XV.

Einige Methoden der Bestimmung der Brennpunkts-Coordinaten und Achsengleichungen eines Kegelschnitts in trimetrischen Coordinaten.

Von

Dr. Stoll,

Gymnasiallehrer in Bensheim.

A. Die Brennpunkte.

Die Gleichung eines Kegelschnittes sei

$$1)\quad K = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_1a_2x_1x_2 = 0$$

und A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31}, A_{12} seien die Unterdeterminanten seiner Determinante Δ; ferner setze man:

$$2)\quad \begin{cases} A_1 = A_{11}\sin\alpha + A_{12}\sin\beta + A_{13}\sin\gamma, \\ A_2 = A_{21}\sin\alpha + A_{22}\sin\beta + A_{23}\sin\gamma, \\ A_3 = A_{31}\sin\alpha + A_{32}\sin\beta + A_{33}\sin\gamma, \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} A = A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma \\ \qquad + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nach bekannten Sätzen die anderen:

$$4)\quad \begin{cases} a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 = \Delta\sin\alpha, \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 = \Delta\sin\beta, \\ a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 = \Delta\sin\gamma, \end{cases}$$

$$5)\quad a_{11}A_1^2 + a_{22}A_2^2 + a_{33}A_3^2 + 2a_{23}A_2A_3 + 2a_{31}A_3A_1 + 2a_{12}A_1A_2 = \Delta A.$$

Hierzu kommt noch die Beziehung

$$6)\quad M = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma,$$

wo r den Radius des Umkreises und x_1, x_2, x_3 die absoluten trimetrischen Coordinaten eines Punktes, das heisst die senkrechten Abstände desselben von den Seiten des Fundamentaldreiecks bedeuten. Endlich sind ganz allgemein die relativen Coordinaten des Kegelschnitt-Mittelpunktes gegeben durch die Gleichung:

$$7)\quad x_1 : x_2 : x_3 = A_1 : A_2 : A_3.$$

Um zunächst die Coordinaten der Brennpunkte und die Längen der Achsen zu bestimmen, gehen wir nach dem Vorgange von Salmon-Fiedler (Anal. Geom. der Kegelschnitte S. 692) aus von dem bekannten Satze, dass das Product der Senkrechten von den zwei Brennpunkten auf eine Tangente oder, was dasselbe ist, das Product der Senkrechten von einem Brennpunkte auf zwei parallele Tangenten constant ist, und zwar gleich dem Quadrat der halben Nebenachse, wenn dieser Brennpunkt reell, dagegen gleich dem Quadrat der halben Hauptachse, wenn derselbe imaginär ist. Eine Gerade, die parallel ist der Seite BC des Fundamentaldreiecks ABC, hat die Gleichung

$$\lambda x_1 + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma = 0,$$

oder mit Benutzung der Relation 6):

$$(\lambda - \sin\alpha) x_1 + M = 0.$$

Soll dieselbe den Kegelschnitt K berühren, so muss folgende Bedingung erfüllt werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \lambda \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sin\beta \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sin\gamma \\ \lambda & \sin\beta & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$A_{11}\lambda^2 + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\lambda\sin\gamma + 2A_{12}\lambda\sin\beta = 0.$$

Durch Berücksichtigung der Gleichung 3) und Ausscheidung gleicher Factoren erhält man hieraus:

$$A_{11}\lambda^2 + A - A_{11}\sin^2\alpha + 2(\lambda - \sin\alpha)(A_1 - A_{11}\sin\alpha) = 0,$$

oder

$$A_{11}(\lambda - \sin\alpha)^2 + 2A_1(\lambda - \sin\alpha) + A = 0;$$

weil aber $(\lambda - \sin\alpha)x_1 + M = 0$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$Ax_1{}^2 - 2MA_1x_1 + M^2A_{11} = 0.$$

Denkt man sich in derselben M durch seinen Werth

$$x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma$$

ersetzt, so ist sie vom zweiten Grade in Bezug auf x_1, x_2, x_3 und stellt das Product der Gleichungen der zwei zu BC parallelen Tangenten dar; versteht man aber unter M den constanten Werth $2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, so giebt sie zwei Werthe für x_1, nämlich:

$$\left.\begin{matrix} x_1' \\ x_1'' \end{matrix}\right\} = \frac{M}{A}\left(A_1 \pm \sqrt{A_1{}^2 - A_{11}A}\right),$$

von denen der erste den Abstand der ersten zu BC parallelen Tangente von BC angiebt, der zweite den der zweiten.

Sind ferner x_1, x_2, x_3 die absoluten Coordinaten des Brennpunktes, etwa einer Hyperbel, so ist der Abstand desselben von der ersten Tangente gleich $x_1 - x_1'$, von der zweiten gleich $x_1 - x_1''$; das Product beider Abstände muss nach dem an die Spitze gestellten Satze gleich dem negativen Quadrat einer der Halbachsen sein, das heisst, es muss

$$(x_1 - x_1')(x_1 - x_1'') = -\varrho^2$$

oder entwickelt

$$x_1^2 - (x_1' - x_1'')x_1 + x_1' x_1'' = -\varrho^2$$

sein. Nun ist aber

$$x_1' + x_1'' = \frac{2MA_1}{A} \text{ und } x_1' x_1'' = \frac{M^2 A_{11}}{A};$$

daher bekommt man als Gleichung, die die Abstände x_1 eines Brennpunktepaares von BC giebt:

8) $$Ax_1^2 - 2MA_1 x_1 + M^2 A_{11} = -\varrho^2 A.$$

Diese ganze Entwickelung gilt natürlich nur für Centralkegelschnitte, nicht aber für die Parabel, weil der eine Brennpunkt derselben in unendlicher Ferne liegt und deshalb seine Coordinaten unendlich gross sind. Wie man dieselbe trotzdem theilweise nutzbar machen kann, soll später gezeigt werden.

Aus 8) folgt

$$x_1 = \frac{M}{A}\left(A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - AA_{11} - \frac{\varrho^2 A^2}{M^2}}\right);$$

ähnlich gebildete Werthe findet man für x_2 und x_3. Die Gleichungen 2) und 3) geben aber

$$\left\{\begin{aligned} A_1^2 - AA_{11} = &-(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\sin^2\beta - (A_{33}A_{11} - A_{31})^2 \sin^2\gamma \\ &+ 2(A_{31}A_{12} - A_{23}A_{11})\sin\beta\sin\gamma = \Delta(-a_{33}\sin^2\beta - a_{22}\sin^2\gamma + 2a_{23}\sin\beta\sin\gamma); \end{aligned}\right.$$

setzt man daher

9) $$\left\{\begin{aligned} -a_{33}\sin^2\beta - a_{22}\sin^2\gamma + 2a_{23}\sin\beta\sin\gamma = e_1, \\ -a_{11}\sin^2\gamma - a_{33}\sin^2\alpha + 2a_{31}\sin\gamma\sin\alpha = e_2, \\ -a_{22}\sin^2\alpha - a_{11}\sin^2\beta + 2a_{12}\sin\alpha\sin\beta = e_3, \end{aligned}\right.$$

so ist 9a):

$$A_1^2 - A_{11}A = \Delta e_1, \quad A_2^2 - A_{22}A = \Delta e_2, \quad A_3^2 - A_{33}A = \Delta e_3$$

und bezeichnet man die Grösse $\frac{\varrho^2 A^2}{M^2 \Delta}$ kurzweg mit λ^2, so geht obige Gleichung für x_1 über in:

10) $$x_1 = \frac{M}{A}\left(A_1 \pm \sqrt{\Delta(e_1 - \lambda^2)}\right).$$

Um den Werth von λ zu finden, multiplicire man diese Gleichung und die zwei ähnlich gebildeten der Reihe nach mit $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ und addire, so kommt, weil $x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma = M$ ist und der Factor M sich weghebt:

11) $$\sin\alpha\sqrt{e_1 - \lambda^2} + \sin\beta\sqrt{e_2 - \lambda^2} + \sin\gamma\sqrt{e_3 - \lambda^2} = 0.$$

Die Rationalisirung liefert die nach Potenzen von λ geordnete Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} 4\lambda^4 \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma + 2\lambda^2 \{&e_1\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma) \\ &+ e_2\sin^2\beta(\sin^2\beta - \sin^2\gamma - \sin^2\alpha) + e_3\sin^2\gamma(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha - \sin\beta)\} \\ &-(e_1^2\sin^4\alpha + e_2^2\sin^4\beta + e_3^2\sin^4\gamma - 2e_2e_3\sin^2\beta\sin^2\gamma \\ &-2e_3e_1\sin^2\gamma\sin^2\alpha - 2e_1e_2\sin^2\alpha\sin^2\beta) = 0. \end{aligned}\right.$$

Der Coefficient von $2\lambda^2$ geht über in:

$$-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(e_1\sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma);$$

wenn man aber

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}-2a_{23}\cos\alpha-2a_{31}\cos\beta-2a_{12}\cos\gamma=e \tag{12}$$

setzt, so findet man leicht, dass

$$e_1\sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma=-e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{13}$$

ist, wodurch der Coefficient von $2\lambda^2$ gleich $+2e\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$ wird. Dem letzten Gliede der Gleichung kann man die Form geben:

$$\left\{\begin{aligned}&e_1\sin^2\alpha(-e_1\sin^2\alpha+e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)+e_2\sin^2\beta(e_1\sin^2\alpha-e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)\\&\qquad+e_3\sin^2\beta(e_1\sin^2\alpha+e_2\sin^2\beta-e_3\sin^2\gamma).\end{aligned}\right.$$

Wir wollen zunächst nur den ersten Posten dieses Ausdrucks vermittelst der Gleichungen 9) umformen; dann erhält man als Werth desselben:

$$\left\{\begin{aligned}&2e_1\sin^2\alpha(-a_{11}\sin^2\beta\sin^2\gamma+a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta+a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\\&\qquad=-2e_1a_{11}\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+2e_1\sin^3\alpha\sin\beta\sin\gamma\\&\qquad(-a_{23}\sin\alpha+a_{31}\sin\beta+a_{12}\sin\gamma);\end{aligned}\right.$$

folglich ist die Summe der drei Posten gleich:

$$\left\{\begin{aligned}&-2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma(e_1a_{11}+e_2a_{22}+e_3a_{33})+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,[a_{23}\sin\alpha(-e_1\sin^2\alpha\\&\qquad+e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)+a_{31}\sin\beta(e_1\sin^2\alpha-e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)\\&\qquad+a_{12}\sin\gamma(e_1\sin^2\alpha+e_2\sin^2\beta-e_3\sin^2\gamma)].\end{aligned}\right.$$

