Tangente und Normale mit dieser Axe und dem Fußpunkte der Ordinate des Berührungspunktes liegen. Offenbar erhält man den Ausdruck für die Subtangente und Subnormale, wenn man in der Gleichung der Tangente und Normale $Y = 0$ setzt und dann daraus den Werth von $X - x$ sucht. Das Zeichen dieses Werthes gibt von selbst an, auf welcher Seite des Fußpunktes der Ordinate die Subtangente und Subnormale genommen werden muß.

Kennt man die Subtangente oder Subnormale, so kann man sofort leicht die Tangente und Normale construiren.

Unter Länge der Tangente und Normale versteht man die Stücke dieser Linien, welche zwischen dem Berührungspunkte und ihrem Durchschnittspunkte mit der Axe der x liegen.

Wenn T die Tangente, N die Normale, S_t die Subtangente und S_n die Subnormale bedeutet; so findet man leicht in rechtwinkligen Coordinaten:

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{I^2}} = \frac{y}{I}\sqrt{1 + I^2},$$

$$N = y\sqrt{1 + I^2},$$

$$S_t = -\frac{y}{I}, \; S_n = y\, I.$$

Beispiel 1. — Für den auf seinen Mittelpunkt und auf rechtwinklige Coordinatenaxen bezogenen Kreis hat man:

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 - r^2) = 0, \; f'_x(x, y) = x, \; f'_y(x, y) = y;$$

folglich ist die Gleichung der Tangente:

$$xX + yY = r^2,$$

und die der Normale:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}.$$

Es gehen mithin alle Normalen des Kreises durch den Mittelpunkt desselben, oder die Tangente ist auf dem nach dem Berührungspunkte gehenden Halbmesser senkrecht.

Beispiel 2. Für die auf ihren Mittelpunkt bezogene Ellipse und Hyperbel:

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$$

findet man leicht:

Gleichung der Tangente:

$$a^2y(Y - y) \pm b^2x(X - x) = 0,$$

oder:

$$a^2yY \pm b^2xX = \pm a^2b^2.$$

Gleichung der Normale:

$$b^2x(Y - y) \mp a^2y(X - x) = 0.$$

Ferner:

$$T = \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2},$$

$$N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2},$$

$$S_t = \frac{a^2 - x^2}{x}, S_n = \mp\frac{b^2x}{a^2}.$$

Beispiel 3. — Parabel: $y^2 = 2px$.
Gleichung der Tangente:

$$(Y - y)\, y - (X - x)\, p = o,$$

oder:

$$yY = p\,(X + x).$$

Gleichung der Normale:

$$Y - y = -\frac{y}{p}\,(X - x).$$

Ferner:

$$T = \sqrt{2x\,(2x + p)},$$
$$N = \sqrt{p\,(2x + p)},$$
$$S_t = 2x,\ S_n = p.$$

Beispiel 4. — Cycloide (S. 13, Fig. 18):

$$x = r\,(\varphi - \sin\varphi),\ y = r\,(1 - \cos\varphi),$$

$$\text{Gr.}\,\frac{k}{h} = I = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2r - y}{y}}.$$

Gleichung der Tangente:

$$Y - y = \sqrt{\frac{2r - y}{y}}\,(X - x).$$

Gleichung der Normale:

$$Y - y = -\sqrt{\frac{y}{2r - y}}\,(X - x).$$

Ferner:

$$T = y\sqrt{\frac{2r}{2r - y}},\ N = \sqrt{2ry} = NM,$$

$$S_t = y\sqrt{\frac{y}{2r - y}},\ S_n = \sqrt{2ry - y^2} = PN.$$

Aus dem Werthe von N und S_n erhellet: daß MN eine Normale, und folglich MN′ eine Tangente ist.

§. 58.

Größte und kleinste Ordinaten.

Man kann den Zuwachs h der Abscisse x immer so klein annehmen, daß das Verhältniß $\frac{k}{h}$ beliebig wenig von seiner Grenze I verschieden ist, und folglich dasselbe Zeichen hat als diese. Wenn also h positiv gesetzt wird, so hat k mit I einerlei Zeichen, so daß, wenn die Abscisse wächst, die Ordinate zu- oder abnimmt, jenachdem I positiv oder negativ ist.

Von A bis B (Fig. 103) ist I positiv und die Ordinate wächst; von B bis C dagegen ist I negativ und die Ordinate nimmt ab, worauf I wieder positiv wird und die Ordinate bis D zunimmt, dann wieder abnimmt, u. s. f. Im Punkte B geht I vom Positiven zum Negativen, und die Ordinate aus dem Wachsen ins Abnehmen über; sie ist also größer, als die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Ordinaten, d. h. sie ist ein Maximum. Im Punkte C geht I vom Negativen zum Positiven und die Ordinate aus dem Abnehmen ins Zunehmen über, ist also kleiner als die benachbarten Ordinaten, d. h. ein Minimum. — Die Punkte der Curve, für welche I das Zeichen ändert, haben also größte, oder kleinste Ordinaten, jenachdem I vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergeht.

Uebrigens sind die Worte „Maximum" und „Minimum" nicht in einem absoluten, sondern nur in einem relativen Sinne zu nehmen, und es ist z. B. die kleinste Ordinate des Punktes E größer als die größte Ordinate des Punktes B.

Wenn die Gleichung der Curve von der Form $f(x) = y$ ist, wo $f(x)$ ein ganzes Polynom bedeutet; so ändert sich die Ableitung $I = f'(x)$ mit x stetig und bleibt endlich mit x, und kann folglich ihr Zeichen nur ändern, wenn sie durch Null geht. Die Abscissen der Punkte der Curve, welchen größte, oder kleinste Ordinaten entsprechen, sind also Wurzeln der Gleichung $f'(x) = o$, und die Tangenten in diesen Punkten sind zu der Axe der x parallel.

Beispiel. Die Gleichung der Curve sei:

$$f(x) = y = x^3 - x,$$

so ist:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = o, \text{ also } x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Es seien B und B_1 (Fig. 90) die Punkte, deren Abscissen resp. $+\sqrt{\frac{1}{3}}$, $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ sind, so ist I von C_1 bis B_1 und von B bis C positiv; aber von B_1 bis B negativ. In B_1 geht I vom Positiven zum Negativen über, so daß die Ordinate dieses Punktes der Curve ein Maximum ist; in B_1 dagegen geht I vom Negativen zum Positiven über und die Ordinate dieses Punktes ist folglich ein Minimum.

§. 59.

Wenn die Gleichung der Curve in der unentwickelten Form $f(x, y) = 0$ gegeben ist, so ist:

$$I = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

und folglich kann I nur sein Zeichen wechseln, wenn der Zähler, oder Nenner seines Ausdruckes das Zeichen ändert. Wenn aber die Curve eine algebraische ist, so sind Zähler und Nenner ganze Polynome von x und y, welche nur ihr Zeichen ändern, indem sie durch Null gehen. Geschieht dieses mit dem Zähler, so geht I durch Null, wie in den Punkten B, C, E (Fig. 103); aber wenn der Nenner durch Null geht, so ändert I das Zeichen, indem es durch das Unendliche geht, und plötzlich von $+\infty$ zu $-\infty$, wie in D, oder von $-\infty$ zu $+\infty$ überspringt. Die Coordinaten der Punkte der Curve, deren Ordinaten Maxima, oder Minima sind, genügen also einem der beiden folgenden Systeme simultaner Gleichungen:

$$f(x, y) = 0, \quad f'_x(x, y) = 0,$$
$$f(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0,$$

und die Tangenten in diesen Punkten sind entweder zur Axe der x, oder zu der der y parallel.

Uebrigens entspricht einer Auflösung des einen, oder des andern der beiden letzten Gleichungssysteme nicht nothwendig ein Maximum, oder Minimum. Im Allgemeinen gibt das erste System die Punkte B, C, E, H, worin die Tangente zu der Axe der x parallel ist. In den drei ersten ist die Ordinate ein Maximum, oder Minimum; aber in dem letzten nicht. Das zweite System gibt die Punkte, worin die Tangente zur Axe der y parallel ist, und man muß sich überzeugen, ob wirklich ein Zeichenwechsel stattfindet.

Beispiel. — Für die Curve:

$$f(x,y) = \tfrac{1}{4}(y^4 + 2x^2y^2 + x^4 + 2c^2y^2 - 2c^2x^2 - a^4 + c^4) = 0,$$

hat man:

$$f'_x(x,y) = x(x^2 + y^2 - c^2), \quad f'_y(x,y) = y(x^2 + y^2 + c^2),$$

folglich: $$I = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}.$$

Der Nenner von I kann nur für $y = 0$ verschwinden; die Tangente ist in den Punkten A und A_1 (Fig. 56, 57, 58, 59) und in den Punkten C, C_1 (Fig. 59) zu der Axe der y parallel; die Abscissen dieser Punkte sind Maxima, oder Minima.

Der Zähler von I kann auf zwei Arten Null werden, nämlich erstens für $x^2 + y^2 = c^2$, woraus folgt:

$$y = \pm \frac{a^2}{2c}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{4c^4 - a^4}{2c}}.$$

Diese Werthe sind im zweiten und dritten Falle (§. 43) immer reell; aber im ersten Falle nur wenn $a < c\sqrt{2}$ ist. Wenn man aus dem Anfangspunkte O mit dem Halbmesser c einen Kreis beschreibt, so schneidet derselbe, wenn $a < c\sqrt{2}$ ist, die Curve in 4 Punkten D, D_1, D' und D'_1, worin die Tangente zur Axe der x parallel ist. Wenn man ferner bemerkt: daß für die Punkte der innerhalb, oder außerhalb des Kreises liegenden Bogen der Curve $x^2 + y^2 - c^2 \lessgtr o$ ist, so erhellet: daß I in jedem der vier Punkte das Zeichen ändert, und folglich die Ordinate y ein Maximum, oder Minimum ist.

Der Zähler verschwindet zweitens für $x = o$. In Fig. 56, welche dem Falle $a > c\sqrt{2}$ entspricht, liegt der Kreis innerhalb der Curve; es ist für die ganze Curve $x^2 + y^2 - c^2$ positiv; folglich geht in B die Größe I vom Positiven zum Negativen über, und es findet ein Maximum der Ordinate statt. In Fig. 57, welche dem Falle entspricht, wo $c\sqrt{2} > a > c$ ist, liegt der Curvenbogen $D'BD$ innerhalb des Kreises, $x^2 + y^2 - c^2$ ist für alle Punkte dieses Bogens negativ, I geht in B vom Negativen zum Positiven über, und es findet folglich ein Minimum der Ordinate statt.

§. 60.

Concavität und Convexität.

Die nähere Untersuchung der stetigen Aenderung der Größe I gibt auch näheren Aufschluß über die Form der Curve. Denn wenn I mit x zugleich wächst, so wächst der Winkel α, welchen die Tangente mit der Axe der x bildet, und durch die Formel:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{I \sin \vartheta}{1 + I \cos \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + \frac{1}{I}}$$

gegeben wird, ebenfalls, und nimmt successive die Werthe $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ (Fig. 104 und 105) an, indem die Curve ihre Concavität (hohle Seite) nach der Seite der positiven y oder nach oben kehrt.

Nimmt dagegen I ab, wenn x zunimmt, so nimmt der Winkel α auch ab, bekommt die successiven Werthe $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ (Fig. 106 und 107) und die Curve kehrt ihre Concavität nach der Seite der negativen y oder nach unten. — Die Fig. 104 u. 106 beziehen sich auf den Fall, wo $I > o$ und die Fig. 105 u. 107 auf den Fall, wo $I < o$ ist. — Die Curve kehrt also ihre Concavität nach der Seite der positiven, oder negativen y, jenachdem I mit zunehmendem x zu- oder abnimmt.

§. 61.

Inflexions- oder Wendepunkte.

Es kann geschehen, daß I bis zu einem gewissen Punkte M (Fig. 108) wächst und dann wieder abnimmt, so daß der Winkel α in diesem Punkte ein Maximum erreicht, und die zuerst nach der Seite der positiven y gekehrte Concavität der Curve ist später nach der Seite der negativen y gekehrt. — Wenn I bis zu einem gewissen Punkte M (Fig. 109) ab- und dann wieder zunimmt, so erreicht α daselbst ein Minimum, und die zuvor nach der Seite der negativen y gekehrte Concavität der Curve ändert ihre Richtung und kehrt sich nach diesem Punkte gegen die Seite der positiven y. Die Punkte M, worin eine Umkehrung der Concavität der Curve stattfindet, heißen Inflexions- oder Wendepunkte. — Bei einem gewöhnlichen Berührungspunkte liegen die beiden daranstoßenden Curventheile auf derselben Seite der Tangente, während in einem Inflexionspunkte die Curve von der einen Seite der Tangente auf die andere übergeht.

Wenn die Gleichung der Curve in entwickelter Form $y = f(x)$ gegeben ist, so nimmt $f(x)$ mit x gleichzeitig zu, oder ab, jenachdem die Ableitung $f'(x)$ positiv, oder negativ ist; und wenn man diesen Satz auf das Polynom $I = f'(x)$ anwendet; so gibt das Zeichen seiner Ableitung $f''(x)$ an, in welchem Sinne sich I ändert. — Die Curve kehrt also ihre Concavität nach der Seite der positiven, oder negativen y, jenachdem die zweite Ableitung $f''(x)$ von $y = f(x)$ positiv, oder negativ ist. Da ferner $f''(x)$ ihr Zeichen nur ändern kann, wenn sie durch Null geht; so folgt: daß die Abscissen der Inflexionspunkte durch die Gleichung $f''(x) = o$ gegeben werden.

Beispiel. — Es sei $y = f(x) = x^3 - x$ (Fig. 102), so ist $f'(x) = 3x^2 - 1$ und $f''(x) = 6x$. Da $f''(x)$ positiv, oder negativ ist, jenachdem x es ist, so kehrt der Curventheil **OBAC** seine Concavität nach der Seite der positiven y, und der Theil $OB_1A_1C_1$ nach der Seite der negativen y.

§. 62.

Wenn die Gleichung der Curve in unentwickelter Form gegeben ist, so hat man:

$$f(x, y) = 0,$$
$$f'_x(x, y) + I f'_y(x, y) = 0, \qquad (i)$$

und wenn man y zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; so erhält man eine Gleichung:

$$F(x, I) = 0,$$

welche als eine Curve ausdrückend angesehen werden kann, deren Abscisse x und deren Ordinate I ist. — Das Zeichen des Ausdruckes:

$$I' = -\frac{F'_x(x, I)}{F'_I(x, I)}$$

lehrt alsdann, ob I' zu- oder abnimmt, und folglich, gegen welche Seite die gegebene Curve ihre Concavität kehrt. — Allein man braucht diese Elimination nicht zu verrichten; denn wenn man die Ableitung I' von I nach Anhang, Formel (35) und (36) sucht, so erhält man leicht:

$$I' = -\frac{f''_{x^2} + I f''_{xy} + I(f''_{xy} + I f''_{y^2})}{f'_y}$$
$$= -\frac{f'^2_y f''_{x^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2}}{f'^3_y}.$$

Hierbei wird bloß vorausgesetzt: daß f'_y nicht Null oder I' nicht unendlich wird. — Wenn die Punkte ausgenommen werden, worin die Tangente zur Axe der y parallel ist, so kann I' nur das Zeichen ändern, wenn sein Zähler das Zeichen ändert. Die Coordinaten der Inflexionspunkte genügen also den beiden Gleichungen:

$$f(x, y) = 0,$$
$$f'^2_y f''_{x^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2} = 0. \qquad (k)$$

Wenn $f'_y = 0$ ist, so nimmt man die Ableitung von $\frac{1}{I}$ und man hat:

$$\frac{f'^2_x f''_{y^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_y f''_x}{f'^3_x} = \frac{f''_{y^2}}{f'_x}.$$

Soll nun eine Inflexion stattfinden, so muß $f''_{y^2} = o$ sein, welcher Fall auch in der Gleichung (k) enthalten ist.

Beispiel. — Für die Conchoide (§. 42) hat man:

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}\left[x^2 y^2 - (c+x)^2 (a^2 - x^2)\right] = o$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x^2y^2 + x^4 + 2cx^3 + (c^2 - a^2)x^2 - 2a^2cx - a^2c^2\right] = o$$

$$f'_x(x, y) = xy^2 + 2x^3 + 3cx^2 + (c^2 - a^2)x - a^2c$$

$$= \frac{(c+x)\,(x^3 + a^2 c)}{x},$$

$$f'_y(x, y) = x^2y, \quad f''_{x^2}(x, y) = y^2 + 6x^2 + 6cx + c^2 - a^2,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2xy, \quad f''_{y^2}(x, y) = x^2,$$

$$I = -\frac{(c+x)\,(x^2 + a^2 c)}{x^3 y},$$

$$I' = -\frac{a^2(c+x)^3 (x^3 + 3cx^2 - 2a^2 c)}{x^6 y^3}.$$

Das Trinom $x^3 + 3cx^2 - 2a^2 c$ ist für $x = o$ negativ und für $x = a$ positiv; es verschwindet also in diesem Intervalle; aber nur einmal, weil seine Ableitung $3x^2 + 6cx$ in demselben Intervalle stets positiv bleibt. Es sei b die zwischen o und a liegende Wurzel der Gleichung:

$$x^3 + 3cx^2 - 2a^2 c = o, \qquad (\mu)$$

und F (Fig. 53, 54 u. 55) der Punkt des Curvenzweiges AB, dessen Abscisse b ist; so ist I' von o bis b positiv und von b bis a negativ; folglich kehrt der Bogen BF seine Concavität nach der Seite der positiven y und FA nach der der negativen y; mithin ist F ein Inflexionspunkt.

Bei der nähern Untersuchung der negativen Wurzeln der Gleichung (μ) müssen die bei der Conchoide vorkommenden 3 Fälle unterschieden werden.

1) Es ist $a < c$. — Das in Rede stehende Trinom ist für $x = o$ negativ, für $x = -a$ positiv und für $x = -\infty$ negativ. Die Gleichung (μ) hat also zwei negative Wurzeln, wovon die eine zwischen o und $-a$, und die andere zwischen $-a$ und $-\infty$ liegt. — Die letzte hat in Fig. 53 keine Bedeutung, während die erste einem Inflexionspunkte G auf dem Zweige DE entspricht.

2) Es ist $a = c$. — Da das Trinom für $x = -a$ verschwindet, so läßt es sich folgendermaßen zerlegen:

$$(x+a)(x^2 + 2ax - a^2) = (x-a)\left[x + a(\surd 3 + 1)\right]\left[x - a(\surd 3 - 1)\right].$$

Die Abscisse des Punktes **F** ist $= a(\sqrt{3}-1)$, und da I' von **D** bis **E** stets positiv ist; so kehrt der Curvenzweig **DE** (Fig. 54) seine Concavität nach der Seite der positiven y und hat keinen Inflexionspunkt.

3) Es ist $a > c$. — Wenn man $x = x' - c$ in die Gleichung (μ) setzt, so geht sie in folgende über:

$$x'^3 - 3c^2x' - 2c(a^2 - c^2) = 0.$$

Wenn die Bedingung der Realität der Wurzeln $a \overline{\overline{<}} c\sqrt{2}$ nicht erfüllt wird, so hat die Gleichung (μ) nur die eine reelle Wurzel b, und das Trinom ist für alle Punkte des Curvenzweiges **ECKD** (Fig. 55) negativ; I' hat stets das Zeichen $+$, der ganze Curvenzweig kehrt seine Concavität nach der Seite der positiven y, und hat folglich keinen Inflexionspunkt.

Wenn die Bedingung der Realität der Wurzeln erfüllt wird, so hat die Gleichung (μ) zwei negative Wurzeln, und da das Trinom für $x = -a$ negativ ist; so liegen diese beiden Wurzeln zwischen 0 und $-a$, oder sie sind beide $< -a$. Der erste Fall kann aber nicht stattfinden; denn da der Werth $x = -2c$, welcher die Ableitung $3x(x+2c)$ auf Null reducirt, zwischen diesen beiden Wurzeln liegt, so wäre $a > 2c$, was der Bedingung der Realität der Wurzeln widerspricht. — Da die negativen Wurzeln $< -a$ sind, so ist das Trinom für den ganzen Curvenzweig **ECKD** negativ, woraus dasselbe folgt.

Wir haben im Vorhergehenden von den Punkten abstrahirt, deren Coordinaten die beiden Ableitungen f'_x, f'_y zugleich verschwinden machen, in welchem Falle die Ausdrücke von I und I' unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinen; allein wir werden auf diesen Fall später wieder zurückkommen.

Uebungsaufgaben.

1) Die Curve: $xy = 2a\sqrt{2ax - x^2}$ (Fig. 16) hat die beiden Inflexionspunkte: $x = \frac{3a}{2}$, $y = \pm\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

2) Die Curve: $x^3 - 3bx^2 + a^2y = 0$ hat den Inflexionspunkt $x = b$, $y = \frac{2b^3}{a^2}$.

3) Die Curve: $ax^3 + by^3 - c^4 = 0$ hat die beiden Inflexionspunkte:

$$x = o, \ y = c\sqrt[3]{\frac{c}{b}},$$

$$x = c\sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \ y = o.$$

4) Die Curve: $x^4 - a^2x^2 + a^3y = o$ hat die zwei Inflexionspunkte:

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{6}}, y = \frac{5a}{36}.$$

5) In der Curve: $y = x + 36x^2 + 2x^3 - x^4$ entsprechen $x = 3$ und $x = -2$ Inflexionspunkten.

6) In der Curve: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ entsprechen $x = o$ und $x = \pm\sqrt{3}$ Inflexionspunkten.

7) Die Curve: $x^2y + a^2y - ax^2 = o$ hat die beiden Inflexionspunkte:

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{a}{4},$$

$$x = -\frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{a}{4}.$$

§. 63.

Bestimmung der Tangente einer durch zwei Gleichungen mit 3 Veränderlichen ausgedrückten Curve.

Wenn zwischen den beiden Coordinaten x, y und einer dritten Veränderlichen t zwei simultane Gleichungen:

$$f(x, y, t) = o, \quad F(x, y, t) = o \qquad (\alpha)$$

gegeben sind, und man eliminirt t zwischen denselben; so erhält man die Gleichung:

$$\varphi(x, y) = o$$

einer gewissen Curve. Aber das System der beiden Gleichungen (α) kann als diese Curve ebenfalls ausdrückend betrachtet werden. — Es seien x, y, t und x + h, y + k, t + r die Werthe der drei Veränderlichen für zwei benachbarte Punkte M, M'; so hat man:

$$f(x, y, t) = o, \ f(x+h, y+k, t+r) = o,$$
$$F(x, y, t) = o, \ F(x+h, y+k, t+r) = o.$$

Setzt man Gr.$\dfrac{h}{r} = x'$, Gr. $\dfrac{k}{r} = y'$ und geht zur Grenze über; so hat man nach Anhang, Formel 24:

$$f'_t + f'_x \, . \, x' + f'_y \, . \, y' = 0,$$
$$F'_t + F'_x \, . x' + F'_y \, . \, y' = 0.$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit F'_x, die zweite mit f'_x und zieht die Produkte von einander ab; so erhält man, wenn man bemerkt, daß:

$$\text{Gr.}\ \frac{k}{h} = \text{Gr.}\ \frac{\frac{k}{r}}{\frac{h}{r}} = \frac{y'}{x'}$$

ist, sehr leicht:

$$I = \text{Gr.}\ \frac{k}{h} = -\ \frac{F'_t\ f'_x - f'_t\ F'_x}{F'_t\ f'_y - f'_t\ F'_y}.$$

Beispiel. — Für die Curve in §. 49 hat man:

$$f = xy - yt + xt = 0,\ F = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^4 - 4) = 0,$$
$$f'_x = y + t,\ f'_y = x - t,\ f'_t = x - y,$$
$$F'_x = x,\ F'_y = 0,\ F'_t = 2t^3,$$
$$I = \frac{2t^3(y+t) + x(y-x)}{2t^3\ (t-x)} = \frac{2t^5 + x^3}{2t^3(t-x)^2}.$$

Die Punkte, worin die Tangente zu der Axe der x parallel ist, werden durch die Gleichung $2t^5 + x^3 = 0$ gegeben, und wenn man sich auf den zur Rechten der Axe der y liegenden Curventheil beschränkt; so muß t negativ sein. Der kleine Zweig OBA (Fig. 66) bietet folglich allein solche Punkte dar. Durch Elimination von x wird die vorhergehende Gleichung:

$$t^{12} + 4t^{10} - 3.4t^8 + 3.4^2.t^4 - 4^3 = 0,$$

und wenn man $t^2 = z$ setzt:

$$z^6 + 4z^5 - 3.4z^4 + 3.4^2 z^2 - 4^3 = 0,$$

oder:

$$-z^4(12 - 4z - z^2) - 4^2(4 - 3z^2) = 0,$$

welche Gleichung zwischen 0 und 1 keine Wurzel hat, weil ihr erster Theil von $z = 0$ bis $z = 1$ stets negativ ist. — Derselbe ist für $z = 2$ positiv, und seine Ableitung:

$$2z(3z^4+10z^3-6.4z^2+3.4^2)=2z\left(z^2(3z^2+10z-12)+12(4-z^2)\right)$$

von $z = 1$ bis $z = 2$ stets positiv. Die Gleichung hat also zwischen 1 und 2 eine reelle Wurzel, und es gibt auf dem Zweige OBA nur einen Punkt B, worin die Tangente zu der Axe der x parallel ist. Seine Abscisse liegt zwischen 0 und $\sqrt{3}$ und die zugehörige Ordinate ist ein Maximum.

§. 64.

Durch einen außerhalb der Curve gegebenen Punkt P gehende Tangente.

Die Gleichung der Curve unter ganzer Form sei:

$$f(x, y) = o; \qquad (1)$$

x_1, y_1 seien die Coordinaten des gegebenen Punktes P; x, y die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes und X, Y die laufenden Coordinaten; so ist die Gleichung der Tangente:

$$(X - x) f'_x(x, y) + (Y - y) f'_y(x, y) = o.$$

Da die Tangente durch den Punkt P oder (x_1, y_1) geht, so hat man auch:

$$(x_1 - x) f'_x(x, y) + (y_1 - y) f'_y(x, y) = o. \qquad (2)$$

Die beiden Gleichungen (1), (2) bestimmen die Coordinaten x, y des gesuchten Berührungspunktes, d. h. die Berührungspunkte sind nichts anders, als die Durchschnittspunkte der gegebenen Curve mit der durch die Gleichung (2) ausgedrückten Curve. — Diese letzte Curve hat eine ziemlich merkwürdige geometrische Bedeutung. Betrachtet man nämlich die in der Gleichung:

$$f(x, y) = C$$

enthaltenen Curven, wo C ein willkürlicher Parameter ist, und zieht vom Punkte P aus Tangenten an diese verschiedenen Curven; so bleibt die Gleichung (2) für alle dieselbe, und drückt folglich den Ort der Berührungspunkte aus.

Wenn die gegebene Curve algebraisch und vom m^{ten} Grade ist, so ist auch die Gleichung (2) vom m^{ten} Grade, und durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) kann man eine Gleichung von einem niedrigern Grade erhalten. — Wenn $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$, ... resp. die Inbegriffe der Glieder vom m^{ten}, $(m-1)^{ten}$, $(m-2)^{ten}$, ... Grade in $f(x, y)$ bezeichnen, so ist:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = o.$$

Das Polynom $\varphi(x, y)$, welches in Bezug auf x und y homogen ist, besteht aus Gliedern von der Form $Ax^n y^{m-n}$, und man hat daher:

$$\varphi(x, y) = \Sigma . Ax^n y^{m-n},$$

also:

$$\varphi'_x = \Sigma . n Ax^{n-1} y^{m-n}, \ \varphi'_y = \Sigma (m-n) Ax^n y^{m-n-1},$$

woraus folgt:

$$x\varphi'_x + y\varphi'_y = \Sigma . m Ax^n y^{m-n} = m\varphi.$$

Ebenso ergibt sich:

$$x\psi'_x + y\psi'_y = (m-1)\psi,$$
$$x\chi'_x + y\chi'_y = (m-2)\chi.$$
$$\ldots\ldots = \ldots$$

Hiernach hat man:

$$xf'_x + yf'_y = m\varphi + (m-1)\psi + (m-2)\psi + \ldots,$$

und wenn man davon abzieht:

$$o = m\varphi + m\psi + m\chi + \ldots;$$

so bleibt:

$$xf'_x + yf'_y = -\psi - 2\chi - \ldots.$$

Die Gleichung (2) läßt sich aber auch folgendermaßen schreiben:

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y - xf'_x - yf'_y = o,$$

und wird folglich:

$$x_1 f'_x(x,y) + y_1 f'_y(x,y) + \psi(x,y) + \chi(x,y) + \ldots = o. \quad (3)$$

Diese Gleichung vom $(m-1)$ten Grade kann die Gleichung (2) ersetzen, so daß die gesuchten Berührungspunkte mittelst der Durchschnitte der gegebenen Curve (1) und der Curve (3) vom $(m-1)$ten Grade bestimmt werden.

Beispiel. — Für den **Kreis** hat man:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (1)$$
$$(x_1 - x)x + (y_1 - y)y = o, \quad (2)$$

oder:

$$\left(x - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{4},$$
$$x_1 x + y_1 y = r^2. \quad (3)$$

Die Gleichung (2) drückt einen über OP als Durchmesser beschriebenen Kreis aus, welcher der Ort der Berührungspunkte der von P aus an eine Reihe um den Anfangspunkt O beschriebener concentrischer Kreise gezogenen Tangenten ist.

Die Gleichung (3) drückt eine **Gerade**, die sogenannte **Berührungssehne** oder **Berührungsgerade**, aus; sie ist auf OP senkrecht, und der Halbmesser r ist die mittlere Proportionale zwischen OP und dem Abstande der Berührungssehne von O.

Wenn die gegebene Curve vom **zweiten** Grade, ihre allgemeine Gleichung also:

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$

ist, so ist die Gleichung der **Berührungsgeraden**:

$$(2Ax + By + D)x_1 + (2Cy + Bx + E)y_1 + Dx + Ey + 2F = o,$$

oder:

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (2Cy_1 + Bx_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = o.$$

§. 65.

Tangente, welche zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

Wenn a den Richtungscoefficienten der gegebenen Geraden bezeichnet, so werden die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes durch die beiden simultanen Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} f\,(x,\,y) = o\,, \\ f'_x\,(x,\,y) + a\,f'_y\,(x,\,y) = o. \end{array}\right\} \quad (4)$$

§. 66.

Gemeinschaftliche Tangente an zwei gegebenen Curven.

Es seien:

$$f\,(x,\,y) = o\,,\; F\,(x,\,y) = o$$

die Gleichungen der beiden Curven, und $x',\, y'$; $x'',\, y''$ die Coordinaten der Berührungspunkte; so hat man die beiden Gleichungen;

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{f'_{x'}\,(x',y')}{f'_{y'}\,(x',y')} = -\frac{F'_{x''}\,(x'',y'')}{F_{y''}\,(x'',y'')}, \quad (5)$$

welche in Verbindung mit:

$$f\,(x',y') = o\,,\; F\,(x'',\,y'') = o \quad (6)$$

die vier Unbekannten $x',\,y'$; x'',y'' bestimmen.

Beispiel. — Für zwei Kreise hat man:

$$\left.\begin{array}{l} (x'-a')^2 + (y'-b')^2 = r^2, \\ (x''-a'')^2 + (y''-b'')^2 = r'^2, \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{x'-a'}{y'-b'} = -\frac{x''-a''}{y''-b''}, \quad (5)$$

woraus folgt:

$$\frac{x'-a'}{x''-a''} = \frac{y'-b'}{y''-b''} = \pm\frac{\sqrt{(x'-a')^2+(y'-b')^2}}{\sqrt{(x''-a'')^2+(y''-b'')^2}} = \pm\frac{r'}{r''}.$$

Nimmt man zunächst das Zeichen —, so hat man:

$$\frac{x'-a'}{x''-a''} = -\frac{r'}{r''},\quad \frac{y'-b'}{y''-b''} = -\frac{r'}{r''},$$

woraus folgt:

$$\frac{r''x'+r'x''}{r'+r''} = \frac{r''a'+r'a''}{r'+r''},\quad \frac{r''y'+r'y''}{r'+r''} = \frac{r''b'+r'b''}{r'+r''}. \quad (7)$$

Theilt man die Mittelpunktslinie $C'C''$ (Fig. 110) in zwei Theile DC' und DC'', welche sich wie die Halbmesser r' und r'' verhalten; so sind die Coordinaten des Theilungspunktes D nach §. 36:

$$\frac{r''a'+r'a''}{r'+r''},\quad \frac{r''b'+r'b''}{r'+r''}.$$

Theilt man die gemeinschaftliche Tangente $M'M''$ ebenso, so sind die Coordinaten des Theilungspunktes:

$$\frac{r''x+r'x''}{r'+r''},\quad \frac{r''y'+r'y''}{r'+r''}.$$

Beide Theilungspunkte fallen also vermöge der Gleichungen (7) zusammen, und das erste Paar gemeinschaftlicher Tangenten geht durch den Punkt D.

Nimmt man nun das Zeichen +, so hat man:

$$\frac{r'x''-r''x'}{r'+r''}=\frac{r'a''-r''a'}{r'+r''},\quad \frac{r'y''-r''y'}{r'+r''}=\frac{r'b''-r''b'}{r'+r''},\tag{8}$$

und wenn $r'>r''$ gesetzt wird; so gibt es auf der Verlängerung von $C'C''$ einen Punkt E, dessen Abstände von den Punkten C' und C'' sich wie die Halbmesser r' und r'' verhalten. Die Gleichungen (8) geben also ein zweites Paar durch den Punkt E gehender gemeinschaftlicher Tangenten. — Nachdem die Punkte D und E gefunden sind, kommt es blos noch darauf an: aus denselben Tangenten an einen der beiden Kreise zu ziehen.

§. 67.

Gemeinschaftliche Tangente an zwei Zweigen derselben Curve.

Diese Aufgabe ist offenbar nur ein besonderer Fall der vorhergehenden, und wir wollen daher die Curve (§. 43), deren Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann:

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2-a^4=0,$$

sofort als Beispiel nehmen. Die Gleichungen (5) und (6) des vorhergehenden §. sind jetzt:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x'(x'^2+y'^2-c^2)}{y'(x'^2+y'^2+c^2)}=-\frac{x''(x''^2+y''^2-c^2)}{y''(x''^2+y''^2+c^2)},\tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}&(x'^2+y'^2+c^2)^2-4c^2x'^2-a^4=0,\\&(x''^2+y''^2+c^2)^2-4c^2x''^2-a^4=0.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Die beiden letzten geben durch Subtraction:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{(x''+x')(x'^2+y'^2-c^2+x''^2+y''^2-c^2)}{(y''+y')(x'^2+y'^2+c^2+x''^2+y''^2+c^2)}.$$

Der Quotient $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ ist also drei Brüchen gleich. Addirt man die mit 2 multiplicirten Zähler der beiden ersten, zieht von der

Summe den des dritten ab, und combinirt die Nenner auf dieselbe Weise; so erhält man:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{(x''-x')(x''^2+y''^2-x'^2-y'^2)}{(y''-y')(x''^2+y''^2-x'^2-y'^2)^2},$$

woraus folgt:

$$(x''^2+y''^2-x'^2-y'^2)\left[(x''-x')^2+(y''-y')^2\right]=o.$$

Der zweite Faktor kann aber nicht Null sein, weil sonst die beiden Berührungspunkte zusammenfielen; es ist also:

$$x''^2+y''^2=x'^2+y'^2,$$

und folglich wegen (10):

$$x'^2=x''^2,\ y'^2=y''^2.$$

Den Gleichungen (9) geschieht Genüge, sowohl durch:

$$x'^2+y'^2-c^2=o,$$

welches die Punkte D, D_1, D', D'_1 (Fig. 57) gibt, folglich die gemeinschaftlichen Tangenten DD' und $D_1D'_1$, als durch:

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x''}{y''},\ \text{folglich: } x'=-x'',\ y'=-y'';$$

aber die so erhaltenen, durch den Mittelpunkt gehenden gemeinschaftlichen Tangenten EE' und $E_1E'_1$ (Fig. 59) existiren nur in dem dritten Falle.

§. 68.

Berührungsbedingung zwischen zwei Curven.

Man sagt: daß zwei Curven einander berühren, wenn sie in einem gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben. — Die gegenwärtige Aufgabe ist also ebenfalls nur ein besonderer Fall von §. 66, wo die beiden Berührungspunkte in einen zusammenfallen. Sind also x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, so hat man zwischen den beiden Unbekannten x, y die drei Gleichungen:

$$f(x, y)=o,\ F(x, y)=o, \tag{11}$$

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}=\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{12}$$

und folglich berühren zwei gegebene Curven einander nur unter besondern Bedingungen. Enthalten nämlich die Gleichungen (11) willkürliche Parameter $a, b, \ldots$ und man eliminirt x, y, so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen $a, b, \ldots$

welcher diese Parameter genügen müssen, wenn die beiden Curven einander berühren sollen.

Beispiel. — Für zwei Kreise hat man:

$$x^2 + y^2 = r^2,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r'^2, \qquad (11)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x-a}{y-b} = \frac{a}{b}. \qquad (12)$$

Aus der Gleichung (12) erhellet: daß der Berührungspunkt beider Kreise auf der Mittelpunktslinie liegt, und wenn man $a^2 + b^2 = d^2$ setzt; so hat man nach (12):

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{r}{d};$$

folglich:

$$x = \pm\frac{ar}{d},\ y = \pm\frac{br}{d},$$

und wegen der zweiten der Gleichungen (11):

$$(\pm r - d)^2 - r'^2 = 0,\ (\pm r + r' - d)(\pm r - r' - d) = 0.$$

Setzt man $r' > r$, so kann der zweite Factor nicht Null sein, und man hat folglich:

$$d = r' \pm r;$$

d. h. die gegenseitige Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise muß der Summe, oder der Differenz ihrer Halbmesser gleich sein, wenn sie sich berühren sollen.

§. 69.

Geometrischer Ort, welchen ein Punkt O′ (Fig. 27) beschreibt, der mit einer beweglichen, stets zwei feste gegebene Curven berührenden Curve fest verbunden ist.

Es sei $f(x', y') = 0$ die Gleichung der beweglichen Curve in Beziehung auf den Punkt O′ als Anfangspunkt und die fest mit ihr verbundenen, also beweglichen Axen O′X′, O′Y′. Ferner seien in derselben Ebene OX, OY zwei feste Axen und $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ die Gleichungen der beiden festen Curven in Bezug auf diese festen Axen; so wird eine Lage der beweglichen Curve durch die Coordinaten x_1, y_1 des Punktes O′ und durch den Winkel α bestimmt, welchen O′X′ mit OX bildet. Setzt man in die Gleichung $f(x', y') = 0$ für x', y' ihre durch die Transformationsformeln gegebenen Werthe, so erhält man die Gleichung $F(x, y, x_1, y_1, \alpha) = 0$ der beweglichen Curve in Bezug auf die festen Axen. Drückt man alsdann aus: daß diese Curve die beiden festen

Curven berührt, so erhält man zwischen x_1, y_1, α zwei Bedingungsgleichungen. und wenn man α zwischen denselben eliminirt; so bekommt man endlich die gesuchte Gleichung mit x_1, y_1 des Ortes des Punktes O'.

Die Rechnung vereinfacht sich sehr, wenn die beiden Richtlinien gerade sind und zu den Coordinatenaxen genommen werden. — Die Berührungsbedingungen erhält man alsdann, wenn man in der Gleichung $F(x, y, x_1, y_1, \alpha) = o$ successive $x = o$ und $y = o$ setzt, und ausdrückt: daß jede der so erhaltenen Gleichungen mit einer Veränderlichen y oder x zwei gleiche Wurzeln hat.

Beispiel. — Welchen Ort beschreibt der Pol einer Parabel, die sich in einem rechten Winkel so bewegt, daß sie die beiden Schenkel desselben stets berührt? — Um die Gleichung der Parabel in Beziehung auf ihren Pol zu erhalten, muß man in der Gleichung (9) in §. 7, $m = 1$ und $x + d$ statt x setzen, wodurch man erhält:

$$y'^2 - 2dx' - d^2 = o,$$

und wenn man in diese Gleichung die Werthe:

$$x' = (x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x - x_1)\sin\alpha + (y - y_1)\cos\alpha$$

setzt; so erhält man als Gleichung der auf die festen Axen bezogenen Parabel:

$$(x - x_1)^2\sin^2\alpha + (y - y_1)^2\cos^2\alpha - 2(x - x_1)(y - y_1)\sin\alpha\cos\alpha$$
$$-2d(x - x_1)\cos\alpha - 2d(y - y_1)\sin\alpha - d^2 = o.$$

Setzt man hierin $y = o$, so erhält man:

$$(x - x_1)^2\sin^2\alpha + 2(y_1\sin\alpha - d)\cos\alpha \,.\, (x - x_1)$$
$$+ (y_1^2\cos^2\alpha + 2dy_1\sin\alpha - d^2) = o,$$

und als Bedingung der Berührung mit der Axe der x:

$$2y_1\sin\alpha = d.$$

Ebenso erhält man als Bedingung der Berührung der Parabel mit der Axe der y:

$$2x_1\cos\alpha = d,$$

und endlich als Gleichung des Ortes des Poles der beweglichen Parabel:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} = \frac{4}{d^2}.$$

Sechstes Kapitel.

Tangenten in verschiedenen Coordinatensystemen.

§. 70.

Polarsystem.

In diesem Systeme wird die Lage der Tangente MT durch den Winkel $OMT' = \alpha$ (Fig. 111) bestimmt, welchen sie mit dem nach dem Berührungspunkte M gehenden Radiusvector OA bildet. Es seien ϱ, ϑ die Coordinaten des Punktes M und $\varrho + k$, $\vartheta + h$ die des benachbarten Punktes M'. Zieht man die Sekante MM' und beschreibt aus dem Pole O mit dem Halbmesser OM den Kreisbogen MN, so gibt das Dreieck NMM':

$$\frac{\sin OM'M}{\sin NMM'} = \frac{\text{Sehne } MN}{M'N} = \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\text{Bogen } MN}{M'N}$$

$$= \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\varrho h}{k}. \qquad \text{(i)}$$

Läßt man nun die Sekante MM' sich um den Punkt M so drehen, daß sich M' dem Punkte M unbeschränkt nähert, so wird die Sekante MM' an der Grenze zur Tangente MT, die Sehne MN wird zur Tangente an dem Bogen MN und mithin senkrecht auf OA; also Grenze von $OMM' = OMT' = \alpha$, und Grenze von $NMM' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Endlich ist das Verhältniß eines Kreisbogens zu seiner Sehne bekanntlich an der Grenze der Kleinheit $= 1$, und folglich wird die Gleichung (i) an der Grenze:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \varrho \text{ Gr. } \frac{h}{k} \text{ oder } \tang\alpha = \varrho \,.\, \text{Gr. } \frac{h}{k} = \frac{\varrho}{\text{Gr. } \frac{k}{h}}. \qquad (1)$$

Wir haben vorhin angenommen: daß der Radiusvector ϱ mit dem Winkel ϑ zugleich zunimmt; aber wenn ϱ abnimmt, während ϑ zunimmt (Fig. 112), so gibt das Dreieck NMM':

$$\frac{\sin OM'M}{-\sin NMM'} = \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\text{Bogen } MN}{-M'N} = \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\varrho h}{k}.$$

An der Grenze ist aber $OM'M = \alpha$, $NMM' = \alpha - \frac{\pi}{2}$, und man erhält folglich die Gleichung (1) wieder.

§. 71.

Wenn ϱ für einen besondern Werth ϑ_0 von ϑ verschwindet (Fig. 113), so geht ein Curvenzweig OC durch den Pol O, und die Tangente an diesem Zweige ist die dem Winkel ϑ_0 entsprechende Gerade OA_0. Denn läßt man die durch einen Punkt M gehende Sekante OM sich um den Punkt O so drehen, daß sich der Punkt M dem Pole O unbeschränkt nähert, also ϱ der Grenze Null; so nähert sich die Sekante der Grenzlage unendlich.

So ist z. B. die Polarare OX (Fig. 12) eine Tangente der Epicycloide in O; die Richtungen, für welche $\varrho = 0$ ist, sind Tangenten an den Ringen in Fig. 68 u. 69.

Wenn die Gleichung der Curve trigonometrische Funktionen des Winkels ϑ enthält, so ist die Bestimmung von Gr. $\frac{k}{h}$ nicht so leicht; allein wir wollen nun einige einfache Sätze ableiten, welche in vielen Fällen genügen.

1) Es sei $\varrho = \sin\vartheta$, so ist:

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin(\vartheta + h) - \sin\vartheta}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right);$$

folglich:

$$\text{Gr. } \frac{k}{h} = \cos\vartheta.$$

2) Es sei $\varrho = \cos\vartheta$, so ist:

$$\frac{k}{h} = \frac{\cos(\vartheta + h) - \cos\vartheta}{h} = -\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right);$$

folglich:

$$\text{Gr. } \frac{k}{h} = -\sin\vartheta.$$

3) Es sei $\varrho = \sin m\vartheta$, so setze man $m\vartheta = \vartheta'$, $mh = h'$, und man hat nach dem Obigen:

$$\frac{k}{h} = m\frac{k'}{h'}, \text{ also Gr. } \frac{k}{h} = m\cos\vartheta' = m\cos m\vartheta.$$

4) Es sei $\varrho = \cos m\vartheta$, so findet man ebenso:

$$\text{Gr.}\ \frac{k}{h} = -m \sin m\vartheta.$$

Beispiel 1. — Für die Epicycloide (§. 9, 3) hat man $\varrho = 2a(1-\cos\vartheta)$; folglich:

$$\tang\alpha = \frac{\varrho}{2a\sin\vartheta} = \frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}} = \tang\frac{\vartheta}{2};$$

also $\alpha = \frac{\vartheta}{2}$.

Von O bis B (Fig. 13) wächst α von o bis $\frac{\pi}{2}$, so daß in B die Tangente auf dem Radiusvector senkrecht ist.

Beispiel 2. — Für die in der Gleichung $\varrho = a + \cos\frac{5\vartheta}{n}$ enthaltene Curve (§. 50) hat man:

$$\tang\alpha = -\frac{5}{n}\cdot\frac{\varrho}{\sin\frac{5\vartheta}{n}}.$$

In den Punkten A, A′, A″, . . . (Fig. 67, 68 u. 69) ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$; die Curve berührt den großen Kreis. In den Punkten a, a′, a″, . . . ist ebenfalls $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und die Curve berührt den kleinen Kreis.

Die Subtangente und Subnormale beziehen sich in dem Polarsysteme auf das im Pole O (Fig. 113 a) auf dem Radiusvector OM errichtete Perpendikel PQ, und man findet leicht:

$$T = \varrho\sqrt{1+\frac{\varrho^2}{I^2}} = \frac{\varrho}{I}\sqrt{1+I^2}$$

$$N = \sqrt{\varrho^2 + I^2}$$

$S_t = \frac{\varrho^2}{I}$, $S_n = I$, wo der Kürze wegen $\text{Gr.}\ \frac{k}{h} = I$ gesetzt ist.

Kennt man eine dieser Größen, so kann man offenbar leicht die Tangente und Normale geometrisch construiren; aber in manchen Fällen ist es einfacher, den Winkel α zu construiren.

Beispiel 3. Für die Archimedische Spirale:

$$\varrho = a\vartheta, \text{ (Fig. 10)}$$

hat man:

$$\tang \alpha = \vartheta \text{ und } S_n = a.$$

Die Subnormale ist also constant, und der Winkel, welchen die Tangente oder die Curve mit dem Radiusvector bildet, nähert sich fortwährend einem rechten Winkel.

Beispiel 4. Für die hyperbolische Spirale:

$$\varrho = \frac{a}{\vartheta}$$

hat man:

$$\tang \alpha = -\vartheta,\ S_t = -a.$$

Hier ist also die Subtangente constant.

Beispiel 5. Für die logarithmische Spirale:

$$\varrho = ae^{m\vartheta}$$

findet man leicht (s. Anhang):

$$\tang \alpha = \frac{1}{m},\quad S_t = \frac{\varrho}{m},\ S_n = m\varrho,$$

$$T = \varrho\ \frac{\sqrt{1+m^2}}{m},\ N = \varrho\sqrt{1+m^2}.$$

Aus dem Werthe von $\tang \alpha$ sieht man: daß die Tangente mit dem Radiusvector einen constanten Winkel macht.

Beispiel 6. — Für den Lituus:

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{\vartheta}}$$

findet man leicht:

$$\tang \alpha = -2\vartheta \text{ und } S_t = -2a\sqrt{\vartheta}.$$

Beispiel 7. — In der Lemniscate:

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$$

hat man:

$$\alpha = 2\vartheta - \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 8. — In der Spirale:

$$\varrho^n = a^n \sin n\vartheta$$

ist:

$$\tang \alpha = \tang n\vartheta, \text{ also } \alpha = n\vartheta.$$

Wenn α_1 den Werth von α bedeutet, welcher dem Winkel $\vartheta + \pi$ oder der Tangente an dem andern Endpunkte der durch den Pol gehenden Sehne entspricht; so ist $\alpha_1 = n(\vartheta+\pi)$, also $\alpha_1 - \alpha = n\pi$.

Mithin ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten in den Endpunkten irgend einer durch den Pol gehenden Sehne constant.

§. 72.

Bipolarsystem.

In diesem Systeme wird die Lage der Tangente MT (Fig. 114) durch die beiden Winkel α, β bestimmt, welche die von den Polen O, O_1 nach dem Berührungspunkte M gehenden beiden Radienvectoren OM, O_1M mit ihr bilden. — Es seien u, v die Coordinaten des Punktes M und $u+h$, $v+k$ die eines benachbarten Punktes M′. Zieht man die Sekante MM′S und beschreibt aus den Polen O, O_1 mit den Halbmessern OM, O_1M Kreisbogen MP, MQ; so geben die beiden Dreiecke MPM′, MQM′:

$$\frac{\sin M'MP}{\sin MPM'} = \frac{h}{MM'}, \quad \frac{\sin MQM'}{\sin M'MQ} = \frac{MM'}{k};$$

folglich:

$$\frac{\sin M'MP}{\sin M'MQ} = \frac{\sin MPM'}{\sin MQM'} \cdot \frac{h}{k}.$$

Geht man zur Grenze über, so werden MP, MQ resp. auf OM, O_1M senkrecht und die Winkel MPM′, MQM′ rechte; folglich:

$$\text{Gr. } M'MP = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \text{Gr. } M'MQ = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

und:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \text{Gr. } \frac{h}{k}.$$

Wenn λ, μ die Winkel bedeuten, welche die Normale der Curve mit den Vectoren bildet, so hat man:

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu} = -\text{Gr. } \frac{h}{k}.$$

Ist nun die Gleichung der Curve unter der Form $f(\mu, v) = 0$ gegeben, so ist:

$$\text{Gr. } \frac{h}{k} = -\frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)};$$

folglich:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = -\frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)},$$

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu} = \frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)},$$

woraus sich folgende geometrische Construction ergibt: Auf den Vectoren nimmt man vom Punkte M aus zwei Längen, welche sich wie die Werthe der Ableitungen verhalten, so ist die Diagonale des aus diesen Längen construirten Parallelogrammes die Normale der Curve. Hiebei ist übrigens zu bemerken: daß jede dieser Längen auf dem Radiusvector selbst, oder auf seiner Verlängerung genommen werden muß, jenachdem die Ableitung positiv, oder negativ ist.

Beispiel 1. — Die Gleichung der Ellipse ist $u + v = 2a$, also $F'_u = 1$, $F'_v = 1$. Das Parallelogramm ist folglich eine Raute, und mithin halbirt die Normale den Winkel der Vectoren, und die Tangente macht mit den Vectoren gleiche Winkel.

Beispiel 2. — Die Gleichung der Hyperbel ist $u - v = 2a$, also $F'_u = 1$, $F'_v = -1$. Die Normale der Hyperbel halbirt also den von dem einen Radiusvector und der Verlängerung des andern gebildeten Winkels, und die Tangente halbirt den von den beiden Vectoren gebildeten Winkel.

Eine Ellipse und Hyperbel, welche dieselben Pole haben, durchschneiden sich hiernach rechtwinklig, das heißt ihre Tangenten im Durchschnittspunkte sind auf einander senkrecht.

§. 73.

Pol-Richtliniensystem.

In diesem Coordinatensysteme wird die Lage der Tangente durch die beiden Winkel α, β bestimmt, welche sie mit dem Radiusvector OM (Fig. 115) und mit dem auf die Richtlinie gefällten Perpendikel MP bildet. Zieht man durch M und einen naheliegenden Punkt M′ eine Sekante, beschreibt aus dem Pole mit dem Halbmesser OM den Kreisbogen MN und zieht zu der Richtlinie die Parallele MQ; so geben die Dreiecke MNM′, MQM′ die Relationen:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \text{Gr.}\ \frac{h}{k} = -\frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)},$$

und für die Normale:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} = \frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)}.$$

Beispiel 1. — Die Gleichung der Parabel in diesem Coordinatensysteme ist:

$$u - v = o, \text{ also } F'_u = 1,\; F'_v = -1 \text{ und } \alpha = \beta$$

Die Tangente halbirt also den Winkel OMP.

Hieraus folgt: daß zwei Parabeln, welche denselben Pol und dieselbe Axe haben, und deren Scheitel auf beiden Seiten des Poles liegen, sich rechtwinklig durchschneiden.

Beispiel 2. — Die Gleichung der Ellipse und Hyperbel ist in diesem Systeme:

$$\frac{u}{v} = m \text{ oder } u - mv = o,$$

folglich:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m = \frac{u}{v}.$$

Man erhält also die Tangente, wenn man in O ein Perpendikel auf OM errichtet und den Durchschnittspunkt desselben mit der Richtlinie mit dem Punkte M verbindet.

§. 74.

Allgemeines Coordinatensystem.

Es sei M (Fig. 116) ein Punkt der Curve, A, B die beiden Coordinatenlinien desselben und MC, MD ihre Normalen; so wird die Lage der Tangente MT durch die beiden Winkel α, β bestimmt, welche sie mit diesen beiden Geraden bildet. Es sei ferner M′ ein naheliegender Punkt der Curve, A′, B′ seine Coordinatenlinien, p der zwischen A und A′ liegende Theil der ersten Normale und q der zwischen B und B′ liegende Theil der zweiten Normale; so geben die Dreiecke MPM′, MQM′:

$$\sin MM'P : \sin MPM' = p : MM',$$
$$\sin MM'Q : \sin MQM' = q : MM';$$

folglich:

$$\frac{\sin MM'P}{\sin MM'Q} = \frac{\sin MPM'}{\sin MQM'} \cdot \frac{p}{q}.$$

Geht man zur Grenze über, so wird M′P Tangente an A in M; also:

$$\text{Gr. } MM'P = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

und ebenso, weil an der Grenze M′Q Tangente an B in M wird:

$$\text{Gr. } MM'Q = \frac{\pi}{2} - \beta;$$

folglich:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \text{Gr.}\ \frac{p}{q}.$$

In dem rechtwinkligen Coordinatensysteme sind p, q nichts anders, als die Zuwachse h, k von x, y, und folglich hat man:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \text{Gr.}\ \frac{h}{k},\ \tang\alpha = \text{Gr.}\frac{k}{h},$$

wie früher.

In dem Polarsysteme ist A ein Kreis, dessen Normale der Vector OM ist, B eine vom Pole ausgehende Gerade, die andere Normale das Perpendikel darauf, p der Zuwachs k des Radiusvectors, $q = \varrho h$, und folglich wieder:

$$\tang\alpha = \varrho\ \text{Gr.}\ \frac{h}{k}.$$

In dem Bipolarsysteme sind A, B zwei aus den Polen beschriebene Kreise, deren Normalen mit den Radienvectoren zusammenfallen.

Siebentes Kapitel.

Von den Asymptoten.

§. 75.

Wenn man einen unendlichen Curvenzweig AMB (Fig. 117) hat, so kann es geschehen: daß der Abstand MH eines sich auf der Curve ins Unendliche entfernenden Punktes M von der Geraden CD kleiner wird, als jede gegebene oder angebbare Größe, d. h. Null zur Grenze hat — und alsdann wird die Gerade CD eine Asymptote des Curvenzweiges genannt.

Wenn β den Winkel bezeichnet, welchen die Gerade CD mit der Axe der y macht, so hat man für die Differenz MN zwischen den derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Geraden und der Curve:

$$MN = \frac{MH}{\sin\beta},$$

und die Bedingung: Gr. MH = o geht über in die gleichbedeutende: Gr. MN = o. — Man kann daher auch sagen: Eine

Asymptote ist eine Gerade von solcher Beschaffenheit, daß die Differenz der derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Geraden und der Curve gegen Null convergirt, wenn die Abscisse x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ convergirt (vergl. §. 41).

Wenn $\beta = 0$, d. h. die Asymptote zur Axe der y parallel ist, so ist die obige Umformung der Definition derselben unstatthaft; aber in diesem Falle ist die Differenz MN (Fig. 118) der derselben Ordinate entsprechenden Abscissen der Geraden und der Curve eine Größe, welche gegen Null convergirt, wenn y gegen $+\infty$ oder $-\infty$ convergirt, so daß die Abscissen der Curve gegen die endliche Grenze OE convergiren.

§. 76.

Asymptoten, welche zu der Axe der y parallel sind.

Diese Asymptoten erhält man nach dem Vorhergehenden, wenn man die endlichen Werthe von x sucht, welche y unendlich groß machen. — Wenn die Gleichung der Curve eine explicite (für y aufgelöste) ist, so sind diese Werthe von x diejenigen, welche den Nenner des Ausdruckes von y verschwinden machen (§§. 42, 45), und wenn die Gleichung der Curve eine implicite ist; so findet man diese Werthe von x auf folgende Weise: Es sei m der Grad der Curve und n der höchste Exponent von y; so erhält man, wenn man die Gleichung der Curve nach y ordnet:

$$\varphi(x)\, y^n + \psi(x)\, y^{n-1} + \ldots + \pi(x) = 0,$$

wo $\varphi, \psi \ldots \pi$ Polynome mit x bedeuten, welche resp. höchstens vom Grade $m-n,\ m-n+1, \ldots m$ sind. Dividirt man mit y^n, so hat man:

$$\varphi(x) + \psi(x)\,\frac{1}{y} + \ldots + \pi(x)\,\frac{1}{y^n} = 0.$$

Wenn nun, indem y gegen ∞ convergirt, x endlich bleibt, so verschwinden die Glieder von dem zweiten an, und an der Grenze hat man:

$$\varphi(x) = 0. \qquad (1)$$

Umgekehrt, wenn x gegen eine der Wurzeln der Gleichung (1) convergirt, so convergirt einer der Werthe von y gegen ∞. Die zu der Axe der y parallelen Asymptoten werden also durch die reellen Wurzeln der Gleichung (1) gegeben.

Beispiel. Die Gleichung der gegebenen Curve sei (§. 49):

$$x^4 y^4 + (x^2 - 4)(y - x)^4 = 0,$$

so findet man:

$$\varphi(x) = x^4 + x^2 - 4 = 0.$$

Die beiden reellen Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}},$$

welche die bereits durch ein anderes Mittel gefundenen Asymptoten geben (Fig. 66).

Jedoch gibt eine reelle Wurzel der Gleichung (1) nicht nothwendig eine Asymptote, und man muß sich noch überzeugen: daß, wenn x gegen eine Wurzel der Gleichung (1) convergirt, der gegen ∞ convergirende Werth von y reell ist; denn wenn derselbe imaginär ist, so existirt der unendliche Curvenzweig nicht. — Ist z. B. die Gleichung der Curve:

$$y^3 (x - 1)^2 + (4 - x^2) = 0,$$

so ist:

$$\varphi(x) = (x - 1)^2, \; x = 1.$$

Aber wenn man x einen nahe bei 1 liegenden Werth gibt, so ist y imaginär.

§. 77.

Asymptoten, welche nicht zu der Axe der y parallel sind.

Die Gleichung einer solchen Asymptote ist:

$$y_1 = cx + d,$$

wo c und d zwei zu bestimmende Constanten sind. Wenn y, y_1 die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Curve und der Geraden bedeuten, und $y - y_1 = \varepsilon$ gesetzt wird; so ist ε eine Funktion von x, welche gegen Null convergirt, wenn x gegen ∞ convergirt. Der betrachtete unendliche Curvenzweig wird folglich durch die Gleichung:

$$y = y_1 + \varepsilon = cx + d + \varepsilon \qquad (2)$$

ausgedrückt.

Beispiel. — Für die in §. 44 betrachtete Curve ist:

$$y = x \pm \frac{2}{x^2} \sqrt{x^3 + 2x^2 - 5x - 6},$$

also:

$$y - y_1 = \varepsilon = \pm 2 \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3} - \frac{6}{x^4}}.$$

Es convergirt also ε gegen Null, wenn x gegen ∞ convergirt, und folglich ist die Gerade $y = x$ eine Asymptote, so daß die beiden Curvenzweige AFD, AF_1D_1 (Fig. 60) den Durchmesser DD_1 zur Asymptote haben.

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d}{x} - \frac{\varepsilon}{x},$$

und wenn d endlich bleibt und ε gegen Null convergirt, wenn x gegen ∞ convergirt; so ist:

$$c = \text{Gr.}\ \frac{y}{x}.$$

Der Richtungscoefficient der Asymptote ist folglich nichts anders, als die Grenze gegen welche das Verhältniß $\frac{y}{x}$ convergirt, wenn x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ convergirt.

Aus der Gleichung (2) folgt auch:

$$d = y - cx - \varepsilon, \text{ also: } d = \text{Gr.}\ (y - cx).$$

§. 78.

Das allgemeine Verfahren, durch welches man wenigstens bei algebraischen Curven die Werthe der beiden Parameter:

$$c = \text{Gr.}\ \frac{y}{x},\quad d = \text{Gr.}\ (y - cx)$$

bestimmt, ist folgendes: Nachdem die Gleichung der Curve auf eine ganze Form gebracht ist, faßt man die Glieder von gleichen Dimensionen in eins zusammen, wie in §. 64, so daß man hat:

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \ldots = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung ux für y, so wird, weil $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y), \ldots$ homogene Polynome resp. vom Grade $m, m-1, \ldots$ sind:

$$\varphi(x, y) = x^m \varphi(1, u),\ \psi(x, y) = x^{m-1}\ \psi(1, u), \ldots$$

und wenn man mit x^m dividirt; so nimmt die Gleichung der Curve folgende Form an:

$$\varphi(1, u) + \psi(1, u)\frac{1}{x} + \chi(1, u)\frac{1}{x^2} + \ldots = 0. \qquad (3)$$

Convergirt nun $u = \frac{y}{x}$ gegen einen endlichen Werth c, während x gegen ∞ convergirt, so verschwinden an der Grenze alle Glieder von dem zweiten an, und man hat:

$$\varphi(1, c) = 0. \qquad (4)$$

Umgekehrt, wenn c gegen eine Wurzel der Gleichung (4) convergirt, so convergirt ein Werth von x gegen ± ∞.

Die Richtungscoefficienten der Asymptoten werden also durch die reellen Wurzeln der Gleichung gegeben, welche man erhält, wenn man den Theil $\varphi(x, y)$ der gegebenen Gleichung, welcher von der höchsten Dimension ist, $= 0$ und darin $x = 1$, $y = c$ setzt.

Weiter oben wurde gesetzt:

$$u = \frac{y}{x} = \frac{cx + d + \varepsilon}{x} = c + \frac{d + \varepsilon}{x},$$

und wenn jetzt $d + \varepsilon = k$ gesetzt wird; so ist $u = c + \frac{k}{x}$. Setzt man nun diesen Werth für u in die Gleichung (3) und entwickelt, so kommt (Anhang, Formel 38):

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(1, c) + \varphi'_c(1, c)\frac{k}{x} &+ \tfrac{1}{2}\varphi''_{c^2}(1, c)\frac{k^2}{x^2} + \dots \\ + \psi(1, c)\frac{1}{x} &+ \psi'_c(1, c)\frac{k}{x^2} + \dots \\ &+ \chi(1, c)\frac{1}{x^2} + \dots \end{aligned}$$

und wenn man mit x multiplicirt, so erhält man wegen $\varphi(1, c) = 0$:

$$0 = \left[\varphi'_c(1, c)\,k + \psi(1, c)\right] + A\frac{1}{x} + B\frac{1}{x^2} + \dots \qquad (\mu)$$

Läßt man jetzt x gegen ∞ convergiren, so convergirt k gegen einen endlichen Werth d, und man hat an der Grenze:

$$\varphi'_c(1, c)\,d + \psi(1, c) = 0,$$

also:

$$d = -\frac{\psi(1, c)}{\varphi'_c(1, c)}, \qquad (5)$$

woraus man sieht, wie die Constante d, welche für die Asymptote die Ordinate im Anfangspunkte ausdrückt, gefunden wird.

