On a aussi

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=v\varphi_t,$$

$$\sum\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}=\sum\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)x.$$

Cette dernière relation peut s'écrire

$$\sum\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}=\frac{v^3}{R}(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)=\pm\frac{v^3\sin\theta}{\cos\theta}.$$

L'égalité (1) devient :

$$v^2(\varphi^2-v^4)=v^2\varphi_t^2+\frac{v^6\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

ou

$$v^2(\varphi^2-\varphi_t^2)=\frac{v^6}{\cos^2\theta}.$$

Or

$$\varphi^2-\varphi_t^2=\varphi_c^2=\frac{v^4}{R^2}=\frac{v^4}{\cos^2\theta}.$$

L'égalité est donc vérifiée.

SUR LA SÉRIE DES NOMBRES PREMIERS;

par M. F. Proth.

Soit donnée la série naturelle des nombres premiers :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

Si l'on prend les différences premières des termes de cette série, on aura une seconde série, sur laquelle on opérera comme sur la première; et ainsi de suite à l'infini : on doit avoir soin, toutefois, de toujours retrancher le plus petit terme du plus grand. On obtient, de la sorte, le tableau suivant :

1 2 3 5 7 11 13 17 . . .

1 1 2 2 4 2 4 . . .

0 1 0 2 2 2 . . .

1 1 2 0 0 . . .

0 1 2 0 . . .

1 1 2 . . .

0 1 . . .

1 . . .

Je dis que : *les dernières différences sont représentées par la série uniforme* : 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

Autrement dit : *la seconde colonne oblique, des différences, ne contiendra que le chiffre* 1.

Pour démontrer ce théorème, il faut uniquement prouver que la troisième colonne oblique ne saurait contenir que des 0 ou des 2.

En considérant l'inverse de ce théorème, on pourrait se proposer la question suivante :

Étant donnée la série 1, 0, 1, 0, 1, 0 ..., *reconstituer la série naturelle des nombres premiers.*

Cette question serait aisée à résoudre, si l'on savait dans quel ordre il faut employer les signes + et —; mais cela paraît difficile à déterminer.

Comme il y a une infinité de séries qui jouissent de la propriété énoncée ci-dessus, on peut se poser encore ce problème :

Trouver une infinité de séries croissantes, telles que les dernières différences, prises dans l'ordre indiqué, soient constamment 1, 0, 1, 0, 1, ...

Si l'on cherche la série *maximum* qui satisfait à cette condition l'on trouve que tous ses termes sont de la forme $2^k + 1$. Il est évident que, dans la construction du tableau, on emploie seulement le signe $+$, parce qu'il donne la plus grande somme possible.

De cette considération, appliquée au théorème, on déduit que :

De 1 à $2^k + 1$ inclusivement, il existe au moins $(k + 2)$ nombres premiers.

La série *minimum* croissante, dont les dernières différences sont 1, 0, 1, 0 ..., sera exprimée par

$$1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots,$$

c'est-à-dire par les nombres 1 et 2, suivis de tous les nombres impairs.

Nous allons maintenant étudier la loi du tableau précédent.

Si, dans ce tableau, on affecte du signe — les termes qui sont la différence de deux termes dont le plus petit est à droite, les autres termes conservant le signe $+$, on obtient les séries suivantes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 7 & & 11 & & 13 & & 17 & \\
A & & & & & & & & & & & & & & & & B \\
 & & 1 & & 1 & & 2 & & 2 & & 4 & & 2 & & 4 & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 0 & & 2 & & -2 & & 2 & & & \\
 & & & & 1 & & -1 & & 2 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 & & 1 & & -2 & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & -2 & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & C & & & & & & & &
\end{array}$$

Voici les principales propriétés de ces séries :

1° *La somme des* n *premiers termes d'une rangée horizontale, ajoutée au premier de la rangée précédente, est égale au terme de rang* (n + 1) *dans cette dernière.*

Exemple : $1 + 0 + 1 + 0 + 2 = 4$, cinquième terme de la deuxième rangée.

2° *La somme des termes, pris positivement, d'une rangée oblique dans le sens* BC, *est égale au double de la somme des termes négatifs de la rangée suivante, plus la différence première de cette rangée, moins la différence dernière de cette même rangée.*

Exemple. Soit la sixième colonne BC. On a

$$0 + 1 + 2 + 0 + 2 + 2 = 7,$$

et

$$7 = (2 \times 2) + 4 - 1.$$

Si l'on considère un triangle quelconque ABC, la somme de tous ses termes pris positivement, jusqu'à $P_n = 13$, est égale au double des termes négatifs, jusqu'à P_{n+1}, plus $P_{n+1} - 1$, moins la somme des dernières différences de A à C, jusqu'à P_{n+1}.

On a, autrement dit, soit la série des premières différences jusqu'à 17 :

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4,$$

soit la série AC :

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1.$$

Somme des différences : $0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 12$.

Le nombre 12 est égal à la somme de tous les termes du triangle ABC pris positivement, moins le double des termes négatifs, y compris la rangée P_8 ou 17 : $12 = 26 - 14$.

On pourrait varier, de bien des manières, l'énoncé de ces diverses propriétés, et en trouver d'autres. La chose importante est d'exprimer ces diverses propriétés, autant que possible, en fonction de la série 1, 0, 1, 0, 1, 0 ..., base de cette théorie.

Si l'on considère les colonnes obliques dans le sens AC, la première colonne ne peut avoir de termes supérieurs à 1; la deuxième colonne est dans le même cas; la troisième ne peut avoir de termes plus grands que 2; les nombres de la quatrième colonne ne peuvent surpasser 4; ou bien, en général, *un terme de la* $n^{\text{ième}}$ colonne *ne peut surpasser* 2^{2-n}.

Corollaire. — *Si* P_n, P_{n+1} *sont deux nombres premiers consécutifs, on a*

$$P_{n+1} - P_n < 2^{n-2}.$$

Les propriétés de la série des nombres premiers nous permettent d'établir rigoureusement la proposition suivante, regardée jusqu'alors comme empirique, admise comme *postulatum* par M. Bertrand, et vérifiée, directement, depuis $n = 3$ jusqu'à $n = 6\,000\,000$:

De P *à* 2P — 1, *il existe au moins un nombre premier* (*).

En effet, s'il n'existait pas de nombre premier dans cet intervalle, la dernière différence correspondante serait, évidemment, plus grande que 0 ou 1, ce qui contredirait le théorème fondamental.

Voici encore une autre propriété :

La différence entre deux nombres premiers consécutifs est moindre que le rang du plus petit des deux, dans la série des nombres premiers.

Il y a certainement encore d'autres conséquences, et cette théorie comporterait de nouveaux développements.

Pour terminer cette Note, nous donnerons l'énoncé suivant, trouvé par induction :

La somme des premiers nombres premiers ne saurait être égale à une puissance de 2; théorème que nous croyons exact, quoique nous n'en ayons pas la démonstration rigoureuse. On nous permettra de la proposer à de plus habiles.

(*) Cette proposition a été démontrée par M. Tchébychef (Le Besgue, *Exercices d'Analyse numérique*, p. 120). Est-ce que les *théorèmes* de M. Proth, qu'on vient de lire, ne sont pas, plutôt, des *postulata ?* (E. C.)