Der erste Klammerausdruck geht vermöge der Gleichungen 9) über in:

$$\left\{\begin{aligned}&-a_{11}a_{33}\sin^2\beta-a_{11}a_{22}\sin^2\gamma+2a_{11}a_{23}\sin\beta\sin\gamma-a_{22}a_{11}\sin^2\gamma-a_{22}a_{33}\sin^2\alpha\\&+2a_{22}a_{31}\sin\gamma\sin\alpha-a_{33}a_{22}\sin^2\alpha-a_{33}a_{11}\sin^2\beta+2a_{33}a_{12}\sin\alpha\sin\beta\\&=2(-a_{22}a_{33}\sin^2\alpha-a_{33}a_{11}\sin^2\beta-a_{11}a_{22}\sin^2\gamma+a_{11}a_{23}\sin\beta\sin\gamma\\&+a_{22}a_{31}\sin\gamma\sin\alpha+a_{33}a_{12}\sin\alpha\sin\beta),\end{aligned}\right.$$

das Polynom in der eckigen Klammer aber zunächst in:

$$\left\{\begin{aligned}&2a_{23}\sin\alpha(-a_{11}\sin^2\beta\sin^2\gamma+a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta+a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\\&\qquad-a_{23}\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha)+2a_{31}\sin\beta(-a_{22}\sin^2\gamma\sin^2\alpha+a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\\&\qquad+a_{23}\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha-a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta)+2a_{12}\sin\gamma(-a_{33}\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&\qquad+a_{23}\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha+a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta-a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma)\end{aligned}\right.$$

und dann in:

$$\left\{\begin{aligned}&2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(-a_{23}a_{11}\sin\beta\sin\gamma+2a_{31}a_{12}\sin\beta\sin\gamma-a_{23}{}^2\sin^2\alpha\\&\qquad-a_{31}a_{22}\sin\gamma\sin\alpha+2a_{12}a_{23}\sin\gamma\sin\alpha-a_{31}{}^2\sin^2\beta\\&\qquad-a_{12}a_{33}\sin\alpha\sin\beta+2a_{23}a_{31}\sin\alpha\sin\beta-a_{12}{}^2\sin^2\gamma).\end{aligned}\right.$$

Fasst man Alles zusammen und ordnet nach Potenzen von $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, so erhält man als Werth des letzten Gliedes:

$$\begin{cases} 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\,\{(a_{22}a_{33}-a_{23}{}^2)\sin^2\alpha+(a_{33}a_{11}-a_{31}{}^2)\sin^2\beta+(a_{11}a_{22} \\ \qquad -a_{12}{}^2)\sin^2\gamma+2(a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23})\sin\beta\sin\gamma+2(a_{12}a_{23} \\ \qquad -a_{22}a_{31})\sin\gamma\sin\alpha+2(a_{23}a_{31}-a_{33}a_{12})\sin\alpha\sin\beta\}, \end{cases}$$

das heisst:
$$4A\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

In Folge dieser Reductionen erhält obige Gleichung in λ jetzt folgende Gestalt:

$$14)\qquad \lambda^4+e\lambda^2+A=0,$$

woraus $\lambda^2=\frac{1}{2}(-e\pm\sqrt{e^2-4A})$ folgt; dadurch verwandelt sich aber die Gleichung 10) in folgende:

$$15)\qquad x_1=\frac{M}{A}\left(A_1\pm\sqrt{\frac{1}{2}\Delta(2e_1+e)\pm\frac{1}{2}\Delta\sqrt{e^2-4A}}\right),$$

so dass die Coordinaten des Brennpunktes jetzt vollständig bestimmt sind.

In Folge der Biformität der Wurzel $\sqrt{e^2-4A}$ erhält man vier Werthe für x_1, von denen zwei den reellen, die anderen zwei den imaginären Brennpunkten angehören; es fragt sich nur, wie diese Werthe zu vertheilen sind. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden; ist nämlich Δ positiv, so giebt das positive Zeichen der Wurzel $\sqrt{e^2-4A}$ die Coordinaten der reellen Brennpunkte, ist aber Δ negativ, so muss man, um die Coordinaten der reellen Brennpunkte zu erhalten, das negative Zeichen dieser Wurzel nehmen. Diese Behauptung erweist sich als wahr, sobald man darthun kann, dass der absolute Werth von $2e_1+e$, abgesehen davon, ob er positiv oder negativ ist, kleiner sei als $\sqrt{e^2-4A}$, oder, was dasselbe ist, dass

$$(2e_1+e)^2-(e^2-4A),\ \text{das heisst}\ 4(e_1{}^2+ee_1+A)$$

unter allen Umständen negativ sei. Dies ist aber in der That der Fall; denn multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung 13) und des oben gefundenen Werthes von $4A\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$:

$$\begin{cases} 4e_1{}^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \\ -4e_1\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(e_1\sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma)-e_1{}^2\sin^4\alpha \\ -e_2{}^2\sin^4\beta-e_3{}^2\sin^4\gamma+2e_2e_3\sin^2\beta\sin^2\gamma+2e_3e_1\sin^2\gamma\sin^2\alpha+2e_1e_2\sin^2\alpha\sin^2\beta, \end{cases}$$

was man nach einigen Rechnungen auf

$$-\{-e_1\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma\}^2$$

reduciren kann.

Beispiel 1. Die Gleichung der Ellipse, die unter allen umgeschriebenen Ellipsen den kleinsten Flächeninhalt hat, der sogenannten Steiner'schen Ellipse, ist

$$\frac{x_2x_3}{\sin\alpha}+\frac{x_3x_1}{\sin\beta}+\frac{x_1x_2}{\sin\gamma}=0;$$

hier ist:

$$A_1 = \frac{1}{\sin\alpha},\quad A_2 = \frac{1}{\sin\beta},\quad A_3 = \frac{1}{\sin\gamma},\quad A = 3,$$

$$\Delta = \frac{2}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},\quad e_1 = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$e = -2\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = -2\frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

oder, wenn man den Brocard'schen Winkel ϑ einführt, für welchen

$1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\, \operatorname{cotg}\vartheta$ ist, $e = -2\operatorname{cotg}\vartheta$,

also:

$$e^2 - 4A = 4(\operatorname{cotg}^2\vartheta - 3);$$

daher ist:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} r\sin\beta\sin\gamma \\ &\pm\frac{2}{3}r\sqrt{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left[\frac{2\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\operatorname{cotg}\vartheta}{\sin\alpha} \pm\sqrt{\operatorname{cotg}^2\vartheta - 3}\right]};\end{aligned}\right.$$

das positive Zeichen von $\sqrt{\operatorname{cotg}^2\vartheta - 3}$ gehört gemäss obiger Regel den reellen Brennpunkten an.

Beispiel 2. Die Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks ABC in den Fusspunkten der Höhen berührt, hat die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &x_1^2\cos^2\alpha + x_2^2\cos^2\beta + x_3^2\cos^2\gamma - 2x_2x_3\cos\beta\cos\gamma - 2x_3x_1\cos\gamma\cos\alpha \\ &\qquad - 2x_1x_2\cos\alpha\cos\beta = 0\end{aligned}\right.$$

und für sie ist

$A_1 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha,\ A_2 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\beta,\ A_3 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\gamma,$

$A = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\operatorname{cotg}\vartheta,$

$\Delta = -4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma,\ e_1 = -\sin^2\alpha,\ e = 1 + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$

$$e^2 - 4A = 1 - 8\cos\alpha.$$

Dies giebt:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= r\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta \\ &\pm r\operatorname{tg}\vartheta\sqrt{\frac{1}{2}[-(1 - 2\sin^2\alpha + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \pm\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}]};\end{aligned}\right.$$

hier ist für die reellen Brennpunkte der positive Werth von $\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ zu nehmen.

Wenn man in die Gleichung 14) den Werth von $\lambda^2 = \varrho^2 A^2 : M^2\Delta$ wieder einführt, so sind ihre Wurzeln ϱ_1^2 und ϱ_2^2 die Quadrate der Halbachsen des Kegelschnitts, und zwar gelten dann die Relationen:

$$16)\qquad \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = -\frac{M^2\Delta e}{A^2}\ \text{und}\ \varrho_1^2\varrho_2^2 = \frac{M^4\Delta^2}{A^3}.$$

Diese kann man benutzen, um die Arten der verschiedenen Kegelschnitte zu unterscheiden.

I. Bei der Ellipse müssen ϱ_1^2 und ϱ_2^2 zugleich positiv sein; also ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn A positiv ist und Δ und e entgegengesetzte Zeichen haben. Hätten Δ und e bei positivem A gleiche Zeichen, so wären die Achsen imaginär.

Für den speciellen Fall des Kreises ist $\varrho_1{}^2 = \varrho_2{}^2$, also

$$2\varrho^2 = -\frac{M^2\Delta e}{A^2} \quad \text{und} \quad \varrho^4 = \frac{M^4\Delta^2}{A^3},$$

woraus durch Elimination von ϱ^2 die Bedingung $e^2 - 4A = 0$ folgt, die die andere, dass A positiv sei, einschliesst, und deshalb für sich allein schon genügt, den Kreis zu definiren. Weil beim Kreise die vier Brennpunkte mit seinem Mittelpunkte zusammenfallen, so muss in Gleichung 15) der Hauptradikand verschwinden; daraus könnte man versucht sein, zu schliessen, die Bedingung $e^2 - 4A = 0$ sei für sich allein nicht genügend, sondern es müssten noch die drei Nebenbedingungen

$$2e_1 + e = 2e_2 + e = 2e_3 + e = 0,$$

bezüglich die zwei $e_1 = e_2 = e_3$, erfüllt sein. Es lässt sich jedoch zeigen, dass das Eintreffen jener Hauptbedingung von selbst das dieser Nebenbedingungen nach sich zieht. Erhebt man nämlich Gleichung 13) in's Quadrat und zieht davon die schon mehrfach benutzte Gleichung

$$\begin{cases} 4A\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = -e_1{}^2\sin^4\alpha - e_2{}^2\sin^2\beta - e_3{}^2\sin^2\gamma + 2e_2e_3\sin^2\beta\sin^2\gamma \\ \qquad\qquad + 2e_3e_1\sin^2\gamma\sin^2\alpha + 2e_1e_2\sin^2\alpha\sin^2\beta \end{cases}$$

ab, so erhält man für $e^2 - 4A = 0$ das Resultat:

$$\begin{cases} e_1{}^2\sin^2\alpha + e_2{}^2\sin^2\beta + e_3{}^2\sin^2\gamma - 2e_2e_3\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - 2e_3e_1\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta \\ \qquad\qquad - 2e_1e_2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

dem man auch die Form geben kann:

$$(e_2-e_3)^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + (e_3-e_1)^2\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + (e_1-e_2)^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0.$$