Die Gleichungen (4) und (5) geben mithin alle, nicht zu der Axe der y parallelen Asymptoten. — Da die Gleichung (4) höchstens vom n^{ten} Grade ist und die Gleichung (5) für jeden Werth von c nur einen Werth von d gibt; so gibt es höchstens n nicht zu der Axe der y parallele Asymptoten, und da es höchstens m — n zu der Axe der y parallele Asymptoten gibt, so folgt: daß eine algebraische Curve des $m$ten Grades höchstens m Asymptoten hat.

Beispiel. — Die Gleichung der gegebenen Curve sei (§. 45):

$$y^2 (x+a) - x (x-a) (x-b) = o$$

oder:

$$(xy^2 - x^3) + \left(ay^2 + (a+b) x^2\right) - abx = o,$$

so gibt zunächst $x = -a$ eine zu der Axe der y parallele Asymptote E_1E (Fig. 61).

Ferner ist:

$$\varphi(1, c) = o = c^2 - 1,\ c = \pm 1,\ d = -\frac{ac^2 + a + b}{2c} = \mp \frac{2a+b}{2}.$$

Es gibt also zwei Asymptoten HH_1, KK_1, welche zu den Halbirungslinien der Axenwinkel parallel sind und sich auf der Axe der x in einer Entfernung $OI = a + \frac{b}{2}$ vom Anfangspunkte schneiden.

§. 79.

Bemerkungen.

1) Wenn man auch für c und d ein System reeller endlicher Werthe gefunden hat, so folgt daraus noch nicht: daß es eine Asymptote gibt — und man muß sich außerdem von der Realität des unendlichen Curvenzweiges überzeugen.

2) Wenn der betrachtete Werth von c den Ausdruck $\varphi'_c (1, c)$ auf Null reducirt, aber $\psi(1, c)$ nicht; so nimmt k mit x zugleich unendlich zu, weil sonst $\psi(1, c) = o$ wäre. Die Asymptote liegt also in unendlicher Entfernung, d. h. sie existirt nicht. — Es hat also ein unendlicher Curvenzweig nicht immer eine Asymptote, was z. B. schon bei den Curven $y^n - x^m = o$ der Fall ist. — Für die Parabel $y^2 - 2px = o$ hat man $c = o$ und $d = \infty$.

3) Wenn der Werth von c zugleich $\varphi'_c (1, c)$ und $\psi(1, c)$ verschwinden macht, so hat man zur Bestimmung von d eine Gleichung des zweiten Grades:

$$\tfrac{1}{2} \varphi''_{c^2} (1, c) d^2 + \psi'_c (1, c) d + \chi(1, c) = o,$$

welche zwei parallele Asymptoten gibt; aber der betreffende Werth von c ist eine doppelte Wurzel der Gleichung $\varphi(1, c) = o$, so daß der obige Lehrsatz über die Anzahl der Asymptoten noch stattfindet.

Beispiel. — Es sei:

$$xy^2 + ay^2 - a^2x + a^3 = 0,$$

so ist: $\varphi(1, c) = c^2$, $c = 0$, $\varphi'_c(1, c) = 2c$, $\varphi''_{c^2}(1, c) = 2$,
$\psi(1, c) = ac^2$, $\psi'_c(1, c) = 2ac$, $\chi(1, c) = -a^2$.

Da der Werth $c = 0$ die Ausdrücke $\varphi'_c(1, c)$, $\psi(1, c)$ auf Null reducirt, so muß man zu der Gleichung des zweiten Grades $d^2 - a^2 = 0$ übergehen, welche gibt: $d = \pm a$; und es gibt folglich zwei zu der Axe der x parallele Asymptoten.

§. 80.

Asymptoten als Grenzen der Tangenten

Es sei MT (Fig. 118) eine Tangente in M, und wir wollen uns vorstellen, daß sich der Berührungspunkt M auf der Curve AB ins Unendliche entfernt; so nähert sich die Tangente einer Grenzlage CD, welche wir zu bestimmen suchen wollen. — Die Gleichung der Tangente im Punkte M oder (x, y) ist:

$$Y - y = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(X - x),$$

oder: $$Y = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}X + \left(y + \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.x\right)$$

und es kommt darauf an zu finden:

$$\text{Gr.} -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \text{ und Gr.} \left(y + \frac{f'_x(x, y)}{f_{,y}(x, y)}x\right).$$

Nach §. 64 ist:

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -\psi(x, y) - 2\psi(x, y) - \ldots, \quad \text{(i)}$$

woraus folgt, wenn man $\frac{y}{x} = u$ setzt:

$$-\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{y}{x} + \frac{\psi(1, u)}{xf_u(1, u)} + \frac{2\chi(1, u)}{x^2 f'_u(1, u)} + \ldots$$

Convergirt nun x gegen ∞, so convergiren die Glieder vom zweiten an gegen Null, und es ist folglich:

$$\text{Gr.} -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \text{Gr.} \frac{y}{x} = c.$$

Dieselbe Gleichung (i) gibt:

$$\frac{xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{\psi(x, y) + 2\chi(x, y) + \ldots}{\varphi'_y(x, y) + \chi'_y(x, y + \ldots}$$

$$= -\frac{\psi(1, u) + 2\frac{1}{x}\chi(1, u) + \ldots}{\varphi'_u(1, u) + \frac{1}{x}\chi'_u(1, u) + \ldots};$$

folglich:

$$\text{Gr.}\left(y + \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} x\right) = -\frac{\psi(1, c)}{\varphi'_c(1, c)} = d.$$

Die Grenze der Tangenten ist also nichts anders, als die Asymptote.

§. 81.

Lage der Curve gegen die Asymptote.

Das Zeichen der Differenz $y - y_1 = \varepsilon$ lehrt, ob die Curve über, oder unter der Asymptote liegt. Wenn in der Gleichung (μ) in §. 78, $d + \varepsilon$ für k gesetzt wird, so erhält man:

$$\varphi'_c(1,c)\varepsilon + \frac{1}{x}\left[\varphi''_{c^2}(1, c)\frac{d^2}{2} + \psi'_c(1,c)d + \chi(1,c) + \ldots\right] = 0,$$

folglich:

$$\varepsilon = \frac{1}{x}\left[-\frac{\varphi''_{c^2}(1, c)\frac{d^2}{2} + \psi'_c(1, c)d + \chi(1,c)}{\varphi'_c(1, c)} + B\varepsilon + C\frac{1}{x} + \ldots\right].$$

Die Glieder der in den Klammern stehenden Größe enthalten von dem zweiten an den Factor ε, oder $\frac{1}{x}$, und es gibt folglich einen Werth von x, von welchem an der Zahlenwerth des ersten Gliedes größer ist, als die Summe der Zahlenwerthe aller folgenden Glieder, so daß das Zeichen des ersten Gliedes das Zeichen der ganzen in den Klammern stehenden Größe ist. Der unendliche Zweig einer algebraischen Curve bleibt also von einem gewissen Punkte an stets auf derselben Seite der Asymptote, und das Zeichen des ersten Gliedes:

$$A = -\frac{\varphi''_{c^2}(1, c)\frac{d^2}{2} + \psi'_c(1, c)d + \chi(1,c)}{\varphi'_c(1, c)}$$

gibt an, auf welcher Seite.

Beispiel. — Für die in §. 45 betrachtete Curve ist, wenn nur der Werth $c = 1$ in Betracht gezogen wird:

$$A = \tfrac{1}{2}\left(a^2 + ab - \frac{b^2}{4}\right),$$

und es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) Es ist $b < 2a(\sqrt{2} + 1)$. — In diesem Falle ist A positiv und ε positiv auf der Seite der positiven x, und

negativ auf der Seite der negativen x. Der Curvenzweig CD (Fig. 63 u. 64) liegt mithin über der Asymptote IH, und der Zweig F, G_1 unter der Asymptote HH_1.

2) Es ist $b > 2a(\sqrt{2}+1)$. In diesem Falle ist A negativ, und es findet das Gegentheil statt (Fig. 61).

3) Es ist $b = 2a(\sqrt{2}+1)$. Hier ist $A = o$, die Gleichung mit ε reducirt sich auf:

$$\varepsilon\left[\varphi'c\,(1,c)+\frac{1}{x}\left(\varphi''c^2(1,c)d+\varphi''c^2(1,c)\,\frac{\varepsilon}{2}+\psi'c\,(1,c)\right)\right.$$
$$\left.+\psi'c\,(1,c)\,\frac{d^2}{2x^2}+\ldots\right]=o,$$

und das Zeichen von ε ist das von $-\dfrac{\psi''c^2\,(1,c)}{\varphi'c\,(1,\,c)}=-\dfrac{a}{c}=-a$.

Die beiden Zweige CD, E_1G_1 (Fig. 62) liegen also unter der Asymptote.

Uebersicht.

$$b > a\begin{cases} b > 2a\,(\sqrt{2}+1), & \text{Fig. } 61, \\ b = 2a\,(\sqrt{2}+1), & \text{Fig. } 62, \\ b < 2a\,(\sqrt{2}+1), & \text{Fig. } 63, \end{cases}$$

$b = a$, Fig. 64,

$b < a$, Fig. 63.

§. 82.

Vorhin haben wir gesehen: daß bei algebraischen Curven ein unendlicher Zweig von einem gewissen Punkte an stets auf derselben Seite der Asymptote bleibt, was bei transcendenten Curven nicht immer der Fall ist. So geht z. B. die Curve $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ohne Ende von der einen Seite der Axe der x zur andern über, indem sie sich dieser Axe immer mehr nähert und die Oscillationen dieselbe Amplitude haben, während diese Amplitude bei der Curve $y = \dfrac{\sin x^2}{x}$ fortwährend abnimmt.

Bisher haben wir den Asymptotismus nur zwischen einer Curve und einer Geraden untersucht; aber man könnte diese Theorie auch verallgemeinern und den Asymptotismus zwischen zwei Curven untersuchen. So z. B. ist die Parabel $y = x^2$ eine Asymptote der Curve $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Wenn man auf irgend eine Weise die Ordinate y in eine Reihe entwickelt, welche nach den **abnehmenden** Potenzen von x fortschreitet, so daß man hat:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$
$$+ \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \frac{a_{-3}}{x^3} + \ldots\ldots$$

und man setzt jetzt $x = \infty$; so erhält man offenbar als Gleichung der **krummlinigen** Asymptote:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Wenn $n = 1$ ist, so ist die Gleichung der **geradlinigen**, nicht zu der Axe der y parallelen Asymptote:

$$y = a_1 x + a_0.$$

Ist $n = 2$, so ist die Gleichung der **parabolischen** Asymptote:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0;$$

u. s. f.

Beispiel. — Die Gleichung der Curve sei:

$$x^3 - ay(x - b) = 0$$

oder:

$$y = \frac{x^3}{a(x-b)},$$

so erhellet zunächst: daß die $x = b$ entsprechende Ordinate eine geradlinige Asymptote ist. Die Curve hat aber auch eine **parabolische** Asymptote, welche man erhält, wenn man

$$y = \frac{x^2}{a}\left(1 - \frac{b}{x}\right)^{-1}$$

in eine Reihe entwickelt und dann $x = \infty$ setzt. — Auf diese Weise erhält man als Gleichung dieser Asymptote:

$$ay = x^2 - bx + b^2$$

oder:

$$ay - \tfrac{3}{4} b^2 = (x - \tfrac{1}{2} b)^2,$$

welche eine gewöhnliche Parabel ausdrückt, deren Parameter $= a$ und deren Axe zu der der y parallel ist.

§. 83.

Asymptoten im Polarsysteme.

In diesem Systeme kann ein Curvenzweig auf drei verschiedene Arten **unendlich** werden, nämlich 1) ϱ nimmt unbeschränkt zu, wenn ϑ gegen einen festen Werth α convergirt, oder 2) ϱ convergirt gegen einen festen Werth a, wenn ϑ unbeschränkt wächst, oder 3) sowohl ϱ als ϑ nimmt unendlich zu.

1) Es sei AMB (Fig. 119) ein Curvenzweig, dessen Radiusvector $\varrho = OM$ gegen ∞ convergirt, wenn ϑ gegen den Winkel $LOX = \alpha$ convergirt: so ist:

$$\tang \vartheta = \frac{y}{x}, \ \tang \alpha = \text{Gr.} \frac{y}{x} = c.$$

Die geradlinige Asymptote CD, wenn sie existirt, ist also zu dem unendlichen Vector OL parallel, und es ist blos noch die gegenseitige Entfernung OC dieser beiden Parallelen zu finden. Es ist aber offenbar:

$$OC = \text{Gr. } MK = \text{Gr. } \varrho \sin(\vartheta - \alpha),$$

wo die Länge OC auf der in O auf OL senkrechten Geraden zur Linken, oder Rechten von O genommen werden muß, jenachdem sie positiv, oder negativ ist.

Beispiel. — Für die Hyperbel ist (§. 7), (Fig. 9):

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}, \ e > 1,$$

und wenn α den Winkel bezeichnet, dessen Cosinus $= -\frac{1}{e}$ ist; so wächst ϱ von $\frac{p}{1+e}$ bis ∞, wenn ϑ von o bis α wächst. Ferner hat man:

$$MK = \frac{p\sin(\alpha - \vartheta)}{1 + e\cos\vartheta} = -\frac{p}{e} \cdot \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\alpha - \cos\vartheta} = -\frac{p}{e} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \vartheta)};$$

folglich:

$$OC = \text{Gr. } MK = -\frac{p}{e\sin\alpha} = \frac{-p}{\sqrt{e^2 - 1}},$$

und wenn man diese Länge zur Rechten von OL nimmt; so erhält man die Lage der Asymptote CD. Endlich ist:

$$MK - OC = \varepsilon = \frac{p}{e} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}(\vartheta - \alpha) - \sin\frac{1}{2}(\vartheta + \alpha)}{\sin\alpha\ \sin\frac{1}{2}(\vartheta - \alpha)}$$

$$= -\frac{p\cos\alpha\ \sin\frac{1}{2}(\vartheta - \alpha)}{\sin\alpha\ \sin\frac{1}{2}(\vartheta + \alpha)}.$$

Der Curvenbogen liegt also zwischen OL und der Asymptote.

2) Wenn ϱ gegen einen festen Werth a convergirt, während ϑ unendlich wächst: so hat man eine Spiralasymptote des Kreises von dem Halbmesser a. — Es sei z. B. die Gleichung der gegebenen Curve:

$$\varrho = \frac{2a\vartheta}{2\vartheta - 1} = \frac{a}{1 - \frac{1}{2\vartheta}},$$

so convergirt ϱ abnehmend gegen a, wenn ϑ gegen $+\infty$ convergirt, wodurch man eine außerhalb des Kreises $\varrho = a$ liegende Spiralasymptote erhält. — Wenn ϑ gegen $-\infty$ convergirt, so convergirt ϱ wieder gegen a, aber wachsend, und man bekommt eine innerhalb desselben Kreises liegende Spiralasymptote. Beide Spiralen laufen übrigens in zwei unendliche Curvenzweige AB, $A'B'$ (Fig. 120) aus, welche dieselbe geradlinige Asymptote CD haben.

Zuweilen reducirt sich der Halbmesser a des Kreises auf Null, und alsdann ist die Spirale Asymptote eines Punktes. So z. B. windet sich die Spirale $\varrho = \frac{a}{\vartheta}$ unaufhörlich um den Pol, indem sie sich demselben immer mehr und mehr nähert.

3) Wenn ϱ und ϑ zugleich gegen ∞ convergiren, wie bei der Archimedischen Spirale $\varrho = a\vartheta$, so hat die Curve weder eine kreisförmige, noch eine geradlinige Asymptote.

Uebungsaufgaben.

1) Die Curve $y^3 = ax^2 + x^3$ hat die Asymptote: $y = x + \frac{a}{3}$.

2) Die Curve $y^2 = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}$ hat drei Asymptoten, nämlich die $x = a$ entsprechende Parallele zur Axe der y und die beiden durch die Gleichungen $y = \pm(x + a)$ ausgedrückten Geraden.

3) Die Curve:

$$y = \frac{x^3 - 3ax^2 + a^3}{x^3 - 3bx + 2b^2}$$

hat drei Asymptoten, nämlich die $x = b$, $x = 26$ entsprechenden Ordinaten und die durch die Gleichung:

$y = x - 3(a - b)$ ausgedrückte Gerade.

4) Die Curve: $ay^3 - bx^3 + c^2xy = o$ hat die Asymptote:

$$y = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\left(x - \frac{c^2}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\right).$$

5) Die Curve: $y^4 - x^4 + 2bx^2y = o$ hat die beiden Asymptoten:

$$y = x - \frac{b}{2}, \quad y = -\left(x + \frac{b}{2}\right).$$

6) Die Curve: $a^2 y^2 - b^3 y - x^4 = 0$ hat die beiden parabolischen Asymptoten:

$$x^2 = a\left(y - \frac{b^2}{a}\right),\ x^2 = a\left(\frac{b^2}{a} - y\right).$$

7) Die Curve: $y = \frac{x}{1+x^2}$ hat die Axe der x zur Asymptote.

8) Die Curve: $\sqrt{y} = \frac{a}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ hat zwei Asymptoten, wovon die eine mit der Axe der x einen Winkel von 45° macht und die andere auf dieser Axe senkrecht ist.

9) Die Curve: $ax^4 + 4c^3 xy - by^4 = 0$ hat eine durch den Anfangspunkt gehende Asymptote, welche mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente

$$= \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \text{ ist.}$$

10) Die Curve, deren Polargleichung ist:

$$\sqrt{2a\,\varrho - \varrho^2} = \frac{1}{\vartheta}$$

hat den Kreis von dem Halbmesser $= 2a$ und den Pol zu Asymptoten.

11) Die Curve:

$$\varrho = \frac{a\,\vartheta^2}{\vartheta^2 - 1} \text{ (Fig. 81)}$$

hat zwei geradlinige Asymptoten, welche mit der Polaraxe Winkel $= \pm 1$ bilden, und eine Kreisasymptote von dem Halbmesser $= a$.

12) Curve: $(x - 2)\,y = (x - 1)\,(x - 3)$,
Asymptote: $y = x - 2$.

13) Curve: $(x + 1)\,y = (x - 1)\,x$,
Asymptote: $y = x - 3$.

14) Curve: $x^2 - y^2 - a^2 = 0$,
Asymptote: $y = \pm x$.

15) Curve: $ay^3 + x^3 y - ax^3 = 0$,
Asymptote: $y = - a$.

16) Curve: $(x^2 - 1)\,y = (x^2 + 1)\,x$,
Asymptote: $x = \pm 1,\ y = x$.

17) Curve: $y^3 - 2xy^2 + x^2 y - a^3 = 0$,
Asymptoten: $y = x,\ y = 0$.

18) Curve: $xy^2 - y = ax^3 + bx^2 + cx + e$,

Asymptoten: $y = \pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$, $x = 0$.

Achtes Kapitel.

Von den Einhüllungs- oder Grenzcurven.

§. 84.

Wenn man eine Gleichung:

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (1)$$

hat, worin a ein willkürlicher Parameter ist, so entspricht jedem besondern Werthe von a auch eine besondere Curve, und die den beiden Werthen a und a + h des Parameters entsprechenden beiden Curven schneiden sich im Allgemeinen in einem gewissen Punkte M' (Fig. 121), dessen Coordinaten den beiden simultanen Gleichungen:

$$f(x, y, a) = 0, \; f(x, y, a + h) = 0 \qquad (2)$$

genügen. Wenn man in diesen Gleichungen h als constant und a als veränderlich betrachtet, so erhält man den Ort der Punkte M', wo jede der Curven $f(x, y, a) = 0$ von der Curve $f(x, y, a + h)$ geschnitten wird, und um die Gleichung dieses Ortes zu erhalten, muß man a zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren.

Der Ort, welcher den Durchschnittspunkt M' von $f(x, y, a) = 0$ mit $f(x, y, a + h) = 0$ und den Durchschnittspunkt M_1 von $f(x, y, a - h) = 0$ mit $f(x, y, a) = 0$ enthält, hat zwei seiner Punkte M' und M_1 auf der Curve $f(x, y, a) = 0$, und die Sehne $M_1 M'$ ist dem Orte und der letzten Curve gemein. — Läßt man nun h unendlich abnehmen, so nähern sich die beiden Punkte M', M_1 derselben Grenzlage M und die gemeinschaftliche Sehne wird eine gemeinschaftliche Tangente der Curve $f(x, y, a) = 0$ und des Ortes der Punkte M. — Dieser Ort wird der Ort der successiven Durchschnittspunkte der durch die Gleichung (1) ausgedrückten Curven genannt. Da derselbe alle diese Curven berührt, so umschließt oder umhüllt er dieselben gleichsam, und wird deshalb auch die Einschließungs- oder Einhüllungscurve genannt (Fig. 122).

Es kann geschehen: daß die Curve $f(x, y, a) = o$ die Curve $f(x, y, a + h) = o$ in mehr als einem Punkte schneidet, und alsdann berührt die Einhüllungscurve jede umhüllte Curve in mehreren Punkten.

§. 85.

Gleichung der Einhüllungscurve.

Für die Gleichungen (2) kann man die beiden folgenden setzen:

$$f(x, y, a) = o, \frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = o,$$

welche den Ort der Punkte M' ausdrücken, wenn a veränderlich ist. — Der Ort der Punkte M wird folglich durch die beiden simultanen Gleichungen:

$$f(x, y, a) = o, \text{ Gr. } \frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = o \quad (4)$$

ausgedrückt; d. h. die Einhüllungscurve wird durch die beiden Gleichungen:

$$f(x, y, a) = o, \quad f'_a(x, y, a) = o \qquad (5)$$

ausgedrückt, und man erhält sie durch eine Gleichung ausgedrückt, wenn man a zwischen diesen beiden letzten Gleichungen eliminirt.

Beispiel. — Man soll die Umhüllungscurve der Geraden:

$$\frac{x}{m+a} + \frac{y}{m-a} = 1$$

oder:

$$(m + a) y + (m - a) x + a^2 - m^2 = o,$$

wo m eine Constante ist, finden. — Hier ist:

$$f'_a = y - x + 2a = o,$$

und wenn man a eliminirt; so erhält man für die Gleichung der Einhüllungscurve:

$$(x - y)^2 - 4m (x + y) + 4m^2 = o,$$

welche folglich eine Parabel ausdrückt.

§. 86.

Wenn die eingehüllten Curven durch eine Gleichung:

$$f(x, y, a, b) = o \qquad (6)$$

mit zwei veränderlichen Parametern a, b, welche der Relation:

$$\varphi(a, b) = o \qquad (7)$$

genügen müssen, ausgedrückt werden, und man eliminirt b; so kommt man wieder auf den ersten Fall. Allein diese Elimination ist nicht nothwendig; denn wenn $b + k$ der Werth von b ist, welcher dem Werthe $a + h$ von a entspricht; so wird der Ort der Punkte M′ ausgedrückt durch:

$$f(x, y, a, b) = o, \quad f(x, y, a+h, b+k) = o,$$
$$\varphi(a, b) = o, \quad \varphi(a+h, b+k) = o.$$

Setzt man Gr. $\frac{k}{h} = B'$ und geht zu der Grenze über (Anhang, Formel 33); so erhält man die Einhüllungscurve, wenn man mit den Gleichungen (6) und (7) die zwei Gleichungen:

$$f'_a + f'_b \,.\, B' = o, \quad \varphi'_a + \varphi'_b \,.\, B' = o, \tag{8}$$

oder die eine Gleichung:

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} \tag{9}$$

verbindet.

Beispiel 1. Welches ist die Einhüllungscurve einer Geraden von constanter Länge l, deren Endpunkte sich auf zwei rechtwinkligen Axen bewegen? — Es sei AB (Fig. 123) irgend eine der Lagen der Geraden, $OA = a$, $OB = b$; so ist die Gleichung derselben:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ oder } bx + ay - ab = o,$$

und:

$$a^2 + b^2 = l^2.$$

Man hat also:

$$f'_a + f'_b \,.\, B' = y - b + (x - a)\, B' = o,$$
$$\varphi'_a + \varphi'_b \,.\, B' = a + b\, B' = o.$$

Wird aus den beiden letzten Gleichungen B′ eliminirt, so erhält man:

$$ax - by = a^2 - b^2,$$

und wenn man diese Gleichung mit der ersten verbindet:

$$x = \frac{a^3}{l^2}, \quad y = \frac{b^3}{l^2}; \text{ also } a^2 = x^{\frac{2}{3}}\, l^{\frac{4}{3}}, \; b^2 = y^{\frac{2}{3}}\, l^{\frac{4}{3}};$$

folglich, wenn diese Werthe von a^2, b^2 in die zweite Gleichung gesetzt werden:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

oder:

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 - 27\, l^2 x^2 y^2 = o$$

als die gesuchte Gleichung.

Es läßt sich auch der einer besondern Lage AB der Geraden entsprechende Punkt M der Einhüllungscurve leicht finden. Construirt man nämlich das Rechteck BOAI und fällt aus I das Perpendikel IM auf AB; so ist M der gesuchte Punkt. Denn es ist:

$$AM = \frac{b^2}{l},\ BM = \frac{a^2}{l},$$

und die ähnlichen Dreiecke MPA, BOA geben:

$$MP : b = \frac{b^2}{l} : l,$$

woraus folgt:

$$MP = y = \frac{b^3}{l^2},$$

und ebenso ergibt sich:

$$x = \frac{a^3}{l^2}.$$

Die Curve besteht aus vier gleichen Zweigen (Fig. 124), und wenn die Gerade die Lage CO hat, so ist nach der vorhergehenden Construction C der entsprechende Punkt der Einhüllungscurve. Die beiden Zweige CD, CD_1 berühren folglich die Axe der x in C, und die beiden Zweige DC, DC_1 berühren die Axe der y in D.

Beispiel 2. Einhüllungscurve der Geraden $px + qy + 1 = o$, wenn p, q durch eine Gleichung des zweiten Grades:

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F = o$$

verbunden sind.

Die Gleichung:

$$\frac{\varphi'p}{f'p} = \frac{\varphi'q}{f'q}$$

gibt hier:

$$\frac{2Ap + Bq + D}{x} = \frac{2Cq + Bp + E}{y} = \frac{Dp + Eq + 2F}{1}.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen, welche in Bezug auf p und q vom ersten Grade sind, ergeben sich für p, q Werthe von der Form:

$$p = \frac{\alpha x + \alpha' y + \alpha''}{\gamma x + \gamma' y + \gamma''},\ q = \frac{\beta x + \beta' y + \beta''}{\gamma x + \gamma' y + \gamma''},$$

welche, in die gegebene Relation substituirt, auf eine Gleichung führen, die in Bezug auf x und y vom zweiten Grade ist. Die Einhüllungscurve ist also vom zweiten Grade.

Uebungsaufgaben.

1) Die Gleichung der Umhüllungscurve der durch die Gleichung:

$$y = ax + r\sqrt{1+a^2},$$

worin a ein veränderlicher Parameter ist, ausgedrückten Curven ist:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

die Umhüllungscurve also ein Kreis.

2) Die Gleichung der Umhüllungscurve der Parabeln:

$$y^2 = a(x - a),$$

wo a einen veränderlichen Parameter bezeichnet, ist:

$$y = \pm \frac{x}{2},$$

und drückt mithin zwei Gerade aus.

3) Die Gleichung der Umhüllungscurve der Ellipsen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1,$$

worin a einen veränderlichen Parameter bedeutet, ist:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

4) Die Gleichung der Umhüllungscurve der Geraden:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

wo die Parameter a, b der Bedingung:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1$$

genügen müssen, ist:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

d. h. die Gleichung einer auf zwei Tangenten als Axen bezogenen Parabel.

5) Die Gleichung der Umhüllungscurve der durch die Gleichung:

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2$$

ausgedrückten Kreise, wo a, b der Bedingung:

$$b^2 = 4ma$$

genügen müssen, ist:

$$y^2 = 4m(x + m),$$

welche mithin eine Parabel ausdrückt.

6) Die Gleichung der Umhüllungslinie der durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1$$

ausgedrückten Ellipsen ist:

$$\pm \frac{x}{m} \pm \frac{y}{n} = 1,$$

welche vier Gerade ausdrückt.

§. 87.

Neues Coordinatensystem.

Statt eine Curve durch die Coordinaten ihrer Punkte zu bestimmen, kann man sie auch durch ihre Tangenten bestimmen. Die Lage einer Geraden $px + qy + 1 = o$ wird durch die beiden Größen p, q bestimmt, und eine Gleichung $F(p, q) = o$ zwischen diesen beiden Größen drückt eine stetige Reihe von Geraden, d. h. die Einhüllungscurve aus. — Wir haben vorhin gesehen, daß, wenn diese Gleichung vom zweiten Grade ist, die durch sie ausgedrückte Curve in Beziehung auf x, y auch vom zweiten Grade ist; und umgekehrt wird die Berührungsbedingung zwischen einer Geraden und einer Curve des zweiten Grades durch eine Gleichung des zweiten Grades nach p und q ausgedrückt. — Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit p und q drückt also dieselben Curven aus, als die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit x und y.

Es seien $f(x, y) = o$ und $F(p, q) = o$ die Gleichungen derselben Curve in beiden Coordinatensystemen, so haben wir bereits die Aufgabe gelöſ't: die Tangente (p, q) in einem Punkte (x, y) der Curve zu finden, und die Relationen erhalten:

$$\frac{p}{f'_x} = \frac{q}{f'_y} = \frac{-1}{x f'_x + y f'_y} = \frac{1}{\varphi + 2\chi + \ldots}. \qquad (10)$$

Dieser Aufgabe entspricht in dem neuen Coordinatensysteme die andere: den auf der Tangente (p, q) liegenden Punkt (x, y) der Curve zu bestimmen, und vermöge der Gleichung (9) hat man die Relationen von derselben Form:

$$\frac{y}{F'_p} = \frac{y}{F'_q} = \frac{-1}{pF'_p + qF'_q} = \frac{1}{\Phi + 2X + \ldots}.$$

Die beiden Größen p und q, welche die Lage jeder Tangente bestimmen, werden Tangentialcoordinaten genannt. — Eine Gleichung des ersten Grades $Ap + Bq + 1 = o$ mit Tangentialcoordinaten drückt einen Punkt aus, dessen Liniencoordinaten $x = A$, $y = B$ sind; denn die bewegliche Gerade, deren Gleichung in geradlinigen Coordinaten $px + qy + 1 = o$ ist, geht stets durch diesen Punkt, und die Umhüllungscurve reducirt sich auf einen Punkt.

Ein System zweier Gleichungen des ersten Grades mit Tangentialcoordinaten drückt eine Gerade aus; denn wenn man die beiden Gleichungen für p und q auflöst, so erhält man zwei bestimmte Werthe $p = \alpha$, $q = \beta$, welches die Coordinaten einer Geraden sind.

Im Allgemeinen, die gemeinschaftlichen Auflösungen zweier Gleichungen mit Tangentialcoordinaten geben die der Tangenten der Umhüllungscurven, welche zusammenfallen.

Um von der Gleichung einer Curve $F(p, q) = o$ in Tangentialcoordinaten zu der Gleichung $f(x, y) = o$ derselben Curve in geradlinigen Coordinaten überzugehen, muß man p, q zwischen den drei Gleichungen:

$$F(p, q) = o, \ \frac{x}{F'_p} = \frac{y}{F'_q}, \ px + qy + 1 = o$$

eliminiren, wodurch sich ergibt:

$$\frac{x}{F'_p} = \frac{y}{F'_q} = \frac{-1}{pF'_p + qF'_q}.$$

Wenn die Funktion $F(p, q)$ vom m^{ten} Grade ist in Beziehung auf p und q, so ist die Funktion $pF'_p + qF'_q$ auch vom m^{ten} Grade, kann aber mittelst der Gleichung $F(p, q) = o$ auf den $(m-1)^{ten}$ Grad gebracht werden.

Dieses neue Coordinatensystem ist von Plücker und Chasles eingeführt.

Beispiel. Wenn vier Punkte A und A′, B und B′ gegeben sind, die Umhüllungscurve der Geraden zu finden, welche so beschaffen sind, daß das Produkt der Abstände einer jeden von den beiden Punkten A, A′ zu dem Produkte der Abstände derselben Geraden von den beiden andern Punkten B, B′ in einem constanten Verhältnisse steht.

Die Gleichung der Umhüllungscurve ist in Tangentialcoordinaten vom zweiten Grade, und mithin ist die Curve auch vom zweiten Grade. Wenn der Abstand der Tangente vom Punkte A Null ist, so ist der vom Punkte B oder B′ auch Null. Die Curve berührt also die beiden Geraden AB, AB′ und ebenso die beiden Geraden A′B, A′B′, d. h. sie ist in das Viereck ABA′B′ beschrieben.

Neuntes Kapitel.

Von der Krümmung und den Evoluten der Curven.

§. 88.

Es sei MM' (Fig. 125) irgend eine Curve und MT die Tangente in M. Läßt man diese Tangente auf der Curve fortrollen, so ist der Winkel ω, welchen sie in irgend einer Lage mit ihrer anfänglichen Lage bildet, eine Funktion des von dem Berührungspunkte durchlaufenen Bogens s. Der Winkel ω wird die Biegung des Bogens s genannt. — Im Kreise von einem beliebigen Halbmesser r ist $\omega = \frac{s}{r}$, d. h. die Biegung ist dem Bogen proportional, und die Biegung eines der Längeneinheit gleichen Bogens oder das Verhältniß der Biegung eines Kreisbogens zu seiner Länge wird die Krümmung des Kreises genannt, und folglich durch $\frac{1}{r}$, d. h. durch den reciproken Werth seines Halbmessers ausgedrückt.

Wenn die Curve kein Kreis ist, so ist das Verhältniß $\frac{\omega}{s}$ nicht mehr constant, und drückt für einen gewissen Bogen s nur die mittlere Krümmung, d. h. die gleichförmige Krümmung aus, welche der Bogen haben müßte, damit seine Biegung $= \omega$ würde. — Läßt man aber s unendlich abnehmen, so drückt Gr. $\frac{\omega}{s}$ die Krümmung der Curve im Punkte M aus. — Wenn man auf der Normale, und zwar auf der concaven Seite der Curve, eine Länge MO $= r$ von solcher Beschaffenheit nimmt, daß $\frac{1}{r} =$ Gr. $\frac{\omega}{s}$ ist, und aus dem Punkte O mit dem Halbmesser r einen Kreis beschreibt; so hat dieser Kreis dieselbe Krümmung, als die Curve im Punkte M, und wird deshalb der Krümmungskreis, so wie sein Mittelpunkt O der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M der Curve genannt.

§. 89.

Bestimmung des Krümmungskreises.

Das Verhältniß eines Curvenbogens zu seiner Sehne hat die Einheit zur Grenze, wenn dieser Bogen unendlich abnimmt. — Wenn der Bogen MM′ (Fig. 125) hinreichend klein ist, damit er seine Convexität stets nach derselben Seite kehrt; so ist derselbe länger als die Sehne MM′ und kürzer als die Summe der beiden Tangenten MT_1M'. Fällt man von T_1 auf die Sehne das Perpendikel T_1D und bezeichnet die Winkel T_1MM', $T_1M'M$ resp. mit μ, μ', so hat man:

$$\frac{MD}{MT_1} = \cos\mu, \ \frac{M'D}{M'T_1} = \cos\mu',$$

und der Bruch:

$$\frac{MD + M'D}{MT_1 + M'T_1} = \frac{MM'}{MT_1M'}$$

liegt nach einem bekannten algebraischen Satze zwischen $\cos\mu$ und $\cos\mu'$, und da die Winkel μ, μ' zugleich mit s gegen Null, also $\cos\mu$, $\cos\mu'$ gegen die Einheit convergiren; so hat der letzte Bruch die Einheit zur Grenze. Nun ist aber:

$$MT_1M' > s > MM' \text{ also } 1 > \frac{MM'}{s} > \frac{MM'}{MT_1M'},$$

und endlich:

$$\text{Gr.}\ \frac{MM'}{s} = 1.$$

Der Krümmungsmittelpunkt ist nichts anders, als die Grenzlage des Durchschnittspunktes zweier benachbarter Normalen. — Denn es sei O der Durchschnittspunkt der Normalen in M und M′, und um OT_1 als Durchmesser werde ein Kreis beschrieben, so geht derselbe durch M und M′. Bezeichnet ferner D den Durchmesser dieses Kreises und s′ den Bogen MM′ desselben, so ist:

$$\angle MOM' = \omega = \frac{s'}{D} \text{ und } \frac{1}{D} = \frac{\omega}{s'};$$

aber auch:

$$\frac{\omega}{s'} = \frac{\omega}{s} \cdot \frac{s}{s'} \text{ und } \frac{s}{s'} = \frac{s}{MM'} \cdot \frac{MM'}{s'};$$

folglich:

$$\text{Gr.}\ \frac{s}{s'} = 1 \text{ und Gr.}\ \frac{\omega}{s'} = \text{Gr.}\ \frac{\omega}{s} = \frac{1}{r}, \text{ also Gr.}\ D = r.$$

Die Grenze von T_1O oder MO ist also $= r$, und mithin die Grenze des Durchschnittspunktes zweier benachbarter Normalen der Krümmungsmittelpunkt. — Hieraus folgt: daß der Ort der Krümmungsmittelpunkte nichts anders ist, als der Ort der Durchschnittspunkte der successiven Normalen oder die Einhüllungscurve der letztern.

Es sei:

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der Curve, so ist die Gleichung der Normale im Punkte (x, y):

$$(X - x) f'_y - (Y - y) f'_x = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung der Normale enthält zwei veränderliche Parameter x, y, welche der Gleichung (1) genügen müssen, und man erhält die Einhüllungscurve, wenn man mit den beiden letzten Gleichungen noch die folgende:

$$\frac{(X-x)f''_{xy}-(Y-y)f''_{x^2}-f'_y}{f'_x} = \frac{(X-x)f''_{y^2}-(Y-y)f''_{xy}+f'_x}{f'_y}$$

oder:

$$(X-x)(f'_y f''_{xy} - f'_x f''_{y^2}) - (Y-y)(f'_y f''_{x^2} - f'_x f''_{xy}) = f'^2_x + f'^2_y \qquad (3)$$

verbindet, woraus sich ergibt:

$$\frac{X-x}{f'_x} = \frac{Y-y}{f'_y} = -\frac{f'^2_x + f'^2_y}{f'^2_y f''_{x^2} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2}}$$
$$= \frac{\pm r}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}. \qquad (4)$$

Diese Gleichungen (4) geben den Krümmungshalbmesser r und die Coordinaten X, Y des Krümmungsmittelpunktes. — Wenn man x, y zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3) eliminirt, so erhält man die Gleichung der Einhüllungscurve der Normalen.

Beispiel 1. Für die Ellipse hat man:

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}} = -\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{\frac{x^2}{a^4b^2}+\frac{y^2}{b^4a^2}} = \frac{\pm r}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}},$$

$$a^2\left(\frac{X}{x}-1\right)-b^2\left(\frac{Y}{y}-1\right)=-\left(b^2\frac{x^2}{a^2}+a^2\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$=-a^2+(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}=-b^2-(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2},$$

$$a^2\frac{X}{x}=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2,\ b^2\frac{Y}{y}=-\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2,$$

woraus folgt, wenn man $\frac{a^2-b^2}{a}=c$ und $\frac{a^2-b^2}{b}=d$ setzt:

$$\frac{X}{c}=\left(\frac{x}{a}\right)^3,\ \frac{Y}{d}=\left(\frac{y}{b}\right)^3,$$

und der Ort der Krümmungsmittelpunkte, welcher in Fig. 126 dargestellt ist, wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\left(\frac{X}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{Y}{d}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Ferner ist:

$$r=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^2+b^2-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$=\frac{(a^4-(a^2-b^2)x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}.$$

Von **A** bis **B** nimmt **r** zu, und folglich die Krümmung ab.

Beispiel 2. Für die Hyperbel ist:

$$f(x,y)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0,$$

und wenn man setzt:

$$\frac{a^2+b^2}{a}=c,\ \frac{a^2+b^2}{b}=d,$$

so wird der in Fig. 127 dargestellte Ort der Krümmungsmittelpunkte durch die Gleichung:

$$\left(\frac{X}{c}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{Y}{d}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

ausgedrückt, und für den Krümmungshalbmesser hat man:

$$r=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(b^2-a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Wenn sich der Punkt **M** auf dem Curvenzweige **AH** immer weiter von **A** entfernt, so convergirt r gegen ∞, und folglich die Krümmung gegen Null.

Beispiel 3. Für die Parabel hat man:

$$f(x,y)=\tfrac{1}{2}(y^2-2px)=0,$$

$$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{y} = -\frac{p^2+y^2}{p^2} = -\frac{p+2x}{p} = \frac{\pm r}{\sqrt{p^2+y^2}},$$

$$x = \frac{X-p}{3},\ y = -p^{\frac{2}{3}}\ Y^{\frac{1}{3}},\ r = \frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte (Fig. 128) hat zur Gleichung:

$$p\,Y^2 = \frac{8}{27}\ (X-p)^3,$$

und wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt C verlegt wird, wo die Curve die Axe der x schneidet:

$$p\,Y^2 = \frac{8}{27}\ X^3.$$

Uebungsaufgaben.

1) Für die auf ihre Asymptoten als Axen bezogene Hyperbel:

$$xy = m^2$$

ist die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$(X+Y)^{\frac{2}{3}} - (X-Y)^{\frac{2}{3}} = (4\,m)^{\frac{2}{3}},$$

und der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,m^4}.$$

2) Für die halbkubische Parabel:

$$3\,ay^2 = x^3$$

ist die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$81\,XY^2 = 16\,(2a \pm (a^2-6\,aX)^{\frac{1}{2}})^2\,(\pm a^2 - 6a\,X)^{\frac{1}{2}} - a),$$

und der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{(2a+3x)^{\frac{3}{2}}\ x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}\ a}.$$

3) Für die Hypocycloide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}},$$

und der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = 3\ (axy)^{\frac{1}{3}}.$$

4) Für die Cycloide:

$$y = r.\ \text{arc sin vers.}\ \frac{x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}$$

ist die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$Y = r\ \text{arc sin vers.}\left(\frac{4r - X}{r}\right)$$
$$- \sqrt{2r(4r-X) - (4r-X)^2},$$

welche eine der ersten gleiche Cycloide ausdrückt, und der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = -2x\sqrt{27x}\,(27 - x).$$

§. 90.

Durch einen nicht auf der Curve liegenden Punkt gehende Normalen zu ziehen.

Wenn x, y die Coordinaten des Fußpunktes der Normale und x_1, y_1 die des gegebenen Punktes bezeichnen, so müssen letztere der Gleichung (2) genügen, und man hat folglich die Gleichung:

$$(x_1 - x)\,f'_y - (y_1 - y)\,f'_x = o. \qquad (5)$$

Die simultanen Gleichungen (1) und (5) bestimmen die Fußpunkte der gesuchten Normalen, und da beide vom $m$ten Grade sind; so folgt: daß man im Allgemeinen durch einen gegebenen Punkt an eine Curve des $m$ten Grades m^2 Normalen ziehen kann.

Da die Normalen der gegebenen Curve Tangenten der Einhüllungscurve sind, so läuft die in Rede stehende Aufgabe darauf hinaus: durch einen gegebenen Punkt Tangenten an die zweite Curve zu ziehen. Wenn der gegebene Punkt P in der Nähe der converen Seite eines Curvenzweiges liegt, so kann man zwei Tangenten an denselben ziehen, und die Endgleichung hat zwei gleiche Wurzeln (sie kann zwar noch andere Wurzeln haben, allein diese entsprechen Tangenten, deren Berührungspunkte nicht in der Nähe von P liegen). Wenn sich der Punkt P der Einschließungscurve nähert, so nähern sich die beiden Wurzeln der Gleichheit, und wenn der Punkt P auf die Einhüllungscurve fällt; so sind sie einander gleich. Tritt endlich der Punkt P auf die concave Seite derselben Curve, so existiren die beiden Tangenten nicht mehr und die beiden Wurzeln der Endgleichung werden imaginär.

Beispiel. Die gegebene Curve sei eine Ellipse (Fig. 126), und wir wollen den Punkt P zunächst innerhalb der Einhüllungscurve annehmen. Eine Tangente, welche auf dem Zweige CD fortrollt, geht zweimal durch den Punkt P, und wenn sie auf DC_1 oder CD_1 fortrollt; so geht sie nur einmal durch den Punkt P. Man kann also von P aus vier Tangenten an die Einhüllungscurve, und folglich vier Normalen an die Ellipse ziehen. — Wenn der Punkt P auf der Einhüllungscurve liegt, so gibt es nur drei Normalen, und wenn er endlich außerhalb derselben liegt; so gibt es nur zwei Normalen.

Bei der Hyperbel finden dieselben Eigenschaften statt; und an die Parabel kann man drei, zwei, oder nur eine Normale ziehen, jenachdem der Punkt P innerhalb, auf, oder außerhalb der Einhüllungscurve liegt. Bei der Parabel ist übrigens die sich durch Elimination von x zwischen (1) und (5) ergebende Endgleichung:

$$y^3 - 2p(x_1 - p)y - 2p^2 y_1 = 0,$$

und die Bedingung der Realität ihrer Wurzeln:

$$p y_1^2 - \frac{8}{27}(x_1 - p)^3 < 0$$

führt auf dieselben Folgerungen.

§. 91.

Evoluten.

Es seien MM_1 und $M'M'_1$ (Fig. 129) zwei benachbarte Normalen, und aus ihrem Durchschnittspunkte O werde mit dem Halbmesser OM ein Kreisbogen beschrieben, welcher OM in I schneidet; so ist:

$$\text{Gr.}\ \frac{IM'}{\text{Bog.}\,MM'} = 0,$$

wenn der Punkt M′ sich M unendlich nähert. Denn das Dreieck MIM′ gibt:

$$\frac{IM'}{MM'} = \frac{\sin M'MI}{\sin MIM'};$$

es ist aber:

$$\frac{IM'}{s} = \frac{IM'}{MM'} \cdot \frac{MM'}{s},\ \text{also}\ \frac{IM'}{s} = \frac{MM'}{s} \cdot \frac{\sin M'MI}{\sin MIM'}.$$

Wenn M′ sich M unendlich nähert, so werden MI und MM′ Tangenten in M; folglich ist Gr. $M'MI = 0$ und Gr. $MIM' = \frac{\pi}{2}$, also Gr. $\frac{\sin M'MI}{\sin MIM'} = 0$ und endlich Gr. $\frac{IM'}{s} = 0$.

Es seien ferner M_1, M'_1 die den Punkten M, M' entsprechenden Krümmungsmittelpunkte, so ist:

$$\text{Gr. } \frac{M'_1M' - M_1M}{\text{Bog. } M_1M'_1} = 1.$$

Denn es ist:

$$M'_1M' - M_1M = M_1O + OM'_1 - IM' = M_1OM'_1 - IM',$$

$$\frac{M'_1M' - M_1M}{s_1} = \frac{M_1OM'_1}{s_1} - \frac{IM'}{s} \cdot \frac{s}{s_1},$$

$$\text{Gr. } \frac{M_1OM'_1}{s_1} = 1, \text{ Gr. } \frac{IM'}{s} = o,$$

und wegen $\frac{s}{s_1} = \frac{\omega}{s_1} : \frac{\omega}{s}$ ist: Gr. $\frac{s}{s_1} = \frac{r}{r_1}$, wo r, r_1 die Krümmungshalbmesser der beiden Curven in den Punkten M und M_1 und s, s' die einander entsprechenden Bogen derselben bezeichnen. Das Verhältniß $\frac{r}{r_1}$, hat aber im Allgemeinen einen endlichen Werth; folglich ist Gr. $\frac{IM'}{s} \cdot \frac{s}{s_1} = o$, und mithin die gesuchte Grenze $= 1$.

Aus dem Vorhergehenden folgt weiter: daß die Differenz $M_1M - N_1N$ zwischen zwei beliebigen Krümmungshalbmessern dem Bogen M_1N_1 der Einhüllungscurve gleich ist, welcher zwischen den beiden entsprechenden Krümmungsmittelpunkten M_1 und N_1 liegt.

Denn es seien $M'_1, M''_1, \ldots$ eine große Anzahl zwischen M_1 und N_1 liegender Punkte der Einhüllungscurve, $M'_1 M', M''_1M'', \ldots$ die entsprechenden Tangenten oder Normalen, ferner die successiven Differenzen $M'_1M' - M_1M$, $M''_1M'' - M'_1M', \ldots$ resp. gleich $\delta, \delta', \ldots$, die Bogen $M_1M'_1, M'_1M''_1, \ldots$ resp. gleich $s_1, s'_1, \ldots$, die Differenz $N_1N - M_1M = \triangle$ und der ganze Bogen $M_1N_1 = S_1$; so ist:

$$\frac{\triangle}{S_1} = \frac{\delta + \delta' + \delta'' + \ldots}{s_1 + s'_1 + s''_1 + \ldots}$$

eine Mittelgröße zwischen den einzelnen Brüchen $\frac{\delta}{s_1}, \frac{\delta'}{s'_1}, \frac{\delta''}{s''_1}, \ldots$ Wird nun die Anzahl der Zwischenpunkte $M'_1, M''_1, \ldots$ unendlich groß, so ist die Grenze jedes einzelnen Bruches $=1$, folglich auch:

$$\frac{\triangle}{S_1} = 1, \text{ also } \triangle = S.$$

Abwickelung einer Curve nennt man die Bestimmung der geradlinigen Länge des Bogens derselben; und nach dem vorhergehenden Satze wird also der Bogen $M_1 N_1$ der Einhüllungscurve oder des Ortes der Krümmungsmittelpunkte durch die Differenz der den Endpunkten M_1, N_1 entsprechenden beiden Krümmungshalbmesser $N_1 N$ und $M_1 M$ abgewickelt ausgedrückt, weshalb dieser Ort die Evolute (Abgewickelte) und die gegebene Curve die Evolvente (Abwickelnde) genannt wird.

Denkt man sich in A_1 einen vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Faden befestigt, welcher bis zu dem Punkte M_1 auf die Evolute gewickelt und dann geradlinig nach der Tangente $M_1 M$ gespannt ist, befestigt in M einen Stift, und wickelt den stets gleich stark gespannten Faden wieder ab; so beschreibt der Stift offenbar die Curve $MM' \ldots A$. Denn wenn z. B. der Berührungspunkt nach N_1 gelangt ist, so hat der gerade Theil des Fadens um die Länge des Bogens $M_1 N_1$ zugenommen, ist also $= N_1 N$ geworden, und folglich befindet sich der Stift in N.

Wenn der Stift in irgend einem andern Punkte P des Fadens befestigt wird, so beschreibt derselbe eine andere Curve $PP'P'' \ldots$, welche ebenfalls als Evolvente der gegebenen Curve $M_1 N_1 A$ betrachtet werden kann, weil nach der Erzeugungsart dieser zweiten Curve der Bogen $M_1 N_1 = N_1 Q - M_1 P$ ist. Derselben Curve können also unendlich viele Evolventen entsprechen, deren gemeinschaftliche Normalen die Tangenten der Evolute sind. Der zwischen zwei Evolventen liegende Theil dieser Normalen ist constant, und die Evolute ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für sämmtliche Evolventen.

Es sei $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Evolvente (M), ferner x, y die Coordinaten des Punktes M, X, Y die des Punktes P und k der constante Abstand MP; so hat man:

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{k}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}.$$

Eliminirt man x, y zwischen diesen drei Gleichungen, so erhält man eine Gleichung mit X, Y, welche irgend eine der Evolventen ausdrückt, weil k ein willkürlicher Parameter ist.

Zehntes Kapitel.

Von den Mittelpunkten.

§. 92.

Ein Punkt heißt Mittelpunkt einer Curve, wenn jede durch denselben gehende Gerade die Curve in Punkten schneidet, welche paarweise von diesem Punkte gleichweit entfernt sind und auf entgegengesetzten Seiten desselben liegen (§. 41). — Eine durch den Mittelpunkt einer Curve gehende Gerade schneidet also diese Curve in einer geraden Anzahl von Punkten, wofern der Mittelpunkt nicht selbst ein Punkt der Curve ist.

1) Wenn eine Curve zwei Mittelpunkte hat, so hat sie deren auch unendlich viele, welche auf derselben Geraden in gleichen gegenseitigen Abständen liegen.

Es seien O und O' (Fig. 130) die beiden Mittelpunkte; man verlängere OO' und nehme $O'O'' = OO'$. Wenn alsdann M ein Punkt der Curve ist, und man nimmt $O'M' = O'M$, so ist M' ein zweiter Punkt der Curve. Ebenso bestimmt man einen dritten Punkt M'' der Curve auf $M'O$, dann einen vierten M''' auf $M''O'$. Nun sind aber die Dreiecke $MO'M'''$, $M'O'M''$ einander gleich; also geht die Gerade MM''' durch den Punkt O'', und es ist $O''M = O''M'''$; folglich auch der Punkt O'' ein Mittelpunkt. Ebenso wie wir eben aus der Existenz zweier Mittelpunkte O, O' die eines dritten O'' abgeleitet haben, kann man aus O' und O'' einen vierten O''' ableiten, u. s. f.

Eine algebraische Curve kann nur einen Mittelpunkt haben. — Denn wenn sie deren zwei hätte, so hätte sie unendlich viele in derselben Geraden liegende Mittelpunkte, und würde von einer zu der Mittelpunktslinie parallelen Geraden in unendlich vielen Punkten geschnitten, was unmöglich ist. Läßt sich aber der erste Theil der Gleichung in lineare Factoren zerlegen, welche gleich Null gesetzt, Gerade geben, die zu derselben Geraden parallel und paarweise gleichweit davon entfernt sind; so sind alle Punkte jener Geraden Mittelpunkte in Bezug auf die Systeme der Parallelen.

2) Wenn eine Curve drei nicht in gerader Linie liegende Mittelpunkte hat, so hat sie deren unendlich viele, welche in den Durchschnittspunkten zweier Systeme gleichweit von einander abstehender Parallelen liegen.

Es seien O, O', O'' (Fig. 131) die drei gegebenen Mittelpunkte, so ist die vierte Winkelspitze O''' des Parallelogrammes $OO'O'''O''$ ebenfalls ein Mittelpunkt. Denn nimmt man $O'''O$, $O'''O''$ als Coordinatenaxen, bezeichnet die Längen $O'''O, O'''O''$ resp. mit a, b und die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Curve mit x, y; so kann man mit Hülfe der Mittelpunkte O, O', O'' successive andere Punkte M', M'', M''' der Curve bestimmen, deren Coordinaten nach §. 36 sind:

$$2a - x, \; - y; \; x, \; 2b + y; \; - x, \; - y$$

Der Punkt O''' ist also die Mitte der Geraden MM''', und folglich O''' Mittelpunkt der Curve. Nimmt man ferner auf $O'''O$ und $O'''O''$ Längen, welche resp. gleich b und a sind, so liegen nach dem ersten Satze auf jeder dieser beiden Linien unendlich viele Mittelpunkte, und wenn man durch die so erhaltenen Punkte Parallelen zu $O'''O, O'''O''$ zieht: so ist jeder Durchschnittspunkt Winkelspitze eines Parallelogrammes, dessen drei andere Winkelspitzen bereits Mittelpunkte sind, folglich auch die vierte.

§. 93.

Anfangspunkt als Mittelpunkt.

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten Mittelpunkt der Curve:

$$f(x, y) = o \qquad (1)$$

ist, und x, y sind die Coordinaten eines Punktes M der Curve; so sind $-x, -y$ die Coordinaten des entsprechenden Punktes M' der Curve, und folglich ist:

$$f(-x, -y) = o. \qquad (2)$$

Umgekehrt, wenn die Gleichungen (1) und (2) zugleich stattfinden, d. h. wenn die Werthe x, y und $-x, -y$ der Gleichung der Curve gleichzeitig genügen; so liegen die Punkte (x, y), $(-x, -y)$ mit O in gerader Linie und in gleichen Abständen von O, und folglich ist O ein Mittelpunkt.

Wenn $f(x, y)$ eine ganze algebraische Funktion ist, deren Glieder alle von demselben Grade (derselben Dimension) sind, so sind die Gleichungen (1) und (2) identisch, dieser Grad mag eine gerade, oder eine ungerade Zahl sein, und der Anfangspunkt der Coordinaten ist zuverlässig Mittelpunkt der Curve. — Die Gleichungen (5), (6) und (7) in §. 7 haben diese Eigenschaft, und folglich haben die drei entsprechenden Curven: Ellipse, Hyperbel und Lemniscate (Fig. 8, 9, 9a) den Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkte. — Bei der Ellipse und Hyperbel, so wie bei der Curve $(y^2 + x^2)^2 + 2c^2 (y^2 - x^2) = a^4 - c^4$ (§. 43, Fig. 56—59) ist der Anfangspunkt der Coordinaten. Mittelpunkt, und eine durch denselben gehende Gerade schneidet die Curve in zwei, oder in vier Punkten, welche paarweise gleichweit davon entfernt sind. — Die Curve $y^2 - x^2 y^2 + x^4 = o$ hat den Anfangspunkt ebenfalls zum Mittelpunkte, welcher zur Curve gehört, aber nur als isolirter Punkt. — Die erste der binomischen Gleichungen (§. 41) hat nur Glieder von einem ungeraden Grade, und der Anfangspunkt ist Mittelpunkt der Curve, welche zugleich durch denselben geht. — Wenn alle Glieder der Gleichung der Curve von einem ungeraden Grade sind, so geht ein Curvenzweig immer durch den Mittelpunkt; denn es läßt sich leicht zeigen: daß in diesem Falle der Mittelpunkt kein isolirter Punkt sein kann.

Wenn nicht alle Glieder der Gleichung von einerlei Dimension sind, so kann man daraus noch nicht schließen: daß der Anfangspunkt kein Mittelpunkt ist. — Wenn man weiß: daß sich das Polynom $f(x, y)$ nicht in ganze Factoren zerlegen läßt, so können die beiden Gleichungen (1), (2) nur dann denselben Ort ausdrücken, wenn sie identisch sind (§. 16), und es müssen nothwendig alle Glieder von einerlei Dimension sein. — Weiß man aber nicht gewiß: daß $f(x, y)$ unzerlegbar ist, so muß man den größten gemeinschaftlichen Divisor von $f(x, y)$ und $f(-x, -y)$ suchen. Gibt es einen solchen Divisor nicht, so ist der Anfangspunkt kein Mittelpunkt; aber wenn es einen größten gemeinschaftlichen Divisor $\varphi(x, y)$ vom p^{ten} Grade gibt, so hat man:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y),$$

und die Gleichung $\varphi(x, y) = o$ drückt die Curve aus, welche den Anfangspunkt zum Mittelpunkt hat, während die Gleichung $\psi(x, y) = o$ kein System reeller Auflösungen gestatten kann.

§. 94.
Bestimmung des Mittelpunktes.

Hat man sich überzeugt, daß der Anfangspunkt der Coordinaten kein Mittelpunkt ist, so untersucht man, ob ein anderer Punkt der Mittelpunkt der Curve ist. Zu dem Zwecke verlegt man den Anfangspunkt in einen unbestimmten Punkt (a, b), indem die Richtung der Axen ungeändert bleibt, und untersucht: ob es möglich ist a und b so zu bestimmen, daß die Gleichung:

$$f(a + x', b + y') = 0$$

die vorhin angeführte Eigenschaft hat: daß, wenn ihr durch x′, y′ genügt wird, dasselbe mit — x′, — y′ der Fall ist.

Wenn die Gleichung eine *algebraische* und *nicht zerlegbar* ist, so muß man alle Glieder aus derselben fortzuschaffen suchen, welche nicht von einem *geraden* Grade sind, wenn die Gleichung von einem *geraden* Grade ist, oder welche nicht von einem *ungeraden* Grade sind, wenn die Gleichung von einem *ungeraden* Grade ist. Ist z. B. die Gleichung vom *zweiten* Grade, so muß man a, b so zu bestimmen suchen, daß die Coefficienten der beiden Glieder vom *ersten* Grade verschwinden, was im Allgemeinen immer möglich ist. — Wenn aber die Gleichung von einem höhern, als vom zweiten Grade ist, so ist die Anzahl der = o zu setzenden Coefficienten gewöhnlich größer als zwei, und die auf diese Weise erhaltenen Gleichungen können nur sehr selten gleichzeitig bestehen.

Beispiel 1. Für die Curven des zweiten Grades:

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ex + 1 = 0 \qquad (3)$$

hat man:

$$f(a+x', b+y') = f(a,b) + f'_a \cdot x' + f'_b \cdot y,$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}[f''_{a^2} \cdot x'^2 + 2 f''_{ab} \cdot x'y' + f''_{b^2} \cdot y'^2] = 0,$$

und die Gleichungen, welche den Mittelpunkt bestimmen, sind folglich:

$$f'_a = 0, \; f'_b = 0,$$

oder wenn man x und y resp. für a und b setzt:

$$f'b = 2Ax + By + D = 0, \; f'_y = 2Cy + Bx + E = 0, \qquad (4)$$

woraus folgt:

$$x = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \; y = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \qquad (5)$$

Wenn $B^2 - 4AC$ *nicht* = o ist, d. h. in dem Falle der *Ellipse* und *Hyperbel* (§. 15), gibt es *einen* Mittelpunkt, und wenn $B^2 - 4AC = 0$ ist, d. h. in dem Falle der *Parabel*, können die Gleichungen (4) nicht nebeneinander bestehen, und es gibt folglich keinen Mittelpunkt. — Wenn aber die Zähler und der Nenner der Brüche (5) gleichzeitig verschwinden, so reduciren sich die Gleichungen (4) auf eine einzige, und alle Punkte der durch diese eine Gleichung ausgedrückten Geraden sind Mittelpunkte. — Nimmt man diese Gerade zur Axe der x, so muß sich jede der Gleichungen (4) auf $y = 0$ reduciren, und es ist folglich: $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, $E = 0$, so daß sich die Gleichung (3) auf $Cy^2 + 1 = 0$ reducirt, folglich: $y = \pm\sqrt{-\frac{1}{C}}$ ist. Der Ort ist also ein System zweier Geraden, welche zu der Mittelpunktslinie parallel und gleichweit davon entfernt sind.

Beispiel 2. Es sei $y = \sin x$ (§. 51, Fig. 70), so ist der Anfangspunkt O ein Mittelpunkt, weil die Gleichung $-y = \sin(-x)$ mit der gegebenen identisch ist. — Untersuchen wir weiter, ob es noch andere Mittelpunkte gibt, so muß die Gleichung:

$$b + y' = \sin(a + x')$$

dieselben reellen Auflösungen haben, als die Gleichung:

$$b - y' = \sin(a - x').$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$b = \sin a \cos x',$$

und da diese letzte Gleichung für unendlich viele Werthe von x' stattfinden muß, so muß $b = 0$, $\sin a = 0$ oder $a = k\pi$ sein. Die Curve hat also auf der Axe der x in gleichen Intervallen $= \pi$ unendlich viele Mittelpunkte O, I, O′, I′, . . .

Beispiel 3. Es sei die Gleichung der Curve:

$$\cos x + \cos y = m,$$

wo $2 > m > 1$ ist; so muß man die beiden Gleichungen haben:

$$\cos(a + x') + \cos(b + y') = m,$$
$$\cos(a - x') + \cos(b - y') = m,$$

woraus sich durch Addition und Subtraction ergibt:

$$\cos a \cos x' + \cos b \cos y' = m,$$
$$\sin a \sin x' + \sin b \sin y' = 0,$$

und wenn man y' eliminirt:

$$(\sin^2 a - \sin^2 b)\cos^2 x' + 2m\cos a \sin^2 b \cos x'$$
$$- (\sin^2 a - \sin^2 b)\cos^2 b - m^2 \sin^2 b = 0.$$

Da diese letzte Gleichung für unendlich viele Werthe von x' stattfinden muß, so muß man haben:

$$\sin^2 a - \sin^2 b = 0,\quad \cos a \sin^2 b = 0,\quad \sin^2 b = 0,$$

woraus folgt:

$$\sin a = 0\,,\ \sin b = 0 \text{ oder } a = k\pi,\ b = k'\pi.$$

Die Mittelpunkte werden also durch zwei Systeme von Geraden bestimmt, welche resp. zu der Axe der x und zu der der y parallel und um 2π von einander entfernt sind. (Fig. 72).

§. 95.

Eigenschaften der Curven mit einem Mittelpunkte.

Es seien M, N zwei Punkte der Curve und M', N' die beiden entsprechenden Punkte, so sind die beiden Dreiecke MON, $M'ON'$ einander gleich; folglich die beiden Geraden MN, $M'N'$ parallel und gleich weit vom Mittelpunkte entfernt. — Nähert sich nun N dem Punkte M unendlich, so nähert sich auch N' dem Punkte M' unendlich, und die beiden Geraden MN, $M'N'$ werden an der Grenze resp. Tangenten in M und M'. Die Tangenten in zwei correspondirenden Punkten sind also parallel und gleichweit vom Mittelpunkte entfernt.