Wenn alle Winkel des Fundamentaldreiecks $< 90^0$ oder einer $= 90^0$ ist, so ergiebt sich hieraus sofort $e_1 = e_2 = e_3 = 0$. Ist aber z. B. $\alpha > 90^0$, so setze man statt $\cos\alpha$ seinen Werth $-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$ und statt $\sin\alpha$ seinen Werth $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$, wodurch man erhält:

$$\begin{cases} (e_2-e_3)^2(-\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \sin^2\beta\sin^2\gamma) + (e_3-e_1)^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma \\ \qquad + \sin^2\gamma\cos^2\beta) + (e_1-e_2)^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \sin^2\beta\cos^2\gamma) = 0, \end{cases}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{cases} (e_2-e_3)^2\sin^2\beta\sin^2\gamma + (e_3-e_1)^2\sin^2\gamma\cos^2\beta + (e_1-e_2)^2\sin^2\beta\cos^2\gamma \\ \qquad + \sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma\{-(e_2-e_3)^2 + (e_3-e_1)^2 + (e_1-e_2)^2\} = 0. \end{cases}$$

Aus der Identität $e_2 - e_3 = -(e_3 - e_1) - (e_1 - e_2)$ ergiebt sich aber $(e_2-e_3)^2 = (e_3-e_1)^2 + (e_1-e_2)^2 + 2(e_3-e_1)(e_1-e_2)$, also geht der letzte Klammerausdruck über in $2(e_3-e_1)(e_1-e_2)$, und man erhält statt obiger Gleichung:

$$(e_2-e_3)^2\sin^2\beta\sin^2\gamma + \{(e_3-e_1)\sin\gamma\cos\beta + (e_1-e_2)\sin\beta\cos\gamma\}^2 = 0.$$

Daraus folgt aber wieder zunächst $e_2 = e_3$ und dann $e_2 = e_3 = e_1$. Geht man mit diesen Bedingungen in Gleichung 13) ein, so kommt, wie oben erwähnt, $2e_1 + e = 2e_2 + e = 2e_3 + e = 0$.

II. Bei der Hyperbel muss $\varrho_1^2 \varrho_2^2$ negativ werden; also ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, wenn A negativ ist, wobei es nicht darauf ankommt, ob Δ und e gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

In dem speciellen Falle der gleichseitigen Hyperbel ist $\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 0$, weshalb dann die Bedingung $e = 0$ erfüllt werden muss, welche die andere $A < 0$ nach sich zieht, weil $\varrho_1^2 \varrho_2^2 = M^4 \Delta^2 : A^3$ sein soll.

III. Die Achsen der Parabel sind beide unendlich gross, wofür die analytische Bedingung $A = 0$ ist; jedoch erfordert das ganze Capitel von der Parabel eine besondere Untersuchung, die weiter unten geführt werden soll.

IV. Zerfällt der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, so ist $\varrho_1^2 = \varrho_2^2 = 0$, also gilt die Bedingung $\Delta = 0$. Der Winkel φ, den diese Geraden mit einander bilden, ist bekanntlich bestimmt durch die Gleichung $tg^2 \varphi = -\frac{4A}{e^2}$. Ist also ausser $\Delta = 0$ auch noch $e = 0$, so stehen dieselben auf einander senkrecht; ist ausser $\Delta = 0$ auch $A = 0$, so sind sie parallel; fallen in letzterem Falle die Linien zusammen, bilden also eine Doppelgerade, so müssen auch noch $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, folglich auch $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$ sein. Hat man endlich ausser $\Delta = 0$ auch $e^2 - 4A = 0$, so kann man die gegebene Gleichung entweder als die eines Kreises mit unendlich kleinem Radius und den Mittelpunkts-Coordinaten $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2$, $x_3 = A_3$, oder als die zweier von diesem Punkte ausgehenden, nach den sogenannten cyklischen Punkten gerichteten conjugirten imaginären Geraden ansehen, die mit einander einen Winkel bilden, dessen Tangente gleich i ist (vergl. darüber Köhler, exercises de géom. anal. I, pag. 142).

Gleich im Anfang unserer Entwickelungen wurde bemerkt, dass eine besondere Untersuchung geführt werden müsse, wenn die vorgelegte Kegelschnittsgleichung einer Parabel angehöre, was, wie wir gesehen haben, unter der Bedingung $A = 0$ zutrifft. Man kann aber die Parabel als einen Centralkegelschnitt betrachten, dessen Mittelpunkt in unendlicher Ferne liegt und zwar in derselben Richtung von irgend einem Eckpunkt des Fundamentaldreiecks aus, wie der unendlich entfernte Brennpunkt derselben. Man darf daher die relativen Coordinaten des Letzteren als identisch mit denen des Ersteren ansehen, d. h. die Abstände des unendlich fernen Brennpunktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks verhalten sich wie $A_1 : A_2 : A_3$. Diese Verhältnisse behalten denselben Werth, wenn man sie auf ein anderes Fundamentaldreieck bezieht, dessen Seiten parallel sind denen des früheren. Daher verhalten sich auch die Abstände des unendlich fernen Brennpunktes von den Seiten desjenigen Dreiecks, das durch die zu BC, CA, AB parallelen Tangenten an den Kegelschnitt gebildet wird, wie $A_1 : A_2 : A_3$. Da aber bei jedem in ein Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt die Abstände des einen Brennpunkts von den Seiten sich umgekehrt verhalten, wie die des anderen, so sind die Verhältnisse der Abstände des im Endlichen gelegenen Brennpunktes der Parabel von den Seiten des erwähnten Tangentendreiecks reciprok zu den Verhältnissen der Abstände des unendlich fern gelegenen, haben also die relativen Werthe $\frac{1}{A_1} : \frac{1}{A_2} : \frac{1}{A_3}$, und ihre absoluten Werthe kann man gleich setzen $\frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_1}$, $\frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_2}$, $\frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_3}$, wo λ eine Constante ist, der ebenfalls constante Factor $\frac{M}{2}$ nur deshalb beigesetzt ist, um den folgenden Rechnungen eine grössere Eleganz zu verleihen. In der oben gefundenen Gleichung:

$$Ax_1^2 - 2MA_1 x_1 + M^2 A_{11} = 0,$$

welche die Abstände der zwei zu BC parallelen Tangenten des Kegelschnitts von der Seite BC angab, ist für die Parabel $A = 0$, also der Abstand der zu BC parallelen Tangente der Parabel von BC gleich $MA_{11} : 2A_1$; addirt man dazu den eben gefundenen Werth des Abstands des Brennpunkts von dieser Tangente, nämlich $\frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_1}$, so wird der Abstand des Brennpunkts von BC:

$$17) \qquad x_1 = \frac{M(A_{11} + \lambda)}{2A_1};$$

ähnliche Gleichungen findet man für x_2 und x_3. Multiplicirt man aber die erste dieser Gleichungen mit $\sin\alpha$, die zweite mit $\sin\beta$, die dritte mit $\sin\gamma$ und addirt, so kommt

$$M = \frac{M}{2}\left\{\frac{(A_{11}+\lambda)\sin\alpha}{A_1} + \frac{(A_{22}+\lambda)\sin\beta}{A_2} + \frac{(A_{33}+\lambda)\sin\gamma}{A_3}\right\},$$

woraus

$$\lambda = -\frac{A_{11}A_2A_3\sin\alpha + A_{22}A_3A_1\sin\beta + A_{33}A_1A_2\sin\gamma - 2A_1A_2A_3}{A_2A_3\sin\alpha + A_3A_1\sin\beta + A_1A_2\sin\gamma}$$

folgt. Dieser Ausdruck lässt sich in mehrfacher Weise umformen. Weil nämlich hier $A = 0$ ist, so geht die Gleichung 3) über in:

$$A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma = 0;$$

multiplicirt man dieselbe der Reihe nach mit $A_1\cos\alpha$, $A_2\cos\beta$, $A_3\cos\gamma$ und addirt die Producte, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} A_1^2\sin\alpha\cos\alpha + A_2^2\sin\beta\cos\beta + A_3^2\sin\gamma\cos\gamma + A_2A_3\sin\alpha + A_3A_1\sin\beta \\ + A_1A_2\sin\gamma = 0. \end{aligned}\right.$$

Wegen $A=0$ gehen ferner die Gleichungen 9a) über in $A_1^2=\Delta e_1$, $A_2^2=\Delta e_2$, $A_3^2=\Delta e_3$, also wird die letzte Gleichung:

$$\Delta(e_1 \sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma)+A_2A_3\sin\alpha+A_3A_1\sin\beta+A_1A_2\sin\gamma=0,$$

oder wegen Gleichung 13):

$$A_2A_3\sin\alpha+A_3A_1\sin\beta+A_1A_2\sin\gamma=\Delta e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

der Werth des Nenners ist also $\Delta e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Der Zähler kann die Form annehmen:

$$A_{11}A_2A_3\sin\alpha+A_3A_1(A_{22}\sin\beta-A_2)+A_1A_2(A_{33}\sin\gamma-A_3)$$

oder auch

$$A_{11}A_2A_3\sin\alpha-(A_{12}\sin\alpha+A_{23}\sin\gamma)A_3A_1-(A_{31}\sin\alpha+A_{23}\sin\beta)A_1A_2$$

wegen der Gleichungen 2). Ferner liefert die Quadrirung der Gleichung $A_1\sin\alpha=-(A_2\sin\beta+A_3\sin\gamma)$ das Resultat:

$$A_1^2\sin^2\alpha=A_2^2\sin^2\beta+A_3^2\sin^2\gamma+2A_2A_3\sin\beta\sin\gamma,$$

woraus

$$A_2A_3=\frac{\Delta(e_1\sin^2\alpha-e_2\sin^2\beta-e_3\sin^2\gamma)}{2\sin\beta\sin\gamma},$$

oder mit Hinzunahme der Gleichungen 9a)

$$A_2A_3=\Delta(a_{11}\sin\beta\sin\gamma+a_{23}\sin^2\alpha-a_{31}\sin\alpha\sin\beta-a_{12}\sin\gamma\sin\alpha)$$

folgt; ähnliche Werthe erhält man für A_3A_1 und A_1A_2. Der Zähler erhält demnach jetzt die Gestalt:

$$\left\{\begin{aligned}&\Delta\{A_{11}\sin\alpha(a_{11}\sin\beta\sin\gamma+a_{23}\sin^2\alpha-a_{31}\sin\alpha\sin\beta-a_{12}\sin\gamma\sin\alpha)\\&-(A_{12}\sin\alpha+A_{23}\sin\gamma)(a_{22}\sin\gamma\sin\alpha+a_{31}\sin^2\beta-a_{12}\sin\beta\sin\gamma-a_{23}\sin\alpha\sin\beta)\\&-(A_{31}\sin\alpha+A_{23}\sin\beta)(a_{33}\sin\alpha\sin\beta+a_{12}\sin^2\gamma-a_{23}\sin\gamma\sin\alpha-a_{31}\sin\beta\sin\gamma)\}.\end{aligned}\right.$$

Führt man die Multiplicationen in der grossen Klammer aus und ordnet nach Potenzen von $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, so ist zunächst der Coefficient von $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma: A_{11}a_{11}+A_{12}a_{12}+A_{13}a_{13}$ oder Δ, der von $\sin^2\beta\sin\gamma$ ist $-A_{23}a_{31}+A_{23}a_{31}$ oder Null, der von $\sin\beta\sin^2\gamma$ ist $A_{23}a_{12}-A_{23}a_{12}$ oder Null, der von $\sin^2\gamma\sin\alpha$ ist $-A_{23}a_{22}-A_{31}a_{12}$ oder $+A_{33}a_{23}$, der von $\sin\gamma\sin^2\alpha$ ist $-A_{11}a_{12}-A_{12}a_{22}+A_{31}a_{33}$ oder $2A_{31}a_{23}$, der von $\sin^2\alpha\sin\beta$ ist $-A_{11}a_{31}+A_{12}a_{23}-A_{31}a_{33}$, oder $2A_{12}a_{23}$, der von $\sin\alpha\sin^2\beta$ ist $-A_{12}a_{31}-A_{23}a_{33}$ oder $A_{22}a_{23}$, der von $\sin^3\alpha$ endlich ist $A_{11}a_{23}$. In Folge dieser Reductionen verwandelt sich der Zähler in:

$$\left\{\begin{aligned}&\Delta[\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+a_{23}\sin\alpha(A_{11}\sin^2\alpha+A_{22}\sin^2\beta+A_{33}\sin^2\gamma+2A_{23}\sin\beta\sin\gamma\\&\qquad+2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha+2A_{12}\sin\alpha\sin\beta)];\end{aligned}\right.$$

weil aber der Ausdruck in der runden Klammer nach Gleichung 3) gleich $A=0$ ist, so hat der Zähler den Werth $\Delta^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ und da wir den des Nenners $\Delta e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ gefunden haben, so ist $\lambda=-\frac{\Delta}{e}$. Dies in Gleichung 17) substituirt giebt für die eine Coordinate des endlichen Brennpunkts:

18) $$x_1 = \frac{M(A_{11}e - \Delta)}{2A_1 e};$$

(vergl. Salmon-Fiedler a. a. O.) S. 692, wo dieses Resultat durch die Invariantentheorie gewonnen wird.

Für manche Anwendungen ist eine andere Form der Brennpunkts-Coordinate bequemer. Aus dem ersten oben angegebenen Werthe von λ folgt nämlich, wenn man den Nenner gleich $\Delta e \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ setzt:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{(A_{11}+\lambda)\Delta e \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{A_1} = A_2(A_{11}\sin\gamma - A_{33}\sin\gamma + A_3) + A_3(A_{11}\sin\beta - A_{22}\sin\beta + A_2)\\
&= (A_{12}\sin\alpha + A_{22}\sin\beta + A_{23}\sin\gamma)(A_{31}\sin\alpha + A_{23}\sin\beta + A_{11}\sin\gamma)\\
&+ (A_{31}\sin\alpha + A_{23}\sin\beta + A_{33}\sin\gamma)(A_{12}\sin\alpha + A_{11}\sin\beta + A_{23}\sin\beta)\\
&= A_{23}(A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta)\\
&+ 2A_{31}A_{12}\sin^2\alpha + A_{11}A_{23}\sin^2\beta + A_{11}A_{23}\sin^2\gamma + A_{11}(A_{22} + A_{33})\sin\beta\sin\gamma\\
&+ A_{12}(A_{33} + A_{11})\sin\gamma\sin\alpha + A_{31}(A_{11} + A_{22})\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}\right.$$

Der erste Posten geht über in $-A_{11}A_{23}\sin^2\alpha$ und giebt deshalb mit dem dritten, vierten und fünften Posten zusammen:

$$A_{11}(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos\alpha)\sin\beta\sin\gamma;$$

die noch übrigen Posten aber kann man schreiben:

$$\left\{\begin{aligned}
&A_{12}(A_{33} + A_{11} + 2A_{31}\cos\beta)\sin\gamma\sin\alpha + A_{31}(A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos\gamma)\sin\alpha\sin\beta\\
&\qquad + 2A_{31}A_{12}\sin^2\alpha - 2A_{31}A_{12}\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta - 2A_{31}A_{12}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma;
\end{aligned}\right.$$

hier verschwinden wieder die drei letzten Posten, und wenn man noch zur Abkürzung

19) $$\left\{\begin{aligned}
&A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos\alpha = P,\\
&A_{33} + A_{11} + 2A_{31}\cos\beta = Q,\\
&A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos\gamma = R
\end{aligned}\right.$$

setzt, so hat man endlich:

20) $$x_1 = \frac{M}{2\Delta e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(PA_{11}\sin\beta\sin\gamma + QA_{12}\sin\gamma\sin\alpha + RA_{13}\sin\alpha\sin\beta).$$

Da nun die Directrix die Polare des Brennpunkts ist, so ergiebt sich hieraus sofort die Gleichung derselben in der Gestalt:

21) $$Px_1\sin\beta\sin\gamma + Qx_2\sin\gamma\sin\alpha + Rx_3\sin\alpha\sin\beta = 0$$

(vergl. Köhler a. a. O. S. 162).

Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}
&x_1^2\sin^2\alpha + x_2^2(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + x_3^2(\sin^2\beta - \sin^2\gamma\sin^2\alpha)\\
&\qquad + 2x_2x_3\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha - 2x_3x_1\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - 2x_1x_2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha = 0.
\end{aligned}\right.$$

Hier ist

$A_{11} = -\sin^4\alpha\sin^2(\beta-\gamma)$, $A_{22} = \sin^5\alpha\sin(\beta-\gamma)$, $A_{33} = -\sin^5\alpha\sin(\beta-\gamma)$,
$A_{23} = 0$, $A_{31} = -\sin^4\alpha\sin\beta\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)$, $A_{12} = \sin^4\alpha\sin\gamma\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)$,
also $A_1 = -\sin^5\alpha\sin^2(\beta-\gamma)$, $A_2 = \sin^5\alpha(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)\sin(\beta-\gamma)$,
$A_3 = -\sin^5\alpha(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha)\sin(\beta-\gamma)$, $A = 0$;

die Curve ist daher eine Parabel. Ferner ist $e_1 = -\sin^2\alpha \sin^2(\beta-\gamma)$,

$$e_2 = -\sin^2\alpha(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)^2, \quad e_3 = -\sin^2\alpha(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha)^2,$$
$$e = \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha), \quad \Delta = -\sin^8\alpha\sin^2(\beta-\gamma).$$

Die Gleichung 18) giebt demnach:

$$x_1 = \frac{4r\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos\alpha}{\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}, \quad x_2 = \frac{2r\sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha},$$
$$x_3 = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}.$$

Benutzt man die Gleichung 20), so findet man zuerst

$$P = 0, \quad Q = -2\sin^5\alpha\sin^2\beta\sin(\beta-\gamma), \quad R = 2\sin^5\alpha\sin^2\gamma\sin(\beta-\gamma)$$

und dann für x_1, x_2, x_3 die oben angegebenen Werthe. Die Gleichung der Directrix wird nach Gleichung 21): $x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma = 0$.

Die Achsen.

Erste Methode.

Wir wollen in der Gleichung 15) und den zwei ähnlich gebildeten Gleichungen die Hauptwurzelgrössen mit w_1, w_2, w_3 bezeichnen; dann sind die Coordinaten der Brennpunkte:

22) $$x_1 = \frac{M}{A}(A_1 \pm w_1), \quad x_2 = \frac{M}{A}(A_2 \pm w_2), \quad x_3 = \frac{M}{A}(A_3 \pm w_3),$$

wobei noch die aus Gleichung 11) herauszulesende Bedingung besteht:

23) $$w_1\sin\alpha + w_2\sin\beta + w_3\sin\gamma = 0.$$

Die Verbindungslinie je zweier Brennpunkte ist eine Achse, also ist die Gleichung derselben:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ A_1 + w_1 & A_2 + w_2 & A_3 + w_3 \\ A_1 - w_1 & A_2 - w_2 & A_3 - w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

24) $$x_1(w_2A_3 - w_3A_2) + x_2(w_3A_1 - w_1A_3) + x_2(w_1A_2 - w_2A_1) = 0,$$

und zwar repräsentirt diese Gleichung die Haupt- oder Nebenachse, je nachdem man in w_1, w_2, w_3 das Zeichen der Nebenwurzel $\sqrt{e^2 - 4A}$ nach den oben gegebenen Regeln so bestimmt, dass es für die reellen oder imaginären Brennpunkte gilt.

Man kann diese Achsengleichung rational machen, ohne die x auf eine höhere Potenz zu bringen. Multiplicirt man nämlich die Bedingungsgleichung 23) der Reihe nach mit $w_1\sin\alpha$, $w_2\sin\beta$, $w_3\sin\gamma$ und setzt:

25) $$w_2w_3\sin\beta\sin\gamma = -a, \quad w_3w_1\sin\gamma\sin\alpha = -b, \quad w_1w_2\sin\alpha\sin\beta = -c,$$

so erhält man die drei neuen Gleichungen:

26) $$b + c = w_1^2\sin^2\alpha, \quad c + a = w_2^2\sin^2\beta, \quad a + b = w_3^2\sin^2\gamma.$$

Aus 25) ergiebt sich:

$$bc = w_1^2 w_2 w_3 \sin^2\alpha \sin\beta \sin\gamma, \quad ca = w_1 w_2^2 w_3 \sin\alpha \sin^2\beta \sin\gamma,$$
$$ab = w_1 w_2 w_3^2 \sin\alpha \sin\beta \sin^2\gamma,$$

also:

$$w_1 : w_2 : w_3 = bc \sin\beta \sin\gamma : ca \sin\gamma \sin\alpha : ab \sin\alpha \sin\beta,$$

wodurch die Achsengleichung 24) übergeht in:

$$27)\quad \begin{cases} ax_1 \sin\alpha (A_2 b \sin\beta - A_3 c \sin\gamma) + bx_2 \sin\beta (A_3 c \sin\gamma - A_1 a \sin\alpha) \\ \qquad + cx_3 \sin\gamma (A_1 a \sin\alpha - A_2 b \sin\beta) = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man zur Abkürzung $a\sin\alpha = a'$, $b\sin\beta = b'$, $c\sin\gamma = c'$ setzt:

$$27\text{a})\quad a'x_1(A_2b' - A_3c') + b'x_2(A_3c' - A_1a') + c'x_3(A_1a' - A_2b') = 0.$$

Die Werthe von a, b, c ergeben sich in rationaler Form aus den Gleichungen 26), wenn man je zwei derselben addirt und von der Summe die dritte abzieht; so erhält man z. B. $2a = -w_1 \sin\alpha + w_2^2 \sin^2\beta + w_3^2 \sin^2\gamma$, oder, wenn man $a\sin\alpha = a'$ setzt und den Factor 2 weglässt, weil es sich ja doch nur um relative Werthe handelt:

$$28)\quad a' = (-w_1^2 \sin^2\alpha + w_2^2 \sin^2\beta + w_3^2 \sin^2\gamma)\sin\alpha;$$

die Ausdrücke b' und c' sind ähnlich gebildet.