Wenn eine Curve mit einem Mittelpunkte einen unendlichen Zweig hat, so hat sie noch einen zweiten dem ersten correspondirenden unendlichen Zweig. Wenn sich ein Punkt M auf dem ersten Zweige ins Unendliche entfernt, so entfernt sich der correspondirende Punkt M' auf dem zweiten Zweige ebenfalls ins Unendliche, und die Tangenten in M und M' werden an der Grenze Asymptoten. Zwei correspondirende unendliche Zweige einer Curve mit einem Mittelpunkte haben folglich parallele und gleichweit von dem Mittelpunkte entfernte Asymptoten. — Wenn die gegenseitige Entfernung $= 0$ ist, so haben die beiden unendlichen Curvenzweige dieselbe durch den Mittelpunkt gehende Asymptote.

Wenn die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben ist, so ist der Pol ein Mittelpunkt, wenn diese Gleichung nicht geändert wird, indem man $\pi + \vartheta$ statt ϑ setzt.

Elftes Kapitel.

Von den Durchmessern.

§. 96.

Wir wollen durch eine Curve eine Reihe Parallelen MM', $M_1 M'_1$, . . . (Fig. 132) ziehen, und zunächst annehmen, daß jede derselben die Curve nur in zwei Punkten schneidet; so wird der Ort der Mittelpunkte N, N_1, . . . der verschiedenen Sehnen ein Durchmesser der Curve genannt.

Wenn jede der Parallelen die Curve in mehr als zwei schneidet, so nimmt man die Mitten der gegenseitigen Abstände von je zwei Durchschnittspunkten, und der so erhaltene Ort dieser Mittelpunkte ist der Durchmesser. — In Fig. 133 z. B. schneidet die Gerade MM' die Curve in vier Punkten, welche auf 6 Arten zu je zwei verbunden werden können. Der Durchmesser der Curve hat also auf der Parallele MM' sechs Punkte, auf der Parallele $M_1M'_1$ nur einen und auf der Parallele $M_2M'_2$ gar keinen Punkt.

Die allgemeine Gleichung der Durchmesser einer Curve:

$$f(x, y) = 0$$

ist von der Form:

$$F(x, y, a) = 0,$$

wo a den Richtungscoefficienten der parallelen Sehnen bedeutet, und diese Gleichung gibt für jeden Werth von a den zugehörigen Durchmesser.

§. 97.

Bestimmung der Gleichung der Durchmesser.

Erste Methode. — Es seien x, y und x', y' die Coordinaten der auf derselben Sehne liegenden beiden Punkte M, M' (Fig. 132 a) der Curve, und x_1, y_1 die der Mitte N dieser Sehne; so hat man:

$$f(x, y) = 0,\ f'(x', y') = 0,$$

$$a = \frac{y' - y}{x' - x},\ x_1 = \frac{x + x'}{2},\ y_1 = \frac{y + y'}{2},$$

und die Elimination von x, y, x', y' zwischen diesen fünf Gleichungen gibt die Gleichung:

$$F(x_1, y_1, a) = 0$$

des Durchmessers.

Zweite Methode. — Das System der parallelen Sehnen kann ausgedrückt werden durch:

$$y = ax + b, \qquad (2)$$

wo a eine Constante und b ein veränderlicher Parameter ist. Die Gleichung:

$$f(x, ax + b) = o \qquad (3)$$

gibt die Abscissen der Durchschnittspunkte der Curve mit einer der Parallelen, und wenn man die Gleichung:

$$F(x_1, a, b) = o \qquad (4)$$

bildet, deren Wurzeln die halben Summen aus je zwei der Wurzeln der Gleichung (3) sind; so sind die Wurzeln der Gleichung (4) die Abscissen der Mitten der betrachteten Parallelen, und die zugehörigen Ordinaten ergeben sich aus der Gleichung:

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Eliminirt man nun b, so erhält man die Gleichung:

$$F(x_1, a, y_1 - ax_1) = o$$

des Durchmessers.

Beispiel. — Die gegebene Curve sei:

$$y^2 - x^3 = o,$$

so hat man:

$$x^3 - (ax + b)^2 = o, \qquad (3)$$

$$8x^3_1 - 8a^2x^2_1 + (a^4 - 2ab)x_1 + 2a^3b + b^2 = o, \qquad (4)$$

und die Gleichung des Durchmessers ist:

$$8x_1^3 - 3a^2x_1^2 + y_1^2 - 6ax_1y_1 + 2a^3y_1 = o.$$

Für den besondern Werth $a = \infty$ ist die Gleichung des Durchmessers $y_1 = o$; folglich entspricht den zur Axe der y parallelen Sehnen die Axe der x als Durchmesser.

Dritte Methode. — Es seien α, β die constanten Winkel, welche die Richtung der Sehnen mit den Coordinatenaxen bildet, ϑ der Winkel dieser Axen, ϱ der Abstand einer Mitte N von dem Punkte M, wo ϱ positiv, oder negativ ist, jenachdem die Richtung NM mit der Richtung (α, β), oder mit der entgegengesetzten Richtung zusammenfällt, $p = \dfrac{\sin\beta}{\sin\vartheta}$, $q = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\vartheta}$; so ist:

$$x = x_1 + p\varrho, \quad y = y_1 + q\varrho,$$

also:

$$f(x, y) = f(x_1 + p\varrho, y_1 + q\varrho) = o. \qquad (5)$$

Die reellen Wurzeln ϱ dieser Gleichung sind die Abstände des Punktes N von den Punkten, wo die Curve von der Parallele geschnitten wird, und wenn der Punkt N die Mitte der Sehne sein oder dem Durchmesser angehören soll; so müssen zwei Wurzeln der Gleichung (5) einander gleich und entgegengesetzt sein. — Die Relation zwischen x_1, y_1, welche diese Bedingung ausdrückt, ist die Gleichung des Durchmessers.

Diese Bedingungsgleichung erhält man, wenn man den ersten Theil der Gleichung (5) durch $\varrho^2 - h$ dividirt, wo h eine unbestimmte Größe ist, bis man auf einen Rest vom ersten Grade:

$$P\varrho + Q$$

kommt, und dann h zwischen den Gleichungen $P = o$, $Q = o$ eliminirt.

Beispiel. — Es sei:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1 = o,$$

so ist:

$$f(x_1 + p\varrho, y_1 + q\varrho) = f(x_1, y_1) + (f'x_1 \cdot p + f,y_1 \cdot q)\varrho + H\varrho^2 = o.$$

Soll nun diese Gleichung des zweiten Grades zwei gleiche und entgegengesetzte Wurzeln haben, so muß der Coefficient des zweiten Gliedes Null sein. Die Gleichung des Durchmessers ist also, wenn man bemerkt: daß $\frac{q}{p} = a$ ist:

$$f'x_1 + a f_{y_1} = o.$$

Vierte Methode. — Die vorhergehende Methode kann auch folgendergestalt modificirt werden: Man verlegt den Anfangspunkt in die Mitte N, so wird die Gleichung der Curve:

$$f(x_1 + x', y_1 + y') = o,$$

und die der Sehne:

$$y' = ax'.$$

Die Abscissen der Durchschnittspunkte der Sehne mit der Curve werden durch die Gleichung:

$$f(x_1 + x', y_1 + ax') = o$$

gegeben, und wenn der neue Anfangspunkt (x_1, y_1) die Mitte der Sehne sein soll, so muß diese Gleichung zwei gleiche und entgegengesetzte Wurzeln haben. — Die Gleichung, welche diese Bedingung ausdrückt, ist alsdann die Gleichung des Durchmessers.

Beispiel. — Für die Curven des zweiten Grades hat man:

$$f(x_1 + x', y_1 + ax') = f(x_1, y_1) + (f'x_1 + f'y_1 . a)x' + Hx'^2 = o,$$

und folglich ist die Gleichung des Durchmessers:

$$f'x_1 + af'y_1 = (2A + Ba)x_1 + (2Ca + B)y_1 + D + Ea = o.$$

In den Curven des zweiten Grades sind also alle Durchmesser gerade Linien.

Der durch die beiden simultanen Gleichungen:

$$f'_{x_1} = o, \quad f'_{y_1} = o$$

bestimmte Punkt genügt der Gleichung des Durchmessers bei jedem Werthe von a, und folglich gehen alle Durchmesser durch den Mittelpunkt. — Es ist übrigens a priori einleuchtend: daß in allen Curven, welche einen Mittelpunkt haben, dieser Punkt jedem Durchmesser angehören muß. — Bezeichnet a_1 den Richtungscoefficienten des Durchmessers, so hat man:

$$a_1 = -\frac{Ba + 2A}{B + 2Ca} = -\frac{B}{2C} + \frac{B^2 - 4AC}{2C(2Ca+B)}.$$

In der Parabel ist:

$$B^2 - 4AC = o, \text{ folglich: } a_1 = -\frac{B}{2C}.$$

In dieser Curve sind mithin alle Durchmesser zu einander parallel.

Die vorhergehende Relation zwischen a und a_1 läßt sich auf die folgende, mehr symmetrische Form bringen:

$$2Caa_1 + B(a + a_1) + 2A = o,$$

woraus erhellet: daß die durch a und a_1 bestimmten Richtungen reciprok sind, d. h. daß den zu der einen Richtung parallelen Sehnen eine zu der andern parallele Gerade als Durchmesser entspricht, weshalb man diese Richtungen auch conjugirte genannt hat. — Aber in der Parabel hat dieses Wort offenbar keine Bedeutung.

§. 98.

Wenn die Curve vom Grade m ist, so ist die Gleichung (3) im Allgemeinen auch vom Grade m, und die Gleichung (4) vom Grade $\frac{m(m-1)}{2}$, welches auch der Grad der Durchmessercurve ist, also den Grad m übersteigt, sobald $m > 3$ ist. — Die Untersuchung dieses Durchmessers ist also gewöhnlich schwieriger, als die der gegebenen Curve, und daher zur Erforschung ihrer Eigenschaften wenig geeignet. — Für gewisse besondere Werthe von a kann jedoch der Grad des Durchmessers niedriger ausfallen.

Wenn eine der parallelen Sehnen eine Tangente der Curve ist, so fallen die beiden Punkte M, M′, und folglich die Mitte N zusammen, und der Berührungspunkt ist ein Punkt des Durchmessers.

Wenn jede Parallele die Curve in m Punkten schneidet, so hat man nach §. 36 für den Ort des Mittelpunktes N der mittlern Entfernungen aller dieser Punkte:

$$x_1 = \frac{x + x' + x'' + \ldots}{m},$$

wo $x, x', x'', \ldots$ die Abscissen der Durchschnittspunkte oder die Wurzeln der Gleichung (3) bedeuten. — Wenn man in $f(x, y)$ die Glieder von einerlei Dimension immer in eins zusammenfaßt, wie in §. 64; so wird die Gleichung (3):

$$x^m \varphi(1, a) + \left[\varphi'a\,(1, a) b + \psi(1, a)\right] x^{m-1} + \ldots = 0,$$

woraus folgt:

$$m x_1 = -\frac{\varphi'a \cdot b + \psi}{\varphi},$$

und wenn man $y_1 - a x_1$ statt b setzt:

$$\varphi'a \cdot y_1 + (m\varphi - a\varphi'a)\, x_1 + \psi = 0.$$

Der Ort der Mittelpunkte der mittlern Entfernungen ist also stets eine gerade Linie, welche in den Curven des zweiten Grades mit dem Durchmesser zusammenfällt.

Die Eigenschaften der Durchmesser hat man zuerst im Kreise und dann in den Curven des zweiten Grades untersucht. — Später hat man die Definition des Durchmessers verallgemeinern wollen, um sie auf Curven von einem beliebigen Grade anwenden zu können; allein diese Verallgemeinerung ist sehr mangelhaft. — Statt die Mitte des Abstandes zwischen je zwei Durchschnittspunkten zu betrachten, wodurch die Sache complicirter wird, wäre es zweckmäßiger gewesen: den Ort des Mittelpunktes der mittlern Entfernungen der auf derselben Sekante liegenden Durchschnittspunkte Durchmesser zu nennen, so daß der Durchmesser immer eine gerade Linie wäre.

Zwölftes Kapitel.

Von den Axen.

§. 99.

Eine Gerade, welche eine Curve in zwei symmetrische Theile theilt, heißt eine Axe derselben, so daß die Punkte der Curve paarweise auf Perpendikeln dieser Axe und zu beiden Seiten in gleichen Abständen liegen.

Wenn eine Curve zwei parallele Axen hat, so hat sie unendlich viele parallele und gleichweit von einander abstehende Axen. — Z. B. die Curve $y = \sin x$; denn wenn man den Anfangspunkt O nach G verlegt, so daß $OG = \frac{\pi}{2}$ ist (Fig. 70), so wird die Gleichung der Curve $y = \cos x$. Da sich diese Gleichung nicht ändert, wenn man $-x$ statt x setzt, so folgt, daß die Curve in Bezug auf die Parallele GH zur Axe der y symmetrisch ist. — Verlegt man weiter den Anfangspunkt in die Entfernung $OK = \frac{3\pi}{2}$, so wird die Gleichung der Curve $y = -\cos x$; folglich ist die Parallele KL auch eine Axe der Curve; u. s. f. Die Curve hat also unendlich viele parallele Axen, welche um die Länge π von einander abstehen.

Eine algebraische Curve kann keine zwei parallele Axen haben.

2) **Wenn eine Curve zwei Axen OA, OA′** (Fig. 130 a) **hat, welche sich in einem Punkte O schneiden und einen Winkel ϑ mit einander bilden, so hat sie eine Reihe von Axen, welche durch denselben Punkt O gehen und so beschaffen sind: daß zwei aufeinanderfolgende denselben Winkel ϑ mit einander bilden.** Denn einem Punkte M der Curve entspricht in Bezug auf die Axe OA′ ein symmetrischer Punkt M′, und dem Punkte M′ entspricht in Beziehung auf die Axe OA ein symmetrischer Punkt M″, sowie dem Punkte M″ in Bezug auf die Axe OA′ ein symmetrischer Punkt M‴. — Dreht man nun den einen Theil der Ebene der Figur um die Axe OA′ soweit, bis er mit dem andern Theile zusammenfällt; so fällt OA auf OA″, M′ auf M, M″ auf M‴, und da OA auf der Mitte von M′M″ senkrecht ist; so ist auch OA″ auf der Mitte von MM‴ senkrecht. Es entspricht also jedem Punkte M der Curve in Beziehung auf OA″ ein symmetrischer Punkt M‴, und mithin ist OA″ eine Axe der Curve.

So wie sich aus der Existenz zweier Axen OA, OA′ die einer dritten Axe OA″ nachweisen läßt, ebenso ergibt sich aus der Existenz der beiden Axen OA′, OA″ die der vierten Axe OA‴, u. s. f.

Wenn das Verhältniß $\frac{\vartheta}{2\pi}$ **commensurabel** und dem nicht reducirbaren Bruche $\frac{m}{n}$ gleich ist, so ist die Anzahl der von dem

Punkte O ausgehenden Halbaxen = n. Ist dasselbe Verhältniß incommensurabel, so ist die Anzahl der Axen unendlich groß.

§. 100.

Die Abscissenaxe als Axe der Curve.

Wenn bei rechtwinkligen Coordinaten die Axe der x eine Axe der Curve:

$$f(x, y) = o \qquad (1)$$

ist, so entspricht jedem Punkte (x, y) der Curve ein symmetrisch liegender (x, — y), und es ist folglich:

$$f(x, -y) = o. \qquad (2)$$

Umgekehrt, wenn die Gleichungen (1) und (2) zu gleicher Zeit stattfinden, so ist die Abscissenaxe eine Axe der Curve.

Wenn die Gleichung $f(x,y) = o$ eine ganze algebraische ist, und nur gerade Potenzen von y enthält, so ist die Axe der x eine Axe der Curve. — Ebenso, wenn f (x, y) nur gerade Potenzen von x enthält, so ist die Axe der y eine Axe der Curve. — Hierbei wird jedoch vorausgesetzt: daß sich die Gleichung $f(x, y) = o$ nicht zerlegen läßt, und wenn man dieses nicht zum Voraus mit Gewißheit weiß; so muß man wie in §. 93 verfahren.

Ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben, so ist die Polaraxe eine Axe der Curve, wenn ihre Gleichung ungeändert bleibt, indem man $-\vartheta$ statt ϑ setzt. Denn alsdann bleiben die Werthe von ϱ dieselben, und es haben folglich die Punkte der Curve paarweise eine symmetrische Lage gegen die Polaraxe. — Ein Beispiel bietet die Epicycloide dar.

§. 101.

Bestimmung der Axen.

Wir wollen die unbekannte Axe $X'_1 X'$ zur neuen Axe der x nehmen, den Anfangspunkt in einen Punkt (a, b) dieser Axe verlegen, und den Winkel, welchen $X'_1 X'$ mit XO bildet, mit α bezeichnen; so wird die Gleichung der Curve:

$$f(a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,\ b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) = o,$$

und es bleibt noch zu untersuchen: ob sich a, b und α so bestimmen lassen, daß die letzte Gleichung die vorhin angegebene Eigenschaft hat.

Man kann einen beliebigen Punkt der Axe, z. B. den, worin sie die Axe der y schneidet, zum Anfangspunkte nehmen, so daß man nur zwei unbestimmte Größen b, a hat. — Wenn die Gleichung algebraisch und nicht zerlegbar ist, so muß man alle ungeraden Potenzen von y fortzuschaffen suchen. Ist die Gleichung vom zweiten Grade, so sind zwei Glieder, nämlich das mit xy und das mit y wegzuschaffen, was im Allgemeinen immer möglich ist. — Aber wenn die Gleichung von einem höhern als vom zweiten Grade ist, so ist die Anzahl der verschwinden zu machenden Coefficienten gewöhnlich größer als 2, und die erhaltenen Gleichungen können selten nebeneinander bestehen.

Wenn die Curve einen Mittelpunkt hat, so geht die Axe offenbar durch denselben.

Wenn die Gleichung der Curve in Beziehung auf x und y symmetrisch ist, so ist die Halbirungslinie des Coordinatenwinkels eine Axe der Curve. Denn wenn man diese Gerade zur Axe der x', und das Perpendikel darauf zur Axe der y' nimmt; so geben die Transformationsformeln in §. 12:

$$x \sin \vartheta = x' \sin \frac{\vartheta}{2} - y' \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad y \sin \vartheta = x' \sin \frac{\vartheta}{2} + y' \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Bleibt nun x' dasselbe und wird — y' für y' gesetzt, so wird dadurch x mit y vertauscht, und nach der Voraussetzung die Gleichung nicht geändert.

Das Folium von Descartes (Fig. 65):

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

ist symmetrisch in Bezug auf x und y, und hat folglich die Halbirungslinie des Axenwinkels zur Axe. — Dieses erhellet auch aus der Figur. Denn jedem Punkte A, dessen Coordinaten OP, AP sind, entspricht ein Punkt A_1, dessen Coordinaten OQ, QA_1 resp. den vorhergehenden gleich sind. Da OP = OQ ist, so schneiden sich die Geraden AP, A_1Q in einem Punkte D' der Halbirungslinie DC, und folglich ist in dem gleichschenkligen Dreiecke $AD'A_1$ die Halbirende D'X' auf der Mitte von AA_1 senkrecht, mithin $AF = A_1F$ und folglich die Halbirende DX' eine Axe der Curve.

Die Curve:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1^{\frac{2}{3}} \quad (\S.\ 86)$$

hat nicht blos die beiden Coordinatenaxen, sondern auch die beiden Halbirungslinien der Coordinatenwinkel als Axen; denn die Gleichung ist sowohl in Bezug auf x und y, als in Beziehung auf $-x$ und y symmetrisch.

§. 102.

Axen der Curven des zweiten Grades.

In diesen Curven ist die Axe nichts anders als ein auf den halbirten Sehnen senkrechter Durchmesser. Nun findet aber nach dem Frühern für die conjugirten Richtungen die Relation statt:

$$2Caa_1 + B(a + a_1) + 2A = 0,$$

und damit diese Richtungen aufeinander senkrecht sind, muß man haben:

$$1 + (a + a_1)\cos\vartheta + aa_1 = 0,$$

wo ϑ den Winkel der Coordinatenaxen bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$aa_1 = \frac{2A\cos\vartheta - B}{B - 2C\cos\vartheta},\quad a + a_1 = \frac{2(C - A)}{B - 2C\cos\vartheta},$$

und mithin sind a, a_1 die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$(B - 2C\cos\vartheta)z^2 + 2(A - C)z + 2A\cos\vartheta - B = 0. \quad (3)$$

Wenn die Coordinatenaxen auf einander senkrecht sind, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$Bz^2 + 2(A - C)z - B = 0.$$

Da die Bedingung der Realität der Wurzeln der Gleichung (3):

$$(A - C)^2 - (2A\cos\vartheta - B)(B - 2C\cos\vartheta) > 0$$

immer erfüllt wird, so gibt es in einer Curve des zweiten Grades im Allgemeinen ein System aufeinander senkrechter conjugirter Richtungen, und die zu diesen beiden Richtungen parallelen Durchmesser sind zwei Axen der Curve. — In der Parabel gibt es jedoch nur eine Axe, welche zu der allgemeinen Richtung der Durchmesser parallel ist; aber die Curve nur in einem Punkte (Scheitel) schneidet. In der That hat in diesem Falle die obige Gleichung des zweiten Grades die Wurzel $-\frac{B}{2C}$.

Wenn zu gleicher Zeit $A = C$ und $B = 2A\cos\vartheta$ ist, so wird die Gleichung (3) für jeden Werth von z erfüllt, und wir wissen, daß in diesem Falle die Curve ein Kreis ist. — Im Kreise ist also jeder Durchmesser eine Axe.

§. 103.

Uebersicht.

Uebersehen wir jetzt nochmals in aller Kürze, was wir bisher über die Construction einer Curve erörtert haben: Wenn eine ganze algebraische Gleichung $f(x, y) = o$ gegeben ist, so untersucht man zunächst die Form dieser Gleichung, um diejenigen Eigenschaften der Curve kennen zu lernen, welche sich unmittelbar aus der Betrachtung des Polynomes $f(x, y)$ ergeben.

1) Wenn das Polynom $f(x, y)$ nur gerade Potenzen von y enthält, so ist die Curve in Beziehung auf die Axe der x symmetrisch, welche folglich alsdann eine Axe der Curve ist.

2) Wenn das Polynom lauter Glieder von einerlei Dimension enthält, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten Mittelpunkt der Curve. — Oft bemerkt man, daß die gegebene Gleichung durch eine Coordinatenveränderung vereinfacht wird, und die eben erwähnten Umstände sich herausstellen (§. 46). — Wenn das Polynom $f(x, y)$ in Bezug auf x und y symmetrisch ist, so ist die Halbirungslinie des Coordinatenwinkels eine Axe der Curve, und es ist alsdann natürlich, die Coordinatenaxen um 45^0 zu drehen, wie bei dem Folium des Descartes (§. 47) und in dem fünften Beispiele in §. 53.

Zur nähern Bestimmung der Form der Curve construirt man die Tangenten in den merkwürdigsten Punkten, besonders in den Grenzpunkten, vermittelst der Formel $I = -\frac{f'_x}{f'_y}$, und bestimmt dann die Punkte, für welche die Ordinaten Maxima, oder Minima sind. — Dann untersucht man die Curve in Beziehung auf Concavität und Convexität, bestimmt die Inflexionspunkte, und wenn die Curve unendliche Zweige hat; so bestimmt man die Asymptoten derselben.

Endlich kann die Curve noch andere, sogenannte ausgezeichnete oder singuläre Punkte darbieten, auf deren allgemeine Untersuchung wir uns jedoch hier nicht einlassen wollen.

Außer den isolirten Punkten, wie C in Fig. 53 bei der Conchoide, und den Inflexionspunkten, wie der Anfangspunkt bei der Curve $y^3 = x^5$ (Fig. 49) gehören hieher: der Rückkehrpunkt O (Fig. 50) der ersten Art bei der Curve $y^2 = x^3$, der Rückkehrpunkt der zweiten Art, wie O (Fig. 142) bei der Curve $(y - x^2)^2 - x^5 = o$, der vielfache Punkt, durch welchen mehrere Zweige der Curve gehen, wie C (Fig. 55) im dritten Falle der Conchoide und bei der Lemniscate (Fig .58) der Anfangspunkt der Coordinaten.

Wenn die Gleichung der Curve keine ganze algebraische, sondern eine transcendente, oder auch nur eine irrationale algebraische ist, worin eine Wurzelgröße mit geradem Index nur mit einem Vorzeichen genommen wird; so können noch andere Arten singulärer Punkte vorkommen, wie z. B. in der Curve $y = \sqrt{x^3}$, welche nur den einen Zweig OA (Fig. 135) hat, der sich in O schließt, weshalb O ein Schlußpunkt genannt wird, oder in der transcendenten Curve $y = \frac{1}{\tan x}$ (Fig. 136). Ferner der vorspringende Punkt (die Spitze), wie O (Fig. 137) bei der Curve $y = \sqrt{x^2 + 2x^3}$, welche aus zwei Zweigen OA, OB besteht, welche die Halbirungslinien OC, OD der Axenwinkel in O berühren.

Wir wollen das Vorhergehende nur noch an einem vollständig durchgeführten Beispiele zu erläutern suchen, und dazu die Curve:

$$f(x, y) = \tfrac{1}{4}(y^4 - x^4 - 96\,a^2\,y^2 + 100\,a^2\,x^2) = o$$

nehmen.

Aus der bloßen Ansicht dieser Gleichung erhellet: daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein Mittelpunkt der Curve ist, und daß die Coordinatenaxen Axen derselben sind, so daß sie aus vier gleichen Theilen besteht. — Wir wollen blos den in dem Winkel YOX (Fig. 138) liegenden Theil betrachten, d. h. x und y nur positive Werthe beilegen.

Wird die Gleichung für y aufgelös't, so erhält man:

$$y = \sqrt{48\,a^2 \pm \sqrt{x^4 - 100\,a^2\,x^2 - 48^2\,a^4}}$$
$$= \sqrt{48\,a^2 \pm \sqrt{(x^2 - 6^2\,a^2)(x^2 - 8^2 a^2)}},$$

oder beide Werthe getrennt:

$$y' = \sqrt{48\,a^2 + \sqrt{(x^2 - 6^2\,a^2)(x^2 - 8^2\,a^2)}},$$
$$y'' = \sqrt{48 a^2 - \sqrt{(x^2 - 6^2\,a^2)(x^2 - 8^2\,a^2)}}$$

Die zweite Wurzelgröße ist reell für die Werthe von x, welche $< 6\,a$ und für die, welche $> 8\,a$ sind. Wir wollen a zur Längeneinheit nehmen und auf die Axe der x, so wie auf die der y eine gewisse Anzahl solcher Einheiten abtragen.

y' ist reell von $x = o$ bis $x = 6$ und von $x = 8$ bis $x = \infty$. Soll y'' reell sein, so muß außer dem $48^2 a^4 > x^4 - 100 a^2 x^2 + 48^2 a^4$ oder $x < 10a$ sein; folglich ist y'' reell von $x = o$ bis $x = 6$ und von $x = 8$ bis $x = 10$. Wenn x sich von o bis 6 ändert, so wächst y'' von o bis $\sqrt{48}$, wodurch man den Curvenzweig **OA** erhält, und wenn x sich von 8 bis 10 ändert, so nimmt y'' von $\sqrt{48}$ bis o ab, wodurch man den Zweig **DC** erhält. — Aendert sich x von o bis 6, so nimmt y' von $\sqrt{96}$ bis $\sqrt{48}$ ab, wodurch man den Zweig **BA** erhält, und wenn x sich von 8 bis 10, dann von 10 bis ∞ ändert; so wächst y' von $\sqrt{48}$ bis $\sqrt{96}$ und von da bis ∞, wodurch man den unendlichen Curvenzweig **DE** bekommt. Diese Theile der Curve schließen sich an einander und bilden die beiden stetigen Zweige **OAB, CDE.**

Tangente. — Es ist:

$$f'_x = -x^3 + 50 a^2 x,\quad f'_y = y^3 - 48 a^2 y,$$

folglich:

$$I = \frac{x(x^2 - 50 a^2)}{y(y^2 - 48 a^2)}.$$

In den Punkten **A, D, C** ist $I = \infty$; also die Tangente parallel zu der Axe der y, und in **B** ist $I = o$; also die Tangente parallel zu der Axe der x und die Ordinate ein Maximum.

Der Anfangspunkt ist ein vielfacher Punkt, und wenn man $\frac{y}{x} = u$ setzt; so wird die Gleichung der Curve:

$$\left(u^2 - \frac{25}{24}\right) - \frac{1}{96a^2}(u^4 - 1)\, x^2 = o,$$

also:

$$I = \text{Gr. } u = \frac{5}{\sqrt{24}} > 1.$$

Wenn man u einen zwischen 1 und $\frac{5}{\sqrt{24}}$ liegenden Werth beilegt, so werden beide Glieder der Gleichung negativ, und es kann ihr nicht genügt werden. Wenn **OH** die Halbirungslinie des Coordinatenaxenwinkels und **OK** die Tangente in **O** ist; so hat die Curve in dem Winkel **KOH** keinen Punkt, und folglich liegt der Zweig **OAB** ganz über der Tangente **OK.**

Asymptote. — Es ist:

$$\varphi = y^4 - x^4,\ \varphi(1, c) = c^4 - 1 = o,\ c = 1,\ \psi = o,\ d = o.$$

Der unendliche Zweig **DE** hat die Halbirungslinie **OH** zur Asymptote, und da die Curve in dem Winkel **HOK** keinen Punkt hat; so liegt der Zweig **CDE** ganz unter der Asymptote **OH**.

Concavität. — Es ist:

$$f''_{x^2} = -\ 3x^2 + 50\,a^2,\ f''_{y^2} = 3y^2 - 48\,a^2;$$

folglich wegen $a = 1$:

$$I' = \frac{\frac{1}{2}(y^4 - x^4)(x^2 y^2 - 48 \,.\, 50)}{y^3 (y^2 - 48)^3}.$$

Der erste Factor des Zählers ist längs **OAB** positiv, während der zweite Factor des Zählers und der Nenner von **O** bis **A** negativ sind. Folglich kehrt der Zweig **OA** seine Concavität gegen die Axe der positiven y. — Ferner ist der erste Factor des Zählers längs **CDE** negativ, aber der zweite Factor und der Nenner sind von **D** bis **E** positiv; folglich kehrt der Zweig **DE** seine Concavität gegen die Axe der negativen y. Nur auf dem Zweige **BA** oder **CD**, und zwar wegen der Zeichenänderung des zweiten Factors des Zählers, kann es Inflexionspunkte geben. — Verbindet man die Gleichung:

$$x^2 y^2 - 48 \,.\, 50 = o$$

mit der gegebenen, so erhält man:

$$x^8 - 10^2 x^6 + 6^2 . 8^2 . 10^2 . x^2 - 6^2 . 8^2 . 50^2 = o$$

oder:

$$x^6 (x^2 - 6^2) - 8^2 (x^3 - 6 \,.\, 50)^2 = o.$$

Da beide Glieder dieser Gleichung von $x = o$ bis $x = 6$ negativ sind, so hat sie in diesem Intervalle keine Wurzel; und da der erste Theil der Gleichung von $x = 8$ bis $x = 10$ vom Negativen zum Positiven übergeht, so hat sie in diesem Intervalle eine ungerade Anzahl von Wurzeln, und zwar nur eine, weil, wenn sie deren 3 hätte, die Ableitung:

$$(8x^6 - 6 \,.\, 10^2 . x^4 + 2 \,.\, 10^2 . 6^2 . 8^2)\, x$$

oder blos die in der Klammer stehende Größe, zweimal, und die Ableitung hiervon:

$$6 \,.\, 8 \,.\, x^3 (x^2 - 50)$$

einmal in diesem Intervalle verschwinden müßte, was nicht möglich ist. — Die Curve hat also nur einen Inflexionspunkt, welcher auf dem Zweige **CD** liegt.

Wenn man die Gleichung: $x^2 + y^2 = 10^2$ das aus dem Anfangspunkte mit dem Halbmesser = 10 beschriebenen Kreises mit der Gleichung der Curve verbindet, so findet man, daß der Kreis und die Curve nur den einen gemeinschaftlichen Punkt C haben, so daß der Curvenzweig **CDE** also außerhalb und der Curvenzweig **OAB** innerhalb des Kreises liegt. — Ueberhaupt ist dieser Kreis bei der Construktion der Curve ein guter Führer.

Uebungsaufgaben.

Man soll folgende Curven construiren:

1) $y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$,

2) $y^4 + x^4 - 2ay^3 - 2bx^2y = 0$,

3) $(x^2 + y^2)^2 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0$,

4) $(y - x^2)^2 - x^5$ (Fig. 134),

5) $y = a + b(x - c)^m$.

Dreizehntes Kapitel.

Von den zur Bestimmung einer Curve einer gegebenen Gattung erforderlichen Bedingungen.

§. 104.

In §. 15 haben wir gesehen, wie man, wenn die geometrische Definition einer Curve einer gewissen Gattung gegeben ist, die allgemeine Gleichung der Gattung:

$$F(x, y, a, b, \ldots h) = 0 \qquad (1)$$

findet, wo a, b, . . . h die n willkürlichen Parameter bezeichnen. Man erhält eine specielle Curve der Gattung, wenn man diesen Parametern Zahlenwerthe beilegt; allein statt dessen kann man diese Parameter auch dadurch bestimmen, daß die Curve gewisse Bedingungen erfüllen, z. B. durch gegebene Punkte gehen, gegebene Linien berühren, 2c. 2c. muß. Soll die Curve durch einen gegebenen Punkt (x', y') gehen, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$F(x', y', a, b, \ldots h) = 0;$$

soll sie eine gegebene Linie berühren, so erhält man ebenfalls eine Bedingungsgleichung, 2c. Wenn die Curve n Bedingungen genügen muß, so erhält man n Gleichungen, welche die n Parameter, und folglich die Curve selbst bestimmen. Die Anzahl der Parameter, welche in der allgemeinen Gleichung einer Curvengattung vorkommen, ist also der Anzahl der zur Bestimmung einer Curve dieser Gattung erforderlichen Bedingungen gleich.

Die gegebenen Bedingungen können auch zusammengesetztere sein, wie z. B. wenn der Mittelpunkt, eine Axe, der Scheitel, eine Asymptote, ꝛc. gegeben wäre. — Ist der Mittelpunkt gegeben, so sind seine beiden Coordinaten gegeben, und wenn man sie in die beiden Gleichungen des Mittelpunktes substituirt; so erhält man zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Parametern. — Ist eine Axe, oder Asymptote gegeben, und man setzt die beiden Coefficienten ihrer Gleichung den beiden Constanten gleich, welche ihre Lage bestimmen; so erhält man ebenfalls zwei Bedingungsgleichungen. — Ist ein Scheitel gegeben, so müssen seine Coordinaten sowohl der Gleichung der Curve, als der der Axe genügen, was wieder zwei Bedingungsgleichungen gibt, u. s. f. Jede der angeführten complexen Bedingungen ist also zwei einfachen Bedingungen gleichgeltend.

Die allgemeine Gleichung der Ellipse und Hyperbel enthält 5 willkürliche Parameter, und es sind folglich zur Bestimmung einer Ellipse und Hyperbel auch 5 Bedingungen, z. B. 5 Punkte; der Mittelpunkt und drei Punkte; der Mittelpunkt, ein Scheitel und eine Tangente, ꝛc. erforderlich. — Die allgemeine Gleichung der Parabel enthält nur 4 Parameter, weil $m = 1$ ist, und es sind mithin zur Bestimmung einer Parabel auch nur 4 Bedingungen nothwendig. — Man muß sich aber bei der Bestimmung der Anzahl der Bedingungen wohl hüten: daß man dieselbe Bedingung nicht zweimal zählt. Wenn z. B. der Mittelpunkt und die Axe gegeben sind, so ist dies nur so gut, wie 3 einfache Bedingungen, weil die Axe durch den Mittelpunkt geht und zu ihrer Bestimmung nur noch eine Bedingung erforderlich ist.

Auch muß man wohl untersuchen: ob die in der allgemeinen Gleichung vorkommenden Parameter wirklich verschieden sind, d. h. sich nicht auf eine kleinere Anzahl reduciren lassen. — So hat z. B. der Kreis als Ort der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten in einem constanten Verhältnisse stehen, zur allgemeinen Gleichung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - m^2(x-a')^2 + (y-b')^2 = o,$$

welche 5 Parameter zu enthalten scheint, die sich aber auf 3 reduciren lassen; denn man kann diese Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a - m^2 a')}{1 - m^2} x - \frac{2(b - m^2 b')}{1 - m^2} y + \frac{a^2 + b^2 - m^2 (a'^2 + b'^2)}{1 - m^2} = o,$$

oder:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = o,$$

welche nur 3 Parameter A, B, C enthält.

Wird derselbe Kreis als Ort der Punkte von der Beschaffenheit betrachtet: daß die Summe der Quadrate der Entfernungen eines jeden von n gegebenen Punkten constant ist; so ist seine allgemeine Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} x - 2\frac{b_1 + b_2 + \ldots b_n}{n} y + \frac{a^2{}_1 + b^2{}_1 + a^2{}_2 + b^2{}_2 + \ldots + a^2{}_n + b^2{}_n - k}{n} = o,$$

welche $2n + 1$ willkürliche Parameter zu enthalten scheint, in der That aber nur 3 wesentlich verschiedene Parameter enthält; denn man kann immer setzen:

$$a = -\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad b = -\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n},$$

$$c = \frac{a^2{}_1 + b^2{}_1 + a^2{}_2 + b^2{}_2 + \ldots + a^2{}_n + b^2{}_n - k}{n},$$

so daß die Gleichung wird:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = o.$$

Eine aus n Gliedern bestehende Gleichung enthält höchstens $n - 1$ willkürliche Parameter; denn wenn man die Gleichung durch einen der Coefficienten dividirt, so kann man die $n - 1$ entstehenden Quotienten durch $n - 1$ Buchstaben bezeichnen. — Die vollständige Gleichung des m^{ten} Grades mit zwei Veränderlichen hat $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ Glieder, und folglich sind zur Bestimmung einer Curve des m^{ten} Grades höchstens $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$ Bedingungen erforderlich.

Die geometrische Definition einer Curve gibt die Anzahl der in ihrer allgemeinen Gleichung enthaltenen willkürlichen Parameter von selbst an. — In der Definition des Kreises kommt der Mittelpunkt und der Halbmesser vor; also zusammen 3 Constanten — in der Definition der Parabel ein Pol (2 Constanten) und eine Richtlinie (2 Constanten), also im Ganzen 4 Constanten — in der

Definition der Ellipse und Hyperbel außerdem noch ein Verhältniß, also 5 Constanten — in der Definition der Archimedischen Spirale ein Pol (2 Constanten), die anfängliche Lage des Vectors (1 Constante) und ein Verhältniß, also im Ganzen 4 Constanten.

§. 105.

Wir sind bisher bei der Bestimmung der Gattung der Curven von den geometrischen Bedingungen oder Definitionen ausgegangen; allein man könnte auch analytisch verfahren, und die in einer gegebenen Gleichung:

$$F(x, y, a, b, \ldots h) = 0 \qquad (1)$$

enthaltenen Curven zu derselben Gattung zählen. So nennt man z. B. alle in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

enthaltene Curven, Curven des zweiten Grades. Zunächst muß man sich jedoch versichern, ob die gegebene Gleichung allgemein ist, d. h. ob die Gleichung die entsprechende Curve auch noch gibt, wenn diese beliebig in ihrer Ebene verrückt wird, so daß, wenn die Transformation der Coordinaten durch drei neue Parameter p, q, α bewerkstelligt wird, die erhaltene Gleichung:

$$F(x, y, a, b, \ldots h, p, q, \alpha) = 0 \qquad (2)$$

mit der Gleichung:

$$F(x', y', a', b', \ldots h') = 0$$

identificirt werden kann, also die Anzahl der Parameter durch die Transformation nicht vergrößert wird. — Ist dieses nicht der Fall, d. h. lassen sich die n + 3 Parameter a, b, . . . h, p, q, α nicht auf n Parameter reduciren; so ist die Gleichung (1) nicht allgemein, und man nimmt die Gleichung (2) als Gattungsgleichung.

Vierzehntes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit.

§. 106.

Homothetie.

Wenn man durch einen beliebigen Punkt O (Fig. 139) nach einem Systeme von Punkten A, B, C, . . . in derselben Ebene die

Radienvectoren OA, OB, OC, . . . zieht, und auf denselben die Punkte A′, B′, C′, . . . so nimmt, daß

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots = k$$

ist; so heißt das letzte Punktesystem dem ersten ähnlich und ähnlichliegend; aber wenn die Punkte A′, B′, C′, . . . auf den rückwärts verlängerten Vectoren genommen werden und der obigen Relation genügen (Fig. 140), so heißen beide Systeme ähnlich und invers liegend. — Durch eine Drehung von 180° wird das zweite System dem ersten ähnlich und ähnlichliegend. Der Kürze wegen wollen wir diese Aehnlichkeit der Form und Lage in beiden Fällen resp. mit dem Namen direkte und inverse Homothetie bezeichnen. — Läßt man k sich von 0 bis ∞ ändern, und den Punkt O, welcher der Aehnlichkeitsmittelpunkt genannt wird, alle möglichen Lagen in der Ebene annehmen; so erhält man alle dem gegebenen Systeme homothetische Systeme. — Die auf demselben Vector, oder auf zwei entgegengesetzten Vectoren liegenden Punkte A, A′ heißen homologe.

§. 107.

Eigenschaften der direkten und inversen homothetischen Figuren.

1) Zwei Gerade, welche zwei Paare homologer Punkte A, B und A′, B′ verbinden, und deshalb homologe heißen, sind parallel, und das Verhältniß ihrer Längen ist dem Aehnlichkeitsverhältnisse k gleich.

Denn nach der Voraussetzung ist $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = k$: folglich AB parallel zu A′B′ und mithin $\frac{AB}{A'B'} = k$.

2) Wenn drei Punkte in gerader Linie liegen, so liegen die drei homologen Punkte auch in gerader Linie.

3) Der Winkel zweier Geraden ist dem Winkel der homologen Geraden gleich.

4) Der Durchschnittspunkt zweier Geraden ist der homologe Punkt des Durchschnittspunktes der beiden homologen Geraden. — Wenn mehrere Gerade durch denselben Punkt gehen, so gehen die homologen Geraden durch den homologen Punkt.

5) Wenn man irgend einen Punkt I der Ebene mit den verschiedenen Punkten des ersten Systemes und seinen homologen

Punkt I' mit den verschiedenen Punkten des zweiten Systemes verbindet; so sind die auf diese Weise erhaltenen Geraden paarweise parallel und in dem constanten Verhältnisse k. — Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden.

Umgekehrt, wenn die beiden Systeme A, B, C, . . . und A', B', C', . . . so beschaffen sind, daß die Geraden IA, IB, IC, . . . resp. den Geraden I'A', I'B', I'C', . . . parallel sind, und zu ihnen in dem constanten Verhältnisse k stehen; so sind die beiden Punktesysteme direkt, oder invers homothetisch, jenachdem IA, . . . und I'A', . . . einerlei, oder entgegengesetzte Richtungen haben. — Denn nimmt man im ersten Falle auf I'I und im zweiten Falle auf ihrer Verlängerung einen Punkt O von solcher Beschaffenheit, daß $\frac{OI'}{OI} = k$ ist, so fallen die beiden Radien oder Strahlen OA, OA' zusammen, und es ist O der Mittelpunkt der Homothetie.

6) Es seien M, M_1 zwei benachbarte Punkte einer Curve, und M', M'_1 die beiden homologen Punkte auf der homothetischen Curve, so sind die Sekanten MM_1 und $M'M'_1$ parallel. Nähert sich nun M_1 dem Punkte M unendlich, so nähert sich auch M'_1 dem Punkte M' unendlich, und die stets zu einander parallelen Sekanten sind auch in ihren Grenzlagen, d. h. als Tangenten zu einander parallel. Folglich sind die Tangenten in homologen Punkten parallel.

7) Zwei Systeme, welche einem dritten Systeme homothetisch sind, sind homothetisch unter sich. — Denn es sei A, B, . . . I ein gegebenes System, so construire man mittelst des Mittelpunktes O und des Verhältnisses k ein erstes homothetisches System A', B', . . . I' und mit Hülfe des Mittelpunktes O' und des Verhältnisses k' ein zweites homothetisches System A'', B'', . . . I''. Alsdann sind A'I' und A''I'' parallel zu AI, und folglich parallel unter sich, und stehen in dem constanten Verhältnisse $\frac{k'}{k} = k_1$, weil $\frac{AI}{A'I'} = k$ und $\frac{AI}{A''I''} = k'$ folglich $\frac{A'I'}{A''I''} = \frac{k'}{k} = k_1$ ist. Die beiden Systeme A', B', . . . I' und A'', B'', . . . I'' sind also nach 5) homothetisch unter sich. Zwei Punkte A' und A'', welche die homologen desselben dritten A sind, sind homolog unter sich. — Wenn die beiden Systeme A', . . . A'', . . . gleichzeitig mit A direkt, oder invers homothetisch sind, so sind sie direkt ho-

mothetisch unter sich; aber wenn A' direkt und A'' invers homothetisch mit A ist, so sind A', A'' invers homothetisch.

8) Hätte man die beiden Systeme $A', \dots$ und $A'', \dots$ mittelst desselben Verhältnisses construirt, so wären sie gleich und aufeinanderlegbar. — Denn wenn $k = k'$ ist, so sind die Parallelen $I'A'$, $I''A''$ gleich, und die beiden Systeme sind aufeinanderlegbar. — Man erhält also zu einem gegebenen Systeme vermittelst eines einzigen Aehnlichkeitsmittelpunktes alle homothetischen Systeme, wenn man das Verhältniß k sich von o bis ∞ ändern läßt; aber diese Systeme haben in der Ebene besondere Lagen.

9) Die drei Aehnlichkeitsmittelpunkte dreier Paare homothetischer Systeme liegen in gerader Linie. — Denn läßt man den Punkt I in O' fallen, so fällt I'' auch in O' und I' auf die Gerade OO'; aber der Aehnlichkeitsmittelpunkt O'' der beiden Systeme A' und A'' liegt auf der Geraden $I'I''$; folglich liegt er auf OO'.

10) Es seien S, S' (Fig. 141) zwei Curven, welche einen Mittelpunkt haben und z. B. direkt homothetisch sind, so sind sie auch invers homothetisch. Denn sind C, C' die Mittelpunkte der beiden Curven, und M, M' zwei homologe Punkte, und man nimmt auf $C'M'$ einen Punkt M'_1 so, daß $C'M'_1 = C'M'$ ist; so gehört der Punkt M'_1 der Curve S' an. — Nun ist aber $\frac{CM}{C'M'} = k$, also auch $\frac{CM}{C'M'_1} = k$. Die beiden Curven S, S' haben also zwei Aehnlichkeitsmittelpunkte, nämlich einen äußern, auf der Verlängerung der Geraden CC' liegenden, welcher den direkt homothetischen Curven entspricht, urd einen innern, auf der Geraden CC' selbst liegenden, welcher den beiden invers homothetischen Curven entspricht. — Die Mittelpunktslinie wird von den beiden Aehnlichkeitsmittelpunkten harmonisch getheilt.

11) Hat man drei homothetische Curven S, S' und S'' (Fig. 141) und man zieht durch ihre Mittelpunkte C, C', C'' drei parallele Radien $CM, C'M', C''M''$, so bestimmen sie die homologen Punkte M, M', M''. — Wenn diese drei Radien in derselben Richtung gezogen sind, so sind die entsprechenden drei Mittelpunkte der Homothetie äußere. Sind zwei Radien in derselben und der dritte in entgegengesetzter Richtung gezogen, so ist der eine Mittelpunkt ein äußerer und die beiden andern sind innere. — Die drei äußern Mittelpunkte liegen also nach einem bewiesenen Satze (9)

in gerader Linie, und dasselbe gilt von irgend zwei innern Mittelpunkten und dem äußern Mittelpunkte, welcher dem dritten innern entspricht.

Die drei Mittelpunktslinien CC', $C'C''$, $C''C$ bilden ein Dreieck, und wenn man die drei innern, oder zwei äußern und den entsprechenden innern der Mittelpunkte der Homothetie mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen verbindet; so gehen die drei Verbindungslinien durch denselben Punkt.

Aehnliche Figuren. — Eine Figur heißt einer andern ähnlich, wenn sie einer homothetischen der letztern gleich ist.

§. 108.

Gleichung homothetischer Curven.

Es sei:

$$f(x, y) = o \qquad (1)$$

die Gleichung einer Curve S, so wollen wir den Anfangspunkt zum Mittelpunkte der Homothetie nehmen und mit dem Verhältnisse k eine Curve S' construiren, welche zu der ersten homothetisch ist. Sind alsdann x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der ersten Curve und x', y' die des homologen Punktes der zweiten; so hat man:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = k,$$

wo k positiv, oder negativ ist, jenachdem die Homothetie eine direkte, oder inverse ist. Die Gleichung:

$$f(kx', ky') = o$$

ist folglich die allgemeine Gleichung der homothetischen Curven der gegebenen, indem der Anfangspunkt der Mittelpunkt der Homothetie ist.

Läßt man die Curve S festliegen und verrückt die Curve S' in ihrer Ebene so, daß der Anfangspunkt O in den Punkt O' oder (p, q) fällt; aber die Axen zu ihrer ursprünglichen Richtung parallel bleiben; so ist die Gleichung der Curve S' in Bezug auf die Axen O'X', O'Y':

$$f(kx', ky') = o,$$

und in Beziehung auf die Axen OX, OY:

$$f(k(y-p), k(y-q)) = o \qquad (3)$$

In dieser neuen Lage ist die Curve S' mit S homothetisch; denn die aus O und O' gezogenen Radienvectoren sind parallel und in dem constanten Verhältnisse k. — Die Gleichung (3), welche drei willkürliche Parameter p, q, k enthält, ist folglich die allgemeine Gleichung der homothetischen Curven der gegebenen Curve.

§. 109.

Gleichung ähnlicher Curven.

Wenn man mit der Verlegung des Anfangspunktes nach O′ zugleich eine Drehung der Axen um einen Winkel α verbindet, so hat die Curve S′ eine beliebige Lage in ihrer Ebene, und ist der gegebenen blos ähnlich. — Die Gleichung der auf die beweglichen Axen O′X′, O′Y′ bezogenen Curve S′ ist:

$$f(kx', ky') = o,$$

und bei rechtwinkligen Axen erhält man mittelst der Transformationsformeln:

$$x' = (x-p)\cos\alpha + (y-q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x-p)\sin\alpha + (y-q)\cos\alpha$$

als Gleichung der Curve in Bezug auf die festen Axen OX, OY:

$$f\left[k\left((x-p)\cos\alpha + \ldots\right), k(\ldots)\right] = o, \quad (4)$$

welche 4 willkürliche Parameter enthält, und die allgemeine Gleichung der ähnlichen Curven der gegebenen Curve ist.

Beispiel. Es seien die beiden Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen:

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o, \\ A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = o \end{array}\right\} \quad (\mu)$$

gegeben, so ist die allgemeine Gleichung der homothetischen Curven der durch die erste Gleichung ausgedrückten Curve:

$$\begin{array}{l} Ak^2x^2 + Bk^2xy + Ck^2y^2 - (Bk^2q + Ak^2p - Dk)\,x \\ \quad - (Bk^2p + 2\,Ck^2q - Ek)\,y \\ \quad + (Ak^2p^2 + Bk^2pq + Ck^2q^2 + Dkp + Ekq + F) = o. \end{array}$$

Identificirt man diese letzte Gleichung mit der zweiten, so erhält man:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{-Bq - 2\,Ap + \frac{D}{k}}{D'} = \frac{-Bp - 2Cq + \frac{E}{k}}{E'}$$
$$= \frac{Ap^2 + Bpq + Cq^2 - \frac{D}{k}p - \frac{E}{k}q + \frac{F}{k^2},}{F'}$$

und wenn man zwischen diesen 5 Gleichungen die 3 Parameter p, q, k eliminirt; so bekommt man die zwei Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken: daß die den Gleichungen (μ) entsprechenden Curven homothetisch sind. — Nun sind aber die beiden Gleichungen:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

worin die zu eliminirenden Parameter nicht vorkommen, gerade die beiden verlangten Bedingungsgleichungen. — Sollen also zwei Curven des zweiten Grades homothetisch sein, so müssen die Coefficienten der Glieder des zweiten Grades proportional sein.

§. 110.

Allgemeine Bedingungen der Aehnlichkeit zweier Figuren.

1) Wenn eine Gleichung:

$$f(x, y, a) = o,$$

worin der willkürliche Parameter a vorkommt, in Beziehung auf x, y, a homogen ist, so sind alle durch sie ausgedrückte Curven homothetisch. Denn gibt man dem Parameter a den besondern Werth a_o, so sind alle ähnlichen Curven von $f(x, y, a_0) = o$ in der Gleichung:

$$f(kx, ky, a_0) = o$$

enthalten, oder wenn man $a = \frac{a_0}{k}$ setzt, in der Gleichung:

$$f(kx, ky, ka) = o$$

und endlich wegen der Homogeneität in der Gleichung:

$$f(x, y, a) = o$$

wo a ganz willkürlich ist, weil k es ist.

2) Die in der allgemeinen Gleichung einer Curvengattung enthaltenen n Parameter können durch n andere gleichgeltende Parameter ersetzt werden, wovon drei p, q, α die Lage, und die $n-3$ übrigen a, b, c . . . die Form und Dimensionen der Curve bestimmen (§. 48), so daß man eine Gleichung:

$$f(x, y, a, b, c \ldots) = o \qquad (5)$$

erhält, welche $n-3$ Parameter enthält, und alle Curven der Gattung, aber in besondern Lagen, ausdrückt. Gewöhnlich erhält man diese Gleichung direkt und vor der allgemeinen Gleichung.

Wenn alle Parameter a, b, . . . Längen sind, so ist die Gleichung (5) nothwendig homogen in Bezug auf x, y, a, b, . . .

Wir wollen die den Werthen $a_0, b_0, \ldots$ der Parameter entsprechende Curve S_0 oder $f(x, y, a_0, b_0, \ldots) = o$ betrachten, so sind alle mit S_0 homothetischen Curven enthalten in der Gleichung:

$$f(kx, ky, a_0, b_0, \ldots) = o$$

oder wenn man setzt:

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{b'}{b_0} = \ldots \frac{1}{k}$$

in der Gleichung:

$$f(kx, ky, ka', kb', \ldots) = o,$$

und wegen der Homogeneität in:

$$f(x, y, a', b', \ldots) = o. \qquad (6)$$

Die durch die Gleichung (6) gegebenen Curven sind offenbar in der Gleichung (5) enthalten. Jede Curve, welche der Curve S_0 ähnlich ist, ist also von derselben Gattung und ihre linearen Parameter sind denen der ersten proportional; und umgekehrt ꝛc. ꝛc.

3) Zuweilen wird eine Figur nicht blos durch Längen, sondern auch durch Winkel und Verhältnisse bestimmt, und zur Aehnlichkeit wird alsdann erfordert, daß diese Winkel und Verhältnisse gleich sind. — Wenn also die Figuren einer Gattung durch eine gewisse Anzahl von Parametern bestimmt werden, welche theils Linien, theils Winkel und Zahlen sind; so müssen, wenn zwei Figuren dieser Gattung ähnlich sein sollen, die Linien proportional und die Winkel und Zahlen gleich sein.

4) Wenn zur Bestimmung einer Figur, nach Form und Größe und abgesehen von der Lage, nur eine Länge erfordert wird; so sind alle Curven der Gattung einander ähnlich. — Es sind also alle Kreise, alle Parabeln, ꝛc. einander ähnlich, weil ein Kreis durch seinen Halbmesser, die Parabel durch den Abstand ihres Poles von der Richtlinie, ꝛc. bestimmt wird.

Da eine Ellipse und Hyperbel nach der ersten Definition (§. 6) durch die gegenseitige Entfernung 2c der Pole O,O′ (Fig. 8 u. 9) und durch die Summe, oder Differenz 2a der Radienvectoren bestimmt wird; so sind zwei Ellipsen, oder Hyperbeln einander ähnlich, wenn die Summe, oder Differenz der Radienvectoren dem Abstande der Pole proportional ist, oder wenn die Axen proportional sind, wie auch aus §. 109 folgt. Hyperbeln sind also einander ähnlich, wenn ihre Asymptoten denselben Winkel mit einander bilden.

5) Wenn $f(\varrho, \vartheta) = o$ die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten ist, so ist die Gleichung der homothetischen Curven, wenn der Pol der Mittelpunkt der Homothetie ist, folgende:

$$f(k\varrho, \vartheta) = o.$$

Hiernach sind alle Epicycloiden und Cissoiden einander ähnlich. — Hat man die logarithmische Spirale $\varrho = a^\vartheta$, wo a positiv ist; so ist die Gleichung der ähnlichen Spiralen:

$$k\varrho = a^\vartheta \text{ oder } \varrho = \frac{1}{k}\, a^\vartheta,$$

und wenn man $k = a^\alpha$ setzt:

$$\varrho = a^{\vartheta - \alpha}.$$

Diese letzte Gleichung drückt die gegebene Spirale selbst aus, wenn die Polarare um den Winkel α gedrehet wird. Alle ähnlichen Curven einer logarithmischen Spirale sind dieser also selbst gleich, oder mit andern Worten: zwei logarithmische Spiralen können einander nicht ähnlich sein.

Fünfzehntes Kapitel.

Construction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen.

§. 111.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen ist:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o \qquad (1)$$

und enthält 5 willkürliche Parameter, nämlich die Verhältnisse von fünf ihrer Coefficienten zu dem sechsten. — Wenn C nicht $= o$ ist, so kann man die Gleichung (1) nach y auflösen, wodurch man erhält:

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}}{2C^2},$$

wenn man setzt:

$$M = B^2 - 4AC,\; N = BE - 2CD,\; P = E^2 - 4CF.$$

Die Gerade:

$$y = -\frac{B}{2C}x - \frac{E}{2C}$$

ist ein Durchmesser der Curve, weil sie alle zu der Axe der y parallele Sehnen halbirt (§. 96), und um zwei Punkte der Curve zu erhalten, muß man für irgend einen Werth von x von diesem Durchmesser aus in der Richtung der Ordinaten auf beiden Seiten eine Länge:

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$$

nehmen. — Es handelt sich also zunächst um die Untersuchung des Trinomes:

$$Mx^2 + 2Nx + P,$$

wobei mehrere Fälle zu unterscheiden sind.

§. 112.

Ellipsen.

Erster Fall: $M = B^2 - 4AC < 0$. — Dieser Fall zerfällt seinerseits wieder in 3 Fälle:

1) Es ist $N^2 - MP > 0$. — Alsdann sind die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

reell und ungleich. Bezeichnet x' die kleinste und x'' die größte dieser Wurzeln, so ist das Trinom auch:

$$M(x - x')(x - x''),$$

also positiv und z reell für alle zwischen x' und x'' liegende Werthe von x, und negativ, folglich z imaginär für jeden Werth von x, welcher $< x'$ und $> x''$ ist.

Zieht man also in den Abständen $OP = x'$, $OP' = x''$ (Fig. 142) zu der Axe der y zwei Parallelen AP, A'P', so liegt die Curve zwischen diesen Parallelen. — Da in dem positiven veränderlichen Producte $(x - x')(x'' - x)$ die Summe der Factoren constant und gleich $x'' - x'$ ist, so ist dieses Produkt, und folglich z ein Maximum, wenn die beiden Factoren einander gleich sind, d. h. wenn $x = \frac{x' + x''}{2}$ ist, und dieses Maximum von z ist:

$$\frac{(x'' - x')\sqrt{-M}}{4}.$$

Es sei Q die Mitte von PP′, und man nehme:

$$CB = CB' = \frac{(x'' - x')\ \sqrt{-M}}{4},$$

so sind B, B′ zwei Punkte der Curve, und wenn man durch diese Punkte Parallelen zu dem Durchmesser zieht; so wird die Curve von dem Parallelogramme DEFG umschlossen; sie geht durch die Punkte A,A′, weil für $x = x'$ und $x = x''$ offenbar $z = o$ ist, und sie ist eine convexe Curve, weil sie von einer beliebigen Geraden nicht in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.

Diese geschlossene convexe Curve ist eine Ellipse (§. 15).

2) Es ist $N^2 - MP = o$. — Alsdann ist $x' = x'' = -\frac{N}{M}$, und $z = \frac{x - x'}{2C}\sqrt{M}$ ist stets imaginär, ausgenommen für $x = x'$, wo $z = o$ ist, und die Curve sich auf den Punkt C reducirt. — Die Gleichung (1) läßt sich in diesem Falle auf folgende Form bringen:

$$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 = o,$$

und da $M < o$ ist; so ist der erste Theil derselben die Summe zweier Quadrate, welche nur dann $= o$ werden kann, wenn jedes einzelne Quadrat $= o$ wird, was den Durchschnittspunkt C des Durchmessers mit der Geraden $x + \frac{N}{M} = o$ gibt.

3) Es ist $N^2 - MP < o$. — Setzt man $\frac{MP - N^2}{M^2} = k^2$, so kann man das Trinom auf die Form:

$$M\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + k^2\right]$$

bringen. Das Trinom ist also stets negativ, folglich z stets imaginär, und die Gleichung (1) hat keine geometrische Bedeutung.

In diesem Falle ist der erste Theil der Gleichung (1) die Summe dreier Quadrate:

$$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP - N^2}{M^2}\right]$$

und kann für kein Werthesystem von x und y verschwinden.

§. 113.

Hyperbeln.

Zweiter Fall. — Es ist $M = B^2 - 4AC > o$. Auch dieser Fall zerfällt in drei andere:

1) Es ist $N^2 - MP > o$. — Alsdann ist das Trinom $M(x - x')(x - x'')$ positiv, folglich z reell von $x = x''$ bis $x = +\infty$ und von $x = x'$ bis $x = -\infty$ reell und wächst von o bis ∞. Es gibt folglich zwei doppelte unendliche Curvenzweige, wovon der eine zur Rechten von A'P' (Fig. 143), und der andere zur Linken von AP liegt.

2) Es ist $N^2 - MP < o$. — Alsdann ist, wenn $\dfrac{MP - N^2}{M^2} = k^2$ gesetzt wird

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{M\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + k^2\right]};$$

folglich ist z für alle Werthe von x reell und kann niemals verschwinden. Für $x = -\dfrac{N}{M}$ hat man das Minimum $z = \dfrac{k\sqrt{M}}{2C}$. Nimmt man $OQ = -\dfrac{N}{M}$ (Fig. 144) und von dem Durchmesser aus:

$$CB = CB' = \frac{k\sqrt{M}}{2C},$$

so sind B, B' zwei Punkte der Curve, und wenn man durch diese beiden Punkte Parallelen zu dem Durchmesser zieht; so besteht die Curve aus zwei unendlichen Zweigen, wovon der eine über der obern und der andere unter der untern Parallele liegt. Die in den beiden vorhergehenden Fällen erhaltene Curve ist eine Hyperbel (§. 15).

3) Es ist $N^2 - MP = o$. Alsdann ist:

$$z = \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x - \frac{N}{M}\right),$$

$$y = -\frac{B \mp \sqrt{M}}{2C}x - \frac{D \pm \dfrac{N}{\sqrt{M}}}{2C}.$$

Diese letzte Gleichung drückt zwei Gerade aus, welche sich in einem Punkte C des Durchmessers schneiden, weil die Summe der beiden letzten Gleichungen die Gleichung des Durchmessers gibt.

Uebrigens läßt sich die Gleichung (1) in dem gegenwärtigen Falle folgendermaßen zerlegen:

$$\left[2Cy+Bx+E-\sqrt{M}\left(x-\frac{N}{M}\right)\right]\left[2Cy+Bx+E+\sqrt{M}\left(x-\frac{N}{M}\right)\right]=0,$$

und man kann die dadurch ausgedrückten beiden Geraden als die Grenze einer Hyperbel betrachten. Denn wenn $N^2 - MP$ gegen Null convergirt, so nähern sich die beiden Punkte A und A' (Fig. 143) oder B und B' (Fig. 144) einander, und die beiden Hyperbelzweige convergiren gegen die Schenkel zweier Scheitelwinkel.

§. 114.

Parabeln.

Dritter Fall. — Es ist $M = B^2 - 4AC = 0$; folglich:

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{2Nx + P}.$$

1) Es ist $N > 0$, folglich, wenn $x' = -\frac{P}{2N}$ gesetzt wird:

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{2N(x-x')},$$

und mithin ist z für alle größern Werthe von x als x' reell. — Nimmt man $OP = x'$ (Fig. 146) und zieht zu der Axe der y die Parallele PA; so besteht die Curve aus einem doppelten unendlichen Zweige, welcher zur Rechten dieser Parallele liegt.

2) Es ist $N < 0$. Alsdann ist z für alle kleinern Werthe von x als x' reell, und die Curve besteht wieder aus einem doppelten unendlichen Zweige, welcher aber zur Linken der Parallele PA liegt. — Diese und die vorhergehende Curve ist eine Parabel (§. 15).

3) Es ist $N = 0$. — Alsdann ist $z = \frac{\sqrt{P}}{2C}$, $y = -\frac{B}{2C}x \pm \frac{\sqrt{P}}{2C}$, und wenn $P > 0$ ist; so hat man zwei von dem Durchmesser gleichweit entfernte Parallelen zu demselben. — Wenn $P = 0$ ist, so fallen diese beiden Parallelen in eine zusammen, und der erste Theil der Gleichung ist in diesem Falle ein vollständiges Quadrat:

$$(2Cy + Bx + E)^2.$$

Wenn endlich $P < 0$ ist, so ist z imaginär.

Nach der vorhergehenden Untersuchung hat man also folgende Uebersicht:

$$B^2 - 4AC < o \left\{\begin{array}{l} N^2 - MP > o,\ \text{Ellipse} \\ N^2 - MP = o,\ \text{ein Punkt} \\ N^2 - MP < o,\ \text{nichts} \end{array}\right\} \text{Ellipsengattung.}$$

$$B^2 - 4AC > o \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} N^2 - MP > o \\ N^2 - MP < o \end{array}\right\} \text{Hyperbel} \\ N^2 - MP = o,\ \text{zwei sich schneiden-} \\ \qquad\qquad\qquad \text{de Gerade} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Hyperbel-}\\ \text{gattung.}\end{array}$$

$$B^2 - 4AC = o \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} N > o \\ N < o \end{array}\right\} \text{Parabel} \\ N = o \left\{\begin{array}{l} P > o\ \text{zwei parallele Gerade} \\ P = o\ \text{eine Gerade} \\ P < o\ \text{nichts} \end{array}\right. \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Parabel-}\\ \text{gattung.}\end{array}$$

Wenn zu gleicher Zeit $A = o$, $C = o$ ist, so reducirt sich die Gleichung (1) auf:

$$Bxy + Dx + Ey + F = o, \qquad (2)$$

oder:

$$y = -\frac{Dx + F}{Bx + E} = b \cdot \frac{x - c}{x - a} = b \cdot \frac{1 - \frac{c}{x}}{1 - \frac{a}{x}}.$$

Um die Begriffe zu fixiren, sei $b > o$, $c < a$. Aendert sich x von a bis $+\infty$, so ändert sich y von $+\infty$ bis b, wodurch man den Curvenzweig ACB (Fig. 145) erhält, zu welchem die Geraden AA_1, BB_1, deren Gleichungen $x = a$, $y = b$ sind, Asymptoten bilden. — Wenn sich x von a bis $-\infty$ ändert, so ändert sich y von $-\infty$ bis b, welches den Zweig $A_1 C_1 B_1$ gibt, der dieselben Geraden zu Asymptoten hat. Uebrigens genügen in diesem besondern Falle die Coefficienten der Gleichung der den Hyperbeln entsprechenden Bedingung $B^2 - 4AC > o$.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen drückt also drei Curvengattungen aus: 1) die Ellipsengattung, worin als besonderer Fall ein Punkt vorkommt; 2) die Hyperbelgattung, welche als besondern Fall zwei sich schneidende Gerade enthält, und 3) die Parabelgattung, welche als besondere Fälle zwei parallele Gerade, oder eine Gerade unter sich begreift.

§. 115.

Tangenten.

Wenn man auf die Gleichung (1) die Methode der Tangenten anwendet, so findet man:

$$\mathrm{I} = -\frac{2Ax + By + D}{2Cy + Bx + E} = -\frac{B}{2C} \cdot \frac{y + \frac{2Ax + D}{B}}{y + \frac{Bx + E}{2C}}.$$

In den Punkten A, A' (Fig. 142), wo die Curve den Durchmesser schneidet, ist der Nenner des Ausdruckes von I gleich Null, also $\mathrm{I} = \infty$ und die Tangente parallel zur Axe der y.

In den Punkten B, B' ist:

$$\frac{2Ax + D}{B} = \frac{Bx + E}{2C} = o, \text{ also } \mathrm{I} = -\frac{B}{2C};$$

folglich ist die Tangente in diesen Punkten zum Durchmesser parallel.

Asymptoten. — Die früher auseinandergesetzte Methode der Asymptoten gibt:

$$\left.\begin{array}{l} Cc^2 + Bc + A = o \\ (2Cc + B)d + Ec + D = o \end{array}\right\} \text{folglich:} \quad \begin{array}{l} c = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}, \\ d = -\dfrac{E}{2C} \pm \dfrac{BE - 2CD}{2C\sqrt{B^2 - 4AC}}. \end{array}$$

Wenn $B^2 - 4AC < o$ ist, so ist c imaginär, und wenn $B^2 - 4AC = o$ ist, so ist $d = \infty$. Die Parabel hat also keine Asymptote, und folglich ist die Hyperbel die einzige Curve des zweiten Grades, welche Asymptoten hat, und zwar zwei. — Bildet man die halbe Summe der Asymptotengleichungen, so erhält man die Gleichung des Durchmessers, und mithin schneiden sich die Asymptoten auf dem Durchmesser. — Zieht man dieselben Gleichungen von einander ab, so erhält man:

$$x = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC},$$

und folglich schneiden sich die Asymptoten in dem Punkte C.

Wenn zugleich $B^2 - 4AC = o$, $BE - 2CD = N = o$ ist, so erscheint d unter der unbestimmten Form $\frac{o}{o}$, und in diesem Falle wird d durch die Gleichung des zweiten Grades gegeben:

$$Cd^2 + Ed + F = o,$$

woraus folgt:

$$d = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} = \frac{-E \pm \sqrt{P}}{2C}.$$

Außerdem ist $c = -\frac{B}{2C}$, so daß man zwei parallele Asymptoten hat, welche nichts anders sind, als die in diesem Falle durch die Gleichung des zweiten Grades ausgedrückten beiden Geraden.

Uebungsaufgaben.

1) Es sind zwei Punkte A, B gegeben, durch welche zwei bewegliche Gerade AM, BM so gehen, daß der Winkel MAB stets das Doppelte des Winkels MBA ist; man soll den Ort des Durchschnittspunktes M finden.

2) Man soll den Ort der Mittelpunkte der Kreise finden, welche auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels gegebene Längen abschneiden.

3) Man soll die durch die folgenden Gleichungen ausgedrückten Curven construiren:

1) $3x^2 + xy + y^2 + 2x + 5 = o$,
2) $x^2 + 3xy - 2x = o$,
3) $2x^2 + xy + y^2 + 3x + 2y + 2 = o$,
4) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 7 = o$,
5) $xy + 2x - 5y = o$,
6) $x^2 + xy + 3y^2 + 2y + 4 = o$,
7) $2y^2 + 7xy + 3x^2 - 3y - x - 2 = o$,
8) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y + 1 = o$,
9) $y^2 + xy + x^2 + 2x + 2y + 6 = o$.
10) $y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - 4y + 4x - 6 = o$, Ellipse (Fig. 147),
11) $y^2 + 2xy + 5x^2 - 4x = o$, Ellipse (Fig. 148),
12) $y^2 - 2xy + 6x^2 - 2y - 28x + 46 = o$, Punkt ($x=3, y=4$), (Fig. 149),
13) $x^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 3 = o$, Nichts,
14) $x^2 + y^2 - 4y + 2x = o$, Kreis (Fig. 150),
15) $y^2 + xy - 2x^2 - 2y - 2x + 3 = o$, Hyperbel (Fig. 151),
16) $y^2 - 2xy - 2y - 2x - 4 = o$, Hyperbel (Fig. 152),
17) $y^2 - 2xy - 2y + 4x = o$, zwei sich schneidende Gerade,
18) $x^2 - 2xy - 2x + 4y - 1 = o$, Hyperbel (Fig. 153),
19) $x^2 + 3xy + 2y + 2x + \frac{8}{9} = o$, zwei Gerade BC, DE (Fig. 154),

20) $xy + 2y + 3x - 2 = 0$, Hyperbel (Fig. 155),
21) $y^2 + 2xy + x^2 + 4y + 3x + 3 = 0$, Parabel (Fig. 156),
22) $y^2 + 2xy + x^2 - 4y - 3x + 4 = 0$, Parabel (Fig. 157),
23) $x^2 - 3x + 2y + 1 = 0$, Parabel (Fig. 158),
24) $y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 2x - 3 = 0$, zwei Parallelen,
25) $y^2 - 2xy + x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$, eine Gerade,
26) $y^2 + 2xy + x^2 + y + x + 1 = 0$, Nichts.

Zur nähern Erläuterung des Verfahrens soll wenigstens eine dieser Gleichungen, z. B. 10 construirt werden. — Nach der Uebersicht in §. 114 drückt diese Gleichung eine Ellipse aus, und wenn man sie nach y auflös't; so erhält man:

$$y = \tfrac{1}{4}x + 2 \pm \sqrt{-x^2 - 3x + 10}.$$

Die Gleichung des Durchmessers ist also:

$$y = \tfrac{1}{4}x + 2.$$

Setzt man darin $x = 0$, so erhält man $y = 2$ und für $y = 0$ ergibt sich daraus $x = -8$. Nimmt man also auf den Coordinatenaxen $CD = 2$ und $CD' = 8$ (Fig. 139), so ist die Lage des Durchmessers bestimmt. — Setzt man weiter die Größe unter dem Wurzelzeichen $= 0$, so hat man:

$$-x^2 - 3x + 10 = 0, \text{ also } x = 2 \text{ und } x = -5.$$

Für diese Werthe von x ist also $z = 0$ und die Curve schneidet den Durchmesser in den beiden Punkten H, H', für welche $x = 2$ und $x = -5$ ist.

Die Größe unter dem Wurzelzeichen ist mithin:

$$z = \sqrt{(2-x)(x+5)}.$$

Von $x = 0$ bis $x = 2$ ist also z reell; für $x = 0$ ist $z = \pm\sqrt{10}$ und für $x = 2$ ist $z = 0$. Nimmt man folglich $DF = DF' = \sqrt{10}$ und läßt x sich von 0 bis 2 stetig ändern, so erhält man den Curvenbogen FHF'. Für $x > 2$ wird z imaginär, und folglich hat die Curve jenseits der Geraden HB keinen Punkt. — Um die negativen Abscissen entsprechenden Werthe von z zu erhalten, muß man x in $-x$ in dem Ausdrucke von z umsetzen, wodurch man erhält:

$$z = \sqrt{(2+x)(5-x)}.$$

Von $x = 0$ bis $x = 5$ ist also z reell, und für $x > 5$ imaginär. Die Curve hat also diesseits der Geraden $H'B'$ keinen Punkt, und wenn man in dem letzten Ausdrucke von z die Abscisse x sich von o bis 5 stetig ändern läßt; so erhält man den Curvenbogen FH'F'.

Die Grenzen der Curve parallel zu dem Durchmesser findet man nach §. 112, 1) $CG = CG' = \frac{7}{2}$ und $OP = -\frac{3}{2}$. Zieht man also die Parallelen GK, G'K' zu dem Durchmesser HH', so ist die Curve in das dadurch entstehende Parallelogramm eingeschlossen.

Sechzehntes Kapitel.

Reduction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen.

§. 116.

Statt die allgemeine Gleichung:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o \qquad (1)$$

unmittelbar zu construiren, wie wir im Vorhergehenden gethan haben, kann man dieselbe zuvor durch Coordinatenverwandlung vereinfachen (§. 48). Es seien OX, OY die festen rechtwinkligen Axen, und wir wollen die Curve auf die neuen rechtwinkligen Axen OX_1, OY_1 beziehen, welche man erhält, wenn man die ersten um den Winkel α drehet, und zu dem Zwecke die Ausdrücke:

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

in die Gleichung (1) setzen; so ergibt sich:

$$(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha)\,x^2{}_1$$
$$+\big(2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\big)\,x_1 y_1$$
$$+(C\cos^2\alpha + A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha)\,y^2{}_1 + D_1 x + E_1 y_1 + F = o.$$

Wir wollen nun das Glied mit $x_1\, y_1$ fortzuschaffen suchen, und zu dem Zwecke setzen:

$$2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = o,$$

so folgt daraus:

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{A-C}.$$

Diese Bestimmung des Winkels α ist also immer möglich, und die Gleichung der Curve in Beziehung auf die neuen Axen ist:

$$Mx^2{}_1 + Ny^2{}_1 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F = o, \qquad (2)$$

wo

$$M = A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha,$$
$$N = C \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha$$

gesetzt ist. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A - C) \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha = \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2},$$
$$4\,MN = (M + N)^2 - (M - N)^2 = 4\,AC - B^2.$$

Hiernach sind also M und N die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$u^2 - (A + C)\,u + \frac{4\,AC - B^2}{4} = 0.$$

§. 117.

Verlegen wir jetzt den Anfangspunkt O in den Punkt O′ oder (p, q) und setzen zu dem Behufe resp. $p + x'$, $q + y'$ statt x_1, y_1 in (2); so ergibt sich:

$$Mx'^2 + Ny'^2 + (2Mp + D_1)x' + (2Nq + E_1)y' + H = 0.$$

Sollen die Glieder mit x', y' aus der Gleichung verschwinden, so muß sein:

$$2Mp + D_1 = 0, \quad 2Nq + E_1 = 0$$

folglich:

$$p = -\frac{D_1}{2M}, \qquad q = -\frac{E_1}{2N},$$

was voraussetzt, daß weder $M = 0$, noch $N = 0$ ist. Die Gleichung wird alsdann:

$$Mx'^2 + Ny'^2 + H = 0. \qquad (3)$$

Uebrigens ist diese Transformation weiter nichts, als die Verlegung des Anfangspunktes in den Mittelpunkt der Curve. — Wenn eine der Größen M, N, z. B. $M = 0$ ist, so kann man nicht beide Glieder des ersten Grades fortschaffen, und die Curve hat keinen Mittelpunkt; aber wohl kann man das Glied mit y' entfernen, wenn man $q = -\frac{E_1}{2N}$ setzt. Auch das constante Glied $H = Nq^2 + D_1p + E_1q + F$ kann weggeschafft werden, wofern nicht $D_1 = 0$ ist. Im entgegengesetzten Falle $D = 0$ enthielte die Gleichung nur die eine Veränderliche y, und drückte folglich im Allgemeinen zwei zu der Axe OY_1 parallele Gerade aus.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen enthält also zwei Klassen von Curven, nämlich 1) Curven, welche einen Mittelpunkt haben und durch die Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + H = o \qquad (3)$$

ausgedrückt werden, und 2) Curven, welche keinen Mittelpunkt haben und in der Gleichung:

$$Ny^2 + Px = o \qquad (4)$$

enthalten sind.

§. 118.

Wir hätten die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen unmittelbar in die beiden Formen (3) und (4) zerlegen können; und in der That haben wir in der Theorie der Mittelpunkte und der Axe gesehen, daß die allgemeine Gleichung zwei Klassen von Curven enthält, nämlich Curven mit einem Mittelpunkte und zwei rechtwinkligen Axen, und Curven ohne Mittelpunkt und mit einer Axe. — Wenn man bei der ersten Klasse von Curven die beiden Axen zu Coordinatenaxen nimmt, so darf die Gleichung der Curve nur gerade Potenzen von x und y enthalten, und folglich werden diese Curven nothwendig durch die Form (3) ausgedrückt. — Nimmt man bei der zweiten Klasse den Scheitel zum Anfangspunkte und die Axe der Curve zur Axe der x, so darf die Gleichung der Curve weder ein constantes Glied, noch ungerade Potenzen von y enthalten, und da außerdem $B^2 - 4AC = o$ ist; so ist diese Klasse von Curven in der Form (4) enthalten.

Das Merkmal der Curven der ersten Klasse besteht darin: daß keine der Größen M, N Null sei, oder mit andern Worten: daß ihr Produkt $B^2 - 4AC$ von Null verschieden sei. Das Merkmal der Curven der zweiten Klasse dagegen ist: daß eine der Größen M, N Null sei, d. h. $B^2 - 4AC = o$.

§. 118 a.

Construction der Curven des zweiten Grades. Erste Methode.

Ellipse und Hyperbel. — Bei der vorhergehenden Reduction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades wurde zuerst das Glied mit xy fortgeschafft, indem die Richtung der Coordinatenaxen so verändert wurde, daß die Axe der x der Axe der Curve parallel war, und dann wurde der Anfangspunkt der Coordinaten im Falle der Ellipse und Hyperbel in den Mittelpunkt, und im Falle der Parabel in den Scheitel der Curve verlegt. — Die erste Reduction ist immer möglich, weshalb sie auch zuerst vorgenommen wurde; aber wenn die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, so ist es einfacher, zuerst den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Curve zu verlegen, wodurch die Glieder mit x und y verschwinden, und dann die Coordinatenaxen so um den Mittelpunkt zu drehen, daß sie zu den Axen der Curve parallel werden, wodurch das Glied mit xy verschwindet.

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt C oder (p, q) verlegt wird, so geht die Gleichung:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2_1 + Bx_1y_1 + Cy^2_1 + (2Ap + Bq + D)x_1 + (Bp + 2Cq + E)y_1 \\ (Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F) = 0, \end{aligned}\right\} (1')$$

deren Glieder des ersten Grades verschwinden, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} 2Ap + Bq + D = 0, \\ Bp + 2Cq + E = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

woraus folgt:

$$p = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

$$q = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Diese Werthe von p, q sind endlich und bestimmt, weil der Nenner $B^2 - 4AC$ nicht $= 0$ ist. — Setzt man:

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F = H,$$

so reducirt sich die Gleichung (1') der Curve auf:

$$Ax^2_1 + Bx_1y_1 + Cy^2_1 + H = 0. \qquad (3)$$

Man bemerkt leicht: daß die ersten Theile der Gleichungen (2), welche die Coordinaten p, q des Mittelpunktes bestimmen, nichts anders sind, als die partiellen Ableitungen nach x und y des ersten Theiles der Gleichung (1), wenn für x, y resp. p, q gesetzt wird, und daß die constante Größe H erhalten wird, wenn man in den ersten Theil der Gleichung (1) für x, y resp. p, q substituirt (§. 94).

Drehet man nun die Coordinatenaxen und den Mittelpunkt C um den Winkel α, so hat man (§. 116):

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}, \qquad (4)$$

und wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} M = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha, \\ N = C\cos^2\alpha + A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} M+N &= A+C, \\ M-N &= \pm\sqrt{B^2-(A-C)^2}; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

so reducirt sich die Gleichung der Curve auf:

$$Mx'^2 + Ny'^2 + H = o. \quad (7)$$

Beispiel 1. Die gegebene Gleichung sei:

$$2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = o.$$

Die entsprechende Curve ist eine Ellipse, weil die Größe $B^2 - 4AC$ negativ ist. Zur Bestimmung des Mittelpunktes (p, q) hat man die beiden Gleichungen:

$$4p - 3q + 1 = o,$$
$$-3p + 6q - 7 = o,$$

woraus folgt:

$$p = 1, \ q = \frac{5}{3},$$

so daß man den Mittelpunkt C (Fig. 160a) leicht construiren kann.

Aus der Gleichung:

$$\tang 2\alpha = \frac{B}{A-C} = 3$$

folgt:

$$2\alpha = 71^\circ 33' 54'', \text{ also } \alpha = 35^\circ 46' 57''.$$

Zieht man nun durch den Mittelpunkt C die Gerade CX′, welche mit OX den Winkel α bildet; so ist diese Gerade die neue Axe der x′. Ferner ist nach den Gleichungen (5) offenbar $N > M$ und:

$$N + M = 5, \ N - M = \sqrt{10} = 3,162;$$

folglich:

$$N = 4,081, \ M = 0,919 \text{ und } H = -\frac{13}{3}.$$

Die Gleichung der Curve in Beziehung auf ihre Axen ist also:

$$0,919\,x'^2 + 4,081\,y'^2 = 4,333,$$

und die Längen ihrer halben Axen a, b sind:

$$a = 2,171, \quad b = 1,030.$$

Beispiel 2. Die gegebene Gleichung sei:

$$4x^2 - 10xy - 3y^2 + 20x = o,$$

so ist die zugehörige Curve eine Hyperbel, weil die Größe $B^2 - 4AC$ positiv ist. — Zur Bestimmung des Mittelpunktes (p, q) hat man die Gleichungen:

$$8p - 10q + 20 = o,$$
$$10p + 6q = o,$$

woraus folgt:

$$p = -\frac{30}{37} = -0,8108,\ q = \frac{30\ .\ 5}{37\ .\ 3} = 1,3514.$$

Ferner ist:

$$H = -\frac{300}{37} = -8,1081,$$

$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{10}{7}$, also $2\alpha = 124^{0}59'21''$ und $\alpha = 65^{0}29'45''$,

$$M + N = 1,\ M - N = \sqrt{149} = 13,2065,$$

folglich:

$$M = 7,103,\ N = -6,103.$$

Die Gleichung der auf ihre Axen bezogenen Hyperbel ist also:

$$7,103x'^2 - 6,103y'^2 = 8,108,$$

und die Längen ihrer Halbaxen a, b sind:

$$a = 1,068,\ b = 1,153.$$

Beispiel 3. Die gegebene Gleichung sei:

$$8x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0,$$

so ist die entsprechende Curve eine Hyperbel, für welche man hat:

$$p = 1,\ q = \tfrac{4}{5},$$

$$N + M = 2,\ N - M = \sqrt{29} = 5,385,$$

also:

$$N = 3,693,\ M = -1,693,$$

und ihre Gleichung in Bezug auf ihre Axen ist:

$$1,693x'^2 - 3,693y'^2 = 1.$$

Parabel. — Bei dieser Curve drehet man zuerst die Coordinatenaxen so um den Anfangspunkt, daß die Axe der x zu der Axe der Parabel parallel wird, damit das Glied mit xy verschwindet. — Zu dem Zwecke leitet man aus der Gleichung (4) folgende ab:

$$\operatorname{tang}^2\alpha - 2\frac{C-A}{B}\operatorname{tang}\alpha - 1 = 0,$$

deren beide Wurzeln wegen der Relation $B^2 - 4AC$ sind:

$$-\frac{2A}{B} \text{ oder } -\frac{B}{2C} \text{ und } \frac{2C}{B}.$$

Aber wegen der Relation $4MN = 4AC - B^2$ ist eine der beiden Größen M, N Null, und da das Glied mit x^2 verschwinden soll; so nimmt man die Wurzel, welche $M = 0$ macht, nämlich $-\frac{B}{2C}$, wie man leicht einsieht, wenn man bemerkt, daß:

$$M = C\cos^2\alpha\left(\operatorname{tang}\alpha + \frac{B}{2C}\right)^2.$$

Drehet man also die Coordinatenaxen um den durch die Relation:

$$\tang \alpha = - \frac{B}{2C}$$

bestimmten Winkel α, so wird die Gleichung der Curve:

$$(A+C)y^2_1 + \frac{(2CD-BE)\cos\alpha}{2C} x_1 + \frac{(2CE+BD)\cos\alpha}{2C} y_1 + F = 0.$$

Verlegt man jetzt den Anfangspunkt in den Scheitel der Parabel, so verschwindet das Glied mit y_1 und das constante Glied. Die Coordinaten des Scheitels erhält man, wenn man mit der letzten Gleichung ihre Ableitung nach y_1, d. h.:

$$2(A+C)y_1 + \frac{(2CE+BD)}{2C}\cos\alpha = 0$$

verbindet, und die Gleichung der Parabel nimmt alsdann die Form:

$$y'^2 = 2px'$$

an.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei:

$$-4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0,$$

so gibt die Relation:

$$\tang \alpha = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

$$\alpha = 33^\circ 41' 25''.$$

Drehet man die Coordinatenaxen durch diesen Winkel um den Anfangspunkt, so wird die Gleichung der Curve:

$$13y^2_1 - 29{,}954x_1 + 19{,}969y_1 + 100 = 0,$$

und ihre Ableitung nach y_1 ist:

$$26y_1 + 19{,}969 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man die Coordinaten des Scheitels:

$$x_1 = 3{,}082,\ y_1 = -0{,}768,$$

und wenn man den Anfangspunkt in diesen Scheitel verlegt; so wird die Gleichung der Curve:

$$y'^2 = 2{,}304x'.$$

Zweite Methode.

Wenn man zuerst die Coordinatenaxen um den Winkel α drehet, so verschwindet das Glied Bxy der Gleichung (1) und sie wird:

$$A'x^2_1 + C'y^2_1 + 2D'x_1 + 2E'y_1 + F = 0. \qquad (8)$$

Umgekehrt, wenn man die Coordinatenaxen, worauf sich die

Gleichung (8) bezieht, um den Winkel $-\alpha$ drehet; so muß (8) wieder in (1) übergehen. — Setzt man also in (8)

$$x_1 = x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y_1 = x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

so muß die dadurch entstehende Gleichung:

$$A'(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + C'(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^1$$
$$+ 2D'(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + 2E'(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) + F = o$$

mit (1) identisch sein. — Entwickelt man diese letzte Gleichung und setzt die Coefficienten von x^2, y^2, xy, x, y denen von x^2, y^2, xy, x, y in (1) gleich, indem man 2B, 2D, 2E resp. für B, D, E gesetzt denkt; so erhält man folgende 5 Relationen:

$$A'\cos^2\alpha + C'\sin^2\alpha = A, \quad (9)$$
$$(A' - C')\sin\alpha\cos\alpha = B, \quad (10)$$
$$A'\sin^2\alpha + C'\cos^2\alpha = C, \quad (11)$$
$$D'\cos\alpha - E'\sin\alpha = D, \quad (12)$$
$$D'\sin\alpha + E\cos\alpha = E, \quad (13)$$

wovon die drei ersten die Unbekannten A', C', α und die zwei letzten die Unbekannten D', E' bestimmen.

Beispiel 1. Die gegebene Gleichung sei:

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12c\sqrt{2}\,y - 12c\sqrt{2}\,x = o,$$

so hat man die Gleichungen:

$$A'\cos^2\alpha + C'\sin^2\alpha = 5, \quad (1)$$
$$(A' - C')\sin\alpha\cos\alpha = 1, \quad (2)$$
$$A'\sin^2\alpha + C'\cos^2\alpha = 5, \quad (3)$$
$$D'\cos\alpha - E'\sin\alpha = -6c\sqrt{2}, \quad (4)$$
$$D'\sin\alpha + E'\cos\alpha = -6c\sqrt{2}. \quad (5)$$

Nun ist (1) — (3):

$$(A' - C')\cos 2\alpha = o$$

also: $$2\alpha = 90^0,\ \alpha = 45^0,$$

weil $A' - C'$ wegen (2) nicht $= o$ ist. — Die Gleichungen (1) und (2) werden also:

$$A' + C' = 10,\quad A' - C' = 2,$$

folglich: $$A' = 6,\quad C' = 4.$$

Ferner werden die Gleichungen (4) und (5):

$$D' - E' = -12c,\quad D' + E' = -12c,$$

folglich: $$D' = -12c,\quad E' = o.$$

Drehet man also die Coordinatenaxen um den Winkel $= 45^0$, so geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$6x^2 + 4y^2 - 24cy = o$$

oder: $$3x^2 + 2(y - 6c)^2 = 72c^2,$$

und wenn man den Anfangspunkt in den Punkt (0,6c) verlegt:

$$\frac{x^2}{24c^2} + \frac{y^2}{36c^2} = 1.$$

Die der gegebenen Gleichung entsprechende Curve ist also eine Ellipse, deren Halbaxen $2c\sqrt{6}$ und $6c$ sind.

Beispiel 2. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^2 + 2xy - y^2 - 2cx + 2cy - 4c^2 = 0,$$

so ist:

$$\begin{aligned}
A' \cos^2\alpha + C' \sin^2\alpha &= 1, & (1)\\
(A' - C') \sin\alpha \cos\alpha &= 1, & (2)\\
A' \sin^2\alpha + C' \cos^2\alpha &= -1, & (3)\\
D' \cos\alpha - E' \sin\alpha &= -c, & (4)\\
D' \sin\alpha + E' \cos\alpha &= c. & (5)
\end{aligned}$$

Es ist (1) — (3):

$$(A' - C') \cos 2\alpha = 2, \qquad (6)$$

und 2 (2) : (6) gibt:

$$\operatorname{tang} 2\alpha = 1, \text{ also } 2\alpha = 45^0 \text{ und } \alpha = 22\tfrac{1}{2}{}^0.$$

Hiernach werden (6) und (1) + (3):

$$A' - C' = 2\sqrt{2},\ A' + C' = 0,$$

folglich:

$$A' = \sqrt{2},\ C' = -\sqrt{2}.$$

Drehet man also die Coordinatenaxen um einen Winkel $= 22\frac{1}{2}{}^0$ und setzt $D' = \sqrt{2}\,.\,h$, $E' = \sqrt{2}\,.\,k$, so geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$\sqrt{2}\,.\,x^2 - \sqrt{2}\,.\,y^2 + 2\sqrt{2}\,.\,hx + 2\sqrt{2}\,.\,ky - 4c^2 = 0$$

oder:

$$(x+h)^2 - (y-k)^2 = 2\sqrt{2}\,.\,c^2 + h^2 - k^2.$$

Nach (4) und (5) ist aber:

$$\sqrt{2}\,.\,h = -c(\cos\alpha - \sin\alpha),\ \sqrt{2}\,.\,k = c(\cos\alpha + \sin\alpha),$$

mithin:

$$2(h^2 - k^2) = c^2(-4\sin\alpha\cos\alpha) = -c^2\sqrt{2}.$$

Verlegt man also den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt (h, k), so wird die Gleichung der Curve:

$$x^2 - y^2 = \frac{3}{\sqrt{2}} c^2,$$

und drückt folglich eine Hyperbel aus.

Beispiel 3. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}\,.\,cx = 0,$$

so ergibt sich ganz wie in Beispiel 1:

$$\alpha = 45^\circ,\ A' + C' = 2,\ A' - C' = -2,$$

also:

$$A' = o,\quad C' = 2;$$

ferner:

$$D' - E' = -4c,\ D' + E' = o,$$

mithin:

$$D'' = -2c,\quad E' = 2c.$$

Drehet man also die Coordinatenaxen um den Winkel $\doteq 45^\circ$, so wird die gegebene Gleichung:

$$2y^2 - 4cx + 4cy = o,$$

oder:

$$(y+c)^2 = 2c\left(x - \frac{c}{2}\right),$$

und wenn man den Anfangspunkt in den Punkt$\left(\frac{c}{2}, -c\right)$ verlegt:

$$y^2 = 2cx,$$

welche Gleichung offenbar eine Parabel ausdrückt.

Beispiel 4. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2c^2 = o,$$

so findet man:

$$\alpha = 45^\circ,\ A' = o,\ C' = 2,\ D' = o,\ E' = o.$$

Werden also die Coordinatenaxen um einen Winkel von 45° gedrehet, so wird die gegebene Gleichung:

$$y^2 - c^2 = o \text{ oder } (y-c)(y+c) = o,$$

wodurch zwei parallele Gerade ausgedrückt werden, was auch unmittelbar aus der gegebenen Gleichung erhellet, wenn man sie auf folgende Form bringt:

$$(x - y - c\sqrt{2})(x - y + c\sqrt{2}) = o.$$

Siebzehntes Kapitel.

Construction der reducirten Gleichungen des zweiten Grades.

A. Ellipse.

§. 119.

Construction der Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + H = o, \qquad (1)$$

wo M und N dasselbe Zeichen, z. B. das Zeichen + haben.

Wenn $H > o$ ist, so kann der erste Theil der Gleichung (1) für keinen reellen Werth von x und y verschwinden; die Gleichung hat also keine geometrische Bedeutung.

Wenn $H = o$ ist, so geschieht der Gleichung (1) nur durch $x = o$, $y = o$ Genüge, und sie drückt folglich weiter nichts als den Anfangspunkt aus.

Wenn $H < o$ ist, und man setzt: $a = \sqrt{\frac{-H}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{-H}{N}}$; so wird die Gleichung (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder: } a^2y^2 + b^2y^2 = a^2b^2. \qquad (2)$$

Der Anfangspunkt ist der Mittelpunkt und die Coordinatenaxen sind Axen der Curve. Aus der für y aufgelös'ten Gleichung:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (3)$$

erhellet, daß x sich von $-a$ bis $+a$ und y von $-b$ bis $+b$ ändert. Nimmt man also $OA = OA_1 = a$ und $OB = OB_1 = b$ (Fig. 159), so ist die Curve in dem Rechtecke EFGH enthalten und geht durch die Punkte A, A_1, B, B_1, welche die Scheitel der Curve heißen. Die Längen a und b heißen die Halbaxen, und zwar a die große und b die kleine Halbaxe. Die Curve ist eine Ellipse, welche in einen Kreis übergeht, wenn $a = b$ wird.

Die Gleichung des über AA_1 beschriebenen Kreises ist:

$$Y^2 + x^2 = a^2,$$

folglich wegen (3):

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a},$$

d. h. die Ordinate der Ellipse verhält sich zu der des Kreises wie $b : a$. Hieraus ergibt sich eine geometrische Construction der Punkte der Ellipse; denn beschreibt man auch um BB_1 als Durchmesser einen Kreis, zieht einen beliebigen Halbmesser, welcher die beiden concentrischen Kreise in P und Q schneidet, durch P eine Parallele zur Axe der y und durch Q eine solche zu der Axe der x; so ist der Durchschnittspunkt M dieser beiden Geraden ein Punkt der Ellipse.

§. 120.

Aus der Gleichung (3) folgt:

$$y : b = \sqrt{a^2 - x^2} : a,$$

und wenn man durch den Punkt M (Fig. 160) der Ellipse eine durch die beiden Axen begrenzte Gerade RS zieht; so hat man:

$$y : MR = SQ : MS$$

$$y : MR = \sqrt{\overline{MS}^2 - x^2} : MS.$$

Nimmt man also $MS = a$, so folgt $MR = b$, was ein Mittel an die Hand gibt, die Ellipse durch eine stetige Bewegung zu beschreiben. Wenn also die beiden Endpunkte einer Geraden von constanter Länge sich auf zwei rechtwinkligen Axen bewegen, so beschreibt ein Punkt M dieser Geraden eine Ellipse.

Man kann der Geraden auch die Lage $MR'S'$ geben; denn wenn $MS' = a$ ist, so ist $MR' = b$. Wenn sich also eine Gerade so bewegt: daß zwei ihrer Punkte auf zwei rechtwinkligen Geraden fortgleiten; so beschreibt ein beliebiger anderer Punkt dieser Geraden eine Ellipse, und die beiden Halbaxen derselben sind den Abständen des erzeugenden Punktes von den beiden ersten Punkten gleich.

Aus der Gleichung (3) folgt:

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

oder:

$$\frac{y^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{b^2}{a^2};$$

mithin ist für einen beliebigen M (Fig. 159) der Ellipse:

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP \cdot A_1P_1} = \frac{b^2}{a^2},$$

d. h. das Quadrat der Ordinate steht zu dem Produkte aus den zugehörigen Abschnitten der großen Axe in einem constanten Verhältnisse.

Wenn man die Polarcoordinaten:

$$\varrho \cos \omega, \ \varrho \sin \omega$$

für x und y in die Gleichung der Ellipse setzt, so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2},$$

oder wenn $a > b$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \omega.$$

Wenn sich also ω von o bis $\frac{\pi}{2}$ ändert, so ändert sich $\frac{1}{\varrho^2}$ von $\frac{1}{a^2}$ bis $\frac{1}{b^2}$,

d. h. ϱ nimmt von a bis b fortwährend ab, und folglich ist a das Maximum und b das Minimum von ϱ.

§. 121.

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte (x, y) der Ellipse ist:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

Wenn T (Fig. 159) der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe der x ist, so ist $OT = \frac{a^2}{x}$. Dieser Ausdruck von OT ist unabhängig von b und y, so daß, wenn man über A_1A verschiedene Ellipsen beschreibt, die Tangenten in den derselben Abscisse entsprechenden Punkten alle durch denselben Punkt T gehen. Unter diesen Ellipsen befindet sich auch ein Kreis, und der Punkt T wird bestimmt, wenn man an diesen Kreis eine Tangente zieht. Verbindet man alsdann T mit dem auf der Ellipse gegebenen Punkte, so hat man die Tangente an der Ellipse.

Soll man durch einen außerhalb der Ellipse gegebenen Punkt E (Fig. 167) Tangenten an diese Curve ziehen, so bestimme man für den über der großen Axe beschriebenen Kreis den correspondirenden Punkt F (indem man etwa BE und dann HD zieht), so daß man hat:

$$\frac{EG}{FG} = \frac{MP}{NP} = \frac{b}{a}.$$

Alsdann ziehe man von F aus zwei Tangenten an den Kreis und durch die correspondirenden Punkte M, M′ von N, N′ zwei Gerade von E aus; so hat man die beiden gesuchten Tangenten. — Soll man endlich an die Ellipse Tangenten ziehen, welche zu einer gegebenen Geraden OK (Fig. 167a) parallel sind, so construirt man die correspondirende Gerade OL von OK, zieht an den Kreis die beiden zu OL parallelen Tangenten NT, N′T′ und dann TM, T′M′.

B. Hyperbel.

§. 122.

Construction der Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + H = 0, \tag{1}$$

wenn M und N entgegengesetzte Zeichen haben.

Wenn $H = o$ ist, so gibt die Gleichung zwei durch den Anfangspunkt gehende Gerade:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{-N}{M}}.$$

Wenn H nicht $= o$ ist, und z. B. das Zeichen von N hat, so kann man setzen:

$$a = \sqrt{\frac{-H}{M}},\ b = \sqrt{\frac{H}{N}},$$

wodurch sich die Gleichung (1) in folgende verwandelt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2. \quad (2)$$

Der Anfangspunkt ist Mittelpunkt und die Coordinatenaxen sind Axen der Curve. Aus der für y aufgelös'ten Gleichung:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad (3)$$

erhellet: daß y für alle zwischen $+a$ und $+\infty$, so wie für alle zwischen $-a$ und $-\infty$ liegende Werthe von x reell ist, und daß in jedem dieser Intervalle der absolute Werth von y von o bis ∞ wächst. — Nimmt man also $OA = OA_1 = a$ (Fig. 162), so besteht die Curve aus zwei unendlichen Zweigen, wovon der eine zur Rechten von A und der andere zur Linken von A_1 liegt. Die Curve ist eine Hyperbel, A, A_1 sind ihre Scheitel und a ist ihre halbe reelle oder Queraxe. Wenn man auf der Axe der y die Länge $OB = OB' = b$ nimmt, so heißt BB' die imaginäre Axe der Hyperbel.

Für die durch die Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

ausgedrückte Hyperbel ist BB' die reelle und AA_1 die imaginäre Axe. — Zwei Hyperbeln, welche so beschaffen sind, daß die reelle Axe der einen die imaginäre Axe der andern ist, heißen conjugirte Hyperbeln.

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

oder:

$$\frac{y^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{b^2}{a^2},$$

d. h.:

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP \cdot A_1P} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Das Quadrat der Ordinate steht also zu dem Produkte der beiden entsprechenden Abschnitte auf der Querare in einem constanten Verhältnisse.

Zur Bestimmung der Asymptoten hat man $c = \pm \frac{b}{a}$, $d = 0$. Die beiden conjugirten Hyperbeln haben dieselben Asymptoten:

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

welche die Diagonalen des über den Aren construirten Rechteckes sind. — Der Unterschied zwischen der derselben Abscisse entsprechenden Ordinate der Asymptote und der Hyperbel wird durch:

$$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ausgedrückt, und da diese Größe positiv ist; so folgt: daß der Hyperbelzweig **AE** unter der Asymptote **OG** liegt. Der Zweig **BH** der conjugirten Hyperbel liegt dagegen über der Asymptote.

Wenn man über derselben reellen Are A_1A verschiedene Hyperbeln beschreibt, so stehen die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten in einem constanten Verhältnisse.

Die Gleichung der Tangente der Hyperbel ist:

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1,$$

woraus $OT = \frac{a^2}{x}$ folgt. — Wenn also der Berührungspunkt **M** gegeben ist, so erhält man den Punkt **T**, wo die Tangente die Are schneidet, wenn man zwischen $OA = a$ und $OP = x$ die mittlere Proportionale **OT** sucht.

§. 123.

Asymptoten als Coordinatenaren.

Wenn man die beiden Asymptoten der Hyperbel als Coordinatenaren nimmt, so kann man a priori behaupten: daß die Gleichung der Curve von der Form $xy = m^2$ sein wird. Denn da der Anfangspunkt Mittelpunkt der Curve ist, so kann die Gleichung kein Glied vom ersten Grade enthalten; da ferner $y = \infty$ ist für $x = 0$, so kommt auch das Glied mit y^2 nicht in der Gleichung vor, und da $x = \infty$ wird für $y = o$, so fehlt ebenso das Glied mit x^2; es bleiben also blos noch zwei Glieder, nämlich das mit xy und das constante Glied. Man sieht: daß dies nichts anders ist, als die in §. 48 angedeutete vollständige Reduction, welche in der Fortschaffung von 4 Parametern besteht.

Den Werth der Constante m^2 kann man leicht bestimmen. Denn wendet man die Gleichung $xy = m^2$ auf den Scheitel A (Fig 162 a) an, dessen Coordinaten einander gleich sind, nämlich $OF = FA = OH$; so hat man:

$$m^2 = OF \,.\, OH = \overline{OH}^2 = \frac{\overline{OG}^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}. \qquad (5)$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch durch Coordinatenverwandlung. Denn es seien OX′, OY′ zwei neue Axen, welche mit OX die Winkel α, β bilden, so hat man:

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta,$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke wird die Gleichung (2):

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^1}\right) x'^2 + \left(\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2}\right) y'^2$$
$$+ 2\left(\frac{\cos\alpha \cos\beta}{a^2} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{b^2}\right) x'y' = 1.$$

Bestimmt man nun die Winkel α, β so, daß die Glieder mit x^2 und y^2 verschwinden, so hat man:

$$\tang^2\beta = \tang^2\alpha = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\tang\beta = - \tang\alpha = \frac{b}{a},$$

was darauf hinausläuft: daß man die Asymptote OG′ (Fig. 162) zur Axe der x', und die Asymptote OG zur Axe der y' nimmt. — Die Gleichung der Curve reducirt sich alsdann auf:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}. \qquad (5)$$

Aus der Gleichung (5) erhellet: daß die Fläche des zwischen den beiden Asymptoten und den Coordinaten eines beliebigen Punktes M (Fig. 163) der Hyperbel liegenden Rechteckes OPMQ constant und zwar der Hälfte des Rechteckes aus den beiden Halbaxen gleich ist. — Denn wenn ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die beiden Asymptoten mit einander bilden, so ist diese Fläche $= xy \sin \vartheta = m^2 \sin \vartheta = \frac{ab}{2}$, weil $\sin \vartheta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ ist.

Aus der Gleichung (5) ergibt sich auch leicht: daß das Produkt der Abstände jedes Punktes der Hyperbel von den beiden Asymptoten constant ist.

Wenn ferner $x, y; x', y'$ die Coordinaten der Punkte M, M' (Fig. 163) der Hyperbel sind, so ist die Gleichung der durch diese beiden Punkte gehenden Sekante MM':

$$Y - y = \frac{y' - y}{x' - x}(X - x),$$

oder wegen $x'y' = xy$:

$$Y - y = -\frac{y'}{x}(X - x). \qquad (6)$$

Wenn man in dieser Gleichung $X = o$ setzt, so ergibt sich daraus:

$$SQ = y' = M'P'.$$

Die beiden Dreiecke SMQ, $M'P'R$ sind also einander gleich, und mithin $MS = M'R$. — Die zwischen der Hyperbel und den beiden Asymptoten liegenden beiden Theile einer Sekante sind also einander gleich, woraus als besonderer Fall folgt: daß die zwischen dem Berührungspunkte und den Asymptoten liegenden beiden Theile einer Tangente einander gleich sind. — Setzt man in der Gleichung (6), $y' = y$, so ist die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = -\frac{y}{x}(X - x)$$

oder:

$$xY + yX = 2m^2. \qquad (7)$$

C. Parabel.

§. 124.

Construction der Gleichung:

$$Ny^2 + Px = o, \qquad (1)$$

oder wenn man $2p = -\frac{P}{N}$ setzt:

$$y^2 = 2px; \text{ also } y = \pm\sqrt{2px}. \qquad (2)$$

Die Axe der x ist eine Axe der Curve und der Anfangspunkt ein Scheitel. Wenn $p > o$ gesetzt wird, so ist y für alle positiven Werthe von x reell, und wenn x sich von o bis $+\infty$ ändert; so wächst y dem absoluten Werthe nach von o bis ∞. Da jedem Werthe von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y entsprechen, so besteht die Curve aus einem unendlichen Zweige EOE_1 (Fig. 164) und wird Parabel genannt. — Die Länge p, welche die Form der Parabel bestimmt, heißt der Parameter derselben.

Nach der Gleichung (2) hat man:

$$\frac{y^2}{x} = \frac{\overline{PM}^2}{OP} = 2p,$$

d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die zugehörigen Abscissen.

Die Gleichung ihrer Tangente ist:

$$yY = p(X + x), \qquad (3)$$

woraus sich für $Y = o$ die Länge $OT = X = -x$ ergibt, so daß sich diese Tangente leicht construiren läßt.

Die Gleichung der Normale ist:

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

Setzt man darin $Y = o$, so erhält man für die Subnormale

$$PN = X - x = p.$$

§. 125.

Die Parabel als Grenze einer Ellipse oder Hyperbel.

Wenn man den Scheitel A_1 (Fig. 159) als Anfangspunkt nimmt, so wird die Gleichung der Ellipse:

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

wo $p = \frac{b^2}{a}$, $q = -\frac{b^2}{a^2} = \frac{-p}{a}$ gesetzt ist.

Wenn man den Scheitel A (Fig. 162) zum Anfangspunkte nimmt, so hat die Gleichung der Hyperbel dieselbe Form, indem $p = \frac{b^2}{a}$, $q = \frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wird.

Läßt man nun die beiden Halbaxen unbeschränkt so zunehmen: daß das Verhältniß $\frac{b^2}{a}$ gegen die endliche Grenze p und das Verhältniß $\frac{b^2}{a^2}$ gegen Null convergirt; so convergiren die Ellipse und Hyperbel gegen die Parabel $y^2 = 2px$. Die Ellipse convergirt gegen die Parabel, indem sie sich erweitert und die Hyperbel, indem sie sich zusammenzieht (Fig. 165), so daß die Parabel die Grenzscheide des Ueberganges von der Ellipse zur Hyperbel bildet.

Die drei Curven des zweiten Grades sind also in der Gleichung:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

enthalten, und ihre unterscheidenden Merkmale sind:

$q < o$ Ellipse,

$q = o$ Parabel,

$q > o$ Hyperbel.

Die Constante p wird gewöhnlich der Parameter genannt.

Uebungsaufgaben.

1) Zwei Winkelspitzen eines unveränderlichen Dreieckes bewegen sich auf zwei rechtwinkligen Geraden, man soll den Ort der dritten Winkelspitze des Dreieckes finden.

2) Es sind zwei feste sich schneidende Gerade gegeben, und eine dritte bewegliche Gerade schneidet die beiden ersten so, daß das entstehende Dreieck eine constante Fläche hat; man soll den Ort der Schwerpunkte dieser Dreiecke finden.

3) Man soll zeigen: daß die von jedem beliebigen Punkte einer Hyperbel durch zwei feste Punkte derselben gezogenen Sekanten auf der einen oder andern Asymptote constante Längen abschneiden.

4) Man soll beweisen: daß jede Sehne einer Hyperbel das Stück der einen oder andern Asymptote, welches zwischen den Tangenten in den beiden Endpunkten dieser Sehne liegt, in zwei gleiche Theile theilt.

5) Man soll eine Hyperbel construiren, wenn man kennt: 1) zwei Asymptoten und einen Punkt; 2) zwei Asymptoten und eine Tangente; 3) eine Asymptote und drei Punkte; 4) die Richtung der Asymptoten und drei Punkte; 5) eine Asymptote, einen Scheitel und einen Punkt.

6) Den Ort der Mitten aller durch denselben innerhalb einer Ellipse liegenden Punkt gezogenen Sehnen zu finden.

7) Man soll beweisen, daß, wenn zwei Punkte einer beweglichen Ebene auf zwei festen Geraden fortgleiten, ein Punkt dieser Ebene eine Ellipse oder eine gerade Linie beschreibt

8) Wenn durch zwei gegebene Punkte A, B einer Geraden zwei bewegliche Gerade AM, BM so gezogen werden, daß $\angle MAB = 2 . \angle MBA$ ist, den Ort des Durchschnittspunktes M zu finden.

Achtzehntes Kapitel.

Von den conjugirten Durchmessern.

§. 126.

Durchmesser in der Ellipse.

Ein System paralleler Sehnen wird durch die Gleichung:

$$y = mx + k \qquad (1)$$

ausgedrückt, worin m eine Constante und k ein veränderlicher Parameter ist, und die Gleichung des Ortes der Mittelpunkte dieser Sehnen oder des Durchmessers ist nach §. 97:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x. \qquad (2)$$

Es geht also jeder Durchmesser durch den Mittelpunkt, und wenn m′ den Richtungscoefficienten desselben bezeichnet; so hat man die Relation:

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Ein Sehnensystem (m′), d. h. deren Richtungscoefficient m′ ist, gäbe einen Durchmesser (m), und folglich bilden zwei Durchmesser (m), (m′), welche der Relation (3) genügen, ein System conjugirter Durchmesser, d. h. von solcher Beschaffenheit: daß jeder die zu dem andern parallelen Sehnen halbirt. — Man findet die conjugirte einer gegebenen Richtung, wenn man zu letzterer eine parallele Sehne zieht und ihre Mitte mit dem Mittelpunkte der Curve durch eine Gerade verbindet.

Der Richtungscoefficient der Tangente im Punkte (x, y) ist:

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

und wenn m′ den Richtungscoefficienten $\frac{y}{x}$ des nach dem Berührungspunkte gehenden Durchmessers bezeichnet, so genügen m und m′ der Relation (3); folglich ist die Tangente der Ellipse dem nach dem Berührungspunkte gehenden Durchmesser conjugirt.

§. 127.

Conjugirte Durchmesser als Coordinatenaxen.

Wenn a′, b′ die Längen derselben conjugirten Durchmesser bezeichnen, so kann man a priori behaupten: daß die Gleichung der Ellipse von der Form ist:

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1, \qquad (4)$$

wenn man diese Durchmesser als Coordinatenaxen nimmt, weil jede der beiden Veränderlichen x, y für einen beliebigen Werth der andern zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe hat. — Aber auch die Transformation der Coordinaten führt zu demselben Resultate; denn wenn α, β die Winkel bezeichnen, welche die neuen Coordinatenaxen mit der ursprünglichen Axe der x bilden, und man setzt (s. §. 123):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0 \\[2ex] \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta = -\dfrac{b^2}{a^2} \end{array}\right\} \quad (5)$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a'^2} = \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2}, \\[2ex] \dfrac{1}{b'^2} = \dfrac{\cos^2\beta}{a^2} + \dfrac{\sin^2\beta}{b^2}, \end{array}\right\} \quad (6)$$

so bekommt die Gleichung der Ellipse die Form (4).

Aus der Gleichung (5) erhellet: daß die neuen Axen conjugirte Durchmesser sind. — Zieht man das Quadrat der Gleichung (5) von dem Produkte der Gleichungen (6) ab, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a'^2 b'^2} = \dfrac{\sin^2(\beta-\alpha)}{a^2 b^2} \\[2ex] \text{oder:} \\[1ex] a' b' \sin(\beta-\alpha) = ab. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Das über zwei conjugirten Durchmessern construirte Parallelogramm ist also dem Rechtecke aus den beiden Axen gleich.

Aus den Gleichungen (6) folgt:

$$\frac{\sin^2\beta}{a'^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b'^2} = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{a^2},$$

$$\frac{\cos^2\beta}{a'^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b'^2} = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{b^2},$$

oder:

$$a'^2\sin^2\alpha + b'\sin^2\beta = \frac{a'^2 b'^2 \sin^2(\beta-\alpha)}{a^2} = b^2,$$

$$a'^2\cos^2\alpha + b'\cos^2\beta = \frac{a'^2 b'^2 \sin^2(\beta-\alpha)}{b^2} = \alpha^2.$$

Aus diesen Ausdrücken erhellet: daß die Summe der Quadrate der Projectionen zweier conjugirter Durchmesser auf eine Axe der Curve constant und dem Quadrate dieser Axe gleich ist. — Addirt man die beiden letzten Gleichungen, so hat man:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \qquad (8)$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist der Summe der Quadrate der Axen gleich.

§. 128.

Durchmesser in der Hyperbel.

Da sich die Gleichung der Hyperbel von der der Ellipse nur durch das Zeichen von b^2 unterscheidet, so ergeben sich aus den obigen Resultaten die entsprechenden für die Hyperbel, wenn man das Zeichen von b^2 ändert.

Die Relation (3) der conjugirten Richtungen wird:

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}, \qquad (9)$$

und wenn $m < \frac{b}{a}$ ist, so ist folglich $m' > \frac{b}{a}$; der eine Durchmesser A'_1A' (Fig. 162) liegt also in dem Asymptotenwinkel und ist reell, während der andere B'_1B' in dem äußern Winkel liegt und imaginär ist. — Da die Relation (9) für die conjugirte Hyperbel dieselbe bleibt, so haben beide Hyperbeln dasselbe System conjugirter Durchmesser; nur ist der Durchmesser, welcher für die eine Hyperbel reell ist, für die andere imaginär. — Wenn der eine Durchmesser OA′ sich der Asymptote OG unendlich nähert, so nähert sich der andere derselben Asymptote, und beide fallen mit ihr an der Grenze zusammen. Denn wenn $m = \frac{b}{a}$ wird, so wird auch $m' = \frac{b}{a}$.

Die Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf zwei conjugirte Durchmesser ist:

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

und die der Asymptoten:

$$\frac{y'}{x'} = \pm \frac{b'}{a'}.$$

Die Diagonalen des über zwei conjugirten Durchmessern construirten Parallelogrammes fallen also mit den Asymptoten zusammen.

Die Gleichung (8) wird:

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,$$

d. h. die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist constant und der Differenz der Quadrate der Axen gleich.

§. 129.

Da die Gleichung der Ellipse und Hyperbel in Beziehung auf ein System conjugirter Durchmesser dieselbe Form hat, als in Bezug auf die Hauptaxen, so kann man alle weiter oben aus dieser Form hergeleiteten Eigenschaften dieser beiden Curven auch auf den Fall erstrecken, wo sie auf ein System conjugirter Durchmesser bezogen sind. — Wenn z. B. m, m' die Richtungscoefficienten zweier beliebiger conjugirter Durchmesser bezeichnen, so hat man wieder:

$$mm' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Hieraus folgt: das Rechteck aus den beiden zwischen dem Berührungspunkte und zwei conjugirten Durchmessern liegenden Stücken einer Tangente ist constant und dem Quadrate des zu dieser Tangente parallelen halben Durchmessers gleich. — Denn nimmt man den nach dem Berührungspunkte gehenden Durchmesser OA' (Fig. 166) zur Axe der x, den conjugirten Durchmesser OB' zur Axe der y, und sind OD, OE auch zwei conjugirte Durchmesser; so sind die Gleichungen der Curve und dieser Durchmesser resp.:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,\ y = mx,\ y' = m'x.$$

Setzt man hierin $x = a'$, so folgt $A'D = -ma'$, $A'E = m'a'$; folglich:

$$A'D \times A'E = -mm'a'^2 = b'^2.$$

Vermittelst dieses Satzes kann man, wenn ein System conjugirter Durchmesser OA', OB' der Größe und Richtung nach gegeben ist, die Axen construiren, welche nichts anders sind, als ein System rechtwinkliger conjugirter Durchmesser. — Denn zieht man durch A' eine Parallele zu OB', macht das Perpendikel A'F = OB' und beschreibt einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf DE liegt, und welcher durch O und F geht; so schneidet derselbe die Tangente in zwei Punkten D, E, welche mit dem Mittelpunkte O verbunden die Richtungen der beiden Axen geben. Zieht man ferner auf OD das Perpendikel A'P, so gibt die mittlere geometrische Proportionale zwischen OD und OP die eine Halbare OA'.

Bei der Hyperbel vereinfacht sich die Construction noch, weil die Diagonalen des über den beiden conjugirten Durchmessern construirten Parallelogrammes die Richtungen der Axen unmittelbar geben.

§. 130.

Man kann die vorhergehende Aufgabe auch durch Rechnung lösen. Denn wenn a', b' und $\beta-\alpha$ gegeben sind, so werden α, a und b durch die Gleichungen (5) und (6) bestimmt, und diese Gleichungen sind überhaupt zur Lösung jeder beliebigen Aufgabe über conjugirte Durchmesser hinreichend. — Will man z. B. die gleichen conjugirten Durchmesser haben, so geben die Gleichungen (6) durch Subtraction:

$$\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{b^2} = 0,$$

$$\sin(\beta-\alpha)\,\sin(\beta+\alpha)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) = 0. \qquad (9)$$

Wenn a = b ist, so wird die Gleichung (9) bei jedem Werthe von α erfüllt, und folglich sind im Kreise alle conjugirten Durchmesser auf einander senkrecht. — Aber wenn b^2 nicht $= a^2$ ist, so reducirt sich die Gleichung (9) auf:

$$\sin(\beta-\alpha)\,\sin(\beta+\alpha) = 0;$$

folglich ist:

$$\beta = \alpha, \text{ oder } \alpha+\beta = \pi.$$

Die erste Auflösung entspricht der Ellipse nicht, weil sonst $\tan^2\alpha = -\frac{b^2}{a^2}$ wäre, und die zweite gibt:

$$\tan\alpha' = -\tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

In der Ellipse sind also die gleichen conjugirten Durchmesser nach den Diagonalen des aus den Axen construirten Rechteckes gerichtet.

Dagegen entspricht die zweite Auflösung der Hyperbel nicht, und die erste führt auf zwei conjugirte Durchmesser, welche in einer Asymptote zusammenfallen und beide unendlich werden, so daß es in der Hyperbel eigentlich keine gleichen conjugirten Durchmesser gibt.

Wenn man $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$ setzt, so ist die Gleichung der Ellipse in Bezug auf ihre gleichen conjugirten Durchmesser:

$$x^2 + y^2 = a'^2, \tag{10}$$

also von derselben Form, wie die Gleichung des auf seinen Mittelpunkt und auf rechtwinklige Axen bezogenen Kreises.

§. 131.

Durchmesser in der Parabel.

Die Gleichung der Parabel und die eines Systemes paralleler Sehnen sei:

$$y^2 = 2px \text{ und } y = mx + k,$$

so ist die Gleichung des Durchmessers:

$$y = \frac{p}{m};$$

d. h. alle Durchmesser der Parabel sind zu ihrer Axe parallel. — Aus der Relation $y = \frac{p}{m}$ folgt $m = \frac{p}{y}$, welches genau der Richtungscoefficient der Tangente ist, und folglich ist die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers zu den Sehnen parallel, welche dieser Durchmesser halbirt. — Die Gleichung der Parabel in Beziehung auf einen Durchmesser und die durch seinen Endpunkt gehende Tangente als Coordinatenaxen ist:

$$y'^2 = 2p'x',$$

wo $p' = \frac{p}{\sin^2\alpha}$ und α der Winkel der Coordinatenaxen ist.

Kennt man einen Durchmesser HH' (Fig. 164), die Tangente MT und den zugehörigen Parameter MH' $= p'$; so kann man die Axe der Parabel leicht finden. Denn es ist MT $= \frac{p\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = p'\cos\alpha$, und die Projection von H' auf die Tangente gibt den Punkt T, durch welchen man die Axe parallel zu dem Durchmesser zieht. Der Scheitel der Parabel ist die Mitte von TP und der Parameter $2p = 2$PN (§. 57).

§. 132.

Eingeschriebene Winkel — Supplementarsehnen.

Wenn man einen Punkt M (Fig. 166 a) der Ellipse mit den beiden

Endpunkten eines Durchmessers C_1C durch gerade Linien MC, MC_1, welche Supplementarsehnen heißen, verbindet; so sind diese Sehnen zu einem Systeme conjugirter Durchmesser parallel. Denn wenn man durch den Mittelpunkt der Ellipse eine Parallele zu CM zieht, so geht dieselbe durch die Mitte I von MC_1.

§. 133.

Umgekehrt, wenn man durch die Endpunkte eines Durchmessers CC_1 zwei Parallelen zu zwei conjugirten Durchmessern zieht, so schneiden sie sich auf der Ellipse. Denn es sei C_1M die eine Sehne, welche von dem Durchmesser OI halbirt wird; so muß CM die andere sein, weil man durch den Punkt C nur eine Parallele zu OI ziehen kann.

Der Winkel M nimmt also die verschiedenen Werthe des von den beiden conjugirten Durchmessern gebildeten Winkels ϑ an, und man hat:

$$\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$$

$$= \frac{-(b^2+a^2\operatorname{tang}^2\alpha)}{c^2\operatorname{tang}\alpha}, \tag{11}$$

woraus folgt:

$$a^2\operatorname{tang}^2\alpha + c^2\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}\alpha + b^2 = o,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{-c\operatorname{tang}\vartheta + \sqrt{c^4\operatorname{tang}^2\vartheta - 4a^2b^2}}{2a^2}. \tag{12}$$

Es darf also höchstens $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{2ab}{c}$ sein, und wenn ω den spitzen Winkel bezeichnet, dessen Tangente $= \frac{2ab}{c^2}$ ist; so ändert sich der eingeschriebene Winkel ϑ von ω bis $\pi - \omega$. Das Minimum ω ist der über der kleinen Axe beschriebene Winkel BAB_1, dessen Spitze in dem Endpunkte A der großen Axe liegt, und das Maximum $\pi - \omega$ ist der über der großen Axe stehende Winkel ABA_1, dessen Spitze in dem Endpunkte B der kleinen Axe liegt.

In der Hyperbel erhält man die Supplementarsehnen, wenn man irgend einen Punkt der Curve mit den Endpunkten eines reellen Durchmessers verbindet, und wenn man $-b^2$ statt b^2 in (13) setzt; so kann die Wurzelgröße nicht imaginär, also ϑ weder ein Maximum, noch ein Minimum werden, und ändert sich von o bis π.

Wenn man über einem Durchmesser CC_1 einen Halbkreis beschreibt, so schneidet derselbe die Ellipse oder Hyperbel in zwei Punkten, die mit C und C_1 verbunden, Supplementarsehnen geben, welche zu den Axen parallel sind. Ueberhaupt erhält man zwei conjugirte Durchmesser, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden, wenn man über CC_1 einen Kreisabschnitt beschreibt, der den gegebenen Winkel faßt.

Uebungsaufgaben.

1) Man soll zeigen: daß unter allen Systemen conjugirter Durchmesser der Ellipse die Summe der Axen ein Minimum und die Summe der gleichen conjugirten Durchmesser ein Maximum ist.
2) In die Ellipse eine solche Sehne zu legen: daß die Summe aus ihrer Länge und dem Abstande ihrer Mitte von dem Mittelpunkte der Curve ein Maximum wird.
3) Man soll den Ort der Ecken der über den conjugirten Durchmessern einer Ellipse beschriebenen Parallelogramme finden.
4) Man soll zeigen: daß von allen um dieselbe Ellipse beschriebenen Parallelogrammen die über zwei conjugirten Durchmessern Minima sind.
5) Man soll zeigen: daß von allen in dieselbe Ellipse beschriebenen Parallelogrammen die, deren Diagonalen ein System conjugirter Durchmesser bilden, Maxima sind.
6) Welche von allen in dasselbe Parallelogramm beschriebenen Ellipsen ist ein Maximum?
7) Welche von allen um dasselbe Parallelogramm beschriebenen Ellipsen ist ein Minimum?
8) Wenn zwei Ellipsen in einer Ebene eine solche Lage haben, daß zwei conjugirten Durchmesser der einen resp. zu zwei conjugirten Durchmessern der andern parallel sind und sich in 4 Punkten schneiden; so liegen diese 4 Punkte auf einer dritten Ellipse, deren gleiche conjugirte Durchmesser zu denen der beiden ersten Systeme parallel sind.

Neunzehntes Kapitel.

Von den Polen und Polaren.

§. 134.

Wenn man durch einen äußern Punkt r oder (x', y') an eine Curve des zweiten Grades:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Tangenten zieht, so sind die Berührungspunkte die Durchschnitte der gegebenen Curve mit der Geraden:

$$(2Ax+By+D)x'+(2Cy+Bx+E)y'+Dx+Ey+2F=0 \quad (2)$$

(§. 64), und wenn man x', y' so variiren läßt, daß die Berührungssehne stets durch denselben Punkt p oder (x_1, y_1) geht; so hat man auch:

$$(2Ax_1+By_1+D)x'+(2Cy_1+Bx_1+E)y'+Dx_1+Ey_1+2F=0.$$

Diese Gleichung, worin x', y' veränderlich sind, drückt eine Gerade aus, und man hat folglich den Satz:

1) Wenn man von einem in der Ebene einer Curve des zweiten Grades genommenen Punkte p (Fig. 168 u. 169) beliebige Sekanten nach dieser Curve, und in den Durchschnittspunkten Tangenten an dieselbe zieht; so ist der Ort der Durchschnittspunkte je zweier Tangenten eine Gerade P. — Diese Gerade P heißt die Polare des Punktes p, welcher seinerseits der Pol der Geraden P genannt wird.

§. 135.