Setzt man in Gleichung 28) für w_1, w_2, w_3 ihre Werthe ein und bezeichnet zur Abkürzung die Wurzel $\sqrt{e^2 - 4A}$ mit W, so kommt:

$$a' = [-(2e_1 + e \pm W)\sin^2\alpha + (2e_2 + e \pm W)\sin^2\beta + (2e_3 + e \pm W)\sin^2\gamma]\sin\alpha,$$

oder wegen der Gleichungen 9):

$$\begin{cases} a' = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(-a_{11}\sin\beta\sin\gamma - a_{23}\sin^2\alpha + a_{31}\sin\alpha\sin\beta + a_{12}\sin\alpha\sin\gamma) \\ \qquad + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha(e \pm W), \end{cases}$$

also ist der relative Werth von:

$$29)\quad a' = 2(-a_{23}\sin\alpha + a_{31}\sin\beta + a_{12}\sin\gamma)\sin\alpha - 2a_{11}\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha(e \pm W);$$

ähnliche Formen haben die Ausdrücke für b' und c'.

Beispiel 1. Wählt man für die Steiner'sche Ellipse wie oben die Gleichungsform:

$$\frac{x_2 x_3}{\sin\alpha} + \frac{x_3 x_1}{\sin\beta} + \frac{x_1 x_2}{\sin\gamma} = 0,$$

so ist $e = -2\cot\vartheta$ und $W = 2\sqrt{\cot^2\vartheta - 3}$, also ist mit Weglassung des Factors 2:

$$a' = \sin\alpha - \cos\alpha\cot\vartheta \pm \cos\alpha\sqrt{\cot^2\vartheta - 3} = -\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta} \pm W\cos\alpha.$$

Die Gleichung 27a) liefert dann die Gleichungen der Achsen:

$$\begin{cases} x_1 \sin\alpha\left\{-\dfrac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta} \pm W\cos\alpha\right\} \\ \left\{\sin\beta\dfrac{\cos(\gamma+\vartheta)}{\sin\vartheta} - \sin\gamma\dfrac{\cos(\beta+\vartheta)}{\sin\vartheta} \mp W\sin(\beta-\gamma)\right\} + \text{etc.} = 0. \end{cases}$$

Der Factor in der letzten Klammer reducirt sich auf $(cotg\,\vartheta \mp W)\sin(\beta-\gamma)$, und da $cotg\,\vartheta \mp W$ für je eine Achse constant ist, so kann man es weglassen und bekommt endlich die Achsengleichungen in der Form:

$$x_1\left\{\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta} \mp W\cos\alpha\right\}\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\text{etc.}=0.$$

Beispiel 2. Bei der Ellipse:

$$\begin{cases} x_1^2\cos^2\alpha+x_2^2\cos^2\beta+x_3^2\cos^2\gamma-2x_2x_3\cos\beta\cos\gamma-2x_3x_1\cos\gamma\cos\alpha \\ \qquad\qquad -2x_1x_2\cos\alpha\cos\beta=0 \end{cases}$$

ist

$$\begin{cases} a'=2\sin\alpha(-\cos\gamma\cos\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha) \\ \qquad -2\cos^2\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha(1+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\pm W\cos\alpha, \end{cases}$$

wo $W=\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ zu nehmen ist. Nach einigen leichten Reductionen geht diese Gleichung über in $a'=2\cos\beta\cos\gamma\pm W\cos\alpha$, weshalb die Gleichung der Achsen folgende Form bekommt:

$$\begin{cases} x_1(2\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\pm W\cos\alpha)(2\cos\gamma\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\beta\pm W\cos\beta\sin\beta \\ \qquad -2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\gamma\sin\gamma\mp W\cos\gamma\sin\gamma)+\text{etc.}=0. \end{cases}$$

Der Factor in der zweiten Klammer verwandelt sich nach einigen Transformationen in: $(3\mp W)\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)$,

und da $3\mp W$ wieder weggelassen werden kann, so sind die Gleichungen der Achsen: $x_1(2\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\pm W\cos\alpha)\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)\pm\text{etc.}=0.$

Beispiel 3. Nehmen wir endlich die Ellipse:

$$\begin{cases} x_1^2\sin^2\beta\sin^2\gamma+x_2^2\sin^2\gamma\sin^2\alpha+x_3^2\sin^2\alpha\sin^2\beta-2x_2x_3\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \qquad -2x_3x_1\sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma-2x_1x_2\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma=0, \end{cases}$$

bei der

$e=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma(5+cotg^2\vartheta)$, $e^2-4\Delta=W^2=\sin^4\alpha\sin^4\beta\sin^4\gamma(cotg^2\vartheta-3)^2$

ist, so hat man:

$$\begin{cases} a=2\sin\alpha(-\sin\alpha\sin^3\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin^3\gamma+\sin^3\alpha\sin\beta\sin\gamma)-2\sin^3\beta\sin^3\gamma \\ \quad +\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos\alpha(5+cotg^2\vartheta)\pm\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos\alpha(cotg^2\vartheta-3). \end{cases}$$

Wählt man zunächst das positive Zeichen, so ist:

$$\begin{cases} a=2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos\alpha(cotg^2\vartheta-1)-2\sin^3\beta\sin^3\gamma \\ \quad =2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\left\{\cos\alpha(cotg^2\vartheta-1)-\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}\right\}, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des nunmehr unnützen Factors $2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$:

$$\begin{cases} a=\cos\alpha(cotg^2\vartheta-1)-\dfrac{\sin\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)}=\cos\alpha(cotg^2\vartheta-1)-\dfrac{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin^2\vartheta} \\ \quad =\cos\alpha(cotg^2\vartheta-1)-\sin\beta\sin\gamma\,cotg^2\vartheta+\sin\alpha\,cotg\,\vartheta-\cos\beta\cos\gamma \\ \quad =-\cos\beta\cos\gamma\,cotg^2\vartheta+\sin\alpha\,cotg\,\vartheta-\sin\beta\sin\gamma, \end{cases}$$

oder endlich:

$$a=-\frac{\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{\sin^2\vartheta};$$

die Gleichung der Nebenachse ist also, weil $A_1 = \frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta}$ ist:

$$\begin{cases} x_1 \cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)\{\sin(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)\cos(\alpha+\vartheta) \\ \qquad -\sin(\gamma+\vartheta)\cos(\alpha+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\} + \text{etc.} = 0, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des Factors $\cos(\alpha+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)$:

$$x_1\{\sin(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta) - \sin(\gamma+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\} + \text{etc.} = 0,$$

oder endlich: $$x_1 \sin(\beta-\gamma) + x_2\sin(\gamma-\alpha) + x_3\sin(\alpha-\beta) = 0.$$

Dagegen ist für das negative Zeichen:

$$\begin{cases} a = +4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos\alpha - 2\sin^3\beta\sin^3\gamma = 2\sin^2\beta\sin^2\gamma(2\sin^2\alpha\cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma) \\ \quad = 2\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta), \end{cases}$$

folglich die Achsengleichung:

$$\begin{cases} x_1\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\Big\{\frac{\sin^2\gamma+\sin^2\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}\sin^2\gamma\sin^2\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma) \\ \qquad -\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\Big\} + \text{etc.} = 0, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des Factors $\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$:

$$\frac{x_1}{\sin\alpha}\{(\sin^2\gamma+\sin^2\alpha)\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) - (\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\} + \text{etc.} = 0.$$

Da $\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$ und $\sin\beta\sin(\gamma-\alpha) = \sin^2\gamma - \sin^2\alpha$ ist, so erhält man nach der Reduction:

$$\frac{x_1}{\sin\alpha}(\sin^4\alpha - \sin^2\beta\sin^2\gamma) + \frac{x_2}{\sin\beta}(\sin^4\beta - \sin^2\gamma\sin^2\alpha) + \frac{x_3}{\sin\gamma}(\sin^4\gamma - \sin^2\alpha\sin^2\beta) = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Hauptachse, auf der die beiden sogenannten Brocard'schen Punkte als Brennpunkte liegen.

Wie wir oben gesehen haben, sind die relativen Coordinaten des unendlich fernen Brennpunkts der Parabel: $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2$, $x_3 = A_3$, die des im Endlichen gelegenen aber nach Gleichung 18):

$$x_1 = \frac{A_{11}e - \Delta}{A_1}, \quad x_2 = \frac{A_{22}e - \Delta}{A_2}, \quad x_3 = \frac{A_{33}e - \Delta}{A_3},$$

also ist die Gleichung der Achse der Parabel:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{A_{11}e-\Delta}{A_1} & \frac{A_{22}e-\Delta}{A_2} & \frac{A_{33}e-\Delta}{A_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1x_1 & A_2x_2 & A_3x_3 \\ A_{11}e-\Delta & A_{22}e-\Delta & A_{33}e-\Delta \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

30) $$x_1A_1\{e(A_{22}A_3^2 - A_{33}A_2^2) + \Delta(A_2^2 - A_3^2)\} + \text{etc.} = 0.$$

Bestimmt man aber die Coordinaten des im Endlichen gelegenen Brennpunkts nach Gleichung 20), so ist

$$31)\quad \begin{vmatrix} x_1 & PA_{11} \sin\beta \sin\gamma + QA_{12} \sin\gamma \sin\alpha + RA_{13} \sin\alpha \sin\beta & A_1 \\ x_2 & PA_{21} \sin\beta \sin\gamma + QA_{22} \sin\gamma \sin\alpha + RA_{23} \sin\alpha \sin\beta & A_2 \\ x_3 & PA_{31} \sin\beta \sin\gamma + QA_{32} \sin\gamma \sin\alpha + RA_{33} \sin\alpha \sin\beta & A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

die Gleichung der Achse.

Beispiel. Für die oben betrachtete Parabel hat man als Gleichung der Achse, wenn man die dort gefundenen relativen Coordinaten der Brennpunkte benutzt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha & \sin\alpha \sin\beta & \sin\alpha \sin\gamma \\ -\sin(\beta-\gamma) & \sin\beta + \sin\gamma \cos\alpha & \sin\gamma + \sin\beta \cos\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} x_1 \{ -\sin\alpha \sin\beta (\sin\gamma + \sin\beta \cos\alpha) - \sin\alpha \sin\gamma (\sin\beta + \sin\gamma \cos\alpha) \} \\ + x_2 \{ -\sin\alpha \sin\gamma \sin(\beta-\gamma) + 2 \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha (\sin\gamma + \sin\beta \cos\alpha \} \\ + x_3 \{ 2 \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha (\sin\beta + \sin\gamma \cos\alpha) + \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \} = 0. \end{cases}$$

Der Coefficient von x_2 geht nach einigen Reductionen über in:

$$\sin\gamma \{ (\sin\gamma + \sin\beta \cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha \sin^2\beta \},$$

und der von x_3 in:

$$\sin\beta \{ (\sin\beta + \sin\gamma \cos\alpha)^2 - \sin^2\gamma \sin^2\alpha \},$$

so dass man endlich als Gleichung der Achse erhält:

$$\begin{cases} -x_1 \sin\alpha \{ \sin\beta (\sin\gamma + \sin\beta \cos\alpha) + \sin\gamma (\sin\beta + \sin\gamma \cos\alpha) \} \\ + x_2 \sin\gamma \{ (\sin\gamma + \sin\beta \cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha \sin^2\beta \} \\ + x_2 \sin\beta \{ (\sin\beta + \sin\gamma \cos\alpha)^2 - \sin^2\gamma \sin^2\alpha \} = 0. \end{cases}$$

Zweite Methode.

Die Achsengleichungen seien:

$$a)\quad \begin{cases} b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x^3 = 0, \end{cases}$$

und ihr Product:

$$b)\quad l_{11} x_1^2 + l_{22} x_2^2 + l_{33} x_3^2 + 2 l_{23} x_2 x_3 + 2 l_{31} x_3 x_1 + 2 l_{12} x_1 x_2 = 0;$$

dann gelten die Relationen:

$$c)\quad \begin{cases} l_{11} = b_1 c_1, & 2 l_{23} = b_2 c_3 + b_3 c_2, \\ l_{22} = b_2 c_1, & 2 l_{31} = b_3 c_1 + b_1 c_3, \\ l_{33} = b_3 c_3, & 2 l_{12} = b_1 c_2 + b_2 c_1. \end{cases}$$

Da die Achsen Durchmesser sind, so hat man auch:

$$\text{d)} \quad \begin{cases} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0, \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0, \end{cases}$$

und da sie auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$\text{e)} \quad l_{11} + l_{22} + l_{33} - 2 l_{23} \cos\alpha - 2 l_{31} \cos\beta - 2 l_{12} \cos\gamma = 0.$$

Nun sollen aber auch die Achsen conjugirte Polaren sein, das heisst, der Pol der einen soll auf der anderen liegen. Sind also x'_1, x'_2, x'_3 die Coordinaten eines Punktes der Geraden $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$, so ist die Gleichung seiner Polaren:

$$\begin{cases} x_1(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3) + x_2(a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3) \\ \qquad + x_3(a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3) = 0, \end{cases}$$

und diese muss mit der Gleichung der zweiten Geraden, nämlich

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

identisch sein, also hat man mit Weglassung des Verhältnissfactors, der in den c enthalten gedacht werden kann, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 &= c_1, \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 &= c_2, \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 &= c_3; \end{aligned}$$

dazu kommt noch, weil der Punkt x'_1, x'_2, x'_3 auf der Geraden

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

liegt, die Gleichung:

$$b_1 x'_1 + b_2 x'_2 + b_3 x'_3 = 0.$$

Dies giebt als Bedingung, dass die beiden Geraden a) conjugirte Polaren seien, die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} A_{11} b_1 c_1 + A_{22} b_2 c_2 + A_{33} b_3 c_3 + A_{23}(b_2 c_3 + b_3 c_2) + A_{31}(b_3 c_1 + b_1 c_3) \\ \qquad + A_{12}(b_1 c_2 + b_2 c_1) = 0; \end{cases}$$

vermöge der Gleichungen c) erhält man hieraus:

$$\text{f)} \quad A_{11} l_{11} + A_{22} l_{22} + A_{33} l_{33} + 2 A_{23} l_{23} + 2 A_{31} l_{31} + 2 A_{12} l_{12} = 0.$$

Um drei weitere Gleichungen für die l zu erhalten, multiplicire man die erste der Gleichungen d) der Reihe nach mit c_1, c_2, c_3 und die zweite der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3 und addire jedesmal, so kommt:

$$\text{g)} \quad \begin{cases} l_{11} A_1 + l_{12} A_2 + l_{13} A_3 = 0, \\ l_{21} A_1 + l_{22} A_2 + l_{23} A_3 = 0, \\ l_{31} A_1 + l_{32} A_2 + l_{33} A_3 = 0. \end{cases}$$

Sollen nun die Gleichungen b), e), f) und g) zusammen bestehen, so muss die Determinante:

$$32)\quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 2x_2x_3 & 2x_3x_1 & 2x_1x_2 \\ 1 & 1 & 1 & -2\cos\alpha & -2\cos\beta & -2\cos\gamma \\ A_{11} & A_{22} & A_{33} & 2A_{23} & 2A_{31} & 2A_{12} \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & A_3 & A_2 \\ 0 & A_2 & 0 & A_3 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein; diese Gleichung ist das **Product der Achsengleichungen.** Dieselbe gilt jedoch nicht mehr für den Fall einer Parabel, wo

$$\begin{cases} A = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha \\ \qquad + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta = 0 \end{cases}$$

ist, was sich aus den gemachten Voraussetzungen erklärt; denn die eine Achse ist dann die Gerade im Unendlichen, die andere aber wird unbestimmt oder fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen, weil auf letzterer überhaupt jede Gerade, ja paradoxerweise sie selbst, wenigstens im analytischen Sinne, senkrecht steht, wodurch die Gleichung e) ihre Bedeutung verliert. In der That, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ sei die Gleichung einer Geraden, $x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma = 0$ die der Geraden im Unendlichen, so ist die Bedingung, dass beide auf einander senkrecht stehen:

$$\begin{cases} a_1(\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta) + a_2(\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma) \\ \qquad + a_3(\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = 0, \end{cases}$$

die erfüllt wird, welche Werthe a_1, a_2, a_3 auch haben mögen. Aber auch an der gefundenen Determinante selbst kann man die Wahrheit des Gesagten nachweisen. Denn multiplicirt man die Verticalreihen der Reihe nach mit $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\beta$, $\sin\beta\sin\gamma$, $\sin\gamma\sin\alpha$, $\sin\alpha\sin\beta$ und addirt dann alle zur ersten Verticalreihe, so erhält man in derselben als oberstes Glied

$$(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma)^2,$$

sonst aber wegen

$$\begin{cases} A = A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma \\ \quad + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta = 0 \end{cases}$$

lauter Nullen; das heisst, die Gleichung ist in das Quadrat der Gleichung der unendlich fernen Geraden übergegangen.

Die Determinante 32) ist sehr unbequem zur Ausrechnung; wenn man aber die aus g) gewonnenen Werthe von l_{11}, l_{22}, l_{33} in b) einsetzt und nach l_{23}, l_{31}, l_{12} ordnet, so erhält man:

$$A_1(x_2A_3 - x_3A_2)^2 l_{23} + A_2(x_3A_1 - x_1A_3)^2 l_{31} + A_3(x_1A_2 - x_2A_1)^2 l_{12} = 0;$$

auf demselben Wege gehen e) und f) über in:

$$\begin{cases} A_1(A_{22}A_3^2+A_{33}A_2^2-2A_{23}A_2A_3)l_{23}+A_2(A_{33}A_1^2+A_{11}A_3^2-2A_{31}A_3A_1)l_{31} \\ \qquad +A_3(A_{11}A_2^2+A_{22}A_1^2-2A_{12}A_1A_2)l_{12}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)l_{23}+A_2(A_3^2+A_1^2+2A_3A_1\cos\beta)\,l_{31} \\ \qquad +A_3(A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\gamma)l_{12}=0; \end{cases}$$

also hat man jetzt für das Product der Achsengleichungen die Determinantengleichung:

$$33)\quad \begin{vmatrix} (x_2A_3-x_3A_2)^2 & (x_3A_1-x_1A_3)^2 & (x_1A_2-x_2A_1)^2 \\ A_{22}A_3^2+A_{33}A_2^2-2A_{23}A_2A_3 & A_{33}A_1^2+A_{11}A_3^2-2A_{31}A_3A_1 & A_{11}A_2^2+A_{22}A_1^2-2A_{12}A_1A_2 \\ A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha & A_3^2+A_1^2+2A_3A_1\cos\beta & A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\gamma \end{vmatrix}=0.$$

Die Form des erhaltenen Resultats führt uns zu folgender kürzeren Herleitung desselben. Wenn nämlich p, q, r beliebige Parameter sind, so ist die Gleichung eines jeden Geradenpaares, das durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht:

$$\text{h)}\qquad p(A_3x_2-A_2x_3)^2+q(A_1x_3-A_3x_1)^2+r(A_2x_1-A_1x_2)^2=0,$$

oder entwickelt:

$$\text{i)}\quad \begin{cases} x_1^2(qA_3^2+rA_2^2)+x_2^2(rA_1^2+pA_3^2)+x_3^2(pA_2^2+qA_1^2)-2x_2x_3pA_2A_3 \\ \qquad -2x_3x_1qA_3A_1-2x_1x_2rA_1A_2=0; \end{cases}$$

denn die Determinante dieser ternären quadratischen Form verschwindet, wie sich leicht zeigen lässt, welche Werthe auch p, q, r haben mögen, und aus Gleichung h) folgt unmittelbar, dass die durch sie dargestellten Geraden sich im Mittelpunkt des Kegelschnitts schneiden.

Aus Gleichung i) folgt als Bedingung der Orthogonalität der durch sie bezeichneten Geraden:

$$\begin{cases} qA_3^2+rA_2^2+rA_1^2+pA_3^2+pA_2^2+qA_1^2+2pA_2A_3\cos\alpha+2qA_3A_1\cos\beta \\ \qquad +2rA_1A_2\cos\gamma=0, \end{cases}$$

oder nach p, q, r geordnet:

$$\text{k)}\quad \begin{cases} p(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)+q(A_3^2+A_1^2+2A_3A_1\cos\beta) \\ \qquad +r(A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\gamma)=0, \end{cases}$$

und als Bedingung der reciproken Polarität:

$$\begin{cases} A_{11}(qA_3^2+rA_2^2)+A_{22}(rA_1^2+pA_3^2)+A_{33}(pA_2^2+rA_1^2)-2pA_{23}A_2A_3 \\ \qquad -2qA_{31}A_3A_1-2rA_{12}A_1A_2=0, \end{cases}$$

oder nach p, q, r geordnet:

$$\text{l)}\quad \begin{cases} p(A_2^2A_{33}+A_3^2A_{22}-2A_2A_3A_{23})+q(A_3^2A_{11}+A_1^2A_{33}-2A_3A_1A_{31}) \\ \qquad +r(A_1^2A_{22}+A_2^2A_{11}-2A_1A_2A_{12})=0. \end{cases}$$

Durch Elimination von p, q, r aus den Gleichungen h), k), l) erhält man wiederum die Determinantengleichung 33).