Eigenschaften der Polaren.

Wenn der Pol (x_1, y_1) gegeben ist, so ist die Gleichung der Polare:

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(2Cy_1+Bx_1+E)y+Dx_1+Ey_1+2F=0. \quad (3)$$

Umgekehrt, wenn die Polare $p_1x+q_1y+1=0$ gegeben ist, so wird ihr Pol durch die Relationen bestimmt:

$$\frac{2Ax_1+By_1+D}{p_1} = \frac{2Cy_1+Bx_1+E}{q_1} = \frac{Dx_1+Ey_1+2F}{1}.$$

Wenn man den durch den Pol gehenden Durchmesser zur Axe der x und eine Parallele zur conjugirten Richtung als Axe der y nimmt, so reduciren sich die Gleichungen (1) und (3) auf:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = o$$
$$(2Ax_1 + D)x + Dx_1 + 2F = o,$$

woraus folgt:

2) Die Polare ist die conjugirte Richtung zu dem durch den Pol gehenden Durchmesser.

Wenn die Curve einen Mittelpunkt hat, so kann man $D = o$ setzen, wodurch sich die Gleichung der Polare auf:

$$xx_1 = -\frac{F}{A}$$

reducirt. Der nach dem Pole gehende halbe Durchmesser ist alsdann die mittlere Proportionale zwischen den auf diesem Durchmesser gezählten Abständen des Mittelpunktes von dem Pole und von der Polare, oder mit andern Worten:

3) Der durch den Pol gehende Durchmesser wird durch die Curve und Polare harmonisch getheilt.

Es seien c, c′ und q die Punkte, worin der Durchmesser die Curve und die Polare trifft; so hat man:

$$\frac{pc}{pc'} : \frac{qc}{qc'} = -1 \text{ oder } \overline{oc}^2 = \overline{op} \,.\, \overline{oq}.$$

Da sich in der Parabel der Punkt c′ ins Unendliche entfernt, so ist der Punkt c die Mitte von pq.

Wenn der Punkt p außerhalb der Curve liegt, so fällt seine Polare mit der Berührungssehne zusammen, und wenn der Punkt p auf der Curve liegt, so ist seine Polare die Tangente in diesem Punkte.

Der Pol eines Durchmessers liegt auf dem conjugirten Durchmesser in unendlicher Entfernung. — Die Polare des Mittelpunktes ist unendlich weit entfernt.

Die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) kann auf folgende Form:

$$2Ax_1x + 2Cy_1y + B(x_1y + xy_1) + D(x + x_1) + E(y + y_1) + 2F = o$$

gebracht werden, welche sowohl in Bezug auf x und x_1 als in Beziehung auf y und y_1 symmetrisch ist. Hieraus folgt: daß die Polare des Punktes (x, y) durch den Punkt (x_1, y_1) geht, so daß man den Satz hat:

4) Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden — und umgekehrt:

der Ort der Pole aller Geraden, welche durch denselben Punkt gehen, ist die Polare dieses Punktes.

Eine durch zwei Punkte gehende Gerade hat den Durchschnittspunkt der Polaren dieser Punkte zum Pole.

§. 136.

5) Wenn man von einem Punkte p (Fig. 168 u. 169) nach einer Curve des zweiten Grades Sekantenpaaren zieht, und die Durchschnittspunkte derselben mit der Curve paarweise verbindet; so ist der Ort der Durchschnittspunkte der Verbindungslinien die Polare des Punktes p.

Wir wollen ein Sekantenpaar paa' und pbb' als Coordinatenaren nehmen, so gibt dieses Paar zwei Paare von Geraden ab, a'b' und ab', a'b, und folglich zwei Durchschnittspunkte i, i'. Es seien x', x'' die Abscissen der Punkte a, a' und y', y'' die Ordinaten der Punkte b, b'; so werden die beiden Punkte i, i' durch folgende zwei Systeme von Gleichungen gegeben:

$$\text{i} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{x'} + \dfrac{y}{y'} = 1, \\ \dfrac{x}{x''} + \dfrac{y}{y''} = 1 \end{array} \right. \qquad \text{i}' \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{x'} + \dfrac{y}{y''} = 1, \\ \dfrac{x}{x''} + \dfrac{y}{y'} = 1. \end{array} \right.$$

Wenn man die beiden ersten, so wie die beiden letzten Gleichungen durch Addition verbindet, so erhält man dieselbe Gleichung:

$$\frac{x' + x''}{x'x''}\, x + \frac{y' + y''}{y'y''}\, y = 2,$$

welche folglich die Gerade ii' ausdrückt.

Die Gleichung der Curve ist von der Form:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

und wenn man darin successive $x = 0$, $y = 0$ setzt; so erhält man zwei Gleichungen, welche die Durchschnittspunkte der Curve mit den Coordinatenaren geben, nämlich:

$$Ax^2 + Dx + F = 0, \quad \frac{x' + x''}{x'x''} = -\frac{D}{F},$$

$$Cy^2 + Ey + F = 0, \quad \frac{y' + y''}{y'y''} = -\frac{E}{F}.$$

Die Gerade ii' hat also zur Gleichung:

$$Dx + Ey + 2F = 0,$$

und ist die Polare des Punktes p. — Ein anderes Sekantenpaar würde dieselbe Polare geben, und folglich ist der Satz bewiesen.

Die vier Geraden ip, ia, P, ia′ bilden ein harmonisches Büschel (§. 34) und die dadurch auf der Sekante pa bestimmten Punkte p, a, p′, a′ eine harmonische Proportion (§. 33). Man hat also den Satz:

Eine beliebige, durch den Pol gehende Sekante wird von der Curve und Polare harmonisch getheilt.

Der Satz 1) ist nur ein besonderer Fall von 5); denn wenn die Sekanten paa′ und pbb′ sich einander nähern, und endlich zusammenfallen, so werden die Geraden ab und a′b′ Tangenten. — Auch der Satz in §. 35 ist in dem Satze 5) als besonderer Fall enthalten, weil das System zweier Geraden ein besonderer Fall einer Curve des zweiten Grades ist.

Der Satz 5 gibt auch ein Mittel an die Hand: von einem außerhalb einer Curve des zweiten Grades gegebenen Punkte p eine Tangente an dieselbe zu ziehen; denn zieht man durch diesen Punkt p zwei beliebige Sekanten, so bestimmen dieselbe die Polare P, und mithin die Berührungspunkte.

§. 137.

Umschriebenes Viereck.

Vier Tangenten an einer Curve des zweiten Grades (Fig. 170) bilden ein vollständiges Viereck mit drei Paaren gegenüberliegender Winkel a und a′, b und b′, c und c′. — Wenn d, e, f, g die vier Berührungspunkte sind, und man verbindet dieselben paarweise durch Gerade; so erhält man drei Paare Berührungssehnen, welche sich in den Punkten p, q, r schneiden, und jeder dieser letzten Punkte ist der Pol der durch die beiden andern Punkte gehenden Geraden, so daß die vier Punkte a, a′, q, r in der Polare von p liegen. — Man hat also folgenden Satz:

6) Die drei Diagonalen aa′, bb′, cc′ eines um eine Curve des zweiten Grades beschriebenen Viereckes bilden ein Dreieck pqr, worin jede Winkelspitze ein Pol der Gegenseite ist, und wenn man die Berührungspunkte paarweise verbindet; so erhält man drei Sekantenpaare, deren Durchschnittspunkte p, q, r sind.

Anwendungen.

1) **Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn der Mittelpunkt o (Fig. 171) und drei Punkte a, b, c derselben gegeben sind.** — Es sei i die Mitte von ab, so ist die Gerade oi die conjugirte von ab, und ca, cb bestimmen auf oi zwei Punkte p, q von solcher Beschaffenheit, daß die Polare von p durch q geht. Ferner sei $oA = \sqrt{op.oq}$, und ebenso bestimmt man den halben conjugirten Durchmesser oB, so daß man auf die Construction in §. 129 zurückkommt.

2) **Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn der Mittelpunkt o und drei Tangenten derselben gegeben sind (Fig. 172).** — Die drei Tangenten bilden ein um die Curve beschriebenes Dreieck abc, und die vom Mittelpunkte o der Curve nach den drei Winkelspitzen des Dreieckes gezogenen halben Durchmesser oa, ob, oc sind zu den Berührungssehnen conjugirt. Zieht man drei Gerade mm′, nn′, pp′, wovon jede durch den zugehörigen Durchmesser halbirt wird, und durch die Punkte m, m′ die Parallelen mi, m′i zu nn′, pp′; so trifft ai die bc in dem Berührungspunkte d. Ebenso bestimmen die Parallelen de, df zu pp′, nn′ die beiden andern Berührungspunkte e, f, und man findet alsdann leicht die beiden halben conjugirten Durchmesser oA, oB.

3) **Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn vier Tangenten und ein Berührungspunkt d (Fig. 170) gegeben sind.** — Man construirt das Dreieck pqr aus den Diagonalen des umschriebenen Viereckes, und die drei Geraden dp, dq, dr bestimmen die andern drei Berührungspunkte g, e, f.

§. 138.

Reciproke Polarsysteme.

Ein ebenes **Vieleck** im allgemeinsten Sinne des Wortes ist ein System in einer Ebene gezogener, sich schneidender, unbegrenzter gerader Linien A, B, C, . . ., (Fig. 172a) welche die **Seiten** des Vieleckes bilden, und die Durchschnittspunkte (A, B), (B, C), . . . derselben sind die **Spitzen** des Vieleckes. — Construirt man in Beziehung auf eine gegebene Curve des zweiten Grades, welche die

die Pole a′, b′, c′, ... der Geraden A, B, C, ... und verbindet diese Punkte paarweise durch gerade Linien, so erhält man ein zweites Vieleck, wovon jede Spitze der Pol der entsprechenden Seite des ersten Vieleckes ist, und umgekehrt ist jede Spitze (A, B) des ersten Vieleckes der Pol der entsprechenden Seite a′b′ des zweiten. — Zwei Vielecke, welche so beschaffen sind: daß die Spitzen des einen die Pole der Seiten des andern sind, heißen reciproke oder correlative Vielecke.

Wenn die Geraden A, B, C, . . . die successiven Tangenten einer Curve S bilden, so bilden die Pole a′, b′, c′, . . . eine zweite Curve S′ (Fig. 173). Convergirt B gegen A, so wird der Punkt (A, B) der Berührungspunkt a von A, und b′ convergirt gleichzeitig gegen a′, und die Gerade a′b′ wird die Tangente A′ in a′, so daß A′ und A die Polaren von a und a′ sind. — Die beiden Curven S und S′ heißen reciproke Polaren; die Punkte der einen sind die Pole der Tangenten der andern.

Es sei:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der Richtcurve des zweiten Grades,

$$f(x, y) = 0, \qquad (S)$$

die Gleichung der Curve S und x′, y′ die Coordinaten des Punktes der reciproken Polare S′, welcher dem Punkte (x, y) von S entspricht. Daß die Polare des Punktes (x′, y′) Tangente an S ist, wird durch die Relationen:

$$\frac{f'_x(x, y)}{2Ax' + By' + D} = \frac{f'_y(x, y)}{2Cy' + Bx' + E} = \frac{\psi + 2\chi}{Dx' + Ey' + 2F}, \qquad (4)$$

ausgedrückt, und wenn man x, y zwischen den Gleichungen (4) und (S) eliminirt; so erhält man die Gleichung der reciproken Polare S′ mit x′, y′. — Oder: die Curve S′ kann als die Einhüllungscurve der Polaren:

$$(2Ax+By+D)X+(2Cy+Bx+E)Y+Dx+Ey+2F=0, \qquad (5)$$

welche den verschiedenen Punkten (x, y) von S entsprechen, betrachtet werden (§. 86), wo X, Y die laufenden Coordinaten und x, y zwei veränderliche Parameter bedeuten, welche der Relation (S) genügen müssen.

Die Gleichung (5) kann man auf folgende Form bringen:

$$pX + qY + 1 = 0,$$

wenn man setzt:

$$\frac{2Ax+By+D}{p} = \frac{2Cy+By+E}{q} = \frac{Dx+Ey+2F}{1},$$

und diese letzten Gleichungen geben für x, y Werthe von der Form:

$$x = \frac{\alpha p + \alpha' q + \alpha''}{\gamma p + \gamma' q + \gamma''}, \quad y = \frac{\beta p + \beta' q + \beta''}{\gamma p + \gamma' q + \gamma''}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke für x, y in $f(x, y) = o$, so erhält man zwischen den Parametern p, q eine Gleichung, welche von demselben Grade ist, als die der Curve S. — Wenn die Curve S vom zweiten Grade ist, so ist die Einhüllungscurve auch vom zweiten Grade, so daß man folgenden Satz hat:

7) Die reciproke Polare einer Curve vom zweiten Grade ist auch vom zweiten Grade.

Beispiel. Wir wollen das Gesagte auf den besondern Fall anwenden, wo die Richtcurve ein Kreis:

$$x^2 + y^2 - 1 = o,$$

und die gegebene Curve eine concentrische Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

ist; so erhalten wir als reciproke Polare:

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = 1,$$

d. h. eine Ellipse, deren Axen die reciproken Werthe der Axen der gegebenen Ellipse sind.

Die Anwendung der reciproken Systeme ist in der Geometrie von großem Nutzen. Denn wenn ein Lehrsatz über eine Figur bewiesen ist, so ergibt sich daraus unmittelbar der entsprechende Lehrsatz über die reciproke Figur, wenn man in dem ersten Punkte statt Gerade und umgekehrt Gerade statt Punkte setzt.

§. 139.

Pascals Sechseck.

Nach dem Vorhergehenden ergibt sich auch folgender Satz leicht:

8) Wenn sich die n Seiten eines Vieleckes um n feste Punkte drehen, während n — 1 Winkelspitzen auf gegebenen geraden Linien fortgleiten; so beschreibt die freie Spitze eine Curve des zweiten Grades.

Denn es seien $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_n, \beta_n$ die Coordinaten der n festen Punkte; ferner:

$$a_1 x + b_1 y + 1 = o, \qquad (1)$$
$$a_2 x + b_2 y + 1 = o, \qquad (2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} x + b_{n-1} y + 1 = o \qquad (n-1)$$

die Gleichungen der $n-1$ Richtlinien, und die Gleichungen der n Seiten des Vieleckes:

$$p_1 x + q_1 y + 1 = o,$$
$$p_2 x + q_2 y + 1 = o,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_n x + q_n y + 1 = o.$$

Gleitet nun die Winkelspitze (1, 2) auf der Geraden (1), die Spitze (2, 3) auf der Geraden (2), . . . die Spitze (n 1, n) auf der Geraden ($n-1$) fort, und beschreibt endlich die Spitze (n, 1), deren Coordinaten x, y seien, den gesuchten Ort; so hat man:

$$xp_1 + yq_1 + 1 = o,\quad \alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1 + 1 = o,$$
$$(q_1 - b_1)p_2 - (p_1 - a_1)q_2 + b_1 p_1 - a_1 q_1 = o,\quad \alpha_2 p_2 + \beta_2 p_2 + 1 = o,$$
$$(q_2 - b_2)p_3 - (p_2 - a_2)q_3 + b_2 p_2 - a_2 q_2 = o,\quad \alpha_3 p_3 + \beta_3 q_3 + 1 = o,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(q_{n-1} - b_{n-1})p_n - (p_{n-1} - a_{n-1})q_n + b_{n-1}p_{n-1} - a_{n-1}q_{n-1} = o,$$
$$\alpha_n p_n + \beta_n q_n + 1 = o,\quad xp_n + yq_n + 1 = o;$$

also im Ganzen $2n+1$ Gleichungen zwischen den $2n+2$ Veränderlichen p_1, q_1, p_2, q_2, . . . p_n, q_n, x, y, und wenn man die $2n$ ersten eliminirt; so erhält man die Gleichung des Ortes. — Die beiden ersten der obigen Gleichungen geben p_1 und q_1 durch Brüche ausgedrückt, deren Zähler und Nenner Polynome des ersten Grades von x und y sind. Setzt man diese Werthe von p_1 und q_1 in die beiden folgenden der obigen Gleichungen, so nehmen diese folgende Form an:

$$A_1 p_2 + B_1 q_2 + C_1 = o,\quad \alpha_2 p_2 + \beta_2 q_2 + 1 = o,$$

wo A_1, B_1, C_1 lineare Functionen von x, y sind. Diese beiden letzten Gleichungen geben für p_2 und q_2 ebenfalls Brüche, deren Zähler und Nenner in Bezug auf x, y vom ersten Grade sind. Setzt man diese Werthe von p_2 und q_2 in die nächstfolgenden beiden Gleichungen, und so fort bis zu den beiden letzten, so erhält man p_n, q_n auf dieselbe Weise ausgedrückt, und wenn man endlich die Werthe von p_n, q_n in die letzte Gleichung substituirt; so erhält man eine Gleichung des zweiten Grades nach x und y. Der gesuchte Ort ist also eine Curve des zweiten Grades.

Diese Curve geht durch die beiden äußersten festen Punkte (α_1, β_1), (α_n, β_n); denn wenn man resp. α_1 und β_1 für x und y setzt, so werden die beiden ersten Gleichungen identisch, und es bleiben zur Bestimmung der zugehörigen Werthe von p_1, q_1, . . . p_n, q_n noch $2n$ Gleichungen.

§. 140.

Ebenso ergibt sich folgender Satz sehr leicht:

9) Wenn die n Ecken eines Vieleckes auf n gegebenen Geraden fortgleiten, während sich $n-1$ Seiten um $n-1$ feste Punkte drehen; so umhüllt die freie Seite eine Curve des zweiten Grades.

Es seien die Gleichungen der n Richtlinien:

$$a_1 x + b_1 y + 1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + 1 = 0,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$a_n x + b_n y + 1 = 0,$$

die $n-1$ festen Punkte:

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}),$$

die n Eckpunkte des Vieleckes;

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_n, y_n)$$

und endlich die Gleichung der freien Vielecksseite:

$$px + qy + 1 = 0.$$

Wenn man ausdrückt: daß die Eckpunkte des Vieleckes auf den gegebenen Geraden fortgleiten und daß die Seiten desselben durch die festen Punkte gehen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$px_1 + qy_1 + 1 = 0, \quad a_1 x_1 + b_1 y_1 + 1 = 0,$$
$$(y_1 - \beta_1)x_2 - (x_1 - \alpha_1)y_2 + \beta_1 x_1 - \alpha_1 y_1 = 0, \quad a_2 x_2 + b_2 y_2 + 1 = 0,$$
$$(y_2 - \beta_2)x_3 - (x_2 - \alpha_2)y_2 + \beta_2 x_2 - \alpha_2 y_2 = 0, \quad a_3 x_3 + b_3 y_3 + 1 = 0,$$
$$. \quad .$$
$$. \quad .$$
$$(y_{n-1} - \beta_{n-1})x_n - (x_{n-1} - \alpha_{n-1})y_n + \beta_{n-1}x_{n-1} - \alpha_{n-1}y_{n-1} = 0,$$
$$a_n x_n + b_n y_n + 1 = 0, \quad qx_n + qy_n + 1 = 0.$$

Wenn man zwischen diesen $2n+1$ Gleichungen die $2n$ Veränderlichen x_1, y_1; x_2, y_2; . . . x_n, y_n auf die früher angegebene Weise eliminirt, so erhält man successive x_1 und y_1, x_2 und y_2, . . . x_n und y_n durch Brüche ausgedrückt, deren Zähler und Nenner lineare Functionen von p und q sind, und wenn man die Werthe von x_n, y_n in die letzte der obigen Gleichungen substituirt; so bekommt man eine Gleichung des zweiten Grades nach p und q, welche eine Curve des zweiten Grades ausdrückt.

Diese Curve berührt die beiden äußersten Richtlinien (a_1, b_1)

und (a_n, b_n); denn wenn man resp. a_1, b_1 für p, q setzt, so werden die beiden ersten Gleichungen identisch.

§. 141.

Eingeschriebenes Sechseck.

Wir wollen den besondern Fall eines Dreieckes betrachten, dessen drei Seiten sich um drei feste Punkte a, b, c (Fig. 174) drehen, während zwei Winkelspitzen g, h auf zwei Geraden ox, oy fortgleiten, also die freie Ecke m eine Curve des zweiten Grades beschreibt. Gibt man der beweglichen Seite gh die Lagen br, bs, bd, be, bo, so erhält man die fünf Punkte a, c, d, e, o der Curve, wodurch sie vollständig bestimmt ist, so daß man also ein in eine Curve des zweiten Grades beschriebenes Sechseck odamceo hat, und die drei Punkte g, b, h, d. h. die Durchschnittspunkte der Gegenseiten od und cm, da und ec, am und oe, in gerader Linie liegen. — Man hat also den Satz:

10) Wenn auf einer Curve des zweiten Grades sechs Punkte nach Belieben angenommen werden, und man, von einem derselben ausgehend, alle übrigen durchläuft, ehe man zu dem Ausgangspunkte zurückkommt, und die Seiten nach der Ordnung numerirt, in welcher man sie erhalten hat; so liegen die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten (1, 4), (2, 5), (3, 6) in einer Geraden (Fig. 175).

§. 142.

Umschriebenes Sechseck.

Wenn man an sechs Punkte einer Curve des zweiten Grades Tangenten zieht, so erhält man ein umschriebenes Sechseck, dessen Winkelspitzen 1′, 2′, ... 6′ die Pole der Seiten 1, 2, ... 6 des eingeschriebenen Sechseckes sind, während die Diagonalen (1, 4), (2, 5) und (3, 6) die Polaren der Punkte (1, 4), (2, 5) und (3, 6) bilden, und da diese drei Punkte in derselben Geraden A liegen; so folgt: daß die drei Diagonalen durch den Punkt a′ gehen, welcher der Pol von A ist. — Man hat also den Satz:

11) Die drei Diagonalen, welche je zwei Gegenwinkel eines in eine Curve des zweiten Grades

beschriebenen Sechsecks verbinden, gehen durch denselben Punkt.

Dieser Lehrsatz 11, welcher der correlative von 10 ist, ließe sich auch direkt aus 9, welcher der correlative von 8 ist, ableiten. Denn mittelst irgend einer Richtcurve des zweiten Grades werden nach der Methode der reciproken Polaren die n Punkte durch n Gerade und die $n-1$ Geraden durch $n-1$ Punkte ersetzt, so wie das bewegliche Vieleck durch das reciproke, und der freien Ecke des ersten, welche eine Curve des zweiten Grades beschreibt, entspricht die freie Seite des zweiten, welche folglich eine Curve des zweiten Grades umhüllt.

Wenn zwei aufeinanderfolgende Ecken des eingeschriebenen Sechsecks zusammenfallen, so wird die dazwischen liegende Seite eine Tangente der Curve. Folglich hat ein in eine Curve des zweiten Grades beschriebenes Fünfeck, Viereck und Dreieck die Eigenschaften des Sechsecks, wenn man die Anzahl der Seiten durch Tangenten ergänzt.

Wenn zwei successive Ecken des eingeschriebenen Sechsecks zusammenfallen, so kommen die beiden entsprechenden Seiten des umschriebenen Sechsecks in eine gerade Linie zu liegen und die zwischenliegende Winkelspitze wird der Berührungspunkt der doppelten Seite. Ein um eine Curve des zweiten Grades beschriebenes Fünfeck, Viereck und Dreieck hat also die Eigenschaften des Sechsecks, wenn man die Anzahl der Ecken durch Berührungspunkte ergänzt.

Von den vielen Sätzen, welche sich auf diese Weise aus den beiden allgemeinen Lehrsätzen ableiten lassen, wollen wir blos die beiden folgenden hier noch anführen:

Wenn man in eine Curve des zweiten Grades ein Dreieck beschreibt, so liegen die drei Durchschnittspunkte der Seiten mit den Tangenten in den Eckpunkten in gerader Linie.

Wenn man um eine Curve des zweiten Grades ein Dreieck beschreibt, so gehen die drei Geraden, welche die Winkelspitzen mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, durch einen und denselben Punkt.

§. 143.

Anwendung des Obigen auf die Construction von Curven des zweiten Grades.

1) Wenn 3 Tangenten und die Berührungspunkte von zwei derselben gegeben sind. — Man hat in diesem Falle ein umschriebenes Dreieck. Verbindet man die beiden bekannten Berührungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken durch gerade Linien, und zieht durch den Durchschnittspunkt der letztern und die dritte Ecke eine Gerade; so bestimmt dieselbe den dritten Berührungspunkt, und endlich schneiden sich die Verbindungslinien der Dreiecksspitzen mit den Mittelpunkten der Berührungssehnen im Mittelpunkte der Curve.

2) Wenn 3 Punkte der Curve und die Tangenten in zwei derselben gegeben sind. — Der Lehrsatz über das eingeschriebene Dreieck gibt die dritte Tangente.

3) Wenn 4 Tangenten und 1 Berührungspunkt gegeben sind. — Man hat ein umschriebenes Viereck. Ergänzt man die Anzahl der Spitzen desselben durch den gegebenen und einen unbekannten Berührungspunkt; so erhält man den letztern durch Anwendung des betreffenden Lehrsatzes.

4) Wenn 4 Punkte der Curve und die Tangente in einem derselben gegeben sind. — Ergänzt man die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen Sechseckes durch die gegebene und eine unbekannte Tangente, so wird letztere durch den betreffenden Lehrsatz bestimmt.

5) Wenn 5 Tangenten gegeben sind. — Man bestimmt successive jeden der Berührungspunkte.

6) Wenn 5 Punkte der Curve gegeben sind. — Man bestimmt successive die Tangenten in diesen Punkten.

Uebungsaufgaben.

1) Wenn in eine Curve des zweiten Grades zwei Dreiecke beschrieben sind, und 5 Seiten derselben sind Tangenten an einer andern Curve des zweiten Grades; so ist auch die sechste Seite Tangente an der zweiten Curve, was bewiesen werden soll.
2) Wenn zwei Dreiecke um eine Curve des zweiten Grades beschrieben sind, und 5 Spitzen derselben auf einer andern Curve des zweiten Grades liegen, zu beweisen: daß auch die höchste Spitze auf dieser Curve liegt.

3) Die gegenseitige Entfernung der Mittelpunkte der in und um dasselbe Dreieck beschriebenen Kreise als Funktion der Halbmesser dieser Kreise zu finden.

4) Es seien A, B zwei in der Ebene einer gleichseitigen Hyperbel (d. h. für welche $a = b$ ist) liegende Punkte und C der Durchschnittspunkt der Parallelen, welche durch jeden der Punkte A, B resp. zu der Polare des andern gezogen sind; zu beweisen: daß die 3 Punkte A, B, C und der Mittelpunkt der Hyperbel in demselben Kreisumfange liegen.

5) Man soll zeigen: daß in jedem um eine gleichseitige Hyperbel beschriebenen Vierecke die drei Durchschnittspunkte der Diagonalen auf einer durch den Mittelpunkt der Curve gehenden Kreislinie liegen.

6) Wenn man von einem in der Ebene einer Ellipse liegenden Punkte A Perpendikel auf die gleichen conjugirten Durchmesser fällt, zu beweisen: daß eine der Diagonalen des aus diesen Perpendikeln construirten Parallelogrammes auf der Polare des Punktes A senkrecht ist.

Zwanzigstes Kapitel.

Theorie der Brennpunkte.

§. 144.

Wir wollen den Ort der Punkte betrachten, welche so beschaffen sind: daß der Abstand eines jeden von einem festen Punkte, Brennpunkt genannt, eine ganze lineare Funktion der geradlinigen oder parallelen Coordinaten x, y jenes Punktes ist. — Da die Formeln zur Transformation der Parallelcoordinaten unter sich linear sind, so ist jede lineare Funktion der Veränderlichen x, y in einem gewissen Systeme paralleler Coordinaten auch in jedem andern Parallelcoordinatensysteme linear, und man kann folglich, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu vermindern, rechtwinklige Coordinaten zum Grunde legen. — Es seien α, β die Coordinaten des Brennpunktes F (Fig. 176) und x, y die eines beliebigen Punktes M des Ortes; so wird der Abstand des Punktes M von dem Brennpunkte ausgedrückt durch:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}.$$

Da ferner eine lineare Funktion der Coordinaten x, y des Punktes M von der Form ist:

$$mx + ny + t;$$

so hat man für die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \pm(mx+ny+t), \qquad (1)$$

oder:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 - (mx+ny+t)^2 = 0. \quad (2)$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade ist und 5 willkürliche Parameter enthält, so drückt sie alle Curven des zweiten Grades aus.

Der Abstand MP des Punktes M von der Geraden DD′ oder:

$$mx + ny + t = 0 \qquad (3)$$

wird ausgedrückt durch:

$$\frac{mx + ny + t}{\pm\sqrt{m^2 + n^2}},$$

und wenn man setzt:

$$k = \sqrt{m^2 + n^2};$$

so wird die Gleichung (1):

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = k \cdot \frac{mx+ny+t}{\pm\sqrt{m^2+n^2}},$$

woraus erhellet: daß der Abstand jedes Punktes M des gesuchten Ortes von einem festen Punkte F zu seinem Abstande von einer festen Geraden DD′ (Richtlinie) in einem constanten Verhältnisse steht.

§. 145.

Bestimmung der Brennpunkte und Richtlinien.

Um streng zu beweisen: daß die Gleichung (2) alle Curven des zweiten Grades ausdrückt, müßte man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

identificiren, was die fünf folgenden Relationen gibt:

$$\frac{1-m^2}{A} = \frac{1-n^2}{C} = -\frac{2mn}{B} = -\frac{2(\alpha+mt)}{D} = -\frac{2(\beta+nt)}{E}$$
$$= \frac{\alpha^2+\beta^2-t^2}{F}, \qquad (4)$$

und zeigen: daß jedem Systeme von Werthen der Coefficienten A, B, C, . . ., welche eine Curve geben können, ein System endlicher und reeller Werthe von α, β, m, n, t entspricht. Allein wir haben früher gesehen (§. 125), daß alle Curven des zweiten Grades, abgesehen von ihren besondern Lagen in ihrer Ebene, in der Gleichung:

$$y^2 - 2px - qx^2 = o \qquad (5)$$

enthalten sind, so daß es genügt, die Gleichung (2) mit (5) zu identificiren. Wenn die Gleichung (2) alle in (5) enthaltene Curven ausdrückt, so drückt sie alle Curven des zweiten Grades aus, welche Lage sie in der Ebene auch haben mögen, und wenn eine der in (5) enthaltenen Curven eine gewisse Eigenschaft bei Zugrundlegung eines bestimmten Coordinatensystemes hat; so hat sie diese Eigenschaft auch in Bezug auf jedes andere Axensystem, d. h. man kann die ursprünglichen Axen fest liegen lassen, und die Curve in der Ebene verrücken. — Die Gleichungen (4) reduciren sich auf:

$$\frac{1-m^2}{-q} = \frac{1-n^2}{1} = \frac{mn}{o} = \frac{\alpha+mt}{p} = \frac{\beta+nt}{o} = \frac{\alpha^2+\beta^2-t^2}{o} = \lambda. \quad (6)$$

Der Gleichung $mn = o$ kann auf doppelte Weise genügt werden, sowohl durch $m = o$, als durch $n = o$. Im ersten Falle hat man:

$$m=o,\ \lambda = -\frac{1}{q},\ n^2 = 1+\frac{1}{q},\ \alpha = -\frac{p}{q},\ t^2 = -\frac{p^2}{q}, \ldots$$

und wenn t reell sein soll, so muß q negativ sein. Aber wenn $q < o$ ist, so ist sein absoluter Werth < 1, und n wäre imaginär; es kann also den Gleichungen (6) nicht durch $m = o$ genügt werden. — Für $n = o$ hat man:

$$\left.\begin{array}{l} n = o,\ \beta = o,\ m = \sqrt{1+q},\ t = \pm\alpha \\ \alpha = \dfrac{p}{1 \pm m} = \dfrac{p(\pm m - 1)}{q} \end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Die Relation $\beta = o$ zeigt: daß die Ellipse sowohl als die Hyperbel zwei auf der ersten oder Hauptaxe liegende Brennpunkte, und zwei auf dieser Axe senkrechte Richtlinien hat.

Da ferner $\alpha = -\frac{p}{q} \pm \frac{mp}{q}$ und die Abscisse des Mittelpunktes

$= -\frac{p}{q}$ ist, so folgt: daß die beiden Brennpunkte auf der ersten Axe zu beiden Seiten des Mittelpunktes und in gleichen Entfernungen von demselben liegen. Diese Entfernung ist in der Ellipse $= c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Beschreibt man also aus dem Scheitel **B** (Fig. 159) mit dem Halbmesser a einen Kreis, so schneidet derselbe die erste oder große Axe der Ellipse in zwei innerhalb der Curve liegenden Punkten **F**, F_1, welche die beiden **Brennpunkte** sind. Die Größe 2c heißt in der Ellipse die **Excentricität** — In der Hyperbel ist diese Entfernung $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, und wenn man aus dem Scheitel **B** (Fig. 162) mit dem Halbmesser $c = OG$ einen Kreis beschreibt; so schneidet derselbe die erste oder Queraxe in zwei Punkten **F**, F_1, welche die beiden Brennpunkte der Hyperbel sind.

Den beiden Brennpunkten F, F_1 entsprechen zwei Richtlinien D, D_2, welche durch die Gleichungen:

$$mx + t = o \text{ oder } x = \frac{\pm\alpha}{m} = \frac{p(-m \pm 1)}{mq} = -\frac{p}{q} \pm \frac{p}{mq} = \pm\frac{a_2}{c}$$

ausgedrückt werden und zu beiden Seiten des Mittelpunktes in gleicher Entfernung von demselben liegen. — Das Produkt aus den Abständen eines Brennpunktes und der entsprechenden Richtlinie vom Mittelpunkte ist:

$$\pm\frac{mp}{q} \cdot \pm\frac{p}{mq} = \frac{p^2}{q^2} = a^2.$$

Ein Brennpunkt und die entsprechende Richtlinie liegen auf **derselben** Seite des Mittelpunktes, und die Richtlinie erhält man leicht durch eine dritte Proportionale.

In der Parabel ist $q = o$, $m = 1$, $\alpha = \frac{p}{2}$, und die Gleichung der Richtlinie ist:

$$x = -\frac{p}{2} = -\alpha.$$

Die Parabel hat also nur **einen** Brennpunkt **F** (Fig. 164) und eine Richtlinie **D**, welche beide **gleichweit**, nämlich um den halben Parameter, vom Scheitel entfernt sind.

Das constante Verhältniß $k = m = \sqrt{1+q} = \frac{c}{a}$ ist in der **Ellipse** < 1, in der **Parabel** $= 1$ und in der **Hyperbel** > 1.

§. 146.

Eigenschaften der Brennpunkte.

Der Abstand eines Punktes der Curve vom Brennpunkte ist:

$$\pm(mx+ny+t) = \pm(mx+t) = \pm\left[m\left(x+\frac{p}{q}\right) \mp \frac{p}{q}\right],$$

und wenn man $x' = x \pm \frac{p}{q}$ setzt, wo x' die vom Mittelpunkte aus gezählte Abscisse ist; so wird der letzte Ausdruck:

$$\pm(mx' \mp a),$$

wo das erste Doppelzeichen so genommen werden muß, daß man eine positive Größe erhält. — Bezeichnen u, v die Abstände eines Punktes M der Ellipse von den Brennpunkten F, F_1, so hat man:

$$u = a - mx',$$
$$v = a + mx',$$

folglich:

$$u + v = 2a;$$

1) d. h. die Summe der Entfernungen jedes Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist constant und der großen Axe gleich.

In der Hyperbel muß man zwei Zweige unterscheiden. Da für den Zweig zur Rechten $mx' > a$ ist, so hat man für diesen Zweig:

$$u = mx' - a,$$
$$v = mx' + a,$$

also:

$$v - u = 2a,$$

und für den Zweig zur Linken:

$$u = -mx' + a,$$
$$v = -mx' - a,$$

folglich:

$$u - v = 2a;$$

2) d. h. die Differenz der Entfernungen jedes Punktes der Hyperbel von den beiden Brennpunkten ist constant und der Quer- oder Hauptaxe gleich.

Von der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades ausgehend, haben wir im Vorhergehenden die geometrischen Eigenschaften wieder gefunden, welche wir im ersten Kapitel zur Definition der Ellipse, Hyperbel und Parabel genommen hatten, so daß die Identität dieser letzten Curven mit denen des zweiten Grades vollständig dargethan ist.

§. 147.

Richtkreis.

Wenn man in der Ellipse jeden Radiusvector F_1M (Fig. 176) um ein Stück $MN = FM$ verlängert, so ist der Ort der Punkte N ein Kreis, dessen Mittelpunkt F_1 und dessen Halbmesser $= 2a$ ist. In der Hyperbel muß man FM von F_1M abschneiden, statt hinzuzusetzen; und da die Linie MN auf dem Kreise normal ist, so hat man den Satz:

3) Die drei Curven des zweiten Grades können als der Ort der Punkte betrachtet werden, welche von einem festen Punkte und von einem Kreise gleichweit entfernt sind. — Wenn der feste Punkt innerhalb des Richtkreises liegt, so ist der Ort eine Ellipse; liegt er außerhalb, so ist der Ort eine Hyperbel, und wenn endlich der Kreis in eine gerade Linie übergeht; so ist der Ort eine Parabel.

Da die Tangente den Winkel FMN halbirt, so ist sie auf der Mitte von FN senkrecht; folglich:

$$OF = \tfrac{1}{2}\, F_1N = a;$$

4) d. h. der Ort der Projectionen der Brennpunkte auf die Tangenten der Ellipse und Hyperbel ist ein über der ersten oder großen Axe beschriebener Kreis. — In der Parabel reducirt sich dieser Kreis auf eine im Scheitel auf der Axe senkrechte Gerade.

Die Anwendung des Richtkreises erleichtert mehrere Constructionen. Sind z. B. ein Brennpunkt und drei Tangenten gegeben, und man fällt aus dem Brennpunkte Perpendikel auf die Tangenten, so ist der Mittelpunkt des durch die drei Fußpunkte dieser Perpendikel gehenden Kreises der Mittelpunkt der Curve. Verbindet man alsdann den Mittelpunkt mit dem gegebenen Brennpunkte, so hat man die erste Axe, und die Punkte, wo sie von dem Kreise geschnitten wird, sind die Scheitel der Curve.

§. 148.

Wenn man den Brennpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, so ist die Gleichung einer Curve des zweiten Grades:

$$x^2 + y^2 - (mx + ny + t)^2 = 0.$$

Die Polare des Punktes (x_1, y_1) ist:

$$x_1x + y_1y - (mx_1 + ny_1 + t)(mx + ny + t) = 0,$$

und wenn der Pol der Brennpunkt ist; so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$mx + ny + t = o.$$

5) Die Richtlinie ist also die Polare des Brennpunktes.

Wenn der Pol auf der Richtlinie liegt, so ist die Gleichung der Polare:

$$x_1 x + y_1 y = o.$$

6) Die Polare eines Punktes der Richtlinie geht also durch den Brennpunkt und ist zugleich auf dem von dem Brennpunkte nach dem Pole gehenden Vector senkrecht.

Wenn man von einem Punkte p der Richtlinie eine Sekante zieht, welche die Curve in a,a′ und die Polare in q schneidet; so bilden die vier Geraden Fp, Fa, Fq, Fa′ ein harmonisches Büschel, und da der Winkel pFq ein rechter ist, so ist Fq die Halbirungslinie von aFa′. Wenn i der Pol der Sekante ist, so geht Fq durch i, und man hat folglich den Satz:

7) Wenn man an eine Curve des zweiten Grades von einem außerhalb derselben liegenden Punkte zwei Tangenten zieht, so halbirt die von dem Brennpunkte nach dem gegebenen Punkte gehende Gerade den Winkel, welchen die von diesem Brennpunkte nach den beiden Berührungspunkten gehenden Vectoren mit einander bilden.

Wenn der Brennpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ist die Gleichung der Normale im Punkte (x, y) der Curve:

$$\frac{X - x}{x - m(mx + ny + t)} = \frac{Y - y}{y - n(mx + ny + t)}.$$

Läßt man die Axe der x durch den Punkt (x, y) gehen, so reducirt sich die Gleichung der Curve auf:

$$x^2 - (mx + t)^2 = o \text{ oder } mx + t = \pm x$$

und die Gleichung der Normale wird:

$$\frac{X - x}{1 \mp m} = \frac{Y}{\mp n}.$$

Die Gleichung der auf der Richtlinie senkrechten ersten Axe ist:

$$nX - mY = o,$$

und für den Durchschnittspunkt der Normale mit der ersten Axe hat man:

$$\frac{X-x}{1 \pm m} = \frac{-x}{1} \text{ oder } x - X = (1 \mp m)x = \pm t.$$

Nun ist aber $x - X$ die Projection des zwischen der Curve und der ersten Axe liegenden Stückes der Normale auf den Radiusvector; und wenn man einen zweiten Punkt der Curve nimmt, so drehen sich die Coordinatenaxen um den Anfangspunkt, indem t ungeändert bleibt und der Ordinate des Punktes der Curve gleich ist, dessen Projection auf die erste Axe der Brennpunkt ist, d. h. dem Parameter p. Man hat also den Satz:

8) Die Projection des zwischen der Curve und der ersten Axe liegenden Theiles der Normale auf den von dem Brennpunkte nach dem Durchschnittspunkte der Normale mit der Curve gehenden Radiusvector ist constant und dem Parameter p gleich.

Uebungsaufgaben.

1) Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn man kennt:
   a) einen Brennpunkt und zwei Tangenten;
   b) einen Brennpunkt und drei Punkte der Curve;
   c) die Richtlinie und drei Punkte der Curve.
2) Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben ist:
   a) der Brennpunkt und zwei Tangenten;
   b) der Brennpunkt und zwei Punkte der Curve;
   c) der Brennpunkt, eine Tangente und ein Punkt der Curve;
   d) die Richtlinie und zwei Punkte der Curve.
3) Wenn M, M' zwei Punkte einer Parabel, A der Durchschnittspunkt der Tangenten in diesen beiden Punkten und F der Brennpunkt ist, zu beweisen, daß man hat:
$$\frac{\overline{AM}^2}{MF} = \frac{\overline{AM'}^2}{M'F}.$$
4) Man soll beweisen: daß in einer Curve des zweiten Grades sich das vom Brennpunkte auf eine Sehne gefällte Perpendikel und der zu dieser Sehne gehörige conjugirte Durchmesser auf der Richtlinie schneiden.
5) Man soll beweisen: daß ein Halbdurchmesser der Ellipse oder Hyperbel die mittlere Proportionale zwischen den von den Brennpunkten nach dem Endpunkte des conjugirten Durchmessers gezogenen Vectoren ist.

6) In der gleichseitigen Hyperbel ist der vom Mittelpunkte aus gezogene Radiusvector die mittlere Proportionale zwischen den von den Brennpunkten nach demselben Punkte der Curve gezogenen Vectoren, was bewiesen werden soll.

7) Man soll den Ort der Scheitel der Parabeln finden, welche eine Tangente und einen Brennpunkt gemeinschaftlich haben.

8) Den Ort des Scheitels einer Parabel zu finden, welche einen festen Brennpunkt hat, und durch einen festen Punkt geht.

9) Den Ort des Brennpunktes einer Parabel zu finden, welche einen festen Scheitel und einen festen Punkt, oder eine feste Tangente hat.

10) Man soll den Ort des Scheitels einer Hyperbel finden, welche eine feste Asymptote und Richtlinie hat.

11) Den Ort der Brennpunkte einer Hyperbel zu finden, welche eine feste Asymptote und einen festen Scheitel hat.

§. 149.

Wenn $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ die Entfernungen eines beweglichen Punktes M von festen Brennpunkten $F, F', F'', \ldots$ und $r, r', r'' \ldots$ die Entfernungen desselben Punktes von festen Geraden oder Richtlinien $D, D', D'', \ldots$ bezeichnen; so drückt eine Gleichung:

$$f(\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots; r, r', r'' \ldots) = 0 \qquad (1)$$

zwischen diesen Entfernungen eine ebene Curve aus, vorausgesetzt, daß die Brennpunkte und Richtlinien in derselben Ebene liegen.

Die Längen $r, r', r'', \ldots$ sind lineare Funktionen der Coordinaten x, y des Punktes M, und $\varrho^2, \varrho'^2, \varrho''^2, \ldots$ sind Funktionen des zweiten Grades, aber so beschaffen: daß die Differenz zwischen zwei beliebigen derselben eine lineare Funktion ist. Hieraus folgt:

1) Wenn die Relation (1) in Bezug auf $r, r', r'', \ldots$ und die Differenzen $\varrho^2 - \varrho'^2, \ldots$ linear ist, so ist der Ort des Punktes M eine Gerade.

2) Wenn dieselbe Relation in Beziehung auf $r, r', r'', \ldots; \varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ vom zweiten Grade ist und nur $\varrho^2, \varrho'^2, \varrho''^2, \ldots$ enthält; so ist der Ort des Punktes M eine Curve des zweiten Grades.

So drückt z. B. die Gleichung $rr' = m^2$ eine Hyperbel aus, welche die beiden Richtlinien zu Asymptoten hat; die Gleichung $r^2 + r'^2 = m^2$ eine Ellipse, deren Richtlinien die gleichen conjugirten Durchmesser sind; die Gleichung $ar^2 \pm br'^2 = m^2$ eine Ellipse, oder Hyperbel, worin die beiden Richtlinien ein System conjugirter Durchmesser bilden.

Aber dennoch gibt eine lineare Gleichung zwischen $\varrho, \varrho', \ldots;$ $r, r', \ldots$ zuweilen eine Curve des zweiten Grades. — Dieses ist der Fall: 1) wenn die Entfernung ϱ von einem Brennpunkte eine lineare Funktion der Entfernungen $r, r', r'', \ldots$ ist, weil alsdann ϱ eine lineare Funktion von x, y ist, d. h. man kann für die verschiedenen Richtlinien eine setzen, so daß man auf den gewöhnlichen Fall zurückkommt (144). 2) Wenn die Summe, oder Differenz der Entfernungen ϱ, ϱ' von zwei Brennpunkten constant ist; denn da $(\varrho+\varrho')(\varrho-\varrho') = \varrho^2-\varrho'^2$ und ein Faktor constant ist, so ist der andere linear, also auch die halbe Summe ϱ der beiden Faktoren, so daß man auf den vorhergehenden Fall zurückkommt.

§. 149 a.

Eingeschriebenes Viereck.

Wenn vier Gerade A, A'; B, B' gegeben sind und das Produkt der Entfernungen r, r' des beweglichen Punktes von den beiden ersten steht zu dem Produkte der Entfernungen s, s' desselben Punktes von den beiden letzten in einem constanten Verhältnisse; so beschreibt der bewegliche Punkt eine Curve des zweiten Grades. — Die Gleichung (1) ist in diesem Falle:

$$\frac{rr'}{ss'} = m,$$

und wenn eine der Längen r, r' Null wird, so muß auch s oder s' Null werden. Die Curve geht also durch die Durchschnittspunkte der Geraden A, A' mit B, B', so daß sie um das Viereck $AA'BB'$ beschrieben ist, und wegen des willkürlichen Parameters m erhält man so alle um dasselbe Viereck beschriebene Curven des zweiten Grades. Man hat also den Satz:

8) Wenn in eine Curve des zweiten Grades ein Viereck beschrieben ist, so ist das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes der Curve von zwei Gegenseiten des Viereckes zu dem Produkte der Abstände desselben Punktes von den beiden andern Gegenseiten in einem constanten Verhältnisse.

Wenn die Gerade B' zu B parallel ist und sich der letztern nähert, so nähern sich die auf A, oder A′ liegenden beiden Ecken auch einander, und an der Grenze berühren A, A′ die Curve in den Punkten, wo sie von B geschnitten wird. — Es steht also das Quadrat der Entfernung eines Punktes der Curve von einer Geraden zu dem Produkte seiner Abstände von zwei durch den Pol dieser Geraden gehenden Tangenten in einem constanten Verhältnisse.

§. 149 b.

Wenn man zwischen p und q eine Relation des zweiten Grades hat, so umhüllt die bewegliche Gerade $px + qy - 1 = o$ eine Curve des zweiten Grades. Die Entfernung ϱ der beweglichen Geraden von einem festen Punkte (x_1, y_1) wird ausgedrückt durch:

$$\varrho = \frac{px_1 + qy_1 - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

und wenn eine lineare Relation:

$$m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2 + \ldots = k$$

zwischen den Abständen der beweglichen Geraden von n festen Punkten F_1, F_2, . . . gegeben ist; so hat man:

$$\frac{(m_1x_1+m_2x_2+\ldots)p+(m_1y_1+m_2y_2+\ldots)q-n}{\sqrt{p^2+q^2}}=k. \quad (\alpha)$$

Nun kann man aber immer einen Punkt (x, y) von solcher Beschaffenheit finden, daß:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots = nx,$$
$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots = ny$$

ist, so daß sich die Relation (α) auf:

$$\frac{px + qy - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{k}{n}$$

reducirt. Da also die bewegliche Gerade stets dieselbe Entfernung von dem Punkte (x, y) behält, so umhüllt sie einen Kreis.

Wenn die zwischen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ gegebene Relation vom zweiten Grade ist und keine Glieder des ersten Grades enthält, so ist die Gleichung mit p und q auch vom zweiten Grade, und die bewegliche Gerade umhüllt eine Curve des zweiten Grades.

§. 149 c.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo das Produkt der Abstände der beweglichen Geraden von zwei festen Punkten constant,

d. h. $\varrho\varrho_1 = k$ ist. Nimmt man den Punkt F zum Anfangspunkte und sind x_1, y_1 die Coordinaten von F_1, so hat man:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \varrho_1 = \frac{px_1 + qy_1 - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

und die Parameter p, q unterliegen der Bedingung:

$$k(p^2 + q^2) - (px_1 + qy_1 - 1) = 0.$$

Nach der Theorie der Umhüllungslinien ist aber:

$$\frac{2kp - x_1}{x} = \frac{2kq - y_1}{y} = \frac{px_1 + qy_1 - 2}{1} = \frac{2k - x_1x - y_1y}{x^2 + y^2}$$
$$= \frac{x^2_1 + y^2_1 - 4k}{2k - x_1x - y_1y},$$

und mithin die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$x^2 + y^2 - \frac{(x_1x + y_1y - 2k)^2}{x^2_1 + y^2_1 - 4k} = 0,$$

welche also eine Curve des zweiten Grades ist, die den Punkt F und wegen der Symmetrie auch F_1 zum Brennpunkte hat. — Man hat folglich den Lehrsatz:

9) **Das Produkt der aus den beiden Brennpunkten einer Curve des zweiten Grades auf die Tangenten derselben gefällten Perpendikel ist eine constante Größe.**

Es seien T, T′ (Fig. 177) zwei Lagen der beweglichen Geraden, so ist $\overline{FP} \cdot \overline{F'_1P_1} = \overline{FP'} \cdot \overline{F_1P'_1}$; die beiden Dreiecke PFP′, $P_1F_1P_1'$ sind einander ähnlich; folglich auch MPP′, M,PP'_1; mithin:

$$\overline{MP} : \overline{MP'_1} = \overline{PP'} : \overline{P_1P'_1} = \overline{FP} : \overline{F_1P'_1}.$$

Die beiden Dreiecke PFM, P'_1F_1M sind also einander ähnlich; mithin $\angle PMF = \angle P'_1MF_1$. Man hat also den Satz:

10) **Wenn man von einem außerhalb einer Curve des zweiten Grades genommenen Punkte Tangenten an dieselbe zieht, so bilden diese Tangenten mit den von den beiden Brennpunkten nach dem äußern Punkte gehenden Geraden gleiche Winkel.**

Als besondern Fall ist hierin der bekannte Satz enthalten: **daß eine Tangente mit den beiden nach dem Berührungspunkte gehenden Vectoren gleiche Winkel bildet.**

§. 150.

Umschriebenes Viereck.

Wenn das Produkt der Abstände p, p′ der beweglichen Geraden von zwei festen Punkten a, a' zu dem Produkte der Entfernungen q, q' derselben Geraden von zwei andern festen Punkten b, b' in einem constanten Verhältnisse steht, so daß $\frac{pp'}{qq'} = k$ ist; so umhüllt die bewegliche Gerade eine Curve des zweiten Grades, welche die vier Geraden berührt, die man erhält, wenn man a oder a' mit b oder b' verbindet. Denn wenn p oder p' Null ist, so ist q oder q' auch Null; die Gerade fällt also in einer particulären Lage mit ab, . . . zusammen, und die Curve ist folglich in das Viereck ab a'b'a beschrieben. Wegen des willkürlichen Parameters k erhält man alle in dasselbe Viereck beschriebene Curven des zweiten Grades, und man hat daher folgenden Satz:

11) Wenn um eine Curve des zweiten Grades ein Viereck beschrieben ist, so steht das Produkt der Abstände einer beliebigen Tangente von zwei gegenüberliegenden Ecken des Viereckes zu dem Produkte der Abstände derselben Tangente von den beiden andern Ecken in einem constanten Verhältnisse.

Hieraus folgt: Wenn um eine Curve des zweiten Grades ein Winkel beschrieben ist, so steht das Produkt der Abstände einer beliebigen Tangente von den beiden Berührungspunkten der Schenkel dieses Winkels zu dem Quadrate ihres Abstandes von der Spitze des Winkels in einem constanten Verhältnisse.

§. 150 a.

Homofocale Curven.

Zwei Curven des zweiten Grades, welche dieselben Brennpunkte haben, heißen homofocale. Wenn man den Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, so ist die allgemeine Gleichung der homofocalen Curven:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1, \\ \text{oder:} \\ a^4 - a^2(x^2+y^2+c^2) + c^2x^2 = o, \end{array}\right\} \quad (1)$$

worin c eine Constante und a ein veränderlicher Parameter ist. — Wird $a > c$ genommen, so hat man eine Ellipse, welche sich mit zunehmendem a immer mehr der Kreisform nähert

(Fig. 178). Läßt man a bis c abnehmen, so plattet sich die Ellipse immer mehr ab, und geht zuletzt in das zwischen den Brennpunkten liegende Stück FF_1 der großen Axe über.

Für $a < c$ erhält man Hyperbeln, und wenn a bis c wächst; so nimmt der Asymptotenwinkel bis Null ab, die beiden Theile desselben Hyperbelzweiges nähern sich einander immer mehr, und fallen zuletzt resp. mit FX und F_1X_1 zusammen. — Wenn a bis zu Null abnimmt, so wird der Asymptotenwinkel immer größer, und zuletzt fallen die Hyperbelzweige auf die Axe der y. — Man erhält also zwei Reihen homofocaler Curven, nämlich eine Reihe Ellipsen und eine Reihe Hyperbeln. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine homofocale Ellipse und Hyperbel; denn die Gleichung (1) hat immer zwei reelle Wurzeln und gibt für a zwei Werthe, wovon der eine $< c$ und der andere $> c$ ist.

§. 150 b.

Eigenschaften der homofocalen Curven.

Wenn man eine homofocale Ellipse und Hyperbel beschreibt, welche durch einen Punkt M (Fig. 178) gehen, so halbirt die Tangente an der Ellipse den von dem einen Vector und der Verlängerung des andern gebildeten Winkel, und die Tangente an den Hyperbel der von beiden Vectoren gebildeten Winkel. Folglich durchschneiden eine homofocale Ellipse und Hyperbel sich unter einem rechten Winkel.

Wenn a, a_1 die Parameter einer homofocalen Ellipse und Hyperbel, und b, b_1 die zweiten Axen derselben sind; so wird der Durchschnittspunkt M derselben durch die simultanen Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2_1} - \frac{y^2}{b^2_1} = 1, a^2 - b^2 = a^2_1 + b^2_1 = c^2$$

bestimmt, woraus folgt:

$$x = \frac{aa_1}{c}, y = \frac{bb_1}{c}.$$

Wenn zwei homofocale Ellipsen (a), (a′) gegeben sind, so heißen die Punkte M, M_1, wo sie von einer homofocalen Hyperbel (a_1) geschnitten werden, correspondirende Punkte, und nach den vorhergehenden Gleichungen hat man:

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'};$$

d. h. die Coordinaten correspondirender Punkte verhalten sich wie die Axen. — Hieraus folgt:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{x'^2}{a'^2}=\frac{x^2-x'^2}{a^2-a'^2},\ \frac{y^2}{b^2}=\frac{y'^2}{b'^2}=\frac{y^2-y'^2}{b^2-b'^2}=\frac{y^2-y'^2}{a^2-a'^2},$$

$$\frac{x^2-x'^2+y^2-y'^2}{a^2-a'^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$x^2+y^2-(x'^2+y'^2)=a^2-a'^2.$$

Sind ferner N, N′ zwei andere correspondirende Punkte und x_1, y_1; x'_1, y'_1 ihre Coordinaten; so hat man ebenso:

$$x^2_1+y^2_1-(x'^2_1+y'^2_1)=a^2-a'^2.$$

Ferner ist:

$$\overline{MN'}^2=(x-x'_1)^2+(y-y'_1)^2=x^2+y^2+x'^2_1+y'^2_1 \\ -2(xx'_1+yy'_1),$$

$$\overline{M'N}^2=(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2=x'^2+y'^2+x^2_1+y^2_1 \\ -2(x_1x'+y_1y'),$$

also:

$$\overline{MN'}^2-\overline{M'N}^2=0,\ \text{oder}\ MN'=M'N;$$

d. h. die sich durchkreuzenden Verbindungslinien zweier Paare correspondirender Punkte auf zwei homofocalen Ellipsen sind gleich lang.

Dieser Satz findet auch noch statt, wenn zwei homofocale Hyperbeln von einer veränderlichen Ellipse geschnitten werden.

Die Gerade:

$$mx+ny+1=0$$

hat in der homofocalen Curve (a) zum Pole:

$$\frac{x_1}{ma^2}=\frac{y_1}{n(a^2-c^2)}=1=\frac{nx_1-my_1}{mnc^2},$$

und die von dem veränderlichen Parameter a unabhängige Gleichung:

$$nx_1-my_1-mnc^2=0$$

drückt den Ort der Pole der gegebenen Geraden in Beziehung auf die verschiedenen homofocalen Curven aus. — Man hat daher den Satz:

Der Ort der Pole derselben Geraden in Beziehung auf verschiedene homofocale Curven ist eine auf der gegebenen senkrechte Gerade.

Von den homofocalen Curven berührt eine die gegebene Gerade, indem der Berührungspunkt der Fußpunkt des Perpendikels ist.

Wenn zwei homofocale Ellipsen (a), (a′) gegeben sind, und man zieht von einem Punkte P (Fig. 179) der größern zwei Tangenten PM, PM' an die kleinere; so machen diese Tangenten mit PF und PF_1 gleiche Winkel, und haben folglich gegen die in P an die erste Ellipse gezogene Tangente B_1 B gleiche Neigung. — Wenn also ein Lichtstrahl an der innern Seite der großen Ellipse successive Zurückwerfungen erfährt, so berührt er stets die kleinere homofocale Ellipse.

§. 151.

Homofocale Parabeln.

Wenn Parabeln denselben Brennpunkt und dieselbe Axe haben, so heißen sie homofocale. — Nimmt man den gemeinschaftlichen Brennpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, und die gemeinschaftliche Axe zur Axe der x, so werden die homofocalen Parabeln durch die Gleichung:

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \qquad (5)$$

ausgedrückt, worin p ein willkürlicher Parameter ist.

Positive Werthe von p geben eine Reihe Parabeln, welche auf der Seite der positiven x liegen. Nimmt p bis Null ab, so nähert sich der Scheitel dem Brennpunkte F (Fig. 180) und die beiden Zweige der Parabel nähern sich gegenseitig, so daß sie zuletzt mit dem Theile FX der Axe zusammenfallen. Nimmt dagegen p gegen $+\infty$ zu, so entfernt sich der Scheitel gegen die Linke und die beiden Curvenzweige gehen immer weiter auseinander.

Negative Werthe von p geben eine zweite Reihe Parabeln, welche auf der Seite der negativen x liegen, und dieselben Umstände darbieten, wie die erste Reihe.

Durch jeden Punkt (x, y) der Ebene gehen zwei homofocale Parabeln, und zwar von jeder Reihe eine; denn die Gleichung (5) gibt für p zwei Werthe, einen positiven und einen negativen.

Wenn man den Brennpunkt F_1 fest liegen und F dagegen sich ins Unendliche entfernen läßt auf der Axe der positiven x; so wird die Reihe der homofocalen Ellipsen die erste Reihe der Parabeln, und die Reihe der Hyperbeln die zweite Parabelreihe, so daß sich die obigen Lehrsätze auch auf homofocale Parabeln erstrecken lassen, wenn man zwei Parabeln derselben Reihe als zwei homofocale Ellipsen, und zwei Parabeln, wovon die eine aus der einen und die andere aus der andern Reihe ist, als eine homofocale Ellipse und Hyperbel betrachtet.

Uebungsaufgaben.

1) Man soll die Einhüllungscurve der Polaren desselben Punktes in Beziehung auf verschiedene homofocale Curven finden.
2) Den Ort der Berührungspunkte der von einem festen Punkte an die verschiedenen homofocalen Curven gezogenen Tangenten zu finden.
3) Ebenso den Ort der Durchschnittspunkte der Normalen mit den Curven.
4) Desgleichen den Ort der Projectionen des festen Punktes auf seine Polaren.
5) Ein rechter Winkel bewegt sich in der Ebene zweier homofocaler Curven des zweiten Grades so, daß der eine seiner Schenkel die eine Curve, und der andere die andere fortwährend berührt; man soll den von der Spitze des Winkels beschriebenen Ort finden.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Symbolische Geometrie.

§. 151.

Imaginäre Punkte.

Bekanntlich drückt ein System reeller Werthe von x, y einen Punkt der Ebene aus, und wir wollen ein System imaginärer Werthe von x, y nach der Analogie einen imaginären Punkt nennen. Um ferner unsern Ausdrücken die völlige Allgemeinheit algebraischer Symbole zu geben, verstehen wir unter Linie die Gesammtheit der reellen und imaginären Auflösungen der Gleichung $f(x, y) = 0$, so daß eine gerade Linie, oder eine Curve des zweiten Grades weiter nichts, als eine Gleichung des ersten, oder zweiten Grades mit beliebigen reellen, oder imaginären Coefficienten ist. — Eine Gleichung mit reellen Coefficienten drückt gewöhnlich eine reelle Curve und eine unendliche Menge paarweise conjugirter imaginärer Punkte aus, wogegen eine Gleichung mit imaginären Coefficienten eine unendliche Menge imaginärer Punkte und eine endliche Anzahl reeller Punkte ausdrückt, indem die letzte Zahl höchstens dem Quadrate des Grades der Gleichung gleich ist. — So hat z. B. die imaginäre Gerade:

$$y = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,x + \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

nur den einen reellen Punkt:

$$\beta x + \delta = 0,\quad y = \alpha x + \gamma.$$

Die durch zwei conjugirte imaginäre Punkte gehende Gerade ist reell. — Die gemeinschaftlichen Punkte zweier Linien sind nichts anders, als die gemeinschaftlichen Auflösungen zweier Gleichungen. — Eine gerade Linie schneidet eine Linie des mten Grades im Allgemeinen in m reellen, oder imaginären Punkten.

§. 152.

Imaginäre Längen.

Unter der gegenseitigen Entfernung zweier Punkte (x', y'), (x'', y'') verstehen wir bei rechtwinkligen Axen den Ausdruck:

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Wenn M_0 oder (x_0, y_0) ein Punkt einer Geraden A_1A ist, so ist ihre Gleichung:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \pm\varrho,$$

wo p und q der Relation $p^2 + q^2 = 1$ genügen (§. 20). — Für die beiden Hälften derselben M_0A und M_0A_1 hat man:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \varrho,\quad \frac{x - x_0}{-p} = \frac{y - y_0}{-q} = \varrho,$$

so daß also auch auf einer imaginären Geraden zwei entgegengesetzte Richtungen unterschieden werden. — Es seien M' und M'' oder (x', y'), (x'', y'') zwei Punkte, welche auf der halben Geraden M_0A so liegen, daß M'' auf $M'A$ liegt; so hat man:

$$\frac{x' - x_0}{p} = \frac{y' - y_0}{q} = M_0M',\quad \frac{x'' - x_0}{p} = \frac{y'' - y_0}{q} = M_0M'',$$

$$\frac{x'' - x'}{p} = \frac{y'' - y'}{q} = M'M'',$$

folglich:

$$M_0M'' = M_0M' + M'M''.$$

Imaginäre Längen werden also wie reelle addirt und subtrahirt, und man kann sagen: daß der Punkt M' zwischen M_0 und M'' liegt.— Durchläuft man also auf einer imaginären Geraden successive in dem einen und andern Sinne verschiedene Längen, und betrachtet die nach dem einen Sinne durchlaufenen als positiv; so müssen die in dem entgegengesetzten Sinne durchlaufenen als negativ angesehen werden.

Nach unserer Definition ist die Länge eine imaginäre Größe, deren Argument zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. deren reeller Bestandtheil positiv ist, so daß die Vergleichung der Längen auf die dieser reellen Bestandtheile zurückkommt, und eine Länge größer als eine andere genannt wird, wenn ihr reeller Bestandtheil größer als der der letztern ist.

§. 153.

Imaginäres Dreieck.

Drei durch ihre Coordinaten bestimmte Punkte bilden ein Dreieck; die gegenseitigen Entfernungen dieser Punkte sind die Seiten a, b, c des Dreieckes, und die Winkel desselben werden durch die Formeln:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A},$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log (\cos A + \sqrt{-1} \sin A)$$

bestimmt, worin alle Eigenschaften der Dreiecke enthalten und auf imaginäre Dreiecke erstreckt sind. — Die Fläche eines Dreieckes ist die Hälfte des Produktes aus seiner Grundlinie und Höhe, und die verschiedenen Ausdrücke dieser Fläche gelten auch für imaginäre Dreiecke. — Wenn man auf der Seite BC zwischen B und C einen Punkt D nimmt und denselben mit A verbindet; so heißt die Gerade AD in dem Winkel A liegend; sie theilt das Dreieck, und mithin auch den Winkel A in zwei Theile, wie sich leicht zeigen läßt. — Wenn ein gegebenes Vieleck durch Gerade, welche in seinen Winkeln liegen, in Dreiecke zerlegt werden kann; so findet auch der bekannte Satz über die Winkelsumme jetzt noch statt.

§. 154.

Imaginäre Winkel.

Der von zwei halben Geraden M_0A, M_0A' oder:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\varrho,\ \frac{x'-x_0}{p'}=\frac{y'-y_0}{q'}=\varrho'$$

gebildete Winkel φ ergibt sich leicht; denn wenn man auf den beiden Geraden von ihrem Durchschnittspunkte (x_0, y_0) aus zwei Längen ϱ, ϱ' nimmt, so gibt das dadurch bestimmte Dreieck:

$$\cos\varphi = pp' + qq'.$$

Die beiden entgegengesetzten Hälften M_0A_1' und $M_0A'_1$ geben für $\cos\varphi$ denselben Werth, während die beiden Hälften M_0A_1 und M_0A' zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für $\cos\varphi$ geben. Mithin sind zwei Scheitelwinkel einander gleich, und zwei Nebenwinkel ergänzen einander zu zwei rechten; ꝛc. ꝛc.

Zwei halbe Gerade, für welche p und q einerlei Werthe haben, sind **parallel**. Zwei Winkel, deren Schenkel **parallel** sind, sind einander **gleich**; ꝛc. ꝛc.

Für eine vom Anfangspunkte O ausgehende halbe Gerade OA hat man:

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\varrho,$$

und wenn α, β die Winkel bezeichnen, welche sie mit den beiden Halbaxen OX, OY bildet; so ist $\cos\alpha = p$, $\cos\beta = q$, also $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Es können hier mehrere Fälle vorkommen.

Wenn:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{\cos^2\alpha} \text{ und } \cos\beta = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\beta}$$

ist, so hat man $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, und die halbe Gerade OA liegt in dem Winkel YOX, so daß in diesem Falle die Winkel α, β **spitz** sind.

Wenn:

$$\cos\alpha = -\sqrt{\cos^2\alpha} \text{ und } \cos\beta = -\sqrt{\cos^2\beta}$$

ist, so hat man $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, OA liegt in dem Winkel YOX_1, α ist **spitz** und β **stumpf**.

Um alle Fälle in die eine Formel $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ zusammenzufassen, setzen wir:

$$\sin\alpha = \cos\beta,$$

folglich:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos\alpha + \sqrt{-1} \cdot \cos\beta),$$

und alsdann bestimmt der auf diese Weise definirte Winkel α die Lage von OA vollständig. — Wenn $\sin\alpha = \sqrt{\sin^2\alpha}$ ist, so liegt OA auf derselben Seite der Axe der x als die Halbaxe OY, und wenn $\sin\alpha = -\sqrt{\sin^2\alpha}$ ist; so liegt OA auf der andern Seite.

Das Vorhergehende läßt sich leicht verallgemeinern und auf imaginäre Coordinatenaxen ausdehnen. Der Fundamentalsatz von den Projectionen gilt ebenfalls für ein imaginäres Vieleck und eine imaginäre Axe, so wie alle Folgerungen daraus gültig bleiben, und insbesondere die Formeln zur Transformation der Coordinaten bei imaginären Axen dieselben bleiben, wie bei reellen.

§. 155.

Imaginärer Kreis.

Der Kreis oder der Ort der von einem Mittelpunkte gleichweit entfernten Punkte hat zur Gleichung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$$

wo a, b und r drei reelle, oder imaginäre willkürliche Constanten sind. — Eine Gerade schneidet den Kreis im Allgemeinen in zwei Punkten, und wenn diese beiden Punkte in einen zusammenfallen; so wird die Sekante zur Tangente. — Die verschiedenen Sätze, welche in der Elementargeometrie vom Kreise bewiesen werden, erstrecken sich auch auf den imaginären Kreis, indem die Beweise dieselben bleiben, oder der Form nach etwas abgeändert werden. Z. B. das aus dem Mittelpunkte auf eine Sehne gefällte Perpendikel theilt diese Sehne in zwei gleiche Theile; denn die Sehne ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, welches durch das Perpendikel in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke getheilt wird. — Das Perpendikel im Endpunkte eines Halbmessers ist eine Tangente; gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechen gleiche Sehnen; rc.

Auch die gewöhnlichen Definitionen der trigonometrischen Größen finden bei dem imaginären Kreise statt.

In dem Vorhergehenden haben wir die Grundlagen einer symbolischen Geometrie angedeutet, welche allgemeiner ist, als die gewöhnliche Geometrie, und worin sich die Lehrsätze nicht auf Figuren, sondern auf Symbole beziehen, welche nur in gewissen besondern Fällen durch Figuren dargestellt werden; und nur der Deutlichkeit wegen haben wir diesen Symbolen die gewöhnlichen Namen der entsprechenden Figuren gegeben. — Sind die Grundlagen dieser symbolischen Geometrie einmal gewonnen, so ergeben sich sämmtliche Lehrsätze auf synthetischem Wege, wie in der gewöhnlichen Geometrie, so daß die synthetischen Schlüsse die Stelle der algebraischen Operationen, namentlich die Transformationen und Combinationen der Gleichungen vertreten. — Diese symbolische Geometrie liefert ein schätzbares Erfindungsmittel und erleichtert die Aufsuchung wichtiger analytischer Eigenschaften der Gleichungen. Wird sie dagegen auf die Untersuchung der Eigenschaften der Figuren angewandt, so bildet sie eine neue geometrische Methode; denn oft wird ein durch diese Methode gefundener abstracter Satz in den Fall der Realität übertragen, und zwar durch einen geometrischen Satz, welchen man durch die Betrachtung einer reellen Figur entweder gar nicht, oder wenigstens nicht einfach genug erhalten kann. Kurz: durch Anwendung imaginärer Symbole werden die Betrachtungen verallgemeinert, wie wir in der Folge an vielen Beispielen sehen werden, und man kann von dieser Methode mit Recht sagen: daß sie die Einfachheit der geometrischen und die Allgemeinheit der analytischen Methode in sich vereinigt.

§. 156.

Imaginäre Tangenten.

Wenn zwei Punkte, worin eine Gerade eine Curve schneidet, sich unbeschränkt einander nähern; so wird diese Gerade Tangente. — Die frühern Methoden der Tangententheorie (Kap. 5 u. 6) sind allgemein, und folglich hat die Tangente in einem beliebigen reellen, oder imaginären Punkte die Form (A) in §. 56. — Von einem Punkte kann man an eine Curve des mten Grades m(m—1) Tangenten ziehen, z. B. von einem innerhalb einer reellen Ellipse liegenden Punkte zwei conjugirte imaginäre

Tangenten, für welche die Berührungssehne reell ist. — Wir können daher unsere frühere Theorie der Pole und Polaren (Kap. 19) verallgemeinern, und definiren: die Polare eines Punktes ist die diesem Punkte entsprechende Berührungssehne. — Alsdann verschwinden alle Beschränkungen und die Lehrsätze müssen im ausgedehntesten Sinne genommen werden. — Wenn in dem Lehrsatze 1 der Punkt p außerhalb liegt, so mußten wir uns früher auf die die Curve wirklich schneidenden Sekanten beschränken, welches nur den außerhalb der Curve liegenden Theil der Polare gab. — Wenn aber die Sekante die Curve nicht schneidet, so sind die Durchschnittspunkte, und folglich die beiden Tangenten imaginär conjugirt, was einen reellen Vereinigungspunkt gibt, und man erhält auf diese Weise den innern Theil der Polare.

§. 157.

Durchschnitt zweier Curven des zweiten Grades.

Zwei Curven des zweiten Grades schneiden sich in 4 Punkten, und wenn man dieselben paarweise verbindet, so erhält man 3 Paare gemeinschaftlicher Sekanten, so daß der Durchschnittspunkt jedes Paares in beiden Curven die durch die beiden andern Durchschnittspunkte gehende Gerade zur gemeinschaftlichen Polare hat.

Wenn die beiden Curven reell sind, so sind die 4 gemeinschaftlichen Punkte reell, oder imaginär conjugirt, und man hat 3 Fälle zu betrachten: 1) Es sind 4 Punkte reell. — Alsdann sind die 6 Sekanten reell, und 3 reelle Punkte haben in beiden Curven dieselben Polaren. 2) Es sind 2 Punkte reell und 2 imaginär. — Alsdann sind 2 Sekanten reell, nämlich die, welche durch die beiden reellen, und die, welche durch die beiden imaginären Punkte geht. Jedes der beiden andern Paare besteht aus 2 conjugirten imaginären Sekanten, und 3 reelle Punkte haben dieselben Polaren. — 3) Die 4 Punkte sind imaginär. — In diesem Falle ist ein Paar gemeinschaftlicher Sekanten reell, und ein einziger reeller Punkt hat dieselbe Polare.

Die allgemeine Gleichung der durch 4 Punkte gehenden Curven des zweiten Grades ist von der Form:

$$F(x, y) + \lambda(mx + ny + t)(m'x + n'y + t') = 0, \qquad (1)$$

wo $F(x, y) = 0$ eine dieser Curven, $mx + ny + t = 0$, so wie

$m'x+n'y+t'=o$ eine gemeinschaftliche Sekante und λ ein willkürlicher Parameter ist.

Wenn man die beiden gemeinschaftlichen Sekanten zu den Coordinatenaxen nimmt, so reducirt sich die Gleichung (1) auf:

$$F + \lambda xy = o. \qquad (2)$$

Den Ort der Mittelpunkte dieser verschiedenen Curven erhält man, wenn man λ zwischen den Gleichungen:

$$F'_x + \lambda y = o, \; F'_y + \lambda x = o$$

eliminirt, wodurch man erhält:

$$x F'_x - y F'_y = o,$$

d. h. eine durch den Anfangspunkt gehende Curve des zweiten Grades.

Die Gleichung (2) kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$ax^2 + \lambda xy + cy^2 + dx + ey + f = o,$$

und die Polare eines Punktes (x_1, y_1) ist:

$$(2ax_1+d)x+(2cy_1+e)y+dx_1+ey_1+2f+\lambda(xy_1+yx_1)=o. \quad (3)$$

Gibt man λ zwei verschiedene Werthe, so müssen, damit die Polare dieselbe wird, sich die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} (2ax_1+d)x+(2cy_1+e)y+dx_1+ey_1+2f=o \\ y_1x+x_1y=o \end{array}\right\} \quad (4)$$

auf eine reduciren. Es muß also entweder $x_1=o$, $y_1=o$, oder:

$$dx_1 + ey_1 + 2f = o$$

und:

$$\frac{2ax_1 + d}{y_1} = \frac{2cy_1 + e}{x_1}$$

oder:

$$2ax^2_1 - 2cy^2_1 + dx_1 - ey_1 = o$$

sein. — Außer dem Anfangspunkte erhalten wir also zwei andere auf der Polare dieses Anfangspunktes liegende Punkte. — In zwei Curven des zweiten Grades sind folglich die Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Sekantenpaare die einzigen Punkte, welche dieselben Polaren haben, und der gemeinschaftliche Punkt von (4) gehört offenbar allen Polaren (3) an. — Man hat also den Satz:

1) Die Polaren eines Punktes der Ebene in Beziehung auf verschiedene, um dasselbe Viereck beschriebene Curven des zweiten Grades gehen alle durch denselben Punkt.

§. 158.

Curven des zweiten Grades, welche 4 Gerade berühren.

In dem in §. 87 erwähnten Coordinatensysteme werden zwei

Curven durch zwei Gleichungen zwischen den Veränderlichen p, q ausgedrückt, und jede gemeinschaftliche Auflösung dieser beiden Gleichungen gibt eine Gerade, welche beide Curven zugleich berührt, so daß man reelle, oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten erhält. Da zwei Curven des zweiten Grades durch zwei Gleichungen ausgedrückt werden, welche in Bezug auf p und q vom zweiten Grade sind; so folgt: daß diese Curven 4 gemeinschaftliche Tangenten haben. — Die drei Diagonalen des um die beiden Curven beschriebenen Viereckes bilden ein Dreieck, wovon jede Winkelspitze die Gegenseite zur gemeinschaftlichen Polare hat (§. 137). Man hat also den Satz:

2) Die drei Diagonalen des um zwei Curven des zweiten Grades beschriebenen Viereckes bilden ein Dreieck, dessen Ecken die Durchschnittspunkte der drei gemeinschaftlichen Sekantenpaare sind..

Die allgemeine Gleichung der Curven des zweiten Grades, welche 4 Gerade berühren, läßt sich auf folgende Form bringen:

$$F(p, q) - \lambda(p\alpha + q\beta + 1)(p\alpha' + q\beta' + 1) = o, \qquad (5)$$

wo $F(p, q) = o$ irgend eine dieser Curven ist, (α, β), (α', β') zwei gegenüberliegende Ecken sind und λ einen willkürlichen Parameter bezeichnet. Denn zwei Werthesysteme von p und q reduciren zugleich $F(p, q)$ und den Faktor $p\alpha + q\beta + 1$ auf Null, und genügen mithin der Gleichung (5), was auch λ sein mag; sie geben zwei durch den Punkt (α, β) gehende gemeinschaftliche Tangenten, und die beiden andern gehen durch den Punkt (α', β').

Betrachten wir die Curve des zweiten Grades:

$$F = ap^2 + bpq + cq^2 + dp + eq + f = o,$$

so wird der Pol (x_1, y_1) der Geraden (p_1, q_1) durch die Relationen:

$$\frac{2ap_1 + bq_1 + d}{x_1} = \frac{2cq_1 + bp_1 + e}{y_1} = \frac{dp_1 + eq_1 + 2f}{1} \qquad (6)$$

bestimmt, welche denen in §. 134 analog sind. — Denn diese Gerade trifft die Curve in einem Punkte (x, y), welcher der Gleichung:

$$p_1 x + q_1 y + 1 = o$$

genügt. Die Tangente in diesem Punkte ist aber nach §. 87:

$$\frac{2ap + bq + d}{x} = \frac{2cq + bp + e}{y} = \frac{dp + eq + 2f}{1}$$

$$= \frac{2app_1 + b(p_1 q + q_1 p) + 2cqq_1 + d(p + p_1) + e(q + q_1) + 2f}{p_1 x + q_1 y + 1},$$

und da der Nenner = o ist, so muß auch der Zähler = o sein; folglich:

$$(2ap_1+bq_1+d)p+(2cq_1+bp_1+e)q+dp_1+eq_1+2f=o.$$

Es gehen also alle Tangenten in den Punkten der Curve, wo diese von der Geraden (p_1, q_1) geschnitten wird, durch den durch die Relationen (6) bestimmten Punkt (x_1, y_1), und mithin ist dieser Punkt der Pol der Geraden.

Wenn man diese Formeln auf die Curve (5) anwendet, so erhält man:

$$\frac{F'_{p_1}-\lambda\alpha'(p_1\alpha+q_1\beta+1)-\lambda\alpha(p_1\alpha'+q_1\beta'+1)}{x_1}=\frac{\cdot\;\cdot\;\cdot}{\cdot\;\cdot\;\cdot}=\frac{\cdot\;\cdot\;\cdot}{\cdot\;\cdot\;\cdot},$$

und wenn man die durch die beiden gegenüberliegenden Ecken (α, β), (α', β') gehende Diagonale zur Polare nimmt; so verschwindet der willkürliche Parameter λ, woraus folgt: daß diese Diagonale in allen Curven des zweiten Grades denselben Pol hat. —

Verlegt man den Anfangspunkt in den Punkt (α', β'), so reducirt sich die Gleichung (5) auf:

$$F-\lambda(p\alpha+q\beta+1)=o,$$

und die Gerade (p_1, q_1) hat zum Pole:

$$\frac{F'_{p_1}-\lambda\alpha}{x_1}=\frac{F_{q_1}-\lambda\beta}{y_1}=\frac{dp_1+eq_1+2f-\lambda(p_1\alpha+q_1\beta+2)}{1}$$

$$=\frac{\beta F'_{p_1}-\alpha F'_{q_1}}{\beta x_1-\alpha y_1}=\frac{F'_{p_1}(p_1\alpha+q_1\beta+2)-\alpha(dp_1+eq_1+2f)}{x_1(p_1\alpha+q_1\beta+2)-\alpha},$$

woraus sich eine von λ unabhängige Gleichung des ersten Grades mit x_1 und y_1 ergibt, so daß man also folgenden Lehrsatz hat:

3) *Der Ort der Pole derselben Geraden in Bezug auf verschiedene in dasselbe Viereck beschriebene Curven des zweiten Grades ist eine Gerade.* —

Läßt man die Gerade sich ins *Unendliche* entfernen, so wird der Pol Mittelpunkt. *Folglich ist der Ort der Mittelpunkte der in dasselbe Viereck beschriebenen Curven des zweiten Grades eine Gerade.* — Jede der drei Diagonalen kann als eine in das Viereck beschriebene Ellipse betrachtet werden, deren kleine Axe *Null* ist, und mithin geht die fragliche Gerade durch die Mitten der drei Diagonalen, was ein einfaches Mittel zur Bestimmung des Mittelpunktes einer 5 gegebene Gerade berührenden Curve des zweiten Grades an die Hand gibt. Denn verbindet man die Mitten der Diagonalen des von zwei Combinationen dieser 5 Geraden gebildeten Viereckes, so ist der Durchschnittspunkt der beiden so erhaltenen Geraden der gesuchte Mittelpunkt, worauf die Curve selbst leicht construirt werden kann. — Soll man eine Parabel construiren, welche 4 gegebene Gerade berührt, so gibt die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen des Viereckes die Richtung der Axe und die weitere Construction ist dieselbe.

§. 159.

Curven des zweiten Grades, welche eine doppelte Berührung haben.

Wenn zwei gegenüberliegende gemeinschaftliche Sekanten zweier Curven des zweiten Grades sich unendlich nähern, so berühren sich diese Curven in zwei reellen, oder imaginären Punkten, und die Gleichung dieser Curven ist:

$$F(x, y) - \lambda(mx + ny + t)^2 = 0,$$

wo $F(x, y) = 0$ eine dieser Curven, $mx + ny + t = 0$ die Berührungsgerade und λ ein willkürlicher Parameter ist.

In dem Systeme der Tangentialcoordinaten wäre die Gleichung:

$$F(p, q) - \lambda(p\alpha + q\beta + 1)^2 = 0,$$

wo α, β die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden gemeinschaftlichen Tangenten sind.

Wenn zwei Curven des zweiten Grades eine doppelte Berührung haben, so sind die Berührungspunkte reell, oder imaginär conjugirt, und folglich ist die Berührungsgerade, so wie ihr Pol reell.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Anharmonisches Verhältniß.

§. 160.

Wenn vier in gerader Linie liegende Punkte a, b, c, d gegeben sind, so wird der Quotient aus den Verhältnissen der Entfernungen zweier dieser Punkte von den beiden andern das anharmonische Verhältniß derselben genannt, so daß man die drei anharmonischen Verhältnisse:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc}$$

und die umgekehrten derselben bilden kann, wobei die in einem gewissen Sinne genommenen Längen als positiv und die in entgegengesetztem Sinne genommenen als negativ zu betrachten sind.

Durch irgend eins dieser Verhältnisse werden alle übrigen bestimmt. Denn bezeichnen p, q, r die Abstände des Punktes a von den drei andern b, c, d und x, y, z die drei Verhältnisse; so hat man:

$$x = \frac{q(r-p)}{r(q-p)},\ y = \frac{r(p-q)}{p(r-q)},\ z = \frac{p(q-r)}{q(p-r)},$$

woraus folgt:

$$y = \frac{1}{1-x},\ z = \frac{1}{1-y},\ x = \frac{1}{1-z}.$$

Die drei Verhältnisse ergeben sich also nach demselben Gesetze auseinander. — Wenn zwei Gruppen von vier Punkten zwei gleiche anharmonische Verhältnisse geben, so werden die auf gleiche Weise in diesen Verhältnissen vorkommenden Punkte als correspondirende betrachtet, und alle übrigen anharmonischen Verhältnisse sind beiderseitig auch gleich.

§. 161.

Wenn vier durch denselben Punkt O gehende Gerade A, B, C, D gegeben sind, so heißt die Größe:

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}$$

das anharmonische Verhältniß derselben. — Zieht man durch das Büschel dieser Geraden eine beliebige Sekante, welche jene in den vier Punkten a, b, c, d schneidet, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Geraden dem anharmonischen Verhältnisse der vier Punkte gleich. Denn bezeichnet h das von dem Punkte O auf die Sekante gefällte Perpendikel, so hat man:

$$ac = \frac{oa \,.\, oc \,.\, \sin(A, C)}{h}, \ldots$$

folglich:

$$\frac{ac \,.\, bd}{ad \,.\, bc} = \frac{oa \,.\, ob \,.\, oc \,.\, od \,.\, \sin(A, C) \,.\, \sin(B, D)}{oa \,.\, od \,.\, ob \,.\, oc \,.\, \sin(A, D) \,.\, \sin(B, C)}$$

$$= \frac{\sin(A, C) \,.\, \sin(B, D)}{\sin(A, D) \,.\, \sin(B, C)}.$$

Alle durch dasselbe Strahlenbüschel gezogenen Sekanten geben also dasselbe anharmonische Verhältniß. — Wenn eins dieser Verhältnisse $= -1$ ist, so sind die beiden andern $= \frac{1}{2}$ und $= 2$ und die drei umgekehrten kommen auf die vorhergehenden zurück. In diesem Falle sagt man: daß die vier Punkte, oder die vier Geraden ein **harmonisches System** bilden (§. 33).

§. 162.

Involution.

Wenn auf einer Geraden 6 paarweise conjugirte Punkte a, a'; b, b'; c, c' gegeben sind, und es ist:

$$pa \cdot pa' = pb \cdot pb' = pc \cdot pc' = k, \qquad (1)$$

wo p ein gewisser Punkt derselben Geraden ist; so sagt man: die 6 Punkte bilden eine **Involution**. — Mit Hülfe der 4 Punkte a, a'; b, b' kann man zunächst p durch die Bedingung:

$$pa \cdot pa' = pb \cdot pb' = k$$

bestimmen; denn wenn die Längen aa', ab, ab' bekannt sind, so wird die Unbekannte durch eine Gleichung des ersten Grades bestimmt. Wird alsdann der Punkt c willkürlich angenommen, so wird der conjugirte Punkt c' durch die Relation:

$$pc \cdot pc' = k$$

bestimmt. Auf beiden Seiten von p gibt es in dem Abstand $\sqrt{k}$ zwei Punkte g, h, welche ihre eigenen conjugirten sind — und zwei beliebige conjugirte Punkte a, a' sind die harmonisch conjugirten von g und h.

Sechs Punkte, welche eine Involution bilden, haben die Eigenschaft: daß das anharmonische Verhältniß von vier derselben dem anharmonischen Verhältnisse der vier conjugirten Punkte gleich ist. Denn wenn a, a', b, b' die vier betrachteten Punkte sind, so sind a', a, b', b die vier conjugirten Punkte, und man hat offenbar:

$$\frac{ba}{ba'} : \frac{b'a}{b'a'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{ba'}{ba}.$$

Nimmt man nun die vier Punkte a, a', b, c und die vier conjugirten a', a, b', c', so geben die Relationen (1):

$$\frac{pa}{pb'} = \frac{pb}{pa'}, = \frac{pa - pb}{pb' - pa'} = -\frac{ba,}{b'a'}, \frac{pa}{pb} = \frac{pb'}{pa'} = -\frac{b'a}{ba'},$$

folglich:

$$\frac{ba}{ba'} = \frac{\overline{pa}^2}{k} \cdot \frac{b'a'}{b'a}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\frac{ca}{ca'} = \frac{\overline{pa}^2}{k} \cdot \frac{c'a'}{c'a},$$

und mithin:

$$\frac{ba}{ba'} : \frac{ca}{ca'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{c'a'}{c'a}. \qquad (2)$$

Umgekehrt, wenn 6 Punkte die Eigenschaft haben, daß das anharmonische Verhältniß von 4 derselben dem anharmonischen Verhältnisse der 4 conjugirten Punkte gleich ist; so bilden diese 6 Punkte eine Involution. — Denn es seien a,a'; b,b'; c,c' sechs Punkte, welche der Gleichung (2) genügen, und man bestimme p so, daß:

$$pa \cdot pa' = pb \cdot pb' = k,$$

und c'' so, daß:

$$pc \cdot pc'' = k$$

ist; so bilden die 6 Punkte a,a'; b,b'; c,c'' nach dem direkten Satze eine Involution und genügen der Gleichung:

$$\frac{ba}{ba'} : \frac{ca}{ca'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{c''a'}{c''a}. \qquad (3)$$

Aus der Vergleichung von (2) und (3) folgt:

$$\frac{c''a'}{c''a} = \frac{c'a'}{c'a} = \frac{c''a' - c'a'}{c''a - c'a} = \frac{c'c''}{c'c''},$$

und es muß folglich c'c'' = o sein, so daß die Punkte c' und c'' zusammenfallen.

Wenn man irgend einen äußern Punkt O mit den sechs Involutionspunkten verbindet, so erhält man ein Involutionsbüschel von sechs Geraden, d. h. das anharmonische Verhältniß von vier derselben ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier conjugirten — und eine beliebige durch das Büschel gehende Sekante wird in sechs Punkten geschnitten, welche eine Involution bilden.

Wenn drei, durch dieselben zwei Punkte gehende Kreise von einer beliebigen Sekante geschnitten werden, so bilden die sechs Durchschnittspunkte eine Involution, und der Mittelpunkt der Involution ist der Durchschnittspunkt der Sekante mit der durch die beiden gemeinschaftlichen Punkte gehenden Geraden.

Wenn vier, paarweise conjugirte Punkte a, a'; b, b' gegeben sind, so kann man die doppelten Involutionspunkte von fünf Punkten, worunter sich a, a'; b, b' befinden, durch folgende Construktion bestimmen: Soll die Auflösung bei lauter reellen Punkten möglich sein, so muß entweder die eine der Geraden aa' und bb' die andere enthalten, oder sie müssen außerhalb einander liegen. 1) Wenn bb' in aa' enthalten ist, so lege man durch die Punkte a,a' einen Kreis, und es sei s der Durchschnittspunkt der Tangenten in a und a'. Alsdann ziehe man die Geraden sb, sb' und verbinde die Durchschnittspunkte paarweise, so schneiden sich die so erhaltenen Geraden in den gesuchten doppelten Involutionspunkten c, c', welche auf der Geraden abb'a' liegen, und zugleich harmonisch conjugirt zu a,a'; b,b' sind. — 2) Wenn bb' außerhalb aa' liegt, so ziehe man durch einen Punkt o der Ebene die Geraden oa, oa', ob, ob', und alsdann liegen ob und ob' resp. in oa und der Verlängerung von oa'. Durchschneidet man nun diese vier Geraden mit einer beliebigen Sekante, nimmt dann mit den Durchschnittspunkten die vorhergehende Construction vor und projicirt die erhaltenen Punkte durch Gerade, welche vom Punkte o ausgehen, auf aa'bb'; so erhält man die verlangten Punkte.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Homographie oder Collineationsverwandtschaft.

§. 163.

Wenn eine ebene Figur S gegeben ist, und man setzt für jeden Punkt M oder (x, y) derselben einen Punkt M' oder (x', y'), welcher durch die Formeln:

$$x = \frac{ax' + by' + c}{\alpha x' + \beta y' + \gamma},\ y = \frac{dx' + ey' + f}{\alpha x' + \beta y' + \gamma} \qquad (1)$$

bestimmt wird; so erhält man eine neue Figur S', welche die homographische oder collineare der ersten genannt wird. Substituirt man die Werthe (1) in die Gleichung der Figur S, so erhält man die Gleichung der homographischen Figur S'. — Hieraus folgt: wenn der Punkt M eine Gerade beschreibt, so beschreibt der correspondirende Punkt M' auch eine Gerade — und allgemein: wenn der Punkt M eine Curve des mten Grades beschreibt, so beschreibt der Punkt M' eine Curve desselben Grades. — Den Punkten und Geraden der Figur S entsprechen Punkte und Gerade in der homographischen Figur S'; einer Tangente in S entspricht eine Tangente in S'; drei in gerader Linie liegenden Punkten in S entsprechen drei in gerader Linie liegende Punkte in S'; drei durch denselben Punkt gehenden Geraden in S entsprechen drei durch denselben Punkt gehende Gerade in S'; 2c. 2c.

Wenn man die Formeln (1) für x' und y' auflös't, so erhält man Werthe von derselben Form; folglich ist auch S die homographische Figur von S'.

Soll einer Geraden immer eine Gerade entsprechen, so müssen die Relationen (1) nothwendig die obige Form haben.

Die Punkte der zweiten Figur, welche den in unendlicher Entfernung liegenden Punkten der ersten entsprechen, liegen alle auf derselben Geraden I', deren Gleichung ist:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0,$$

so daß die parallelen Geraden in der ersten Figur entsprechenden Geraden der zweiten sich in einem Punkte von I' schneiden.

Wenn man die zweite Figur auf neue Coordinatenaxen bezieht, so behalten die Formeln (1) dieselbe Form, weil die ursprünglichen Coordinaten x', y' des Punktes M lineare Funktionen der neuen Coordinaten ξ, η desselben Punktes sind. Nun kann man aber die neuen Axen so wählen, daß sich die Brüche (1) vereinfachen. Nimmt man z. B. die den ursprünglichen Axen entsprechenden Geraden zu den neuen Coordinatenaxen, so reduciren sich die Formeln (1) auf:

$$x = \frac{a\xi}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}, \; y = \frac{b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}. \qquad (2)$$

4) **Das anharmonische Verhältniß vier in gerader Linie liegender Punkte ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier correspondirenden Punkte.**

Denn nimmt man die durch die vier gegebenen Punkte gehende Gerade zur Axe der x und die correspondirende Gerade zur Axe der ξ, nennt die Abscissen der vier gegebenen Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 und die der vier correspondirenden Punkte ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4; so hat man:

$$x_1 = \frac{a\xi_1}{\alpha\xi_1 + \gamma}, \; x_2 = \frac{a\xi_2}{\alpha\xi_2 + \gamma}, \ldots$$

$$x_1 - x_3 = \frac{a\gamma(\xi_1 - \xi_3)}{(\alpha\xi_1 + \gamma)(\alpha\xi_3 + \gamma)} = a^3\gamma \cdot \frac{\xi_1\,\xi_3}{x_1\,x_3}(\xi_1 - \xi_3),$$

$$x_1 - x_4 = a^3\gamma \cdot \frac{\xi_1\,\xi_4}{x_1\,x_4}(\xi_1 - \xi_4),$$

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} = \frac{\xi_3}{\xi_4} \cdot \frac{x_4}{x_3} \cdot \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_4},$$

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_4} : \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_4},$$ w. z. b. w.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt:

1) Das anharmonische Verhältniß von vier durch denselben Punkt gehenden Geraden ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier entsprechenden Geraden.

2) Sechs Punkten, welche eine Involution bilden, entsprechen sechs Punkte, die ebenfalls eine Involution bilden, und einem Büschel von sechs Geraden, die eine Involution bilden, entspricht ein Büschel von sechs Geraden, die auch eine Involution bilden.

§. 164.

Nutzen der Homographie.

Die Eigenschaften der Figuren lassen sich in beschreibende und messende (descriptive und metrische) unterscheiden. Bei den ersten betrachtet man die Durchschnittspunkte der die Figur bildenden Geraden, ohne deren Längen in Betracht zu ziehen, wogegen eine metrische Eigenschaft eine Relation zwischen diesen Längen ist. — Ferner heißt eine Eigenschaft projectivisch, wenn sie in der homographischen Figur stattfindet. — Die descriptiven Eigenschaften sind offenbar projectivisch; aber die metrischen Relationen sind es nicht immer. — Da das anharmonische Verhältniß in der homographischen Figur denselben Werth behält, so findet jede Gleichung zwischen einer gewissen Anzahl solcher Verhältnisse in der ersten Figur auch in der zweiten statt, d. h. diese Gleichung ist projectivisch. So z. B. sind die harmonische Proportion und die Involution projectivisch.

Die Homographie ist eine sehr fruchtbare geometrische Methode; denn ist eine projectivische Eigenschaft in einem besondern Falle der Figur erkannt, so kann man sie verallgemeinern und vermittelst der acht in den Formeln (1) vorkommenden willkürlichen Constanten die besondern Eigenthümlichkeiten der Figur in ihrer ersten Lage ganz, oder zum Theil entfernen. Eine besondere Curve des zweiten Grades, z. B. der Kreis, gibt durch Homographie alle Curven des zweiten Grades, und eine beim Kreise beobachtete projectivische Eigenschaft findet folglich bei allen Curven des zweiten Grades statt.

Beispiel 1. Wir wollen uns zwei feste Parallelen **A**, **B** und zwei bewegliche Sekanten **C**, **D** denken, welche zu einer gegebenen Richtung parallel sind. Die Sekante **C** schneide die Geraden **A**, **B** in a, b und die Sekante **D** in c, d, und wir wollen ac, bd ziehen, welche sich in m schneiden; so erhellet unmittelbar: daß der Ort der Punkte m eine Gerade **H** ist, welche zu **A**, **B** parallel und gleich weit von diesen beiden Geraden entfernt ist. — Die Homographie transformirt die beiden Parallelen **A**, **B** in zwei Gerade **A′**, **B′**, welche sich in o′ auf der Axe **I′** des Unendlichen schneiden; ferner die beiden beweglichen Sekanten **C**, **D** in zwei bewegliche Sekanten **C′**, **D′**, welche durch den Punkt i′ von **I′** gehen, und endlich den Ort **H** in eine durch o′ gehende Gerade **H′**. — Man erhält also den Satz in §. 34 wieder.

Es sei h der Punkt, wo die bewegliche Sekante den Ort schneidet; so ist:

$$\frac{h'a'}{h'b'} : \frac{i'a'}{i'b'} = \frac{ha}{hb} : \frac{ia}{ib},$$

der Punkt i liegt in unendlicher Entfernung; also ist $\frac{ia}{ib} = 1$ und $ha = -hb$; folglich:

$$\frac{h'a'}{h'b'} : \frac{i'a'}{i'b'} = -1.$$

Die vier Geraden **A′**, **B′**, **I′**, **H′** bilden also ein harmonisches Büschel.

Beispiel 2. Bekanntlich sind die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers des Kreises parallel. In der homographischen Figur wird der Durchmesser eine bewegliche Sekante a′o′b′, welche durch einen festen Punkt o′ geht, und die Tangenten in a′, b′ schneiden sich auf der Axe **I′** des Unendlichen, welches die Fundamentaleigenschaft der Polaren ist.

Bezeichnet d′ den Punkt, wo die Sekante die Polare schneidet, so ist:

$$\frac{o'a'}{o'b'} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{oa}{ob} : \frac{da}{db} = -1;$$

d. h. jede durch den Pol gehende Gerade wird durch eine Curve des zweiten Grades und die Polare harmonisch getheilt.

Es bietet sich hier eine erste Anwendung der in §§. 33 folgg. erörterten Principien dar. Wenn die in den Formeln (1) vorkommenden Constanten alle reell sind, so entspricht einem reellen Punkte ein reeller und einem imaginären Punkte ein imaginärer Punkt. Ein reeller Kreis transformirt sich in eine reelle Curve des zweiten Grades, und ein innerhalb des Kreises liegender Punkt o, z. B. der Mittelpunkt, hat einen nothwendig innerhalb der Curve des zweiten Grades liegenden Punkt o′ zum homographischen. Denn da eine beliebige durch o gehende Gerade den Kreis schneidet, so schneidet auch eine beliebige durch o′ gehende Gerade die Curve des zweiten Grades — und da der Kreis keinen in unendlicher Entfernung liegenden Punkt hat; so liegt auch kein Punkt der Curve des zweiten Grades auf der Geraden I′; d. h. diese Gerade liegt außerhalb der Curve.

Wenn man nur reelle Größen betrachtet, so erhält man die Eigenschaften der Polaren nur für den Fall, wo die Polare außerhalb der Curve liegt; allein diese Einschränkung ist nicht nothwendig, und sogar unnütz, so daß die bisher angewandte Methode mangelhaft ist, und verallgemeinert werden muß. — Die zum Grunde gelegte Eigenschaft der Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers eines Kreises findet allgemein statt, die Durchmesser und Tangenten mögen reell, oder imaginär sein — und ebenso können die in den Formeln (1) vorkommenden Constanten reell, oder imaginär sein, und man erhält doch eine Curve des zweiten Grades S′ und eine Gerade I′. — Nun kann man aber die acht Constanten so annehmen, daß die Curve des zweiten Grades einer gegebenen Curve desselben Grades und die Gerade I′ einer Geraden gleich wird, welche in der Ebene der Curve eine beliebige Lage hat. Auf diese Weise erhält man zwischen den Constanten sieben Relationen, welchen immer genügt werden kann, weil die Constanten nicht reell zu sein brauchen.

Transformirt man z. B. den Kreis:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

vermittelst der Formeln:

$$x = \frac{\sqrt{-\tfrac{1}{2}}\,x' + (y'-1)}{\sqrt{3}\,y'}, \quad y = \frac{\sqrt{-\tfrac{1}{2}}\,x' - (y'-1)}{\sqrt{3}\,y'},$$

so erhält man den neuen reellen Kreis:

$$x'^2 + (y' + 2)^2 - 6 = 0.$$

Der Punkt o′ oder (o, 1) liegt außerhalb, und seine Polare $y = 0$ oder die Axe der x schneidet den Kreis in zwei reellen Punkten. Die reelle Peripherie von S′ entspricht imaginären Punkten von S. Die beiden reellen Punkte, worin S′ von I′ geschnitten wird, entsprechen zwei imaginären Punkten von S, welche auf einer unendlich entfernten Geraden liegen. — Die reellen Sekanten, welche man durch o′ ziehen kann, entsprechen gewissen durch o gehenden imaginären Durchmessern, und man sieht hieraus: weshalb es nöthig war, zuvor der ursprünglichen Eigenschaft ihre symbolische Bedeutung zu geben.

§. 165.

Conjugirte Gerade.

Von den vier Durchschnittspunkten zweier homothetischer Curven des zweiten Grades liegen zwei in unendlicher Entfernung. Durch Homographie werden diese beiden Curven in zwei andere verwandelt, welche sich in vier Punkten schneiden, weil die früher in unendlicher Entfernung liegenden Punkte auf die Gerade I′ zurückgeführt werden.

Wenn zwei homothetische Curven des zweiten Grades concentrisch sind, so liegen ihre vier Durchschnittspunkte in unendlicher Entfernung, und zwar auf derselben Geraden I′; d. h. die beiden Curven haben nach dieser Geraden eine doppelte Berührung. — So geben z. B. zwei concentrische Kreise zwei Curven des zweiten Grades mit doppelter Berührung.

Zieht man in einem Kreise zwei aufeinander senkrechte Durchmesser aob, cod, so liegt der Pol eines jeden dieser Durchmesser auf dem andern in unendlicher Entfernung. Durch Homographie erhält man eine Curve des zweiten Grades und zwei durch den Punkt o′ gehende Gerade von solcher Beschaffenheit: daß der Pol einer jeden auf der andern, und zwar in dem Punkte, wo sie von der Polare I′ des Punktes o′ geschnitten wird, liegt, aus welchem Grunde diese beiden Geraden conjugirte Gerade des Punktes o′ heißen.

Der Punkt o′ hat unendlich viele Paare conjugirter Geraden, weil man eine nach Belieben annehmen kann. Da nun im Kreise die Sehne ab eine constante Länge hat, so umhüllt sie einen concentrischen Kreis, während ihr Pol einen andern concentrischen Kreis beschreibt. Man hat folglich den Lehrsatz:

5) Wenn man durch einen in der Ebene einer Curve des zweiten Grades willkürlich genommenen festen Punkt verschiedene Paare conjugirter Geraden zieht und die Punkte, worin jedes Paar die Curve schneidet, verbindet; so umhüllen diese vier Sehnen eine zweite Curve des zweiten Grades, während ihre Pole eine dritte Curve des zweiten Grades beschreiben — und außerdem hat jede der neuen Curven mit der gegebenen eine doppelte Berührung nach der Polare des festen Punktes.

Wenn der Punkt o' der Mittelpunkt der Curve des zweiten Grades ist, so wird jedes Paar conjugirter Geraden ein System conjugirter Durchmesser. Hieraus folgt:

Die Seiten der in eine Curve des zweiten Grades beschriebenen Parallelogramme umhüllen eine zweite solche Curve, und die Ecken der umschriebenen Parallelogramme beschreiben eine dritte Curve des zweiten Grades. — Da ferner die Polare des Mittelpunktes in unendlicher Entfernung liegt, so sind die beiden neuen Curven zu der gegebenen homothetisch und concentrisch.

§. 166.

Nach dem Frühern (§. 162) bestimmen drei durch zwei gegebene Punkte gehende Kreise auf einer beliebigen Sekante sechs Punkte, welche eine Involution bilden. Da nun diese drei Kreise durch Homographie drei Curven des zweiten Grades geben, welche vier gemeinschaftliche Punkte haben; so hat man den Satz:

6) Drei Curven des zweiten Grades, welche vier gemeinschaftliche Punkte haben, bestimmen auf einer beliebigen Sekante sechs Punkte, welche eine Involution bilden — und die derselben Curve angehörigen Punkte sind conjugirt.

Eine beliebige Sekante schneidet eine Curve des zweiten Grades und die Gegenseiten des eingeschriebenen Viereckes in sechs Punkten, welche eine Involution bilden, weil ein Paar gerader Linien als eine Curve des zweiten Grades angesehen werden kann.

Hieraus ergibt sich der Satz in §. 149a und auch das Mittel:

die Punkte zu construiren, worin eine Sekante eine durch fünf gegebene Punkte gehende Curve des zweiten Grades schneidet.

§. 167.

Rotirende Vielecke.

Es seien a, b, c, d vier auf einem Kreisumfange liegende feste Punkte und o ein beweglicher Punkt auf demselben Kreisumfange, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Geraden oa, ob, oc, od constant, weil sich die Winkel, welche diese Geraden unter sich bilden, nicht ändern. Nimmt man auf oa einen nicht auf der Kreislinie liegenden Punkt p, so gibt das Büschel pa, pb, pc, pd nicht dasselbe anharmonische Verhältniß, wie das erste; denn von den vier Punkten, worin die Sekante bc jedes der beiden Büschel schneidet, sind drei gemeinschaftlich und einer verschieden. Da der Kreis durch Homographie in eine Curve des zweiten Grades transformirt wird, so folgt hieraus der Satz:

7) Wenn vier Punkte in einer Ebene gegeben sind, so ist der Ort der Punkte von solcher Beschaffenheit: daß das Büschel der von jedem dieser Punkte nach den vier festen Punkten gehenden Geraden ein constantes anharmonisches Verhältniß darbietet, eine durch die vier festen Punkte gehende Curve des zweiten Grades.

In jedem Büschel, welches einen der festen Punkte, z. B. a, zur Spitze hat, kennt man drei Gerade ab, ac, ad und die vierte berührt die Curve des zweiten Grades in a. — Gibt man dem anharmonischen Verhältnisse verschiedene Werthe, so erhält man lauter Curven des zweiten Grades, welche durch die vier gegebenen Punkte gehen.

Aus dem Gesagten ergeben sich mehrere bemerkenswerthe Sätze:

8) Wenn A, B, C, . . . mehrere von dem Punkte o ausgehende und A′, B′, C′, . . . ebensoviele von dem Punkte o′ ausgehende Gerade von solcher Beschaffenheit sind: daß irgend vier Gerade des ersten Systemes dasselbe anharmonische Verhältniß darbieten, wie die vier entsprechenden Geraden in dem zweiten Systeme; so liegen die Durchschnittspunkte a, b, c, . . . der Geraden A und A′, B und B′, C und C′, . . .

auf derselben durch o und o′ gehenden Curve des zweiten Grades.

Construirt man nämlich die durch o, o′, a, b, c gehende Curve des zweiten Grades, so liegt auch der Punkt d auf derselben. Denn es sei δ der Punkt, worin D diese Curve schneidet, so bilden A′, B′, C′, o′δ ein harmonisches System, welches gleich A, B, C, D ist; folglich fällt o′δ mit D′ und d mit δ zusammen.

Wenn man mit verschiedenen Punkten a, a′, a″, . . . einer Geraden X zwei außerhalb derselben liegende Punkte o, p verbindet; so haben die so erhaltenen beiden Strahlenbüschel die vorhergehende Eigenschaft, und zwar noch, wenn sich das erste Büschel um o durch irgend einen Winkel α und das zweite um p durch einen beliebigen Winkel β drehet, so daß die Durchschnittspunkte der entsprechenden Geraden auf derselben Curve des zweiten Grades liegen. — Da nun jede Gerade des ersten Büschels mit ihrer ursprünglichen Lage den constanten Winkel α und jede Gerade des zweiten Büschels den constanten Winkel β bildet; so hat man den Satz:

9) Wenn sich zwei Winkel von constanter Größe um ihre festen Spitzen o, p drehen und der Durchschnittspunkt zweier ihrer Schenkel auf einer Geraden X fortrückt; so beschreibt der Durchschnittspunkt der beiden andern Schenkel eine durch o und p gehende Curve des zweiten Grades.

Es seien o_1, o_2, o_3, . . . o_n, n feste Punkte, X_1, X_2, X_3, . . . X_{n-1}, n—1 feste Gerade, und A_1, A_2, A_3, . . . A_n, n bewegliche Gerade, welche sich um die festen Punkte o_1, o_2, o_3, . . . o_n drehen, so daß die n—1 Winkelspitzen (A_1, A_2), (A_2, A_3), . . . (A_{n-1}, A_n) auf X_1, X_2, . . . X_{n-1} fortrücken; man soll den von dem freien Scheitel (A_n, A) beschriebenen Ort finden.

Wenn man das System der beweglichen Geraden in mehrern Lagen betrachtet, so sind die sich auf X_1 schneidenden Büschel o_1, o_2 harmonisch äquivalent. Ebenso sind die Büschel o_2, o_3; o_3, o_4; . . . o_{n-1}, o_n, und folglich die Büschel o_1, o_n harmonisch äquivalent, und die Durchschnittspunkte dieser beiden letzten Büschel liegen auf einer durch o_1 und o_n gehenden Curve des zweiten Grades. — Man hat also den Satz:

10) Wenn sich die n Seiten eines Vieleckes um n feste Punkte drehen, während n—1 Winkelspitzen

auf $n-1$ festen Geraden fortrücken; so beschreibt die freie Winkelspitze eine Curve des zweiten Grades.

Wenn man für die Geraden X_1, X_2, . . . resp. eine durch o_1 und o_2, durch o_2 und o_3, ... gehende Curve des zweiten Grades setzt; so findet die harmonische Aequivalenz der Büschel noch statt, und man hat folglich den Satz:

11) Wenn sich die n Seiten eines Vieleckes um n feste Punkte drehen, während $n-1$ Winkelspitzen auf Curven des zweiten Grades fortrücken, wovon jede durch zwei aufeinanderfolgende feste Punkte geht; so beschreibt die freie Winkelspitze eine Curve des zweiten Grades, welche ebenfalls durch zwei aufeinanderfolgende feste Punkte geht.

§. 168.

Wenn zwei Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Dreieckes sich parallel zu sich selbst bewegen, so daß der von ihnen eingeschlossene Winkel constant bleibt; so umhüllt die dritte Seite von constanter Länge einen zu dem ersten concentrischen Kreis. Hieraus ergibt sich durch Homographie:

12) Wenn zwei Seiten eines in eine Curve des zweiten Grades beschriebenen Dreieckes sich um zwei feste Punkte drehen, so umhüllt die dritte Seite eine Curve des zweiten Grades, welche mit der ersten nach der durch die festen Punkte gehenden Geraden eine doppelte Berührung hat.

Hieraus ergeben sich noch andere merkwürdige Sätze. Es sei abc (Fig. 181) ein in eine Curve S des zweiten Grades beschriebenes bewegliches Dreieck, dessen zwei Seiten ab, ac auf zwei Curven des zweiten Grades S′, S″, wovon jede mit der ersten eine doppelte Berührung hat, fortrollen, o der Durchschnittspunkt der Berungsgeraden A, B, ferner d der Punkt, wo die Gerade ao die Curve S schneidet, und p, q seien die Punkte, worin die Geraden bd, cd die Geraden A, B treffen. In dem eingeschriebenen Dreiecke abd drehet sich die Seite ad um den Punkt o, die Seite ab umhüllt die Curve S′, und die Seite bd drehet sich nach dem vorhergehenden Satze um den Punkt p. Desgleichen, wenn in dem Dreiecke acd die Seite ad sich um o drehet und ac die Curve S″

umhüllt, so drehet sich die Seite cd um den Punkt q. In dem Dreiecke bcd endlich drehen sich zwei Seiten bd, cd um die beiden festen Punkte p, q, und folglich umhüllt die Seite bc eine Curve des zweiten Grades, welche mit S nach der Geraden pq eine doppelte Berührung hat. — Man hat mithin den Satz:

13) Wenn zwei Seiten eines in eine Curve des zweiten Grades beschriebenen Dreieckes auf zwei andern Curven desselben Grades, wovon jede mit der ersten eine doppelte Berührung hat, fortrollen; so umhüllt die dritte Seite des Dreieckes auch eine Curve des zweiten Grades, welche mit der ersten eine doppelte Berührung hat.

Dieser Satz läßt sich leicht verallgemeinern, wodurch man folgenden erhält:

14) Wenn ein Vieleck von n Seiten in eine Curve des zweiten Grades beschrieben ist und n—1 Seiten desselben rollen auf n—1 Curven desselben Grades fort, wovon jede mit der ersten eine doppelte Berührung hat; so umhüllt die nte Seite auch eine Curve des zweiten Grades, welche mit der ersten eine doppelte Berührung hat.

Denn ist abcd . . . gh das Vieleck, so kann man successive die Dreiecke abc, acd, . . . agh betrachten, so daß, wenn ab, bc auf einer Curve des zweiten Grades fortrollen, auch ac auf einer solchen Curve fortrückt; ebenso ad, ..., ag. Vermittelst einer Lage des beweglichen Vieleckes erhält man aber leicht die Berührungsgerade der letzten Curve und diese selbst.

Ein System zweier Tangenten einer Curve S des zweiten Grades kann als eine Curve S′ desselben Grades betrachtet werden, welche mit S eine doppelte Berührung hat. — Wenn i′ den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten bezeichnet, so drehet sich die auf S′ fortrollende Seite um den Punkt i′. Man kann folglich mehrere der Curven S′, S″, . . . durch ebensoviele feste Punkte i′, i″, . . . ersetzen, und die entsprechenden Berührungsgeraden sind nichts anders, als die Polaren dieser Punkte der Curve S.

Wenn also n—1 Seiten eines in eine Curve des zweiten Grades beschriebenen nEckes auf Curven desselben Grades, wovon jede mit der ersten eine doppelte Berührung hat, fortrollen, oder sich um feste Punkte drehen; so umhüllt die n^{te} Seite des Vieleckes eine Curve des zweiten Grades, welche mit der ersten eine doppelte Berührung hat.

§. 169.

Es sei abc (Fig. 182) ein in eine Curve des zweiten Grades beschriebenes Dreieck, dessen zwei Seiten ab, ac resp. auf zwei Curven P, N fortrollen, so umhüllt die dritte Seite eine gewisse Curve M. Betrachtet man zwei Lagen abc, a'b'c' des Dreieckes, für welche die Berührungspunkte resp. m, n, p und m', n', p' sind; so liegen die Durchschnittspunkte p_1, n_1, m'_1 der Gegenseiten des eingeschriebenen Sechseckes acb'a'c'b in derselben Geraden. Nähert sich nun die Lage a'b'c' der Lage abc, so nähern sich die Punkte m_1, n_1, p_1 den Berührungspunkten m, n, p und der Punkt m'_1 nähert sich dem Punkte m_2, welcher in Bezug auf b und c der harmonisch conjugirte von m_1 ist, und da p, n, m_2 in gerader Linie liegen; so folgt: daß sich die drei Geraden am, bn, cp in demselben Punkte schneiden (§. 37). Man hat also folgenden Lehrsatz:

15) Wenn die Seiten eines in eine Curve des zweiten Grades beschriebenen Dreieckes auf drei Curven fortrollen, und in jeder Lage des beweglichen Dreieckes die Winkelspitzen desselben mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbunden werden, so erhält man drei Gerade, welche durch denselben Punkt gehen.

Man kann für eine der Curven N, P, oder für beide, feste Punkte setzen, und vermittelst der Lehrsätze 12, 13 und 14 leicht den Berührungspunkt für jede Lage der beweglichen Seite bestimmen.

§. 170.

Wir wollen drei Kreise betrachten, welche eine reelle, oder imaginäre gemeinschaftliche Sekante haben, und wovon in den einen ein Dreieck abc beschrieben ist, dessen zwei Seiten ab, ac auf den beiden andern Kreisen fortrollen. Es seien p, n, m die Berührungspunkte auf den Kreisen und auf der von der dritten Seite des Dreieckes umhüllten Curve. Da die drei Geraden am, bn, cp durch denselben Punkt gehen und der Punkt m', welcher in Beziehung auf b und c der harmonisch conjugirte von m ist und mit n', p' in gerader Linie liegt; so liegen die Mitten von mm′, nn′, pp′ auch in gerader Linie (§. 38). Die Mitte n″ von nn′ wird aber bestimmt durch die Bedingung:

$$\overline{n''n}^2 = n''a \,.\, n''c,$$

und folglich ist diese Mitte der Punkt, wo die gemeinschaftliche Sekante D die Seite ac trifft.

Da ferner die durch die Mitten gehende Gerade zwei Punkte auf der gemeinschaftlichen Sekante D hat, so fällt sie mit dieser zusammen, und man hat:

$$\overline{m''m}^2 = m''b \,.\, m''c.$$

Denken wir uns nun durch die gemeinschaftlichen Punkte der beiden ersten Kreise und durch den Punkt m einen dritten Kreis gelegt, so berührt derselbe die Gerade m′m im Punkte m, und folglich auch die Umhüllungscurve, welche also eine Reihe durch dieselben beiden Punkte gehender Kreise berühren muß, was nur möglich ist, wenn sich diese Kreise auf einen einzigen reduciren, welcher alsdann die Umhüllungscurve ist. — Die freie Seite bc des beweglichen Dreieckes umhüllt also einen Kreis, welcher mit allen übrigen Kreisen dieselbe gemeinschaftliche Sekante hat.

Dieser Satz erstreckt sich offenbar auch auf den Fall, wo an die Stelle des Dreieckes ein beliebiges Vieleck tritt, dessen Seiten, eine ausgenommen, auf Kreisen fortrollen, die unter sich und mit dem Kreise, in welchen das Vieleck beschrieben ist, eine gemeinschaftliche Sekante haben. Uebrigens können auch mehrere Seiten des Vieleckes auf demselben Kreise fortrollen.

Wenn mehrere Curven des zweiten Grades dieselben gemeinschaftlichen Sekanten haben, und man transformirt sie durch Homographie, so daß eine der gemeinschaftlichen Sekanten in eine unendliche Entfernung gerückt wird; so erhält man homothetische Curven, und wenn eine derselben ein Kreis ist; so sind die übrigen auch Kreise. Man hat also den Satz:

16) Wenn ein Vieleck in eine Curve des zweiten Grades beschrieben ist, und alle Seiten desselben, eine ausgenommen, rollen auf andern Curven des zweiten Grades fort, welche unter sich und mit der ersten dieselben gemeinschaftlichen Sekanten haben; so umhüllt die freie Seite eben-

falls eine **Curve des zweiten Grades**, welche durch die vier gemeinschaftlichen Punkte der übrigen geht.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Homologie.

§. 171.

Wir haben bisher die in den Formeln (1) vorkommenden acht Constanten ganz willkürlich gelassen; aber wenn man gewisse Beziehungen zwischen ihnen aufstellt, oder ihre Anzahl verkleinert, so wird die Art der Formveränderung particularisirt. So ist z. B. die Aehnlichkeit nichts als eine besondere Art der Homographie.

Geben wir den Formeln (1) die Form:

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_0}{\alpha x' + \beta y' + \gamma},\ y - y_0 = \frac{y' - y_{,0}}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}, \quad (3)$$

so ist der Punkt o oder (x_0, y_0) sein eigener correspondirender Punkt, und jeder Punkt der Geraden A oder:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma = o$$

ist ebenfalls sein correspondirender selbst. Die den Formeln (3) entsprechende besondere Art von Homographie wird **Homologie** genannt; die Gerade A ist die **Axe der Homologie** und der Punkt o der **Mittelpunkt der Homologie**.

Aus der Relation:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{x' - x_0}$$

erhellet: daß zwei **homologische** Punkte auf demselben vom Mittelpunkte ausgehenden Radius liegen. — Zwei homologische Gerade schneiden sich in einem auf der Axe liegenden Punkte. — Die dem Unendlichen entsprechende Gerade I′ ist zu der Axe parallel und um die Länge $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ davon entfernt.

Wenn d, i' die Punkte sind, wo der Radius oaa' resp. die Axe und die Gerade I' trifft; so ist:

$$\frac{i'd}{i'o} : \frac{a'd}{a'o} = \frac{id}{io} : \frac{ad}{ao} = \frac{ao}{ad},$$

woraus folgt:

$$\frac{ao}{a'o} = \frac{i'd}{i'o} \cdot \frac{ad}{a'd} = k \cdot \frac{ad}{a'd}.$$

18) Das Verhältniß der Entfernungen zweier homologischer Punkte vom Mittelpunkte ist also dem Verhältnisse der Abstände dieser Punkte von der Axe proportional.

Ferner ist:

$$\frac{i'a'}{i'd} : \frac{oa'}{od} = \frac{ia}{id} : \frac{oa}{od} = \frac{od}{oa},$$

und wenn man aus dem Punkte a' ein Perpendikel p' auf I' fällt; so ist:

$$\frac{a'o'}{p'} = m \, . \, oa.$$

19) D. h. das Verhältniß der Entfernungen eines Punktes der zweiten Figur vom Mittelpunkte und von der Geraden I' ist dem Abstande des correspondirenden Punktes der ersten Figur vom Mittelpunkte proportional.

§. 172.

Construction einer homologischen Figur.

Wenn ein System von Punkten a, b, c, ... gegeben ist und o zum Mittelpunkte der Homologie genommen wird, so wird das homologische System auf folgende Weise construirt: Zunächst kann man auf oa, ob, oc drei beliebige Punkte a', b', c' als homologische von a, b, c annehmen, so bestimmen die Durchschnitte der homologischen Geraden ab und a'b', so wie ac und a'c' zwei Punkte der Axe A. Ist die Axe bekannt, so construirt man die homologischen Punkte von d, e, . . . Die Gerade da trifft die Axe in α; der Durchschnitt von αa' und od gibt den homologischen Punkt d' von d; u. s. f.

Wenn statt des Mittelpunktes die Axe gegeben ist, so nimmt man a' beliebig in der Ebene an, alsdann trifft ab die Axe in α, und wenn man b' beliebig auf αa' annimmt; so wird der Mittelpunkt o durch den Durchschnitt von aa′ und bb′ bestimmt. — Man kann also a′, b′ willkürlich in der Ebene annehmen, worauf man c′ beliebig auf ac annimmt, so daß man im Ganzen 5 willkürliche Größen hat, und in der That enthalten die Formeln (3) fünf willkürliche Constanten.

19) Wenn zwei Dreiecke in der Ebene eine solche Lage haben, daß sich die drei Verbindungslinien je zweier correspondirender Ecken in demselben Punkte schneiden; so liegen die drei Durchschnittspunkte von je zwei correspondirenden Seiten in gerader Linie.

Denn zwei solche Dreiecke sind homologisch, und der umgekehrte Satz findet ebenfalls statt.

§. 173.

Homologie zweier Curven des zweiten Grades.

Da die Formeln (3) fünf willkürliche Parameter enthalten, so gibt eine specielle Curve des zweiten Grades durch Homologie alle Curven des zweiten Grades; d. h. zwei beliebige, in derselben Ebene liegende Curven des zweiten Grades sind homologisch, und wir wollen diesen Gegenstand nun näher untersuchen.

Wenn man aus dem Mittelpunkte der Homologie an die Curve S des zweiten Grades eine reelle, oder imaginäre Tangente zieht, so berührt sie auch die homologische Curve S′ in dem homologischen Punkte. Der Mittelpunkt der Homologie kann also kein anderer sein, als der Durchschnittspunkt zweier gemeinschaftlicher Tangenten. — Die Gleichung der zwei Gerade berührenden Curven des zweiten Grades, wenn der Durchschnittspunkt der Geraden als Anfangspunkt dient, ist:

$$ax^2 + bxy + cy^2 - \lambda(px + qy + 1)^2 = o,$$

wo $ax^2+bxy+cy^2=o$ die beiden Tangenten, und $px+qy+1=o$ die Polare des Anfangspunktes ausdrückt. — In dieser Gleichung sind a, b, c Constanten und λ, p, q willkürliche Parameter. — Die Gleichungen der beiden Curven S und S′ sind folglich:

$$ax^2 + bxy + cy^2 - \lambda(px + qy + 1)^2 = o, \quad (4)$$

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 - \lambda'(p'x' + q'y' + 1)^2 = o. \quad (5)$$

Setzt man für x und y die Ausdrücke:

$$x = \frac{x'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma} \text{ und } y = \frac{y'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}$$

in (4), so muß sich, wenn der Anfangspunkt wirklich der Mittelpunkt der Homologie ist, die Gleichung (5) mit:

$$ax'^2+bx'y'+cy'^2-\lambda\gamma^2\left(\frac{p+\alpha}{\gamma}x'+\frac{q+\beta}{\gamma}y'+1\right)^2=o$$

dentificiren lassen, so daß man setzen kann:

$$\gamma=\pm\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}},\ \alpha=p'\gamma-p,\ \beta=q'\gamma-q.$$

Es ist also jeder der 6 Eckpunkte des um zwei Curven des zweiten Grades beschriebenen Viereckes ein Mittelpunkt der Homologie derselben, und demselben Mittelpunkte entsprechen zwei Axen:

$$px+qy+1-\gamma(p'x+q'y+1)=o.$$

Wenn jede der Gleichungen (4) und (5) mit (6) verbunden wird, so erhält man dasselbe Resultat; folglich ist die Axe der Homologie eine gemeinschaftliche Sehne beider Curven, und geht durch den Durchschnittspunkt der Polaren des Mittelpunktes jeder dieser Curven.

Betrachten wir das von den Diagonalen des um zwei Curven des zweiten Grades beschriebenen Viereckes gebildete Dreieck (§. 150), so gehen durch eine Ecke a desselben zwei gemeinschaftliche Sekanten; auf der gegenüberliegenden Seite **A** liegen zwei gegenüberliegende Ecken o, o_1 des umschriebenen Viereckes; die Polaren von o in beiden Curven gehen durch den gemeinschaftlichen Pol a von **A**; folglich sind die Axen der Homologie des Mittelpunktes o die durch a gehenden beiden gemeinschaftlichen Sekanten, und dem gegenüberliegenden Mittelpunkte o_1 entsprechen dieselben Axen.

§. 174.

Homologie zweier reeller Curven des zweiten Grades.

Soll γ reell sein, so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß λ und λ' gleiche Zeichen haben, was immer stattfindet, wenn die beiden gemeinschaftlichen Tangenten imaginär conjugirt sind. — Denn in diesem Falle kann

$$ax^2+bxy+cy^2$$

als die Summe zweier Quadrate angesehen werden, welche z. B. das Zeichen + haben, und alsdann haben λ, λ' beide das Zeichen —, weil sonst die Curven imaginär wären.

Wenn die beiden gemeinschaftlichen Tangenten reell sind und zu den Coordinatenaxen genommen werden, so ist $a=o$, $c=o$, und wenn $\frac{\lambda}{b}$ negativ ist; so haben x, y stets dasselbe Zeichen, so daß die Curve S ganz in dem Winkel der Axen und in dem Scheitelwinkel desselben liegt. — Die Bedingung der Realität besteht also darin: daß die beiden Curven in demselben Winkel und in dem Scheitelwinkel desselben liegen.