Man kann dieser Gleichung noch bequemere Formen geben. Es ist nämlich erstens:

$$\begin{cases} A_{22} A_3^2 + A_{33} A_2^2 - 2 A_{23} A_2 A_3 = A_2(A_{33} A_2 - A_{23} A_3) + A_3(A_{22} A_3 - A_{23} A_2) \\ = A_2(A_{33} A_{12} \sin\alpha + A_{33} A_{22} \sin\beta - A_{23} A_{31} \sin\alpha - A_{23}^2 \sin\beta) \\ + A_3(A_{22} A_{31} \sin\alpha + A_{22} A_{33} \sin\gamma - A_{23} A_{12} \sin\alpha - A_{23}^2 \sin\gamma) \\ = \Delta A_2(a_{11} \sin\beta - a_{12} \sin\alpha) + \Delta A_3(a_{11} \sin\gamma - a_{31} \sin\alpha) \\ = \Delta\{a_{11}(A_1 \sin\alpha + A_2 \sin\beta + A_3 \sin\gamma) - (a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3) \sin\alpha\}, \end{cases}$$

das heisst, nach den Gleichungen 3) und 4) gleich $\Delta(a_{11} A - \Delta \sin^2\alpha)$.

Zweitens ist nach Gleichung 9a):

$$A_2^2 + A_3^2 = (A_{22} + A_{33}) + \Delta(e_2 - e_3).$$

Vermöge der Gleichungen 3) und 9a) ist aber auch noch:

$$\begin{cases} A A_1 = A_1^2 \sin\alpha + A_1 A_2 \sin\beta + A_1 A_3 \sin\gamma = A A_{11} \sin\alpha + \Delta e_1 \sin\alpha + A_1 A_2 \sin\beta \\ \qquad + A_1 A_3 \sin\gamma, \end{cases}$$

oder nach Multiplication mit $\sin\alpha$:

$$A_3 A_1 \sin\gamma \sin\alpha + A_1 A_2 \sin\alpha \sin\beta = A(A_1 - A_{11} \sin\alpha) \sin\alpha - \Delta e_1 \sin^2\alpha;$$

ebenso ist:

$$A_2 A_3 \sin\beta \sin\gamma + A_1 A_2 \sin\alpha \sin\beta = A(A_2 - A_{22} \sin\beta) \sin\beta - \Delta e_2 \sin^2\beta,$$

$$A_2 A_3 \sin\beta \sin\gamma + A_3 A_1 \sin\gamma \sin\alpha = A(A_3 - A_{33} \sin\alpha) \sin\gamma - \Delta e_3 \sin^2\gamma,$$

also:

$$2 A_2 A_3 \sin\beta \sin\gamma = 2 A A_{23} \sin\beta \sin\gamma - \Delta(e_2 \sin^2\beta + e_3 \sin^2\gamma - e_1 \sin^2\alpha).$$

Daher hat man endlich:

$$\begin{cases} A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos\alpha = A(A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos\alpha) \\ + \Delta\left\{e_2 + e_3 - \dfrac{(e_2 \sin^2\beta + e_3 \sin^2\gamma - e_1 \sin^2\alpha) \cos\alpha}{\sin\beta \sin\gamma}\right\}; \end{cases}$$

der Coefficient von Δ gestaltet sich um in:

$$\begin{cases} \{e_2 \sin\beta(\sin\gamma - \sin\beta\cos\alpha) + e_3 \sin\gamma(\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha) + e_1 \sin^2\alpha\cos\alpha\} : \sin\beta\sin\gamma \\ \qquad = (e_1 \sin\alpha\cos\alpha + e_2 \sin\beta\cos\beta + e_3 \sin\gamma\cos\gamma) \sin\alpha : \sin\beta\sin\gamma = -e\sin^2\alpha \end{cases}$$

(nach Gleichung 13). Somit ist:

$$A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos\alpha = A(A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos\alpha) - \Delta e \sin^2\alpha.$$

Setzt man diese Werthe in die Determinantengleichung 33) ein, so erhält dieselbe folgende Gestalt.

$$\left|\begin{matrix} (x_2 A_3 - x_3 A_2)^2 & (x_3 A_1 - x_1 A_3)^2 & (x_1 A_2 - x_2 A_1)^2 \\ a_{11} A - \Delta \sin^2\alpha & a_{22} A - \Delta \sin^2\beta & a_{33} A - \Delta \sin^2\gamma \\ A(A_{22} + A_{33} + 2 A_{23}\cos\alpha) - \Delta e \sin^2\alpha & A(A_{33} + A_{11} + 2 A_{31}\cos\beta) - \Delta e \sin^2\beta & A(A_{11} + A_{22} + 2 A_{12}\cos\gamma) - \Delta e \sin^2\gamma \end{matrix}\right| = 0,$$

oder auch:

$$34)\left\{\begin{vmatrix} (x_2 A_3 - x_3 A_2)^2 & (x_3 A_1 - x_1 A_3)^2 & (x_1 A_2 - x_2 A_1)^2 \\ a_{11} A - \Delta \sin^2\alpha & a_{22} A - \Delta \sin^2\beta & a_{33} A - \Delta \sin^2\gamma \\ A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos\alpha - a_{11} e & A_{33} + A_{11} + 2 A_{31} \cos\beta - a_{22} e & A_{11} + A_{22} + 2 A_{12} \cos\gamma - a_{33} e \end{vmatrix} = 0.\right.$$

Besteht der Kegelschnitt aus zwei geraden Linien, ist also $\Delta = 0$, so hebt sich in der zweiten Zeile A weg, und die Gleichung stellt dann das Product der Gleichungen ihrer Winkelhalbirenden dar.

Beispiel 1. Bei der Steiner'schen Ellipse ist:

$$a_{11} A - \Delta \sin^2\alpha = -\frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},$$

oder relativ gleich $\sin^2\alpha$; ferner ist

$$A_{22} + A_{33} + 2 A_{23}\cos\alpha - a_{11} e = -\frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{1}{\sin^2\gamma} + \frac{2\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},$$

oder relativ gleich $\sin^4\alpha$; daher wir die Determinante 34) in diesem Falle:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \left(\frac{x_2}{\sin\gamma} - \frac{x_3}{\sin\beta}\right)^2 & \left(\frac{x_3}{\sin\alpha} - \frac{x_1}{\sin\gamma}\right)^2 & \left(\frac{x_1}{\sin\beta} - \frac{x_2}{\sin\alpha}\right)^2 \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \sin^4\alpha & \sin^4\beta & \sin^4\gamma \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma)^2 & (x_3\sin\gamma - x_1\sin\alpha)^2 & (x_1\sin\alpha - x_2\sin\beta)^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

oder entwickelt:

$$\left\{\begin{aligned} &(x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma)^2 \sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + (x_3\sin\gamma - x_1\sin\alpha)^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha) \\ &\qquad + (x_1\sin\alpha - x_2\sin\beta)^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0. \end{aligned}\right.$$

Die weitere Entwickelung nach Potenzen der x giebt endlich das Resultat:

$$\left\{\begin{aligned} &x_1^2\sin^3\alpha\sin(\beta-\gamma) + x_2^2\sin^3\beta\sin(\gamma-\alpha) + x_3^2\sin^3\gamma\sin(\alpha-\beta) \\ &\qquad + 2x_2x_3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma) + 2x_3x_1\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma-\alpha) \\ &\qquad + 2x_1x_2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0. \end{aligned}\right.$$

Beispiel 2. Bei der schon mehrfach betrachteten Ellipse:

$$\left\{\begin{aligned} &x_1^2\cos^2\alpha + x_2^2\cos^2\beta + x_3^2\cos^2\gamma - 2x_2x_3\cos\beta\cos\gamma - 2x_3x_1\cos\gamma\cos\alpha \\ &\qquad 2 - x_1x_2\cos\alpha\cos\beta = 0 \end{aligned}\right.$$

ist

$$a_{11}A - \Delta\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha\cos\beta\cos\gamma(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) + 4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\alpha$$

oder relativ gleich:

$$\left\{\begin{aligned} &\cos^2\alpha(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &\qquad = \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma; \end{aligned}\right.$$

ferner ist:

$$\begin{cases} A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos\alpha-a_{11}e=4\cos^3\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\ \qquad\qquad =-\cos^2\alpha \end{cases}$$

oder relativ gleich $\cos^2\alpha$.

Damit erhält man als Product der Achsengleichungen aus Gleichung 34):

$$\begin{cases} (x_2\sin\gamma-x_3\sin\beta)^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+(x_3\sin\alpha-x_1\sin\gamma)^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha) \\ \qquad +(x_1\sin\beta-x_2\sin\alpha)^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0, \end{cases}$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} x_1^2\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+x_2^2\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+x_3^2\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)+x_2x_3\sin(\beta-\gamma) \\ \qquad +x_3x_1\sin(\gamma-\alpha)+x_1x_2\sin(\alpha-\beta)=0. \end{cases}$$

Die in diesen beiden Beispielen gefundenen Endgleichungen können nach bekannter Methode (vergl. Salmon-Fiedler a. a. O., S. 548 Art. 323) auf dreierlei Weise in ihre Factoren zerlegt werden, wobei jedoch zu bemerken ist, dass diese drei Resultate unsymmetrisch sind und erst in jedem gegebenen Falle durch besondere Kunstmittel in irgend eine symmetrische Form übergeführt werden können, während unsere erste Methode eine solche sofort ohne weitere Rechnung liefert.

Dritte Methode.

Man verbinde einen Punkt P in der Ebene des Kegelschnitts mit seinem Mittelpunkt C und ziehe durch C eine Senkrechte auf PC; hat man den Punkt P so gewählt, dass die genannte Senkrechte parallel ist seiner Polare in Bezug auf den Kegelschnitt, so liegt er auf einer Achse desselben.