Betrachtet man die Sache aus einem andern Gesichtspunkte, so ist γ reell, wenn die durch die Gleichung (6) ausgedrückten beiden gemeinschaftlichen Sekanten reell sind. — Wenn also die 4 gemeinschaftlichen Tangenten imaginär sind, oder blos 2 davon; so gibt es 2 reelle Mittelpunkte und 2 reelle Axen der Homologie. — Die Mittelpunkte sind im ersten Falle die Durchschnittspunkte der conjugirten Tangentenpaare, und im zweiten Falle der Durchschnittspunkt der beiden conjugirten imaginären Tangenten, und folglich auch der Durchschnittspunkt der beiden reellen Tangenten.

Wenn die 4 gemeinschaftlichen Tangenten reell sind, so findet eine Zweideutigkeit statt, und man muß die gemeinschaftlichen Sekanten untersuchen. — Entweder sind blos zwei gemeinschaftliche Sekanten reell, in welchem Falle es nur ein Paar reeller Mittelpunkte und Axen der Homologie gibt, oder die 6 gemeinschaftlichen Sekanten sind reell, und in diesem Falle gibt es 3 Paare reeller Mittelpunkte und Axen der Homologie.

In Fig. 185 sind zwei Curven des zweiten Grades dargestellt, welche sich in zwei reellen Punkten c, d schneiden; eine erste gemeinschaftliche Sekante ist cd, und es gibt noch eine zweite ebenfalls reelle gemeinschaftliche Sekante, nämlich die, welche die beiden andern conjugirten imaginären Durchschnittspunkte verbindet. Auch gibt es zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten, welche sich in o schneiden, und zwei imaginäre conjugirte Tangenten, welche sich in einem unbekannten reellen Punkte o_1 schneiden, und es kommt darauf an, den zweiten Mittelpunkt und die zweite Axe der Homologie zu finden. Die Polaren des Punktes o in beiden Curven schneiden sich in a auf der Sekante cd, und wenn man aus o einen beliebigen Radius om zieht; so läßt sich die Homologie auf zwei Weisen herstellen, nämlich 1) wenn man die Punkte m und m′, so wie n und n′ zu homologischen nimmt; alsdann schneiden sich die Tangenten in diesen Punkten paarweise auf der ersten Axe cd. — 2) Wenn man m und n′, so wie n und m′ zu den homologischen

Punkten nimmt, wo sich alsdann die Tangenten in t und u schneiden, und die Gerade tau ist die zweite Axe der Homologie. — Construirt man die gemeinschaftliche Polare oo_1 von a in beiden Curven und zieht von einem Punkte t der einen Axe die Tangenten tm_1, tm', so bestimmt der Radius m_1m' den zweiten Mittelpunkt o_1, weil m_1 und m' homologische Punkte sind. — Auf diese Weise hat man sowohl den Durchschnittspunkt o_1 der beiden imaginären gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven, als die Gerade at erhalten, welche die beiden gemeinschaftlichen imaginären Punkte verbindet.

Wenn die beiden Curven außer einander liegen (Fig. 184), so gibt es nur die beiden Mittelpunkte o, o_1 der Homologie, und die beiden Axen oder die beiden reellen gemeinschaftlichen Sekanten lassen sich leicht construiren.

§. 175.

Curven des zweiten Grades, welche sich berühren, oder einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

Die Gleichung der Curven des zweiten Grades, welche einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, welcher als Anfangspunkt genommen wird, ist von der Form:

$$x^2 + y^2 - (mx + ny + t)^2 = o,$$

und die Substitution der Werthe:

$$x = \frac{x'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}, y = \frac{y'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}$$

gibt eine Gleichung von derselben Form. Man hat also den Lehrsatz:

20) Zwei Curven des zweiten Grades, welche einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, gestatten diesen Brennpunkt als Mittelpunkt der Homologie.

Die Curven des zweiten Grades, welche dieselbe Gerade in demselben Punkte berühren, werden durch eine Gleichung von der Form ausgedrückt:

$$x^2 + y\,(mx + ny + t) = o,$$

wenn der Berührungspunkt zum Anfange und die Tangente zur Axe der x genommen wird. — Die Substitution der obigen Werthe für x und y gibt eine Gleichung von derselben Form, und man hat folglich den Satz:

21) **Zwei einander berührende Curven des zweiten Grades haben den Berührungspunkt zum Mittelpunkte der Homologie.**

Diese Eigenschaften führen zu einer großen Anzahl von Sätzen. — Wenn man aus dem Brennpunkte o als Mittelpunkt einen Kreis beschreibt, und aus demselben Punkte zwei bewegliche Halbmesser oaa′, obb′ zieht, welche einen constanten Winkel mit einander bilden; so umhüllt die Sehne ab des Kreises von constanter Länge einen concentrischen Kreis; die homologische Sehne a′b′ der Curve des zweiten Grades umhüllt folglich eine Curve des zweiten Grades, welche o zum Brennpunkte und mit der ersten Curve eine doppelte Berührung hat. Der Pol von ab beschreibt einen concentrischen Kreis und der von a′b′ eine concentrische Curve des zweiten Grades. — Man hat also den Lehrsatz:

22) **Die Sehnen einer Curve des zweiten Grades, welche vom Brennpunkte aus unter einem constanten Winkel erscheinen, umhüllen eine andere Curve des zweiten Grades, und der Pol dieser Sehne beschreibt eine dritte solche Curve. Die drei Curven haben ferner einen gemeinschaftlichen Brennpunkt und eine doppelte Berührung nach derselben Geraden.**

Beschreibt man einen Kreis, welcher eine Curve des zweiten Grades in o berührt, und zieht aus o zwei bewegliche Radien, welche einen constanten Winkel mit einander bilden; so finden noch dieselben Folgerungen statt, so daß man den Satz hat:

23) **Die von einem Punkte einer Curve des zweiten Grades aus unter einem constanten Winkel erscheinenden Sehnen derselben umhüllen eine andere Curve des zweiten Grades, und der Pol dieser Sehnen beschreibt eine dritte Curve desselben Grades. Endlich haben diese drei Curven auch eine doppelte imaginäre Berührung.**

Zieht man an den Kreis zwei feste und eine bewegliche Tangente, welche die ersten in a, b schneidet, so hat man in der Curve des zweiten Grades ebenfalls zwei feste und eine bewegliche Tangente, welche die beiden ersten in den Punkten a′, b′ schneidet, die die homologischen von a, b sind. — Der Winkel aob, unter welchem das Stück ab der beweglichen Tangente vom Mittelpunkte aus erscheint, ist aber constant, und mithin hat man den Satz:

24) Der Winkel, unter welchem der zwischen zwei festen Tangenten einer Curve des zweiten Grades liegende Theil einer beweglichen Tangente vom Brennpunkte aus erscheint, ist constant.

Wenn man bei der Parabel die bewegliche Tangente als sich ins Unendliche entfernend betrachtet, so entfernen sich die Punkte a′,b′ ebenfalls ins Unendliche, oa′,ob′ werden zu den festen Tangenten parallel, und folglich der constante Winkel gleich dem Supplemente des gegen die Parabel gekehrten Winkels der Tangenten. Wenn t′ der Durchschnittspunkt der beiden festen Tangenten ist, so ist $\angle t' + \angle o = 180^\circ$; folglich läßt sich das Viereck oa′t′b′ in einen Kreis beschreiben, und man hat den Satz:

25) Der um ein um die Parabel beschriebenes Dreieck beschriebene Kreis geht durch den Brennpunkt der Parabel.

Da jeder Punkt dieses Kreises zum Brennpunkte einer die drei Geraden berührenden Parabel genommen werden kann, so folgt: daß der Ort der Brennpunkte der die drei Seiten eines Dreieckes berührenden Parabeln der um dieses Dreieck beschriebene Kreis ist. — Hieraus ergibt sich ein sehr einfaches Mittel zur Construction einer vier gegebene Gerade berührenden Parabel.

§. 176.

Homothetische Curven des zweiten Grades.

Die Homothetie ist ein besonderer Fall der Homologie; denn wenn sich die Axe ins Unendliche entfernt, so reduciren sich die Formeln (3) auf:

$$x = \frac{x'}{\gamma}, \; y = \frac{y'}{\gamma}$$

und der Mittelpunkt der Homologie wird der Mittelpunkt der Homothetie.

Zwei homothetische Curven des zweiten Grades S,S′ schneiden sich nur in zwei reellen, oder in zwei conjugirten imaginären Punkten, weil die beiden andern Durchschnittspunkte in unendlicher Entfernung liegen. Sie haben nur eine gemeinschaftliche Sekante A, welche immer reell ist, und dieser Are der Homologie entsprechen zwei Mittelpunkte der Homothetie.

Zieht man einen beliebigen Radius aus dem Mittelpunkte o (Fig. 186), so sind a und a′,b und b′ homologische Punkte, und die Tangentenpaare geben zwei Punkte c,d der Are A. Zieht man ebenso aus dem Mittelpunkte o_1 einen beliebigen Radius, so sind a und a'_1,b und b'_1 homologische Punkte, und die Tangentenpaare schneiden sich ebenfalls auf der Are A.

Die Polaren P und P′, P_1 und P'_1 der beiden Aehnlichkeitsmittelpunkte o, o_1 in beiden Curven sind zu der Are A parallel und gleichweit davon entfernt. Denn wenn man einen der Mittelpunkte der Homothetie zum Anfangspunkte nimmt, so sind die Gleichungen der beiden Curven:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = o,$$
$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + k(dx' + ey' + fk) = o.$$

Die Gleichung der Are der Homologie oder der gemeinschaftlichen Sekante ist:

$$dx + ey + fk + f = o,$$

und die Gleichungen der beiden Polaren des Anfangspunktes:

$$dx + ey + 2f = o,\ dx + ey + 2kf = o.$$

Wenn drei homothetische Curven des zweiten Grades gegeben sind, so haben wir gesehen, daß die Mittelpunkte der Homothetie je drei in gerader Linie liegen. Die Gleichungen dieser Curven sind:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = o,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + d'x + e'y + f' = o,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + d''x + e''y + f'' = o,$$

und die der Aren der Homologie:

$$(d - d')x + (e - e')y + f - f' = o,$$
$$(d' - d'')x + (e' - e'')y + f' - f'' = o,$$
$$(d'' - d)x + (e'' - e)y + f'' - f = o.$$

Da sich die drei letzten Gleichungen auf zwei reduciren, so hat man den Satz:

26) Die drei Aren der Homologie dreier homothetischer Curven des zweiten Grades gehen durch denselben Punkt.

§. 177.

Die Gerade oo, deren gemeinschaftlicher Pol für beide Curven in unendlicher Entfernung liegt, geht durch die Mittelpunkte der Curven. — Wenn zwei homothetische Curven des zweiten Grades einander berühren, so liegt der Berührungspunkt als Mittelpunkt der Homothetie auf der Centrallinie. — Wenn S und S′ zwei homothetische Curven des zweiten Grades sind, und S_1 ist eine dritte, welche die beiden ersten in a und a′ (Fig. 187) berührt; so schneiden sich die gemeinschaftlichen Tangenten in a und a′ als Axen der Homologie in einem Punkte t_1 der Axe A von S und S′. Die Punkte a, a′ sind folglich homologische und liegen auf einem Radius oaa′. Dieser Radius hat in den drei Curven drei homologische Punkte t, t′ t_1 zu Polen, und folglich sind die drei Parallelen zu P, A, P′ homologische Gerade. — Wenn man also eine Curve des zweiten Grades S_1 hat, welche zu zwei homothetischen Curven S, S′ desselben Grades homothetisch und tangent ist; so hat die Axe der Homologie A von S, S′, als Gerade von S_1 betrachtet, in S, S′ die Polaren P, P′ des Mittelpunktes o der Homothetie zu homologen Geraden.

Hieraus ergibt sich das Mittel zur Construction einer Curve S_1 des zweiten Grades, welche zu drei gegebenen homothetischen Curven S, S′, S″ desselben Grades homothetisch ist und dieselben berührt. — Man construirt nämlich die Mittelpunkte p, q, r der Homothetie und die Axen der Homologie A, B, C von S und S′, S und S″, S′ und S″, dann die Polaren P und P′ von p in S und S′, die Polaren Q und Q″ von q in S und S″, die Polaren R′ und R″ von r in S′ und S″. Es sei i_1 der Durchschnittspunkt der Axen der Homologie, i der von P und Q, i′ der von P′ und R′, i″ der von Q″ und R″. Wird S_1 successive mit S, S′, S″ verbunden, so erhält man drei homothetische Systeme, und wir haben gesehen, daß die Geraden A und B in S_1 in S die Geraden P und Q als homologe haben. Also ist i der homologe Punkt von i_1 und i_1 in S, hat als homologe Punkte i, i′, i″ in S, S′, S″. Die Geraden i_1 i, i_1 i′, i_1 i″ gehen mithin durch die Mittelpunkte der Homothetie von S_1 und S, von S_1 und S′, von S_1 und S″ welche hier die Berührungspunkte a, a′, a″ sind. Nachdem diese Berührungspunkte gefunden sind, erhält man den Mittelpunkt von S_1 vermittelst des Durchschnittes der von den Mittelpunkten nach den Berührungspunkten gezogenen Geraden. Die Aufgabe ist also gelös't, und als besondern Fall gibt diese Construction den Kreis, welcher drei gegebene Kreise berührt.

§. 178.

Perspektivische Projektion.

Wenn man einen beliebigen Punkt o des Raumes mit verschiedenen Punkten a, b, c, ... durch gerade Linien verbindet, so heißen die Durchschnittspunkte der Geraden oa, ob, oc, ... mit einer festen Ebene M′ die perspektivischen Projektionen der Punkte a, b, c, ... Wenn der Punkt a eine Gerade beschreibt, so beschreibt seine perspektivische Projektion auch eine Gerade. Es entsprechen also den Punkten und Geraden der ersten Figur auch Punkte und Gerade in der perspektivischen Figur und nach §. 163 ist das anharmonische Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten dem anharmonischen Verhältnisse ihrer perspektivischen Projektionen gleich.

Wenn in einer Ebene M eine Figur gegeben ist, so kann auf diese Weise in einer andern Ebene M′ die perspektivische Projektion derselben gezeichnet werden, und beide Figuren haben alsdann alle Eigenschaften homographischer Figuren. — Wenn man in der Ebene M zwei Coordinatenaxen und in der Ebene M′ auch zwei solche Axen zieht, so haben die Relationen, welche zwischen den Coordinaten x, y eines Punktes a und den Coordinaten x′, y′ seiner perspektivischen Projektion a′ stattfinden, nothwendig die Form (1), und folglich ist die Methode der perspektivischen Projektion eine geometrisch-homographische.

Hieraus folgt: wenn ein Kegel, dessen Richtlinie eine Curve des m^{ten} Grades ist, mit einer Ebene durchschnitten wird, so ist die Durchschnittscurve auch vom m^{ten} Grade. — Ist also die Richtlinie eine Curve des zweiten Grades, so ist auch die Durchschnittslinie des Kegels mit einer Ebene eine Curve des zweiten Grades, wie sich leicht direkt zeigen läßt, wenn die Basis des Kegels ein Kreis ist. — Man nennt deshalb die Curven des zweiten Grades auch Kegelschnitte.

Der Durchschnitt einer durch o parallel zu M gelegten Ebene mit M′ ist die Axe I′ des Unendlichen, auf welcher sich die perspektivischen Projektionen zweier Parallelen schneiden, und dieser Durchschnittspunkt ist zugleich der von M′ mit der durch o parallel zu den gegebenen Parallelen gezogenen Geraden.

Da eine Gerade und ihre perspektivische Projektion in derselben durch o gehenden Ebene liegen, so schneiden sie sich auf der Durchschnittslinie A der Ebenen M und M', und alle Punkte von A sind ihre eigenen perspektivischen Projektionen. — Wenn sich die Ebene M' um die Gerade A so lange drehet, bis sie mit M zusammenfällt, so gibt es einen Punkt c', welcher mit seiner perspektivischen Projektion zusammenfällt. Denn wir wollen durch o eine auf A senkrechte Ebene legen, und es seien αc, $\alpha c'$ die Durchschnitte dieser Ebene mit M und M'. Ferner wollen wir in dieser Ebene von o aus eine auf der Halbirungslinie des Winkels $c\alpha c'$ senkrechte Gerade occ' ziehen, so fällt der Punkt c' wegen $\alpha c = \alpha c'$ auf seine perspektivische Projektion c'. — Man hat also nach dem Zusammenfallen beider Ebenen in derselben Ebene M zwei homologische Figuren, indem c der Mittelpunkt und A die Axe der Homologie ist. Die perspektivische Projektion kommt also auf die Homologie zurück, und man sieht leicht ein, daß sie dieselbe Allgemeinheit hat.

Wenn die Ebenen M und M' parallel sind, so entfernt sich die Axe A ins Unendliche, und die beiden Figuren werden homothetisch. Folglich sind die Durchschnitte eines Kegels mit parallelen Ebenen ähnliche Figuren.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Correlative Figuren.

§. 179.

Wenn man setzt:

$$X'=ax'+by'+c,\ Y'=a'x'+b'y'+c',\ U'=a''x'+b''y'+c'',\quad (1)$$

so entspricht dem Punkte a oder (x, y) der ersten Figur in der zweiten eine Gerade A', deren Gleichung:

$$X'x + Y'y + U' = o$$

ist, wo x', y' die laufenden Coordinaten bedeuten, und der Geraden A der ersten Figur, welche durch die Gleichung:

$$px + qy + 1 = o$$

ausgedrückt wird, entspricht in der zweiten Figur ein Punkt a', welcher durch die Relationen:

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{U}{1}$$

bestimmt wird.

Es entsprechen also den Punkten a und den Geraden A der ersten Figur resp. Gerade A′ und Punkte a′ der zweiten Figur. Der Punkt a′ ist der Pol der Geraden A und die Gerade A′ die Polare des Punktes a. — Man hat daher die beiden Fundamentalsätze:

27) Wenn der Punkt a eine Gerade A beschreibt, so drehet sich seine Polare A′ um den Pol a′ dieser Geraden.

28) Wenn sich die Gerade A um den Punkt a drehet, so beschreibt ihr Pol a′ die Polare A′ dieses Punktes.

Wenn sich die Gerade A ins Unendliche entfernt, so convergirt ihr Pol gegen den Punkt i′, welcher durch die Relationen:

$$X' = o, \; Y' = o$$

bestimmt wird, und der Pol des Unendlichen genannt werden kann. — Umgekehrt, die Polare eines unendlich entfernten Punktes geht durch i′.

Wenn also eine aus Punkten und Geraden bestehende Figur gegeben ist, so erhält man auf diese Weise eine aus Geraden und Punkten bestehende correlative Figur, und jede descriptive Relation zwischen den Theilen der ersten Figur führt zu einer entsprechenden Relation zwischen den Theilen der zweiten Figur. — Wenn z. B. in der ersten Figur drei Punkte in gerader Linie liegen, so gehen die drei entsprechenden Geraden in der zweiten Figur durch denselben Punkt.

§. 180.

Correlative Curven.

Es seien A, B, C, . . . die Seiten und a, b, c, . . . die Winkelspitzen eines Vieleckes. Construirt man die Pole a′, b′, c′, . . . der Seiten A, B, C, . . . und verbindet sie durch die Geraden A′, B′, C′, . . . , welche die Polaren der Ecken a, b, c, . . . sind; so erhält man ein zweites Vieleck, welches das correlative des ersten ist. — Wenn b gegen a convergirt, so wird a der Berührungspunkt von A, und b′ convergirt gleichzeitig gegen a′ und die Gerade A′ wird Tangente in a′ an der zweiten Curve. — Jede

Tangente A der gegebenen Curve hat also einen Punkt a′ der correlativen Curve zum Pole, und der Berührungspunkt von A hat die Tangente im Punkte a′ der zweiten Curve zur Polare. — Kurz: die Punkte von S′ sind die Pole der Tangenten an S, und die Tangenten an S′ sind die Polaren der Punkte von S.

Wenn die gegebene Figur aus einer Curve und aus einer diese in n Punkten schneidenden Geraden besteht, so besteht die correlative Figur aus einer Curve und aus n von demselben Punkte ausgehenden Tangenten.

Besteht die gegebene Figur aus zwei Curven S, T und man construirt die correlativen Curven S′, T′, so sind die gemeinschaftlichen Punkte von S′, T′ die Pole der gemeinschaftlichen Tangenten von S, T, und die gemeinschaftlichen Tangenten von S′, T′ sind die Polaren der gemeinschaftlichen Punkte von S, T.

Die Gleichung einer Curve S sei:

$$f(x, y) = 0,$$

so hat die Tangente derselben im Punkte (x, y) den Punkt (x', y') zum Pole, welcher durch die Relationen:

$$\frac{X'}{f'_x} = \frac{Y'}{f'_y} = \frac{U'}{\psi + 2\chi + \ldots}$$

bestimmt wird, und wenn man x, y zwischen diesen drei Gleichungen eliminirt; so erhält man die Gleichung der correlativen Curve S′. Oder: die Curve S′ kann als die Umhüllungscurve der Polaren:

$$X'x + Y'y + U = 0$$

der verschiedenen Punkte (x, y) von S betrachtet werden. — Setzt man nun:

$$X = ax + a'y + a'', \quad Y = bx + b'y + b'', \quad U = cx + c'y + c'', \qquad (2)$$

so wird die Gleichung der Polare:

$$Xx' + Yy' + U = 0$$

oder:

$$px' + qy' + 1 = 0,$$

wenn gesetzt wird:

$$\frac{X}{p} = \frac{Y_1}{q} = \frac{U}{1}.$$

Vermittelst dieser letzten Relationen kann man x und y durch Brüche ausdrücken, deren Zähler und Nenner lineare Funktionen von p, q sind, und zwar ist der Nenner des Ausdruckes von x derselbe, als der des Ausdruckes von y. — Substituirt man diese Werthe für x, y in die Gleichung $f(x, y) = 0$, so erhält man die Gleichung der Curve S' mit p und q, welche von demselben Grade ist. — Man hat also den Lehrsatz:

29) Die correlative Curve eines Kegelschnittes ist ein anderer Kegelschnitt.

§. 181.

Es seien a, b, c, d vier in gerader Linie liegende Punkte, und A', B', C', D' die sich in demselben Punkte schneidenden Polaren derselben. Wir wollen die Gerade $abcd$ zur Axe der x nehmen, so schneidet diese Axe das Büschel der Polaren in vier Punkten a', b', c', d'. Die Gleichung jeder der Polaren reducirt sich auf die Form:

$$X'x + U' = o,$$

woraus folgt:

$$x = -\frac{U'}{X'} = -\frac{a''x' + c''}{ax' + c},$$

indem x' die Abscisse des Punktes a' bedeutet. — Diese Gleichung drückt eine homographische Relation zwischen den Punkten a, b, c, d und a', b', c', d' aus, so daß die anharmonischen Verhältnisse dieser beiden Systeme von Punkten dieselben sind, und man folglich den Satz hat:

30) Das anharmonische Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten ist dem anharmonischen Verhältnisse der entsprechenden vier Polaren gleich.

Dieser Lehrsatz kann folgendermaßen umgeformt werden: Man hat:

$$\frac{\sin(C', A')}{\sin(C', B')} : \frac{ca}{cb} = \frac{\sin(D', A')}{\sin(D', B')} : \frac{da}{db},$$

und wenn man annimmt, daß die drei Punkte a, b, d, so wie ihre Polaren fest liegen; so ist der zweite Theil der letzten Gleichung eine Constante m; eine beliebige Gerade C trifft ab in c, und der Pol c' liegt auf C'. Bedeuten ferner p, q die Abstände der Geraden C von den beiden festen Punkten a, b und p', q' die Entfernungen des Poles c' von den beiden festen Geraden A', B'; so hat man:

$$\frac{ca}{cb} = \frac{p}{q}, \quad \frac{\sin(C', A')}{\sin(C', B')} = \frac{p'}{q'},$$

folglich:

$$\frac{p'}{q'} : \frac{p}{q} = m.$$

Man hat also den Satz:

31) Das Verhältniß der Abstände einer beliebigen Geraden der ersten Figur von zwei festen Punkten ist dem Verhältnisse der Entfernungen des Poles jener Geraden von den beiden festen Polaren in der zweiten Figur proportional.

Die umgekehrten Sätze finden ebenfalls statt; denn die erste Figur ist auch die correlative der zweiten, und da jede metrische Relation nur anharmonische Verhältnisse enthält; so hat sie ihre entsprechende in der zweiten Figur.

§. 182.

Gegenseitige oder reciproke Correlation.

Die Formeln (1) drücken die Correlation der zweiten Figur in Bezug auf die erste, und die Formeln (2) die der ersten in Beziehung auf die zweite aus. — Da die Constanten verschieden sind, so ist die Art der Correlation nicht mehr dieselbe. Sollen die Figuren nach derselben Weise gegenseitig correlativ sein, so müssen die einander entsprechenden Constanten einander gleich und von demselben Zeichen, oder gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein.

Im ersten Falle ist $a' = b$, $a'' = c$, $b'' = c'$, so daß nur 6 Constanten bleiben, und man hat:

$$X' = ax' + by' + c,\ Y' = bx' + b'y' + c',\ U' = cx' + c'y' + c'',$$
$$X = ax + by + c,\ Y = bx + b'y + c',\ U = cx + c'y + c''.$$

Betrachten wir die Curve des zweiten Grades:

$$ax^2 + 2bxy + b'y^2 + 2cx + 2c'y + 2c'' = 0, \qquad (3)$$

so ist die Gerade A′ die Polare des Punktes a in Beziehung auf die Richtcurve (3), und umgekehrt, die Gerade A ist die Polare des Punktes a′ in Bezug auf dieselbe Richtcurve. Die Methode der reciproken Polaren (Kap. 19) erscheint hier also als eine besondere Art der Correlation.

Im zweiten Falle ist $a = 0$, $a' = -b$, $a'' = -c$, $b' = 0$, $b'' = -c'$, $c'' = 0$; folglich:

$$X' = by' + c,\ Y' = -bx' + c',\ U' = -cx' - c'y';$$
$$X = -by - c,\ Y = bx - c',\quad U = cx + c'y.$$

Die Gerade A′, deren Gleichung ist:

$$(y' - y)\left(x - \frac{c'}{b}\right) - (x' - x)\left(y + \frac{c}{b}\right) = 0,$$

geht durch den Punkt a und durch den festen Punkt $\left(\frac{c'}{b}, -\frac{c}{b}\right)$, die Curve S' reducirt sich auf einen Punkt, und mithin kann diese Transformationsart von keinem Nutzen sein.

§. 183.

Anwendungen.

Einem und demselben Vierecke umschriebenen Kegelschnitten entsprechen in dasselbe Viereck beschriebene Kegelschnitte. Folglich ist der Lehrsatz 3) in §. 158 der correlative von dem Lehrsatze 2) und der Satz 6) in §. 166 führt auf folgenden correlativen:

32) Wenn man von einem beliebigen Punkte Tangenten an drei in dasselbe Viereck beschriebene Kegelschnitte zieht, so erhält man ein Büschel von sechs Geraden, welche eine Involution bilden, und die beiden Tangenten an denselben Kegelschnitte sind conjugirt.

Aus den Lehrsätzen 7) und 8) ergeben sich durch Correlation:

33) Wenn ein Viereck um einen Kegelschnitt beschrieben ist, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte, worin eine bewegliche Tangente die Seiten dieses Viereckes schneidet, constant.

34) Wenn man auf zwei festen Geraden zwei Reihen von Punkten von solcher Beschaffenheit nimmt, daß das anharmonische Verhältniß von vier beliebigen Punkten der ersten Reihe dem anharmonischen Verhältnisse der vier correspondirenden Punkte der zweiten Reihe gleich ist, und man verbindet die correspondirenden Punkte paarweise durch gerade Linien; so umhüllen diese einen Kegelschnitt, welcher die beiden festen Geraden berührt.

Der correlative des Lehrsatzes 10) ist bereits in §. 140 angeführt, und der Satz 11 gibt folgenden correlativen:

35) Wenn die n Ecken eines Vieleckes auf n festen Geraden fortgleiten, während n—1 Seiten desselben auf Kegelschnitten fortrollen, wovon jeder zwei aufeinanderfolgende Gerade berührt; so

umhüllt die nte Seite des Vieleckes einen Kegelschnitt, welcher zwei aufeinanderfolgende Gerade berührt.

Zwei Kegelschnitten, welche eine doppelte Berührung haben, entsprechen zwei Kegelschnitte, welche ebenfalls eine doppelte Berührung haben. Aus den Sätzen 12) und 14) ergeben sich mithin durch Correlation:

36) Wenn zwei Winkelspitzen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreieckes auf zwei festen Geraden fortgleiten, so beschreibt die dritte Winkelspitze des Dreieckes einen andern Kegelschnitt, welcher mit dem ersten eine doppelte Berührung hat. — Der Durchschnittspunkt der beiden festen Geraden ist der Pol der Berührungssehne.

37) Wenn ein Vieleck von n Seiten um einen Kegelschnitt beschrieben ist, und jede von n—1 Ecken desselben auf einer Geraden, oder auf einem Kegelschnitte fortgleitet, welcher mit dem ersten eine doppelte Berührung hat; so beschreibt die nte Ecke des Vieleckes auch einen Kegelschnitt, welcher mit dem ersten eine doppelte Berührung hat.

Endlich gibt der Lehrsatz 16) durch Correlation:

38) Wenn ein Vieleck von n Seiten um einen Kegelschnitt beschrieben ist und n—1 Ecken desselben auf n—1 Kegelschnitten fortgleiten, welche mit dem ersten in dasselbe Viereck beschrieben sind, so beschreibt die nte Ecke einen Kegelschnitt, welcher in dasselbe Viereck beschrieben ist.

§. 184.

Ueberblick.

Wir können jetzt die im Vorhergehenden auseinandergesetzten allgemeinen Methoden, deren Fruchtbarkeit zugleich an vielen Beispielen gezeigt ist, mit kurzen Worten charakterisiren: 1) die Homographie verallgemeinert die in einem besondern Falle bewiesenen Eigenschaften einer Figur. 2) Die Correlation verdoppelt die Anzahl der

Lehrsätze. — Wir haben übrigens diesen Gegenstand bei weitem nicht erschöpft, und man kann mit Hülfe der bewiesenen Lehrsätze sehr einfach eine große Anzahl interessanter Aufgaben über die Kegelschnitte lösen, wovon wir nur einige zur Uebung hier anführen wollen.

Uebungsaufgaben.

1) In einen gegebenen Kegelschnitt ein Vieleck zu beschreiben, dessen n Seiten Kegelschnitte berühren, wovon jeder mit dem ersten eine doppelte Berührung hat, oder durch gegebene Punkte geht.

2) Um einen gegebenen Kegelschnitt ein Vieleck zu beschreiben, dessen n Ecken auf gegebenen Geraden, oder auf Kegelschnitten liegen, welche mit dem gegebenen eine doppelte Berührung haben.

3) Ein n Eck zu beschreiben, dessen n Seiten durch gegebene Punkte gehen und dessen n Ecken auf gegebenen Geraden liegen.

4) Wenn die n festen Punkte in Lehrsatz 10) in gerader Linie liegen, zu beweisen: daß die freie Ecke auch eine Gerade beschreibt.

5) Es seien a, b zwei Punkte von solcher Beschaffenheit: daß die Polare des einen durch den andern geht. Wenn zwei Seiten eines in einen Kegelschnitt beschriebenen Dreieckes sich um a, b drehen, so drehet sich die dritte Seite um den Pol c von ab. — Man soll aus diesem Lehrsatze den correlativen herleiten.

6) Wenn drei Seiten eines in einen Kegelschnitt beschriebenen Viereckes sich um drei in gerader Linie liegende feste Punkte drehen, so drehet sich die vierte Seite um einen andern festen Punkt, welcher mit den drei ersten in derselben Geraden liegt. — Dieser Satz gilt auch für ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl, und man soll den correlativen Satz daraus ableiten.

7) Wenn alle Spitzen eines Vieleckes, mit Ausnahme einer einzigen, auf einem Kegelschnitte liegen und die Seiten sich um feste in gerader Linie liegende Punkte drehen, so beschreibt die freie Winkelspitze einen Kegelschnitt. Man soll den correlativen Satz ableiten.

9) Wenn ein Vieleck zugleich in einen Kreis und um einen andern beschrieben ist, die Entfernung der Mittelpunkte als Funktion der Halbmesser für die einfachsten Fälle des Dreieckes, Viereckes, Fünfeckes, . . . zu finden.

10) Wenn ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl zugleich in einen Kegelschnitt und um einen andern beschrieben ist, so gehen die Geraden, welche die gegenüberliegenden Ecken, oder die Berührungspunkte der Gegenseiten verbinden, durch denselben Punkt, welches einer der Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen conjugirten Sekanten ist. — Den Beweis zu führen.

11) Einen Kegelschnitt zu construiren, welcher mit einem andern eine doppelte Berührung hat, durch n Punkte geht und 3—n Gerade berührt.

12) Wenn vier von demselben Punkte ausgehende Gerade einen Kreis resp. in den Punkten a und a′, b und b′, ꝛc. schneiden, zu beweisen: daß die Relation stattfindet:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\,ca}{\sin\frac{1}{2}\,cb} : \frac{\sin\frac{1}{2}\,da}{\sin\frac{1}{2}\,db} = \frac{\sin\frac{1}{2}\,c'a'}{\sin\frac{1}{2}\,c'b'} : \frac{\sin\frac{1}{2}\,d'a'}{\sin\frac{1}{2}\,d'b'}.$$

13) Wenn ein beliebiger Kegelschnitt und ein Punkt o in seiner Ebene gegeben ist, und man construirt einen zweiten Kegelschnitt von solcher Beschaffenheit: daß o zugleich sein Mittelpunkt und ein Mittelpunkt der Homologie beider Curven ist; so ist jedes System conjugirter Durchmesser des zweiten Kegelschnittes ein System conjugirter Gerader des ersten in Bezug auf den Punkt o. — Man soll hieraus und aus den Formeln für die Construction homologischer Figuren die Eigenschaften der conjugirten Geraden herleiten, welche denen der conjugirten Durchmesser analog sind.

14) Wenn man durch den Punkt o der Ebene eines Kegelschnittes eine bewegliche Sekante zieht und auf derselben eine Länge om von solcher Beschaffenheit nimmt, daß ihr reciproker Werth $\frac{1}{om}$ der Summe, oder Differenz der reciproken Werthe der zwischen dem Kegelschnitte und dem festen Punkte liegenden Längen gleich ist, jenachdem der feste Punkt innerhalb, oder außerhalb des Kegelschnittes liegt; so beschreibt der Punkt m einen neuen Kegelschnitt.

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Theorie der Transversalen.

§. 185.

Es sei $f(x, y) = o$ die Gleichung einer Curve des $m$ten Grades unter **ganzer** Form, und $\varphi(x, y)$ bezeichne die Glieder des $m$ten Grades. Durch einen beliebigen Punkt i oder (x_1, y_1) der Ebene wollen wir eine Gerade ziehen, welche mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus p und q sind, so schneidet diese Gerade die Curve in m Punkten a', a'', a''', ..., und wenn ϱ die Entfernung des Punktes i von irgend einem der Durchschnittspunkte bedeutet; so ist:

$$x = x_1 + p\varrho,\ y = y_1 + q\varrho,$$

und:

$$f(x, y) = f(x_1, y_1) + A\varrho + B\varrho^2 + \ldots + \varphi(p, q)\varrho^m = o,$$

also das Produkt der Wurzeln dieser Gleichung:

$$ia' \,.\, ia'' \,.\, ia''' \ldots = \pm \frac{f(x_1, y_1)}{\varphi(p, q)}.$$

Betrachten wir nun die Curve $\varphi(x, y) = \pm 1$ und ziehen durch den Anfangspunkt o einen zu der Sekante $ia'a''$ ... parallelen Radius oa; so ist:

$$\overline{oa}^m = \pm \frac{1}{\varphi(p, q)};$$

folglich:

$$\frac{ia' \,.\, ia'' \,.\, ia''' \ldots}{\overline{oa}^m} = f(x_1, y_1) \qquad (1)$$

und man hat mithin den Satz:

1) **Wenn man aus dem Punkte i eine beliebige Sekante durch die Curve $f(x, y) = o$ zieht, so ist das Verhältniß des Produktes der m Abschnitte dieser Sekante zur $m$ten Potenz des vom Anfangspunkte nach der Hülfscurve $\varphi(x, y) = \pm 1$ gezogenen und zu der Sekante parallelen Radiusvectors constant.**

Zieht man von i aus eine andere Sekante ib′b″ . . . . , so hat man ebenso:

$$\frac{ib' \,.\, ib'' \,.\, ib''' \ldots}{\overline{ib}^m} = f(x_1, y_1);$$

folglich:

$$\frac{ia' \,.\, ia'' \,.\, ia''' \ldots}{ib' \,.\, ib'' \,.\, ib''' \ldots} = \frac{\overline{oa}^m}{\overline{ob}^m}.$$

d. h.: 2) Wenn man durch verschiedene Punkte der Ebene einer Curve parallele Sekantenpaare zieht, so ist das Verhältniß des Produktes der Abschnitte der einen Sekante zu dem Produkte der Abschnitte der andern Sekante constant.

§. 186.

Wenn die gegebene Curve vom zweiten Grade ist, so kann man sie selbst, auf ihren Mittelpunkt bezogen, zur Hülfscurve nehmen, so daß oa der vom Mittelpunkte der gegebenen Curve aus zu der Sekante parallel gezogene Radiusvector ist.

Da die Gleichung der Parabel von der Form $y^2 + Ax = o$ ist, so kann man eine beliebige Parallele zur Are als Hülfscurve nehmen, und wenn a, b die Punkte sind, worin diese Parallele von den beiden Sekanten geschnitten wird; so hat man die Relation:

$$\frac{ia' \,.\, ia''}{\overline{ia}^2} = \frac{ib' \,.\, ib''}{\overline{ib}^2}.$$

Von dem Punkte i wollen wir eine Tangente ib (Fig. 188) an die Parabel ziehen und die durch den Berührungspunkt b zur Are gezogene Parallele zur Hülfslinie nehmen, so fallen für ib die drei Punkte b, b′, b″ zusammen, und es ist:

$$\frac{ia' \,.\, ia''}{\overline{ia}^2} = 1 \text{ oder } ia' \,.\, ia'' = \overline{ia}^2.$$

Beschreibt man in der Ebene der Curve ein beliebiges Dreieck ghi, so bestimmt die Curve auf der Seite hi, m Punkte a′, a″, . . ., auf der Seite ig, m Punkte b′, b″, . . . und auf der Seite gh, m Punkte c′, c″, ... , und durch Multiplikation der Relationen:

$$\frac{gc' \,.\, gc'' \,.\,.\,.\,.}{gb' \,.\, gb'' \,.\,.\,.\,.} = \frac{\overline{oc}^m}{\overline{ob}^m},$$

$$\frac{ha' \,.\, ha'' \,.\,.\,.\,.}{hc' \,.\, hc'' \,.\,.\,.\,.} = \frac{\overline{oa}^m}{\overline{oc}^m},$$

$$\frac{ib' \,.\, ib'' \,.\,.\,.\,.}{ia' \,.\, ia'' \,.\,.\,.\,.} = \frac{\overline{ob}^m}{\overline{oa}^m}$$

ergibt sich:

$$\frac{gc' \,.\, gc'' \ldots ha' \,.\, ha'' \ldots ib' \,.\, ib'' \ldots}{gb' \,.\, gb'' \ldots hc' \,.\, hc'' \ldots ia' \,.\, ia'' \ldots} = 1. \quad (3)$$

In dem besondern Falle, wo sich die Curve auf eine Gerade reducirt, ergibt sich aus der Relation (3) der Satz in §. 38.

§. 187.

Construction der Tangente.

Wenn sich der Punkt i der Curve unendlich nähert, so fallen zwei Durchschnittspunkte a', b' in i zusammen und die Gerade a'b' wird Tangente in diesem Punkte. Bezeichnen nun α, β die Winkel, welche diese Gerade mit ig und ih bildet, so verwandelt sich die Relation (3) wegen:

$$\frac{ia'}{ib'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

in:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{ib' \,.\, ib'' \ldots hi \,.\, ha' \,.\, ha'' \ldots gc' \,.\, gc'' \ldots}{ai'' \,.\, ai''' \ldots gi \,.\, gb \,.\, gb'' \ldots hc' \,.\, hc'' \ldots}. \quad (4)$$

Um also die Tangente in i zu construiren, zieht man durch diesen Punkt zwei beliebige Sekanten ig, ih, hierauf in der Ebene eine willkürliche dritte Sekante gh und wendet die Gleichung (4) an.

§. 188.

Construction des Osculations= oder Krümmungskreises.

Wenn, indem sich der Punkt i der Curve unendlich nähert, gleichzeitig die Sekante ih sich der Tangente in i unbeschränkt nähert; so fällt ein zweiter Durchschnittspunkt a'' mit a' in i zusammen, und der durch die drei Punkte b', a', a'' gehende Kreis heißt an der Grenze der Krümmungs= oder Osculations=kreis. Bezeichnet nun b_1 den Punkt, wo die Gerade ig den Kreis trifft, so ist:

$$ia' \,.\, ia'' = ib' \,.\, ib_1,$$

und die Relation (3) gibt:

$$ib_1 = \frac{ib' \,.\, ib'' \,\ldots\, \overline{hi}^2 \,.\, ha''' \ldots gc' \,.\, gc'' \ldots}{ia''' \,\ldots\, gi \,.\, gb''' \ldots hc' \,.\, hc'' \ldots}.$$

Da ferner der Krümmungskreis die Curve berührt, so liegt sein Mittelpunkt auf der Normale, und die Kenntniß des Punktes b_1 ist zu seiner Construktion hinreichend.

Um also den Krümmungskreis für den Punkt i zu construiren, zieht man die Tangente ih in diesem Punkte, eine Sekante ig und in der Ebene der Curve eine willkürliche Sekante gh. Wenn man für ig die Normale der Curve nimmt, so ist ib_1 der **Durchmesser des Osculationskreises**.

§. 189.

Osculations- oder Krümmungskreis eines Kegelschnittes.

Verlegt man den Punkt g in den Mittelpunkt o des Kegelschnittes, so hat man:

$$ib_1 = \frac{2oi \,.\, \overline{hi}^2 \,.\, \overline{oc'}^2}{\overline{oi}^2 \,.\, hc' \,.\, hc''} = \frac{2\overline{oc,}^2}{oi} \,.\, \frac{\overline{hi}^2}{\overline{ho}^2 - \overline{oc}^2},$$

und wenn sich der Punkt h auf der Tangente ins Unendliche entfernt:

$$\text{Gr.}\ \frac{hi}{ho} = 1,\ \text{Gr.}\ \frac{\overline{hi}^2}{\overline{ho}^2 - \overline{oc}^2} = 1,\ \text{also: } ib_1 = \frac{2\overline{oc'}^2}{oi}.$$

Bezeichnen nun a, b die halben Axen des Kegelschnittes, welcher eine auf diese Axen bezogene Ellipse sei, a′, b′ die halben conjugirten Durchmesser oi, oc′, ferner α den Winkel der letztern und r den Halbmesser des Osculationskreises; so ergibt sich mittelst der Relationen in §. 127:

$$r = \frac{ob^1}{2\sin\alpha} = \frac{b'^2}{a'\sin\alpha} = \frac{b'^3}{a'b'\sin\alpha} = \frac{b'^3}{a'b} = \frac{(a^2 + b^2 - a'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Der Osculationskreis ist also identisch mit dem Krümmungskreise.

Wenn **N** den zwischen dem Punkte i und der großen Axe liegenden Theil der Normale und β den Winkel bezeichnet, welchen diese mit dem vom Punkte i nach dem Brennpunkte gehenden Vector macht, so ist:

$$N = \frac{b}{a}(a^2+b^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ also } r = \frac{N^3 a^2}{b^4} = \frac{N^3}{p^2},$$

und vermöge des Lehrsatzes 7 in §. 148:

$$r = \frac{N}{\cos^2 \beta}.$$

Aus diesem letzten Ausdrucke ergibt sich eine sehr einfache Construktion des Mittelpunktes des Osculationskreises. — In dem Punkte q (Fig. 189), wo die Normale die erste Axe schneidet, errichte man ein Perpendikel qq′ auf dieser Normale, und in dem Punkte q′, wo dasselbe den nach dem Brennpunkte gehenden Vector iF trifft, errichte man ein Perpendikel q′q″; so ist der Punkt q″, wo dasselbe die Normale durchschneidet, der Mittelpunkt des Osculationskreises.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.

Construction von Kegelschnitten nach gewissen Bedingungen.

§. 190.

Zur Bestimmung eines Kegelschnittes sind fünf Bedingungen erforderlich, und das allgemeine Problem: Einen durch n gegebene Punkte gehenden und 5—n gegebene Gerade berührenden Kegelschnitt zu construiren, bietet mithin sechs verschiedene Fälle dar, wovon sich jedoch drei durch Correlation auf die drei andern zurückführen lassen. — Denn beschreibt man in der Constructionsebene einen beliebigen Kreis, welcher als Richtlinie dient, und construirt die Polaren der gegebenen Punkte, so wie die Pole der Tangenten; so ist der Kegelschnitt S′, welcher diese n Polaren berührt und durch diese 5—n Pole geht, die reciproke Polare des gegebenen Kegelschnittes S. — Weiß man nun S′, oder wenigstens eine beliebige Anzahl von Punkten und Tangenten von S′ zu construiren; so geben die Polaren dieser Punkte und die Pole dieser Tangenten eine gleiche Anzahl von Punkten und Tangenten von S, so daß man den Mittelpunkt, die Axe, ꝛc. bestimmen kann. — Allein, statt die correlative Curve S′ zu Hülfe zu nehmen, was sehr weitläufig sein würde, ist es besser, S direkt zu construiren, und diese direkte Construction kann mit Hülfe von Sätzen geschehen, welche die correlativen von denen sind, worauf die Construktion von S' beruhen würde.

Die beiden Fälle, wo 5 Punkte, oder 5 Tangenten gegeben sind, sind schon früher (§. 143) vorgekommen, so daß wir nur noch die 4 übrigen Fälle zu untersuchen haben.

§. 191.

Construction eines Kegelschnittes, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Bekanntlich schneidet eine beliebige Sekante einen Kegelschnitt und die Gegenseiten des in denselben beschriebenen Viereckes in 6 Punkten, welche eine Involution bilden (§. 166), und wenn die Sekante Tangente wird, so hat man eine Involution von 5 Punkten, indem der Berührungspunkt für zwei Punkte gilt. — Man legt also durch die gegebenen Punkte ein Viereck, dessen Gegenseiten die Tangente in a und a', b und b' schneiden und bestimmt die doppelten Involutionspunkte für diese 4 Punkte (§. 162), wovon jeder als Berührungspunkt dienen kann, so daß die Aufgabe auf die Construction eines durch 5 Punkte gehenden Kegelschnittes zurückgeführt ist.

§. 192.

Construction eines Kegelschnittes, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und 4 gegebene Gerade berührt.

Wenn man von einem Punkte der Ebene Tangenten an einen Kegelschnitt und Gerade nach den gegenüberliegenden Ecken eines um denselben beschriebenen Viereckes zieht; so erhält man ein Büschel von 6 Geraden, welche eine Involution bilden. — Wenn der Punkt auf dem Kegelschnitte liegt, so fallen die beiden Tangenten zusammen, und man hat eine Involution von 5 Geraden. — Man verbindet also den gegebenen Punkt mit den gegenüberliegenden Ecken des von den 4 Tangenten gebildeten Viereckes, so bestimmen die Verbindungslinien auf einer beliebigen Sekante die Punkte a und a', b und b', wozu man die doppelten Involutionspunkte sucht. Die Gerade, welche einen derselben mit dem gegebenen Punkte verbindet, kann als Tangente an dem Kegelschnitte in diesem Punkte dienen, so daß die Aufgabe auf die Construction eines fünf gegebene Gerade berührenden Kegelschnittes zurückgeführt ist.

§. 193.

Construction eines Kegelschnittes, welcher durch 3 gegebene Punkte a, b, c geht und 2 gegebene Gerade berührt.

Die Aufgabe ist nur möglich, wenn alle drei gegebenen Punkte in demselben von den Tangenten gebildeten Winkel, oder in seinem Scheitelwinkel liegen. — Wenn diese Bedingung erfüllt wird, so beschreibt man in dem gedachten Winkel einen Kreis S′, welcher die beiden gegebenen Geraden berührt und die homologische Curve des gesuchten Kegelschnittes S ist, während der Durchschnittspunkt o der beiden Tangenten der Mittelpunkt der Homologie ist. — Hierauf kann man leicht die Axe der Homologie (§. 172) und beliebig viele Punkte und Tangenten von S construiren. Denn jeder der Radien oa, ob, oc trifft den Kreis in zwei Punkten, wodurch 8 verschiedene Dreiecke entstehen, wovon jedes als homologisches von abc genommen werden kann. Man erhält also 8 Axen der Homologie; aber sie geben nur 4 verschiedene Auflösungen.

§. 194.

Construction eines Kegelschnittes, welcher durch zwei gegebene Punkte a, b geht und drei gegebene Gerade C, D, E berührt.

Die beiden Punkte müssen in Bezug auf jedes Tangentenpaar in demselben Winkel, oder in dem Scheitelwinkel desselben liegen. Wenn diese Bedingungen erfüllt werden, so beschreibt man in dem gehörigen Winkel einen Kreis S′, welcher die Geraden D, E berührt, und die homologische Curve des gesuchten Kegelschnittes S ist, während der Durchschnittspunkt o der gemeinschaftlichen Tangenten der Mittelpunkt der Homologie ist. Die Radien oa, ob treffen den Kreis resp. in a′, b′ und ab schneidet C in einem Punkte c, dessen homologischer Punkt c′ mittelst des Durchschnittes von oc, a′b′ bestimmt wird. Aus c ziehe man eine Tangente C′ an den Kreis, so ist dieselbe die homologische Gerade von C, und die Durchschnitte von ab, a′b′ und C,C′ geben zwei Punkte der Axe, so daß man 8 Axen der Homologie, aber nur 4 Auflösungen erhält.

§. 195.

Bemerkung über die Hyperbel.

Die Richtung einer Asymptote ist gleichgeltend einem Punkte, weil ein Punkt der Hyperbel auf der Asymptotenrichtung in unendlicher Entfernung liegt, wonach sich die vorhergehenden Constructionen leicht modificiren lassen.

a) Eine Hyperbel zu construiren, welche durch 4 gegebene Punkte a, b, c, d geht, wenn zugleich die Richtung einer Asymptote gegeben ist. — Man bilde das Viereck abcd, und durch die Punkte a, d ziehe man zwei Parallelen zu der gegebenen Asymptotenrichtung; so erhält man ein eingeschriebenes Fünfeck, dessen eine Ecke in unendlicher Entfernung liegt. Die gewöhnliche Construction (§. 143) bestimmt die Tangenten in den gegebenen Punkten und die Lage der zu der gegebenen Richtung parallelen Asymptote.

b) Eine Hyperbel zu construiren, wenn 3 Punkte a, b, c derselben und die Richtungen der beiden Asymptoten gegeben sind. — Durch a ziehe man eine Parallele zu der einen, und durch c eine Parallele zu der andern Asymptotenrichtung, so liegen auf diesen Parallelen zwei Punkte d, e der Hyperbel in unendlicher Entfernung, und man hat ein eingeschriebenes Fünfeck, wovon eine Seite in unendlicher Entfernung liegt.

§. 196.

Construction einer Parabel, welche durch 4 gegebene Punkte geht.

Es sei $a_1aa'a''a'''a_2$ ein in die Parabel beschriebenes Sechseck, und wir wollen annehmen, daß sich die beiden Punkte a_1, a_2 ins Unendliche entfernen; so werden die Geraden aa_1 und $a'''a_2$ zu der Axe parallel, und der Durchschnittspunkt von $a'a''$, a_1a_2 entfernt sich auf $a'a''$ ins Unendliche. — Wenn man also durch die Ecken a und a''' eines eingeschriebenen Viereckes aa'a''a''' (Fig. 190) Parallelen zur Axe zieht, welche die Seiten a''a''' und aa' in c und b schneiden; so ist die Gerade bc zu a'a'' parallel. Nimmt man die Entfernung ob zur Unbekannten, so geben die ähnlichen Dreiecke:

$$ob : oa' = oc : oa'',$$
$$ob : oa''' = oa : oc\ ,$$

woraus folgt:

$$\overline{ob}^2 = \frac{oa \ . \ oa' \ . \ oa'''}{oa''}.$$

Man kennt also die Richtung der Axe und 3 Punkte der Parabel, so daß die Aufgabe auf eine bereits gelös'te zurückgeführt ist. —

Uebrigens ist die Aufgabe nur möglich, wenn die 4 gegebenen Punkte ein convexes Viereck bilden, und in diesem Falle gibt es zwei Auflösungen.

§. 197.

Construction einer Parabel, welche 3 gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Wir wollen das von 5 Tangenten A, A′, A″, A‴, A⁗ (Fig. 191) einer Parabel gebildete Fünfeck aa′a″a‴a⁗ betrachten, und es sei b der Berührungspunkt von A⁗; so schneiden sich die drei Geraden aa‴, a′b, a″a⁗ bekanntlich in demselben Punkte. Wenn sich nun der Berührungspunkt von A ins Unendliche entfernt, so entfernen sich die Punkte a, a⁗ auf A, A⁗ ebenfalls ins Unendliche. — Wenn man also in irgend einem um die Parabel beschriebenen Vierecke durch die Ecken a″, a‴ Parallelen zu den Seiten A⁗, A′ zieht, und die Ecke a′ mit dem Berührungspunkte b der Seite A⁗ verbindet; so erhält man drei durch denselben Punkt gehende Gerade. — Sind nun A′, A″, A‴, die drei Tangenten und b der gegebene Punkt, so verlängere man a′b bis zum Durchschneiden mit A‴, und wenn man ia‴ zur Unbekannten nimmt; so geben die ähnlichen Dreiecke:

$$ia''' : id = io : ia',$$
$$ia''' : ia'' = ib : io,$$

woraus folgt:

$$\overline{ia'''}^2 = \frac{ia'' \cdot ib \cdot id}{ia'}.$$

Soll die Aufgabe möglich sein, so muß der Punkt b außerhalb des von den drei Tangenten gebildeten Dreieckes liegen, und alsdann gibt es zwei Auflösungen.

§. 198.

Construction einer Parabel, welche durch drei gegebene Punkte a, a′, a″ geht und eine gegebene Gerade A berührt.

Es sei B der zu der Tangente conjugirte Durchmesser, und man ziehe die Sehnen aa′, a′a″, welche A in c und c′, B in b und b′ schneiden; so ist bekanntlich (§. 185):

$$\overline{cb}^2 = ca \cdot ca' \text{ und } \overline{c'b'}^2 = c'a' \cdot c'a''.$$

Man kann also die Punkte b, b′, und folglich die Richtung der Axe, so wie den Berührungspunkt bestimmen.

Da die Längen cb, c′b′ auf der einen, oder andern Seite von der Tangente aus genommen werden können, so gibt es 4 Combinationen für die Gerade B, und mithin 4 Auflösungen; jedoch müßen die drei Punkte a, a′, a″ auf derselben Seite der Tangente liegen.

§. 199.

Construction einer Parabel, welche zwei gegebene Gerade A, A′ berührt und durch zwei gegebene Punkte a, a′ geht.

Es sei $a_1 a a' a_2$ (Fig. 192) ein in eine Parabel beschriebenes Viereck, und wir wollen die Tangenten A, A′ in den Punkten a, a′ ziehen; so liegen die Durchschnittspunkte der Geraden aa_1 und A′, aa′ und $a_1 a_2$, $a'a_2$ und A in gerader Linie. — Entfernen sich nun die Punkte a_1, a_2 ins Unendliche, so werden die Geraden aa_1, $a'a_2$ zu der Axe parallel und der Durchschnittspunkt von $a_1 a_2$, aa′ entfernt sich auch ins Unendliche. — Wenn man also durch die Berührungspunkte d, d′ zweier Tangenten einer Parabel die Geraden de, d′e′ zu der Axe parallel zieht, so ist die Figur dee′d′ ein Parallelogramm. — Verlängert man die Sehne aa′, so gibt die im vorhergehenden §. erwähnte Eigenschaft einen Punkt b, b′ jeder der Geraden de, d′e′. Nimmt man $oc_1 = oc$, $co'_1 = oc'$, so ist $c_1 c'_1$ parallel zu cc′, und es ist $c_1 b_1 = cb$, $c'_1 b'_1 = c'b'$. Man kennt also zwei Punkte jeder der Geraden de, d′e′, und mithin ist die Aufgabe gelöst. — Da man die Punkte b, b′ zu beiden Seiten jeder Tangente nehmen kann, so gibt es 4 Auflösungen; jedoch müssen die beiden gegebenen Punkte in demselben von den Tangenten gebildeten Winkel liegen.

Anhang.

Grundbegriffe der Theorie der abgeleiteten Funktionen.

1) Eine Größe, welche so gedacht wird, daß sie successive verschiedene Werthe annehmen soll, heißt eine veränderliche Größe (Veränderliche), wogegen eine Größe, welche als denselben Werth behaltend gedacht wird, eine constante Größe (Constante) genannt wird.

2) Eine veränderliche Größe oder Zahl, welche so gedacht wird, daß sie größer werden soll und kann, als jede gegebene oder angebbare, noch so große Größe oder Zahl, heißt unendlich groß, und wird der Kürze wegen gewöhnlich mit ∞ bezeichnet.

3) Wenn eine Veränderliche so beschaffen ist, oder so gedacht wird, daß sie, indem sie von einem reellen Werthe a zu einem andern reellen Werthe b übergeht, alle zwischen a und b liegende Werthe durchläuft; so heißt sie eine stetige (continuirliche) Veränderliche. — Die Veränderlichen werden gewöhnlich mit den letzten Buchstaben . . . x, y, z des Alphabetes und die Constanten mit den ersten a, b, c, ... bezeichnet.

4) Eine stetige Veränderliche, deren Veränderung nicht von der einer andern Veränderlichen abhängt, oder welche unmittelbar und zuerst als veränderlich gedacht wird, heißt die ursprüngliche, absolute oder unabhängige Veränderliche. — Eine solche ist z. B. bei Parallelcoordinaten die Abscisse x, und bei Polar-Coordinaten der Winkel ϑ.

5) Eine stetige Veränderliche dagegen, deren Veränderung, also auch deren Werths- oder Größenzustände von denen einer andern, als ursprüngliche oder unabhängige Veränderliche gedacht, abhängig sind, heißt eine abhängige oder relative Veränderliche. — Eine solche ist z. B. die Ordinate y bei geradlinigen Coordinaten, und der Radiusvector ϱ bei Polarcoordinaten.

6) Eine solche abhängige Veränderliche y wird auch eine

Funktion der unabhängigen Veränderlichen x genannt. — Es ist also die Ordinate y eine Funktion der Abscisse x, und der Vector ϱ eine Funktion des Winkels ϑ. — Ueberhaupt ist jeder Ausdruck mit der unabhängigen Veränderlichen x und etwaigen Constanten a, b, c . . . eine Funktion von x.

Um eine noch unbekannte oder eine unbestimmte Funktion y von x zu bezeichnen, schreibt man:

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x),\ y = \psi(x), y = \chi(x),\ \text{ꝛc.}$$

wo die verschiedenen Buchstaben f, F, φ, ψ, χ, ... auch verschiedene Funktionen von x bezeichnen, d. h. solche, die auf verschiedene Weise aus x und etwaigen Constanten zusammengesetzt sind, also eine verschiedene Form haben. — Dagegen bezeichnen f(x) und f(z) zwei Funktionen von derselben Form, und welche sich nur dadurch unterscheiden: daß in der zweiten überall z steht, wo in der ersten x steht. — Ebenso unterscheidet sich f(x+h) von f(x) nur dadurch, daß stets x+h für x gesetzt ist. — Ist z. B.

$$f(x) = x^n + \log x - 4x^2 + 5,\ \text{so ist}\ f(x+h) = (x+h)^n + \log(x+h) - 4(x+h)^2 + 5.$$

7) Wenn die Funktion $y = f(x)$ gegeben, oder f(x) ein Ausdruck mit x und etwaigen Constanten ist, so heißt y eine entwickelte (explicite) Funktion von x. Solche explicite Funktionen sind z. B.

$$y = \log x + \sqrt{1 - ax^2},\ y = a^x + bx^n + m \sin x,\ \text{ꝛc.}$$

8) Ist dagegen y mit x und etwaigen Constanten in einer Gleichung verbunden, welche erst aufgelös't werden muß, wenn man y als explicite Funktion von x haben will; so wird y eine unentwickelte (implicite) Funktion von x genannt. — Z. B.

$$y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0,\ \text{ꝛc.}$$

9) Die expliciten Funktionen werden in algebraische und transcendente eingetheilt. — Erstere sind solche, worin nur Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen, so wie Potenzen und Wurzeln bestimmter Grade vorkommen, und zu den letztern gehören alle übrigen, z. B. die Exponentialfunktion a^x, die logarithmische Funktion log x, die Kreisfunktionen sin x, cos x, tang x, ꝛc.

10) Eine explicite algebraische Funktion heißt ganz, gebrochen, rational, oder irrational, jenachdem x nicht in

einem Nenner, oder in einem solchen, nicht unter einem Wurzelzeichen, oder unter einem solchen vorkommt. — Die allgemeine Form einer ganzen algebraischen Funktion y ist:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

Sie heißt vom ersten, zweiten, dritten, ... Grade, jenachdem der höchste Exponent von x resp. 1, 2, 3, ... ist. — Die Funktion vom ersten Grade $y = A_0 + A_1 x$ wird auch lineare Funktion genannt, weil sie die Ordinate y einer Geraden ausdrückt.

11) Wenn $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, also $y = f(\varphi(x))$ ist, so heißt y eine mittelbare oder wiederholte Funktion von x. — Z. B.

$$y = z^n,\ z = \log x, \text{ also } y = (\log x)^n,\ y = \sin z,\ z = \sqrt{a + bx},$$
$$\text{also } y = \sin\left(\sqrt{a + bx}\right), \text{ ꝛc.}$$

12) Wenn man aus der Gleichung $y = f(x)$ den Werth von x sucht, und $x = \psi(y)$ findet, so wird diese letzte Funktion die inverse der ersten genannt. — Die inversen Funktionen von:

$$y = x^n, \quad y = a^x, \quad y = \sin x, \ldots$$

sind z. B.

$$x = \sqrt[n]{y}, \quad x = \overset{a}{\log} y, \quad x = \operatorname{arc} \sin x, \ldots$$

13) Eine Funktion f(x) heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ ist, und ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ ist.

14) Periodisch wird eine Funktion f(x) genannt, wenn $f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = f(x+3p) = \ldots$ ist. — Es sind folglich z. B. sin x, cos x, ... periodische Funktionen, weil bekanntlich ist:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = \ldots$$
$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi)\ \cos(x + 6\pi) = \ldots$$

15) Eine nicht periodische Funktion nimmt mit x entweder gleichzeitig ins Unendliche zu, oder ab, oder sie ist bei ihrer beständigen Zu- oder Abnahme an eine endliche Grenze gebunden, welche sie nicht überschreiten kann, oder endlich, sie nimmt abwechselnd zu und ab; aber nicht nach regelmäßigen Perioden, wenn x ins Unendliche zu- oder abnimmt. — Z. B. die Funktion $f(x) = x^2$ nimmt von o bis $+\infty$ zu, wenn x von o bis $\pm\infty$ zu- oder abnimmt. Die Funktion $f(x) = x^3 + 1$ ändert sich von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x sich von $-\infty$ bis $+\infty$ ändert. Wenn x gegen o conver-

girt, so nähert sich die Funktion $f(x) = \frac{a}{b+x}$ zunehmend der Grenze $\frac{a}{b}$, und wenn x gegen ∞ convergirt; so nähert sich f(x) abnehmend der Grenze Null.

Das allgemeine Gesetz, nach welchem sich eine stetige Funktion $y = f(x)$ ändert, wenn sich die unabhängige Veränderliche x stetig ändert, wird durch die Grenze des Verhältnisses der gleichzeitigen, zusammengehörigen Veränderungen k und h der Funktion und der unabhängigen Veränderlichen x, d. h. durch:

$$\text{Gr.}\,\frac{k}{h} = \text{Gr.}\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ausgedrückt, wenn h und folglich auch k sich ohne Ende der Grenze Null nähert.

Wenn $y = f(x) = ax + b$, d. h. eine algebraische ganze Funktion des ersten Grades ist, so ist:

$$\text{Gr.}\,\frac{k}{h} = a,$$

d. h. eine Constante, was auch geometrisch einleuchtet, weil $y = ax+b$ eine gerade Linie ausdrückt, deren constanter Richtungscoefficient a ist.

Wenn $y = f(x)$ keine ganze algebraische Funktion ist, so ist die durch diese Gleichung ausgedrückte Linie keine gerade mehr, sondern irgend eine Curve, deren Richtungscoefficient allgemein wieder durch $\text{Gr.}\,\frac{k}{h} = \text{Gr.}\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ausgedrückt wird (§. 55); und da sich die Richtung einer Curve für die verschiedenen Werthe von x ändert, so muß dies auch mit dem Richtungscoefficienten $\text{Gr.}\,\frac{k}{h} = I$ der Fall sein; d. h. es muß $\text{Gr.}\,\frac{k}{h}$ eine gewisse Funktion von x sein, welche gewöhnlich mit $f'(x)$ bzeichnet und die abgeleitete Funktion oder kurzweg die Ableitung von $y = f(x)$ genannt wird.

Diese abgeleitete Funktion $f'(x)$ spielt, wie man in dem Frühern gesehen hat, in der analytischen oder Coordinatengeometrie eine wichtige Rolle, weshalb die Grundzüge der Theorie der abgeleiteten Funktionen, so weit dies zum Verständniß des Frühern nöthig ist, noch erörtert werden sollen.

16) Wenn $f(x) = \varphi(x)$ für jeden Werth von x ist, so ist auch:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x), \text{ also:}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}, \text{ und:}$$

$$\text{Gr.}\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{Gr.}\,\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

d. h.:

$$f'(x) = \varphi'(x). \qquad (1)$$

Wie wird der hierin liegende Satz in Worten ausgesprochen?

17) Wenn $f(x) = \varphi(x) + A$ ist, wo A eine Constante bezeichnet, so ist auch:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) + A - [\varphi(x) + A] = \varphi(x+h) - \varphi(x);$$

also:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

und:

$$\text{Gr.}\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{Gr.}\,\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

d. h.:

$$f'(x) = \varphi'(x). \qquad (2)$$

Wie lautet der hierin liegende Satz in Worten?

18) Wenn $f(x) = A \cdot \varphi(x)$ ist, wo A eine Constante bedeutet, so ist:

$$f(x+h) - f(x) = A[\varphi(x+h) - \varphi(x)],$$

mithin:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A \cdot \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

und:

$$\text{Gr.}\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A \cdot \text{Gr.}\,\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

d. h.:

$$f'(x) = A \cdot \varphi'(x). \qquad (3)$$

Wie lautet der in dieser letzten Gleichheit liegende Lehrsatz?

19) Wenn $f(x) = \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \chi(x) \pm \ldots$ ist, so ist auch:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) \pm [\psi(x+h) - \psi(x)] \pm [\chi(x+h) - \chi(x)] \pm \ldots$$

und:

$$\text{Gr.}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{Gr.}\,\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\pm\text{Gr.}\,\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$$
$$\pm\,\text{Gr.}\,\frac{\chi(x+h)-\chi(x)}{h}\pm\ldots$$

d. h.:

$$f'(x)=\varphi'(x)\pm\psi'(x)\pm\chi'(x)\pm\ldots\quad(4)$$

Wie lautet der in dieser letzten Gleichheit liegende Satz?

20) Wenn $f(x)=\varphi(x)\,.\,\psi(x)$ ist, so ist auch:

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(x+h)\,.\,\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x)$$
$$=[\varphi(x+h)-\varphi(x)]\psi(x+h)+[\psi(x+h)-\psi(x)]\varphi(x),$$

also:

$$\text{Gr.}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{Gr.}\,\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\psi(x+h)$$
$$+\,\text{Gr.}\,\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\varphi(x),$$

d. h.:

$$f'(x)=\varphi'(x)\psi(x)+\psi'(x)\varphi(x).\quad(5)$$

Wie lautet die in dieser Gleichheit liegende Regel?

Wenn $f(x)=\varphi(x)\,.\,\psi(x)\,.\,\chi(x)\ldots$ ist, so findet man nach (5) leicht:

$$f'(x)=\varphi'(x)\,.\,\psi(x)\,.\,\chi(x)\ldots+\psi'(x)\varphi(x)\chi(x\ldots$$
$$+\chi'(x)\,.\,\varphi(x)\psi(x)\ldots+\ldots\quad(6)$$

Ist $\varphi(x)=\psi(x)=\chi(x)=\ldots$ und die Anzahl der Factoren $=n$, also $f(x)=[\varphi(x)]^n$; so wird (6):

$$f'(x)=n\,[\varphi(x)]^{n-1}\,\varphi'(x).\quad(7)$$

Welche Regel liegt in (7)?

21) Wenn $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ist, so ist auch:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)}-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\psi(x)\varphi(x+h)-\varphi(x)\psi(x+h)}{\psi(x)\,\psi(x+h)}$$
$$=\frac{\psi(x)[\varphi(x+h)-\varphi(x)]-\varphi(x)[\psi(x+h)-\psi(x)]}{\psi(x)\,\psi(x+h)},$$

also:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\psi(x).\,\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\varphi(x).\,\dfrac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}}{\psi(x)\,\psi(x+h)},$$

und wenn man zur Grenze übergeht:

$$f'(x)=\frac{\psi(x)\,\varphi'(x)-\varphi(x)\,\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}.\quad(8)$$

Wie lautet die in dieser letzten Gleichheit liegende Regel?

Wenn $\varphi(x) = A$ ist, wo A eine Constante bedeutet, so geht (8) wegen $\varphi'(x) = 0$ über in:

$$f'(x) = -\frac{A\,\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}. \qquad (9)$$

22) Wenn $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$, also $y = f[\varphi(x)]$ ist 11) und es bedeuten k, l, h resp. die Zunahmen von y, z, x; so hat man:

$$k = f(z+l) - f(z),\ l = \varphi(x+h) - \varphi(x), \text{ also:}$$

$$\frac{k}{h} = \frac{f(z+l)-f(z)}{l} \cdot \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}, \text{ und mithin:}$$

$$y' = \text{Gr.}\,\frac{k}{h} = f'(z) \cdot \varphi'(x). \qquad (10)$$

Wie spricht sich die in (10) liegende Regel in Worten aus?

23) Wenn $y = f(x)$ und umgekehrt $x = \varphi(y)$ ist, so hat man:

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ also } \frac{h}{k} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \text{ und}$$

$$\frac{h}{k} = \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k};$$

also:

$$\text{Gr.}\,\frac{h}{k} = \frac{1}{f'(x)} = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}. \qquad (11)$$

Wie lautet die in (11) ausgedrückte Regel für die Herleitung der Ableitung $\varphi'(y)$ der inversen Funktion $\varphi(y)$ aus der der direkten Funktion $f(x)$?

24) Es sei $y = x^n$, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet; so hat man:

$$k = (x+h)^n - x^n = (x+h)(x+h)(x+h) \ldots - x^n$$
$$= nx^{n-1}h + Ph^2 + Qh^3 + \ldots$$

also:

$$\text{Gr.}\,\frac{k}{h} = nx^{n-1}. \qquad (12).$$

Wie lautet die in der Gleichheit (12) liegende Regel?

Es sei $f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$, so ist nach (2), (4) und (12):

$$f'(x) = \quad A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots$$

Es sei $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, so erhält man nach (9), wenn man $\psi(x) = x^n$ und $A = 1$ setzt:

$$f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

Es sei $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, so ist $\left[f(x)\right]^n = x^m$, u. nach (1), (7) u. (12):

$$n\left[f(x)\right]^{n-1} \; f'(x) = mx^{m-1},$$

also:

$$f'(x) = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{[f(x)]^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{\frac{x^m}{f(x)}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{f(x)}{x} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}. \quad (\mu)$$

Endlich sei $f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, so ist nach (9) und ($\mu$), wenn $\psi(x) = x^{\frac{m}{n}}$ und $A = 1$ gesetzt wird:

$$f'(x) = -\frac{\frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}}{x^{2 \cdot \frac{m}{n}}} = -\frac{m}{n} \cdot x^{-\frac{m}{n}-1}.$$

Die Gleichheit (12) findet also immer statt, der Exponent n mag ganz, oder gebrochen, positiv, oder negativ sein, wenn x positiv ist.

25) Es sei $f(x) = \log x$, wo x positiv ist, so hat man:

$$f(x+h) - f(x) = \log(x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

folglich:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \text{ wenn } \frac{h}{x} = \frac{1}{m} \text{ gesetzt wird.}$$

Läßt man nun h gegen Null convergiren, so convergirt m gegen ∞. Da aber Gr. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ den Richtungscoefficienten I der Tangente der durch die Gleichung $y = f(x) = \log x$ gegebenen Curve ausdrückt 15), welcher im Allgemeinen, d. h. so lange der Werth von x nicht specialisirt wird, eine endliche und bestimmte Größe ist; so muß auch Gr. log $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ eine solche Größe sein, welche wir mit log e bezeichnen wollen. Geht man also zur Grenze über, so hat man endlich:

$$f'(x) = \frac{\log e}{x}. \qquad (13)$$

Wenn $m = \frac{x}{h}$ negativ wäre, so hätte man wieder:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m$$
$$= \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

für $m = \infty$. Für $m = 1000000$ erhält man:

$$e = \left(\frac{1000001}{1000000}\right)^{1000000} = 2{,}71828\ldots$$

Das Gesetz, wonach m ins Unendliche zunimmt, ist gleichgültig, und man kann sich m immer als eine ganze Zahl denken.

26) Wenn $y = \log f(x)$ ist, und man setzt einstweilen $z = f(x)$, so daß $y = \log z$ wird; so hat man nach (10) und (13):

$$y' = \log e \,.\, \frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (14)$$

Wie lauten die in (13) und (14) liegenden Regeln?

27) Es sei $y = f(x) = a^x$, so ist $\log y = \log f(x) = \log a \,.\, x$; folglich nach (1) und (14):

$$\log e \,.\, \frac{y'}{y} = \log e \,.\, \frac{f'(x)}{f(x)} = \log a;$$

mithin:

$$y' = f'(x) = \frac{\log a}{\log e}\, y = \frac{\log a}{\log e}\, f(x) = \frac{\log a}{\log e} \,.\, a^x$$
$$= \overset{e}{\log} a \,.\, a^x = \frac{a^x}{\overset{a}{\log} e}, \qquad (15)$$

wo $\overset{e}{\log}$, $\overset{a}{\log}$ resp. Logarithmen in dem Systeme von der Grundzahl e oder a bedeuten.

Wie lautet die in (15) liegende Regel für die Bildung der Ableitung der Exponentialfunktion a^x?

Wenn $y = f(x) = e^x$ ist, so ist offenbar:

$$y' = f'(x) = e^x. \qquad (16)$$

28) Ist $y = a^{f(x)}$ und man setzt einstweilen $z = f(x)$, so daß $y = a^z$ wird; so hat man nach (10) und (15):

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{\log a}{\log e} \cdot a^{f(x)} f'(x) \\ &= \overset{e}{\log} a \cdot a^{f(x)} f'(x) \\ &= \frac{1}{\overset{a}{\log} e} \cdot a^{f(x)} f'(x). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Wie lautet die in (17) liegende Regel?

29) Wenn $y = \sin x$ ist, so ist nach §. 71, $y' = \cos x$. (18)

30) Wenn $y = \cos x$ ist, so hat man $y' = -\sin x$ (§. 71). (19)

31) Wenn $y = \tang x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ist, so hat man nach (8), (18) und (19):

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \quad (20)$$

32) Wenn $y = \cot x$ ist, so ist $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; folglich nach (8), (18) und (19):

$$y' = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \quad (21)$$

33) Wenn $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ist, so hat man nach (9) und (19):

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \,.\, \tang x. \quad (22)$$

34) Wenn $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ ist, so hat man nach (9) und (18):

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x \,.\, \cot x. \quad (23)$$

35) Wenn $y = \sin f(x)$, $y = \cos f(x)$, $y = \tang f(x)$, $y = \cot f(x)$, $y = \sec f(x)$ und $y = \operatorname{cosec} f(x)$ ist; so hat man nach (8), (18), ... (23):

$$y' = \cos f(x) \,.\, f'(x), \quad (24)$$
$$y' = -\sin f(x) \,.\, f'(x), \quad (25)$$
$$y' = \left(\sec f(x)\right)^2 . \, f'(x), \quad (26)$$
$$y' = -\left(\operatorname{cosec} f(x)\right)^2 . \, f'(x), \quad (27)$$
$$y' = \sec f(x) \tang f(x) \,.\, f'(x) \quad (28)$$
$$y' = -\operatorname{cosec} f(x) \,.\, \cot f(x) \,.\, f'(x), \quad (29)$$

Wie lauten die in den Gleichheiten (18) . . . (29) liegenden Regeln?

36) Wenn $y = \arc\sin x$ ist, so ist $x = \sin y$, $\cos y = \sqrt{1-x^2}$; folglich:

$$x' = \cos y = \sqrt{1-x^2},$$

und mithin nach (11):

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (30)$$

37) Wenn $y = \arc\cos x$ ist, so ist $x = \cos y$, $\sin y = \sqrt{1-x^2}$; folglich:

$$x' = -\sin y = -\sqrt{1-x^2},$$

und nach (11):

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (31)$$

38) Wenn $y = \arc\operatorname{tang} x$ ist, so ist $x = \operatorname{tang} y$, und folglich:

$$x' = \sec^2 y = 1+x^2, \text{ also: } y' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (32)$$

u. s. f.

29) Wenn y eine unentwickelte (implicite) Funktion von x ist, so daß man zwischen x und y eine Gleichung $f(x,y) = o$ hat, so braucht man diese Gleichung nicht erst für y aufzulösen, um y als entwickelte Funktion von x zu erhalten, und dann die Ableitung y′ nach den frühern Regeln zu bestimmen. Denn da die Gleichung $f(x, y) = o$ für jeden Werth von x und den zugehörigen Werth von y stattfinden muß; so ist auch:

$$f(x+h, y+k) = o,$$

mithin:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = o,$$

oder:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) = o,$$

also auch:

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} + \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = o,$$

und endlich, wenn man zur Grenze übergeht:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y' = o, \\ \text{woraus folgt:} \\ y' = -\dfrac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}, \end{array}\right\} \qquad (33)$$

wo f'_x und f'_y resp. die Ableitung von $f(x, y)$ bezeichnen, wenn nur x, oder nur y als veränderlich gedacht wird, und deshalb partielle Ableitungen heißen.

Wie lautet die in (33) liegende Regel für die Bildung der Ableitung einer impliciten Funktion?

Wenn man zwei Gleichungen:

$$f(x, y, t) = o, \; F(x, y, t) = o$$

hat, so daß x und y Funktionen von t sind; so ergeben sich auf ähnliche Weise wie vorhin sehr leicht die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f'_t + f'_x x' + f'_y y' = o, \\ F'_t + F'_x x' + F'_y y' = o, \end{array}\right\} \quad (34)$$

woraus man die Abtheilungen x', y' durch Elimination erhält.

31) Höhere Ableitungen. — Wenn die gegebene Funktion $y = f(x)$ nicht von der Form $y = ax + b$ ist, so ist die Ableitung $y' = f'(x)$ selbst wieder eine Funktion von x, wovon man also ebenfalls die Ableitung $y'' = f''(x)$ suchen kann, welche zu der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ genau in derselben Beziehung steht, wie diese zu der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$, und die zweite Ableitung oder die Ableitung der zweiten Ordnung genannt wird. — Ebenso kann man Ableitungen der dritten, vierten, ... Ordnung zu suchen haben, wozu jedoch keine neuen Regeln erfordert werden, weshalb wir hier blos einige Beispiele anführen wollen:

Wenn $y = f(x) = x^n$ ist, so ist (12):

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) = nx^{n-1}, \\ y'' &= f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \\ y''' &= f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wenn $y = \log x$ ist, so ist (13):

$$\begin{aligned} y' &= \log e \,.\, \frac{1}{x}, \\ y'' &= -\log e \,.\, \frac{1}{x^2}, \\ y''' &= 1.2.\log e \,.\, \frac{1}{x^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wenn $y = a^x$ ist, so ist (15):

$$y' = \overset{e}{\log} a \, . \, a^x ,$$

$$y'' = (\overset{e}{\log} a)^2 \, . \, a^x ,$$

$$y''' = (\overset{e}{\log} a)^3 \, . \, a^x ,$$

. . . .

Wenn $y = e^x$ ist, so ist (16):

$$y' = e^x ,$$

$$y'' = e^x ,$$

$$y''' = e^x ,$$

. . . .

Wenn $y = \sin x$ ist, so ist (18):

$$y' = \cos x ,$$

$$y'' = - \sin x ,$$

$$y''' = - \cos x ,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \sin x ,$$

. . . . .

Wenn $f(x, y) = y^3 - 3axy + x^3 = o$ ist, so hat man (33):

$$y' = - \frac{f'_x}{f'_y} = - \frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} ,$$

und hieraus ergibt sich nach (8), wenn man bemerkt, daß y eine Funktion von x ist (10):

$$y'' = - \frac{(y^2 - ax)(2x - ay') - (x^2 - ay)(2yy' - a)}{(y^2 - ax)^2} .$$

Setzt man hierin für y' seinen obigen Werth und reducirt, so erhält man:

$$y'' = - \frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3} ,$$

woraus sich ebenso der Werth von y''' ergibt; u. s. f.

Man kann aber auch leicht den allgemeinen Ausdruck für y'' erhalten; denn wenn man von (33) nach der Formel (8) die Ableitung sucht, indem man bemerkt: daß y eine Funktion von x ist, also die Regel (10) beachtet; so erhält man:

$$y'' = - \frac{f''_{x^2} + 2 f''_{xy} \, y' + f''_{y^2} \, . \, y'^2}{f'_y} . \qquad (35)$$

indem man bemerkt: daß $f''_{xy} = f''_{yx}$ ist, was sich leicht allgemein zeigen läßt, d. h. daß es einerlei Resultat gibt, ob man von $f(x, y)$ zuerst die Ableitung nach x und dann die nach y, oder umgekehrt nimmt. — Setzt man in den letzten Ausdruck für y' seinen Werth (33), so bekommt man endlich:

$$y'' = -\frac{f'^2_y f''_{x^2} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2}}{f'^3_y}. \qquad (36)$$

Berechnet man das obige Beispiel $f(x, y) = y^3 - 3axy + x^3 = 0$ nach der Formel (36), so hat man:

$$f'_x = 3x^2 - 3ay, \quad f'_y = 3y^2 - 3ax$$
$$f''_{x^2} = 6x \quad , \quad f''_{y^2} = 6y$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = 3a,$$

und wenn man diese Werthe in die Formel (36) setzt; so erhält man wieder:

$$y'' = -\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

32) Reihenentwickelungen von $f(x)$ und $f(x+h)$. — Man setze:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \\ \text{so ist auch:} \\ f'(x) = \quad A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots \\ f''(x) = \quad 2A_2 x + 2.3A_3 x + \ldots \\ \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (\mu)$$

Da nun die noch unbestimmten Coefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, ... von x unabhängige Constanten sind, so kann man auch den Werth $x = 0$ zu ihrer Bestimmung benutzen. — Setzt man aber in den Gleichheiten (μ) diesen Werth für x, so ergibt sich:

$$A_0 = f(0),\ A_1 = f'(0),\ A_2 = \frac{f''(0)}{1.2},\ A_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3}, \ldots$$

Man hat also:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots \quad (37)$$

Setzt man ferner $f(x) = \varphi(x+h)$, wo h eine Constante bezeichnet; so hat man:

$$f'(x) = \varphi'(x+h),\ f''(x) = \varphi''(x+h),\ f'''(x) = \varphi'''(x), \ldots$$

folglich:

$$f(0) = \varphi(h), f'(0) = \varphi'(h), f''(0) = \varphi''(h), f'''(0) = \varphi'''(h), \ldots$$

und wenn man diese Werthe von $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... in (37) setzt:

$$\varphi(x+h) = \varphi(h) + \frac{\varphi'(h)}{1}x + \frac{\varphi''(h)}{1.2}x^2 + \frac{\varphi'''(h)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Da aber $\varphi(x+h)$ offenbar eine symmetrische Funktion von x und h ist, deren Werth nicht geändert wird, wenn man x und h unter sich vertauscht; so darf man diese Vertauschung vornehmen, wodurch man erhält:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{1}{1}\,\varphi'(x)\,h + \frac{1}{1.2}\,\varphi''(x)\,h^2 + \frac{1}{1.2.3}\,\varphi'''(x)\,h^3 + \ldots, \qquad (38)$$

oder da das Funktionszeichen gleichgültig ist:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1}\,f'(x)\,h + \frac{1}{1.2}\,f''(x)\,h^2 + \frac{1}{1.2.3}\,f'''(x)\,h^3 + \ldots. \qquad (38)$$

Verbesserungen.

Seite 8. Zeile 17 von oben lies o statt o^4.
„ 67. „ 18 „ „ „ Veränderung der Lage.
„ 203 letzte Zeile lies: welche die Richtcurve heißt.

Gedruckt bei Gebr. Mäntler.

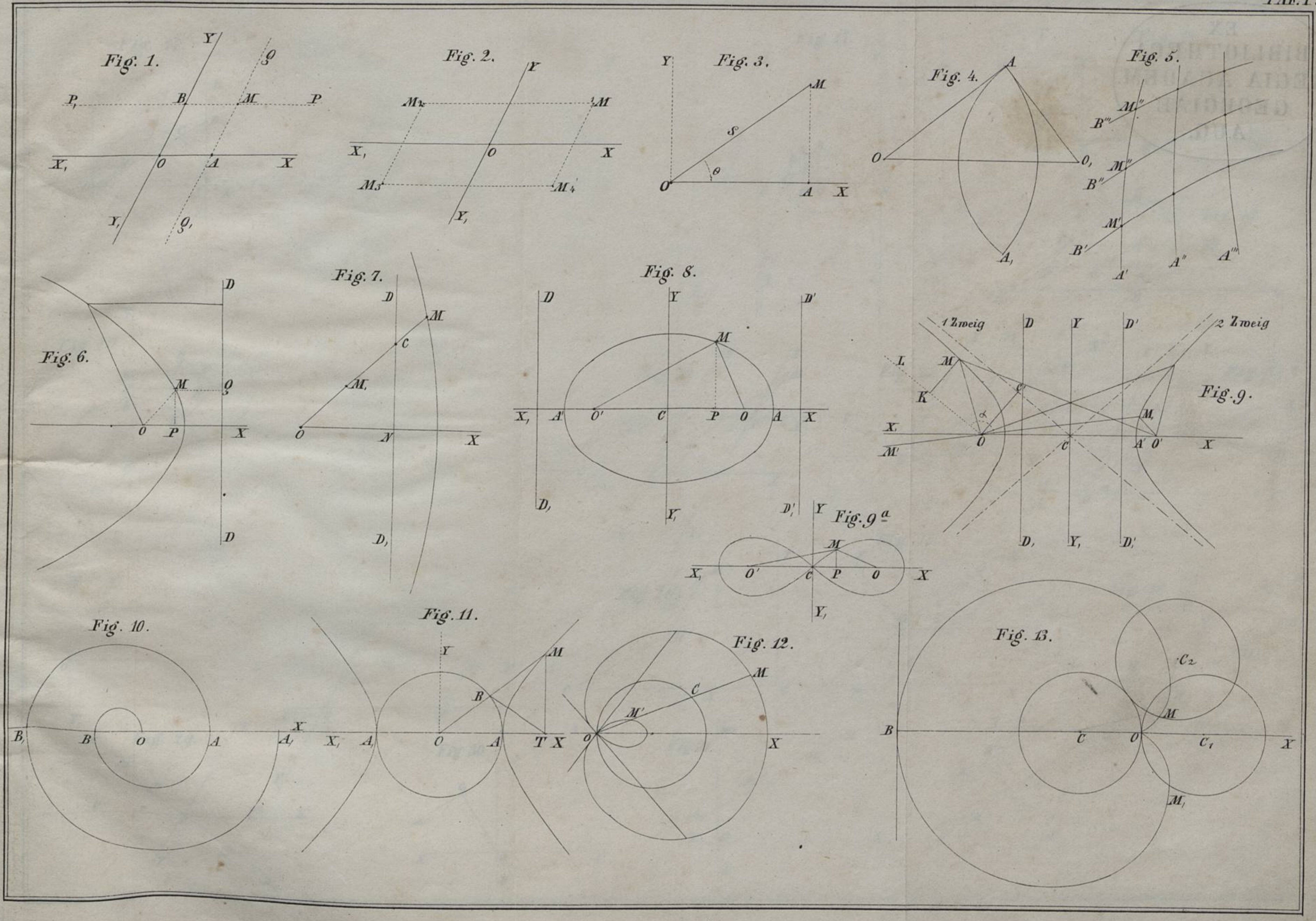


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
1 Zweig
2 Zweig
Fig. 9 a.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

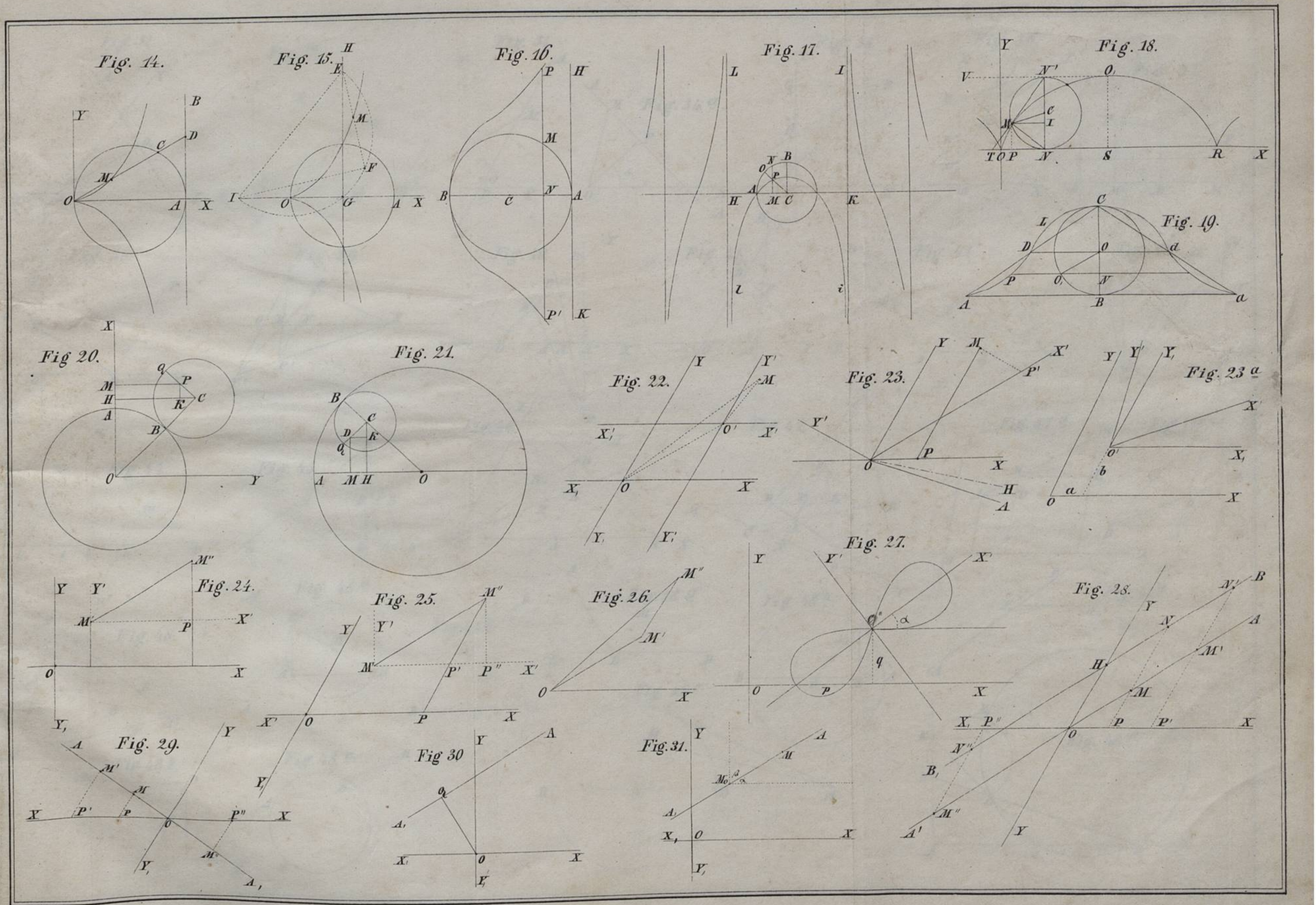


Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 23 a
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig 30
Fig. 31.

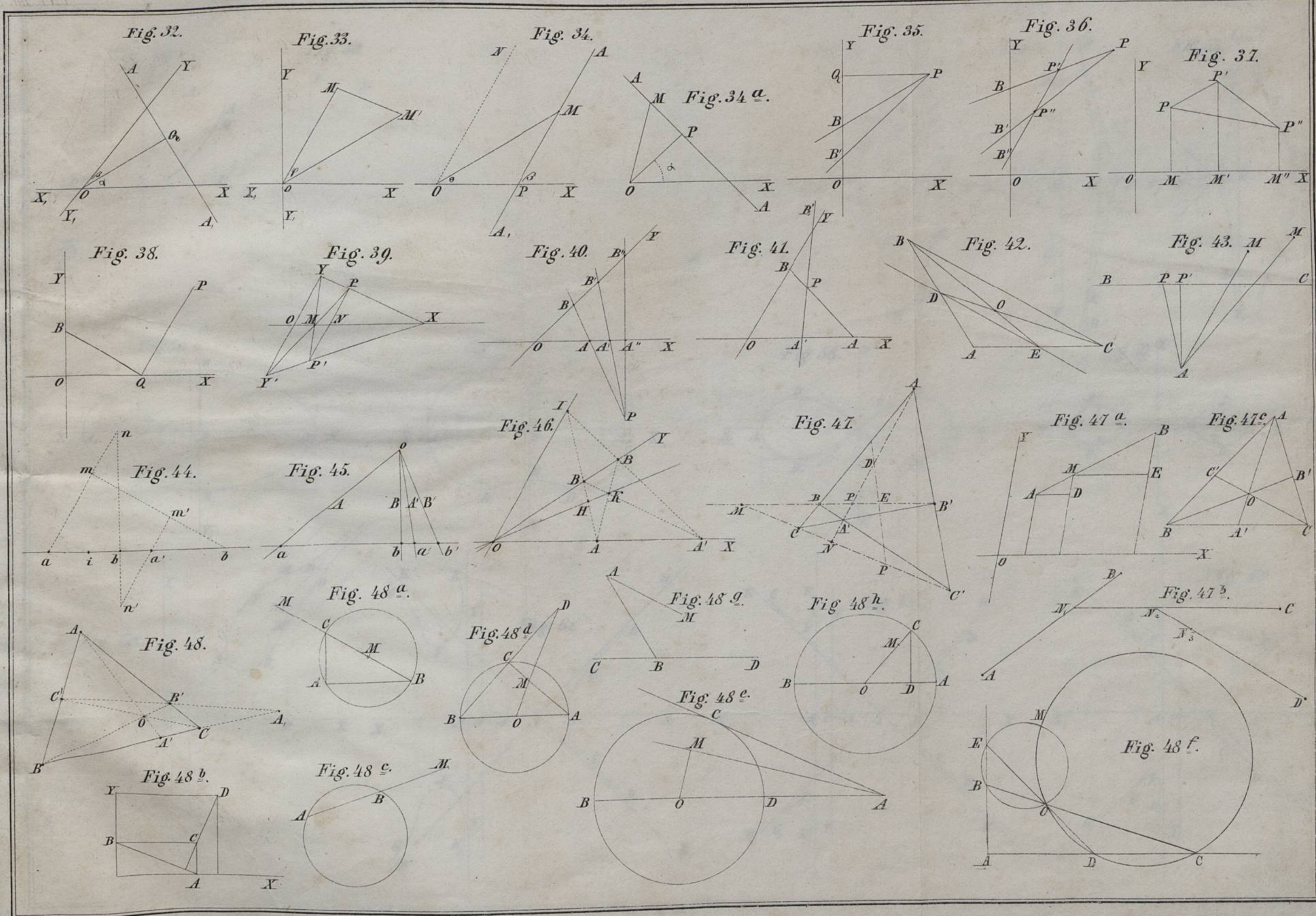


Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 34 a.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 47 a.
Fig. 47 c.
Fig. 47 b.
Fig. 48.
Fig. 48 a.
Fig. 48 d.
Fig. 48 g.
Fig 48 h.
Fig. 48 e.
Fig. 48 f.
Fig. 48 b.
Fig. 48 c.

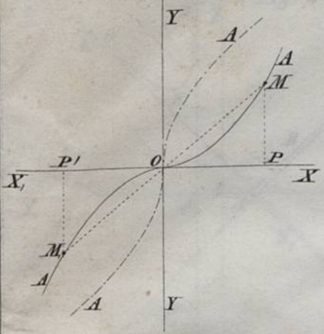


Fig. 49.

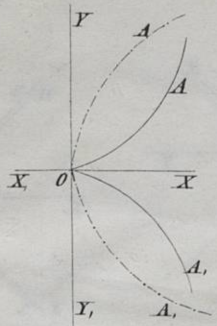


Fig. 50.

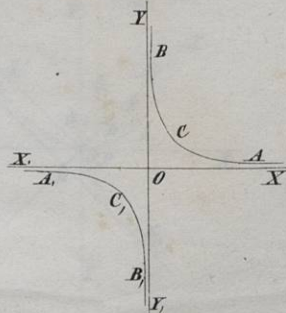


Fig. 51.

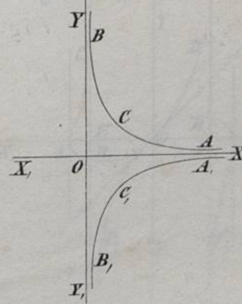


Fig. 52.

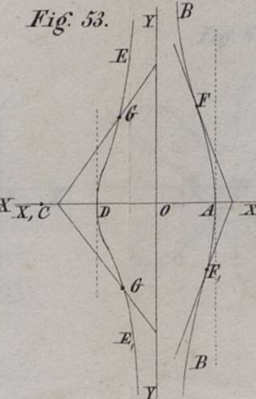


Fig. 53.

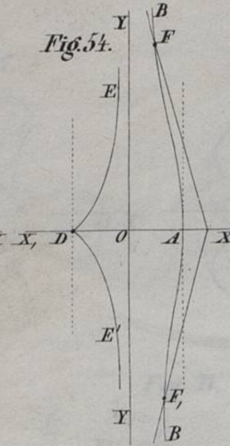


Fig. 54.

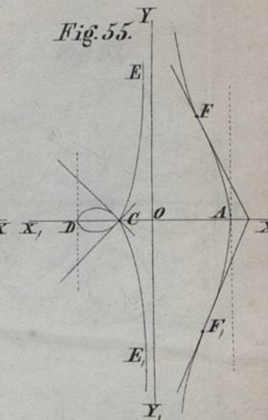


Fig. 55.

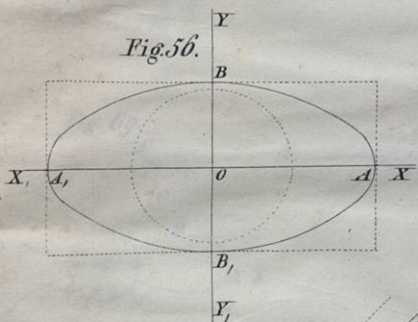


Fig. 56.

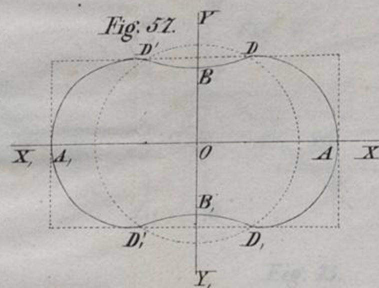


Fig. 57.

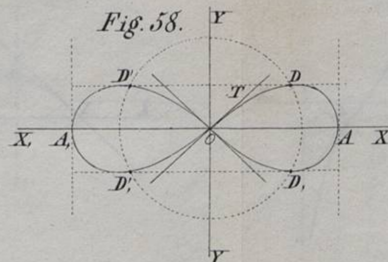


Fig. 58.

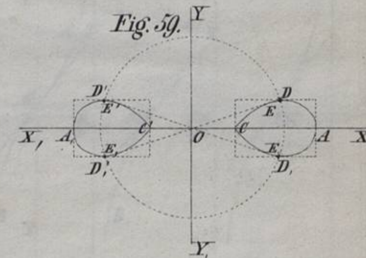


Fig. 59.

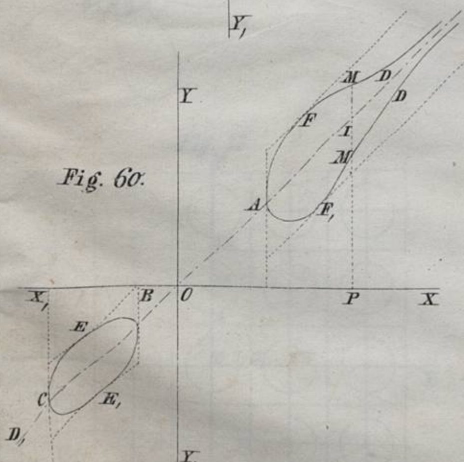


Fig. 60.

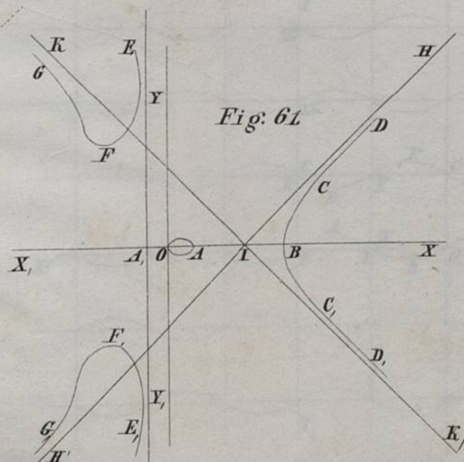


Fig. 61.

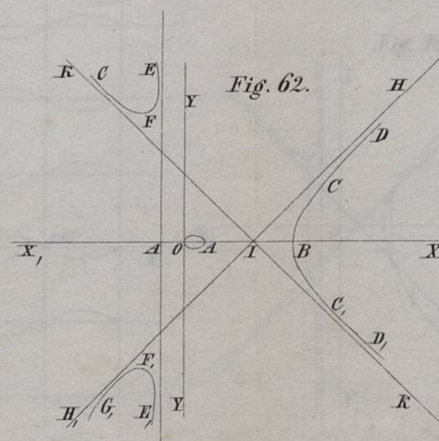


Fig. 62.

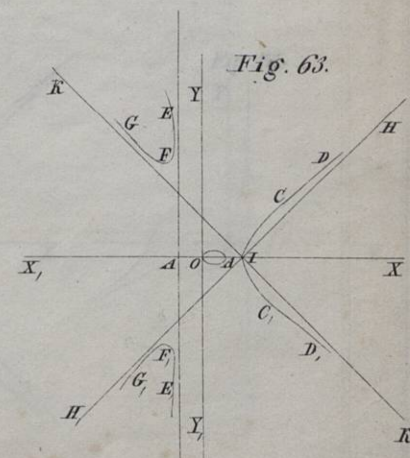


Fig. 63.

Fig. 64.

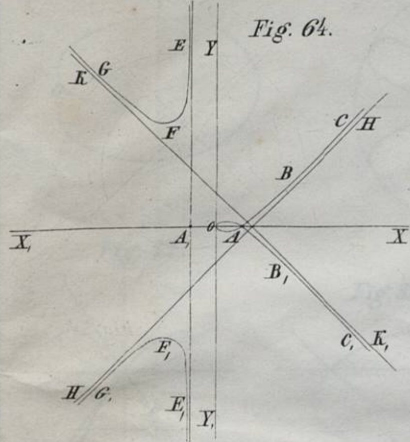


Fig. 65.

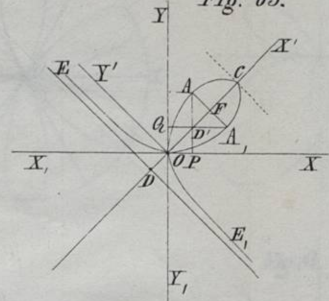


Fig. 66.

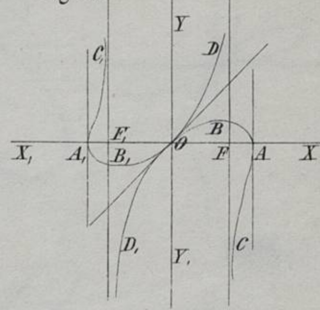


Fig. 67.

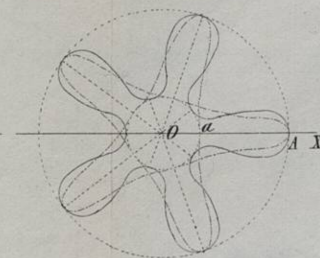


Fig. 68.

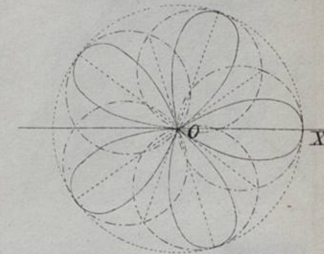


Fig. 69.

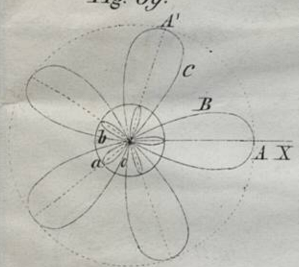


Fig. 70.

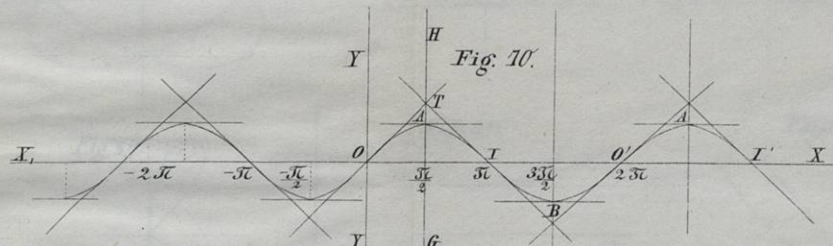


Fig. 71.

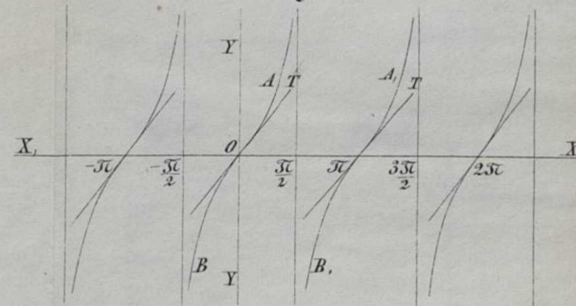


Fig. 72.

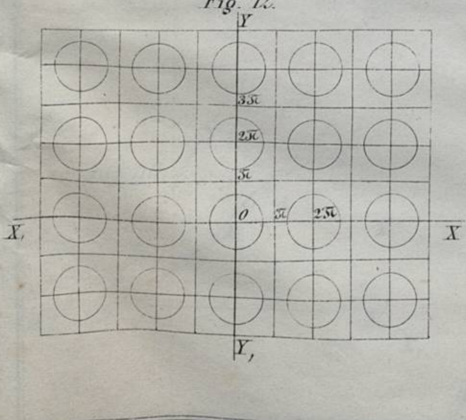


Fig. 73.

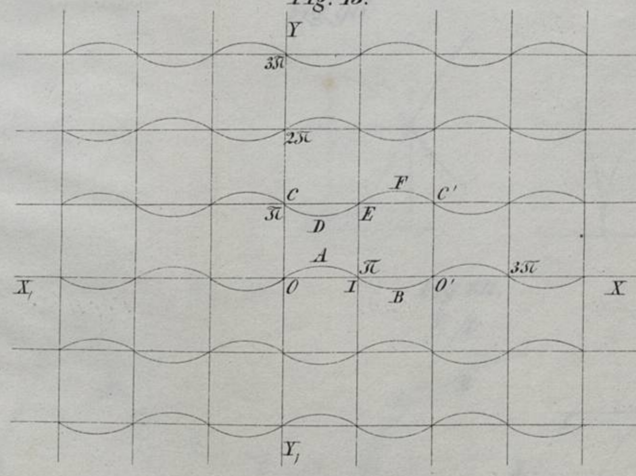


Fig. 74.

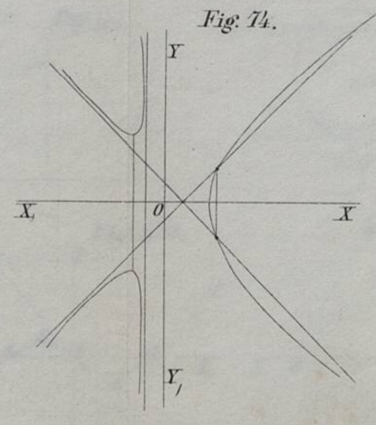
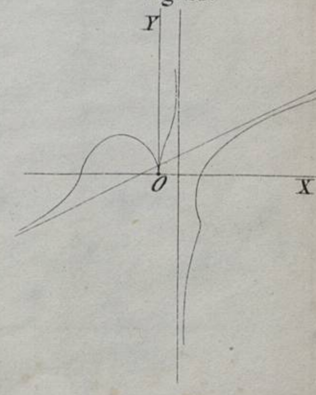


Fig. 75.



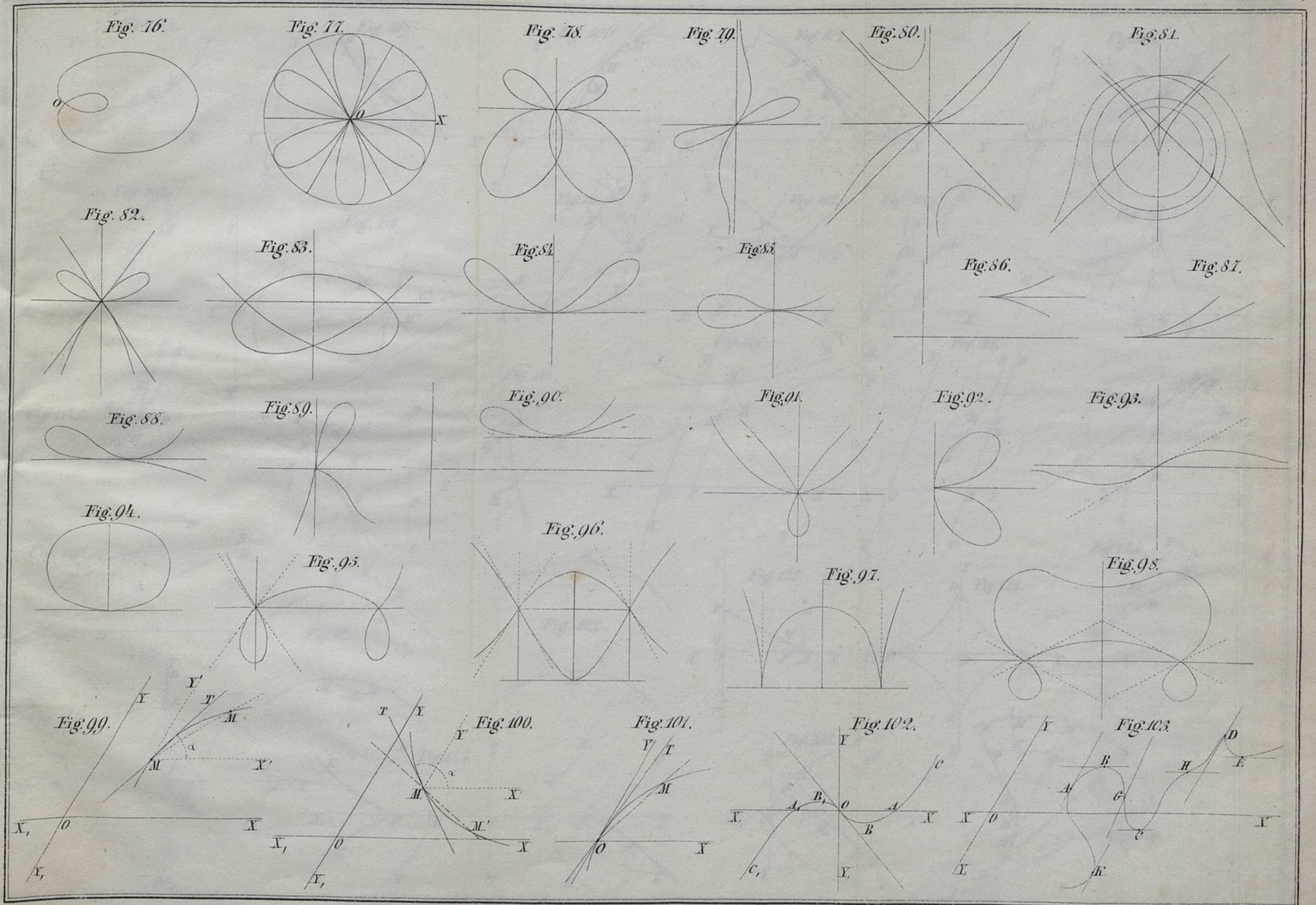


Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.

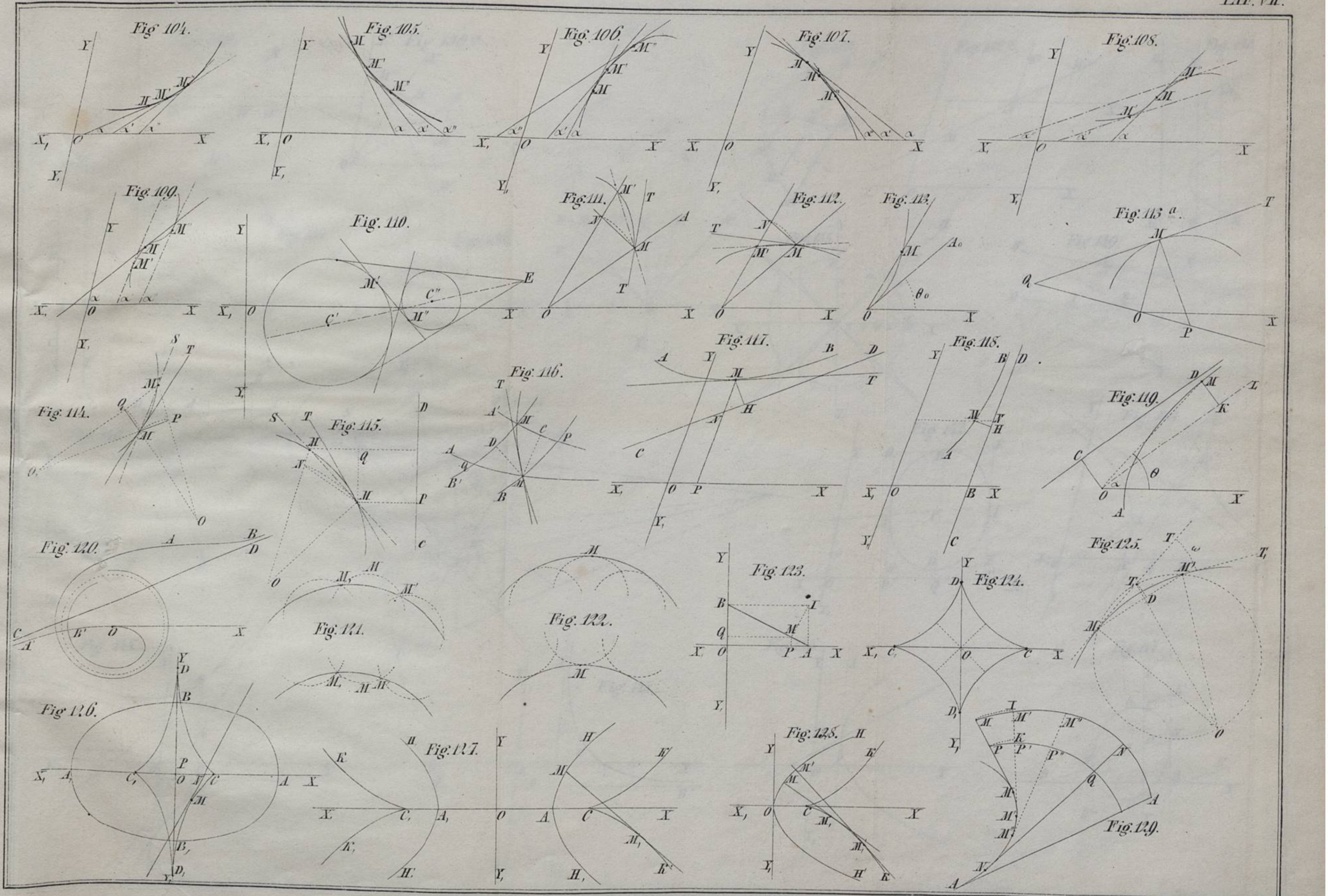


Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 113 a.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.

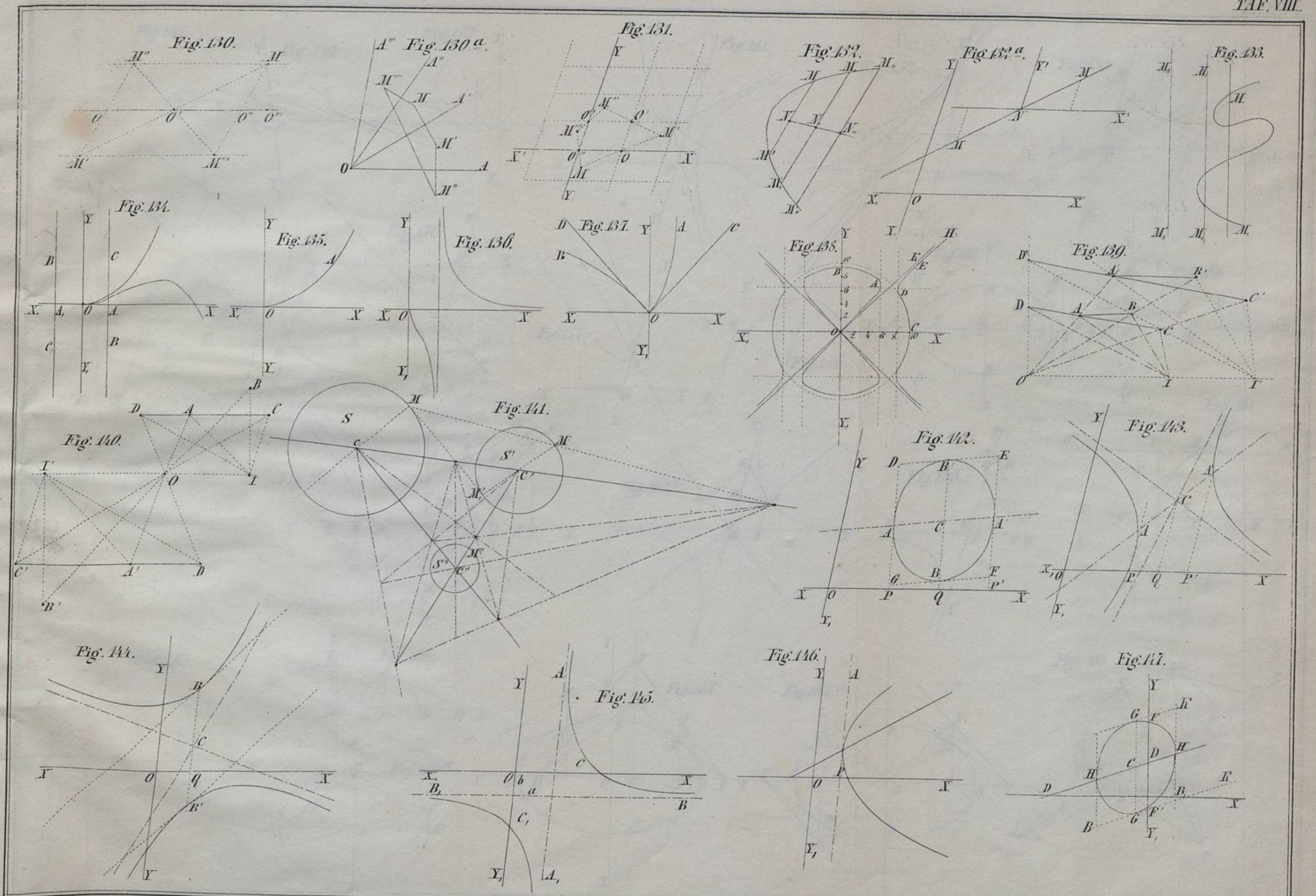


Fig. 130.
Fig. 130 a.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 132 a.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.

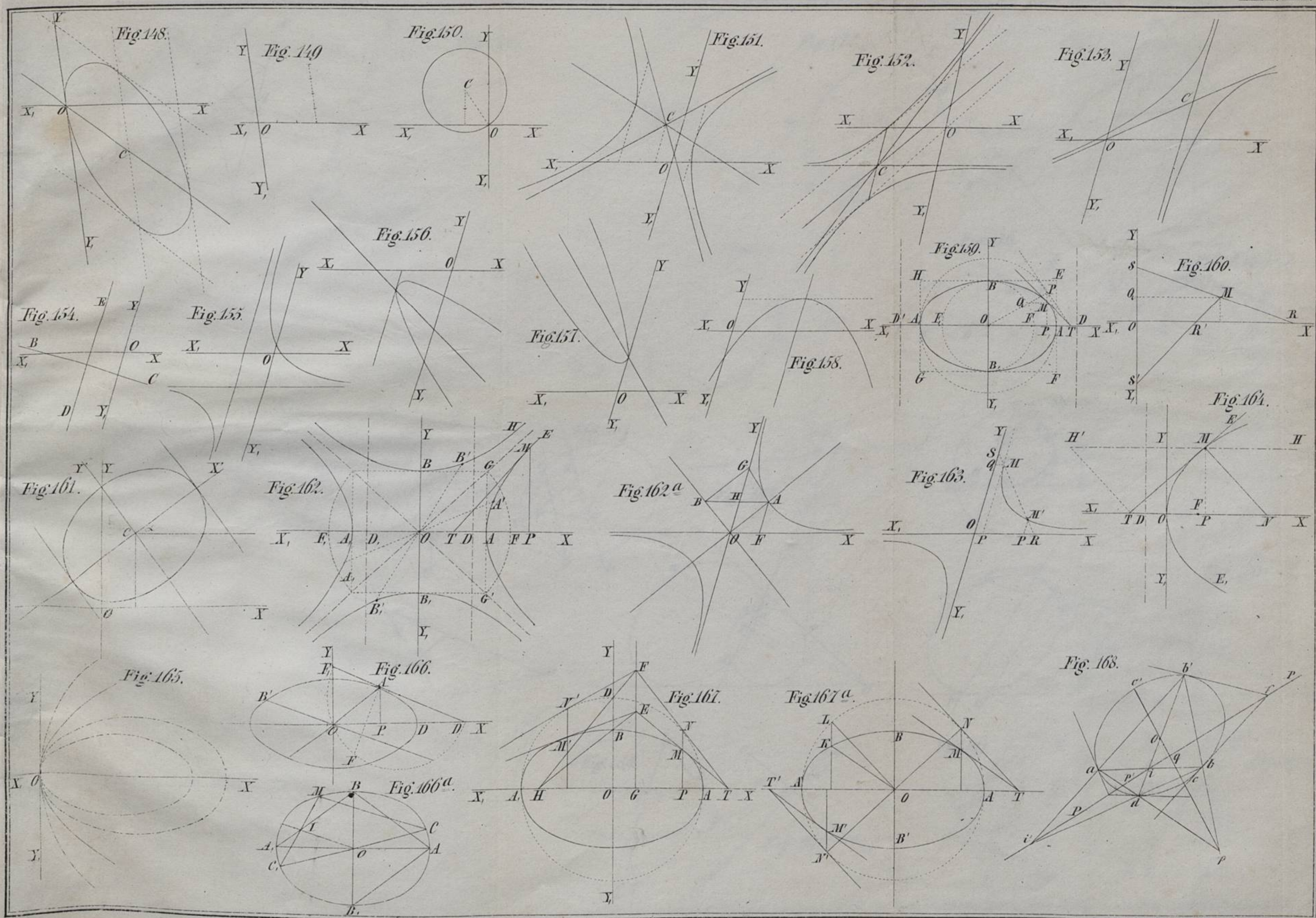


Fig. 148.
Fig. 149
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 162 a.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 166 a.
Fig. 167.
Fig. 167 a.
Fig. 168.

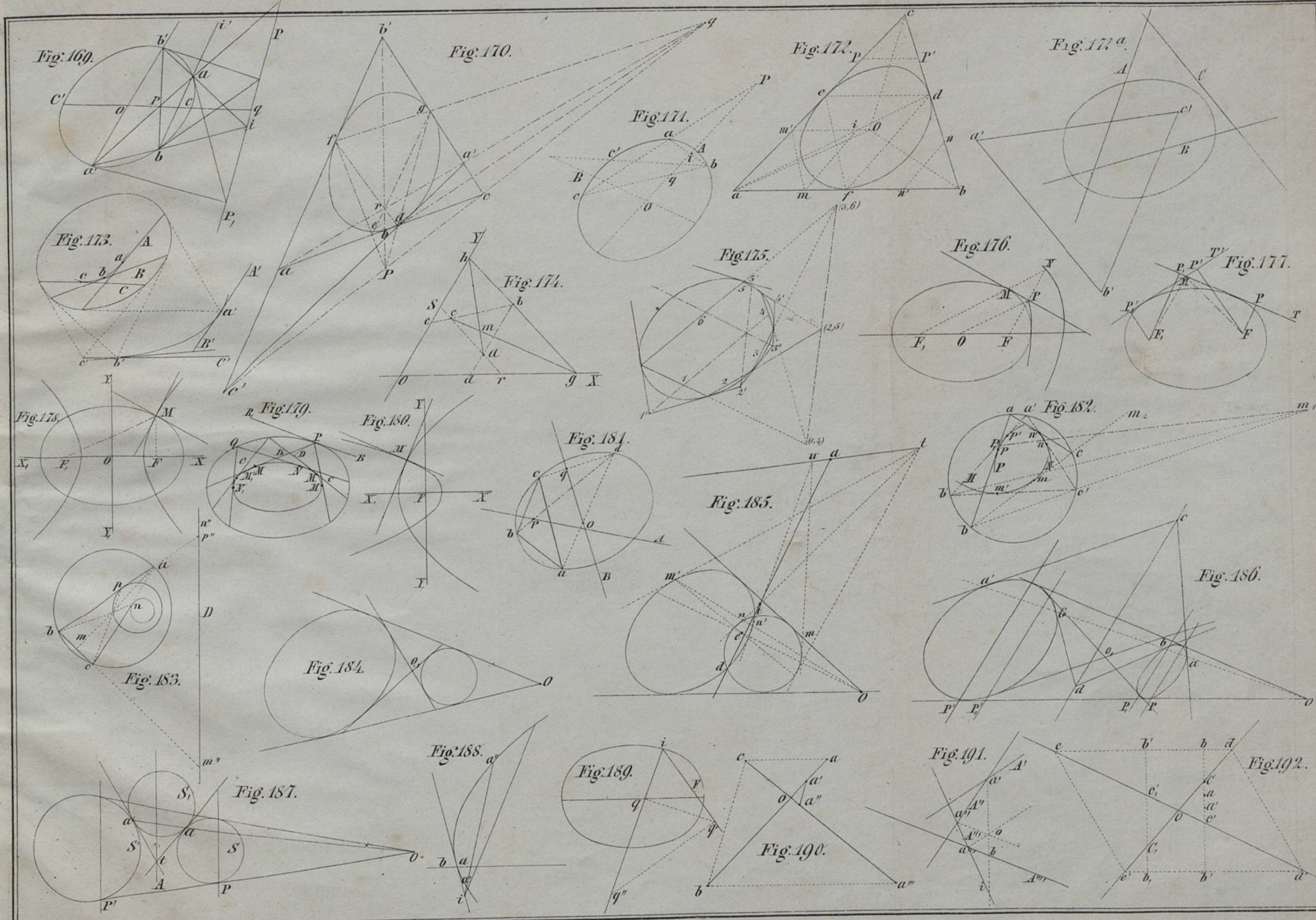
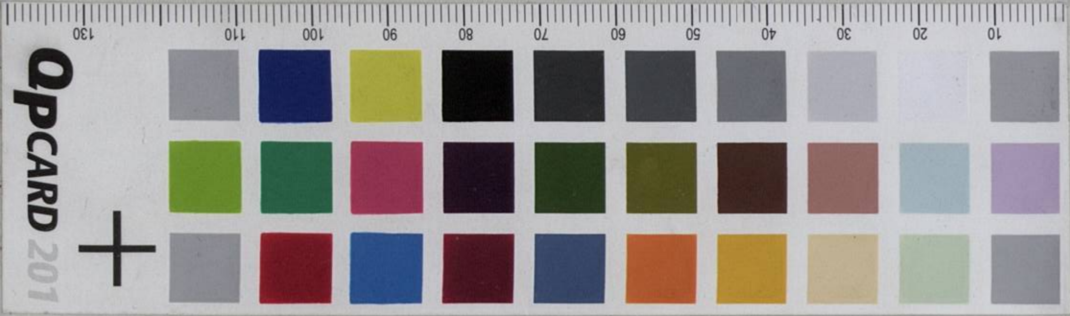


Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172.
Fig. 172 a.
Fig. 173.
Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Fig. 184.
Fig. 185.
Fig. 186.
Fig. 187.
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.


QpCARD 201