Nennt man $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ die Coordinaten von P, so ist die Gleichung von PC:

$$x_1(A_3\mathfrak{x}_2-A_2\mathfrak{x}_3)+x_2(A_1\mathfrak{x}_3-A_3\mathfrak{x}_1)+x_3(A_2\mathfrak{x}_1-A_1\mathfrak{x}_2)=0,$$

und die Gleichung der darauf senkrecht stehenden und durch C gehenden Geraden:

35) $$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$

wobei man

36) $$\begin{cases} a_1=-\mathfrak{x}_1(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)+\mathfrak{x}_2(A_2A_3\cos\beta+A_3A_1\cos\alpha+A_1A_2-A_3^2\cos\gamma) \\ \qquad +\mathfrak{x}_3(A_2A_3\cos\gamma+A_3A_1+A_1A_2\cos\alpha-A_2^2\cos\beta) \end{cases}$$

setzen muss; die Werthe von a_2 und a_3 sind ähnlich gebildet.

Setzt man in den zu $\mathfrak{x}_2$ gehörenden Klammerfactor der Gleichung 36):

$$A_1=\frac{A-A_2\sin\beta-A_3\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

so erhält er die Form:

$$\frac{A(A_2+A_3\cos\alpha)-(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha};$$

ebenso wird der Coefficient von $\mathfrak{x}_3$:

$$\frac{A(A_3+A_2\cos\alpha)-(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

somit erhält man statt 36) die elegantere Gleichung:

37) $$\begin{cases} a_1\sin\alpha=A[\mathfrak{x}_2(A_2+A_3\cos\alpha)+\mathfrak{x}_3(A_3+A_2\cos\alpha)]-(\mathfrak{x}_1\sin\alpha+\mathfrak{x}_2\sin\beta \\ \qquad +\mathfrak{x}_3\sin\gamma)(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha). \end{cases}$$

Die Gleichung der Polare von P sei:

38) $$K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 = 0,$$

wo

39) $$\begin{cases} K_1 = a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3, \\ K_2 = a_{21}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3, \\ K_3 = a_{31}\mathfrak{x}_1 + a_{32}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 \end{cases}$$

zu setzen ist; dann ist

40) $$\begin{vmatrix} a_1 & K_1 & \sin\alpha \\ a_2 & K_2 & \sin\beta \\ a_3 & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

das Product der Achsengleichungen.

Scheinbar allgemeiner wird die Lösung, wenn man den Ort des Punktes sucht, dessen Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt und einen mit ihm concentrischen Kreis von beliebigem Halbmesser ϱ parallel sind. Nach Salmon-Fiedler a. a. O., S. 116 Art. 71, ist die Entfernung ϱ eines Punktes x_1, x_2, x_3 von C, dessen absolute Coordinaten

$$x_1 = \frac{M}{A}A_1, \quad x_2 = \frac{M}{A}A_2, \quad x_3 = \frac{M}{A}A_3$$

sind, gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{cases} (A_3x_2 - A_2x_3)^2 + (A_1x_3 - A_3x_1)^2 + (A_2x_1 - A_1x_2)^2 \\ \quad - 2(A_1x_3 - A_3x_1)(A_2x_1 - A_1x_2)\cos\alpha - 2(A_2x_1 - A_1x_2)(A_3x_2 - A_2x_3)\cos\beta \\ \quad - 2(A_3x_2 - A_2x_3)(A_1x_3 - A_3x_1)\cos\gamma - A^2\varrho^2 = 0. \end{cases}$$

Macht man dieselbe dadurch homogen, dass man das letzte Glied auf der linken Seite mit $(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma)^2 : M^2$, wo $M = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ist, multiplicirt, so stellt sie die Gleichung eines Kreises vor, der den Radius ϱ und den Mittelpunkt C hat. Bezeichnet man diese Gleichung kurzweg mit $c = 0$, so ist die Gleichung der Polare des Punktes $P(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3)$ in Bezug auf diesen Kreis

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0,$$

wo

$$\begin{cases} c_1 = -A_3(A_1\mathfrak{x}_3 - A_3\mathfrak{x}_1) + A_2(A_2\mathfrak{x}_1 - A_1\mathfrak{x}_2) + A_3(A_2\mathfrak{x}_1 - A_1\mathfrak{x}_2)\cos\alpha \\ \quad - A_2(A_1\mathfrak{x}_3 - A_3\mathfrak{x}_1)\cos\alpha - A_2(A_3\mathfrak{x}_2 - A_2\mathfrak{x}_3)\cos\beta + A_3(A_3\mathfrak{x}_2 - A_2\mathfrak{x}_3)\cos\gamma \\ \quad - \dfrac{A^2\varrho^2}{2M^2}(\mathfrak{x}_1\sin\alpha + \mathfrak{x}_2\sin\beta + \mathfrak{x}_3\sin\gamma)\sin\alpha \end{cases}$$

ist; ähnliche Werthe haben c_2 und c_3. Dann ist aber das Product der Achsengleichungen:

$$\begin{vmatrix} c_1 & K_1 & \sin\alpha \\ c_2 & K_2 & \sin\beta \\ c_3 & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man in dieser Determinante die dritte Verticalreihe mit

$$\frac{A^2\varrho^2}{2M^2}(\mathfrak{x}_1 \sin\alpha + \mathfrak{x}_2 \sin\beta + \mathfrak{x}_3 \sin\gamma)$$

und addirt sie zu der ersten, so fällt das letzte Glied von c_1, c_2, c_3 weg, womit der Radius ϱ aus der Achsengleichung entfernt ist. Es ist also ganz gleichgiltig, wie gross derselbe ist; das Resultat muss immer das nämliche sein, welchen Werth auch ϱ haben mag. Nimmt man z. B. $\varrho = 0$ an und ordnet dann die rechte Seite der Gleichung, welche c_1 giebt, nach den $\mathfrak{x}$, so kommt:

$$\begin{cases} c_1 = \mathfrak{x}_1(A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3\cos\alpha) - \mathfrak{x}_2(A_2A_3\cos\beta + A_3A_1\cos\alpha + A_1A_2 - A_3^2\cos\beta) \\ \qquad - \mathfrak{x}_3(A_2A_3\cos\gamma + A_3A_1 + A_1A_2\cos\alpha - A_2^2\cos\gamma), \end{cases}$$

also derselbe Werth, den wir oben (Gleichung 36) für a_1 gefunden haben, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, was wegen der relativen Bedeutung der a und c irrelevant ist. In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie (z. B. Salmon-Fiedler a. a. O., S. 690 Art. 382 B. 3) verwendet man zu diesem Zwecke den sogenannten Directorkreis, von dessen sämmtlichen Peripheriepunkten aus der gegebene Kegelschnitt unter einem rechten Winkel erscheint; das Quadrat seines Halbmessers ϱ ist gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen, das heisst nach Gleichung 16) ist

$$\varrho^2 = -M^2 De : A^2.$$

Dass es überflüssig ist, erst jedesmal die Gleichung dieses Kreises zu entwickeln, um die vorgelegte Aufgabe zu lösen, liegt nach unseren Darlegungen auf der Hand. Dass ferner für $\varrho = 0$ die Gleichung des Hilfskreises auch betrachtet werden kann als das Product der Gleichungen zweier imaginären conjugirten Geraden, die durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen und nach den cyklischen Punkten gerichtet sind, haben wir schon oben bei der Discussion der Kegelschnittsgleichung unter Nr. IV bemerkt.

Vierte Methode.

Die absoluten Mittelpunkts-Coordinaten eines Kegelschnitts sind:

$$x_1 = MA_1 : A, \quad x_2 = MA_2 : A, \quad x_3 = MA_3 : A;$$

ferner ist nach Salmon-Fiedler a. a. O., S. 117 Art. 71 die Entfernung E eines Punktes (x_1, x_2, x_3) vom Mittelpunkt gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{cases} E^2 = \dfrac{1}{A^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} \{\sin\alpha\cos\alpha(MA_1 - Ax_1)^2 \\ \qquad + \sin\beta\cos\beta(MA_2 - Ax_2)^2 + \sin\gamma\cos\gamma(MA_3 - Ax_3)^2\}. \end{cases}$$

Für die Achsen ist E ein Maximum oder Minimum; fügt man daher zur rechten Seite dieser Gleichung noch $\lambda(x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma - M)$ und μK hinzu, wo K die in Gleichung 1) angegebene Bedeutung hat und λ und μ constante Parameter sind, und lässt den irrelevanten Factor

$\frac{1}{A^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$ weg, so erhält man durch partielle Differentiation nach x_1, x_2, x_3 folgende Gleichungen:

$$- A_1 \sin\alpha \cos\alpha (MA_1 - Ax_1) + \lambda \sin\alpha + \mu K_1 = 0,$$
$$- A_2 \sin\beta \cos\beta (MA_2 - Ax_2) + \lambda \sin\beta + \mu K_2 = 0,$$
$$- A_3 \sin\gamma \cos\gamma (MA_3 - Ax_3) + \lambda \sin\gamma + \mu K_3 = 0;$$

Hier sind K_1, K_2, K_3 die partiellen Differentialquotienten von K nach x_1, x_2, x_3. Sollen diese Gleichungen zusammen bestehen, so muss

$$41) \qquad \begin{vmatrix} \sin\alpha \cos\alpha (MA_1 - Ax_1) & K_1 & \sin\alpha \\ \sin\beta \cos\beta (MA_2 - Ax_2) & K_2 & \sin\beta \\ \sin\gamma \cos\gamma (MA_3 - Ax_3) & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

sein. Damit diese Gleichung homogen werde, muss man M durch seinen Werth $x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma$ ersetzt denken. Wenn man nun nachweisen kann, dass sie durch die Coordinaten des Kegelschnitt-Mittelpunktes befriedigt wird, dass sowohl ihre Determinante als auch die von uns so genannte Function e für sie verschwinden und dass sie die Bedingung der reciproken Polarität [Gleichung f)] erfüllt, so ist sie das Product der Gleichungen der Achsen. Durch Substitution der Mittelpunkts-Coordinaten aber geht M in $A_1 \sin\alpha + A_2 \sin\beta + A_3 \sin\gamma = A$ über, weshalb die Glieder der ersten Verticalreihe verschwinden. Um den Beweis, dass die übrigen Bedingungen zutreffen, zu erleichtern, denke man sich den gegebenen Kegelschnitt auf ABC als Polardreieck bezogen, wodurch seine Gleichung die einfachere Gestalt $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$ annimmt. Die Entwickelung der Determinantengleichung 41) liefert dann das Resultat:

$$\left\{\begin{aligned} & a_1^2 x_1^2 (a_2 \sin\gamma \cos\gamma - a_3 \sin\beta \cos\beta) + a_2^2 x_2^2 (a_3 \sin\alpha \cos\alpha - a_1 \sin\gamma \cos\gamma) \\ & \quad + a_3^2 x_3^2 (a_1 \sin\beta \cos\beta - a_2 \sin\alpha \cos\alpha) + a_2 a_3 x_2 x_3 \{a_1 \sin(\beta - \gamma) \\ & \quad + a_2 \sin\alpha - a_3 \sin\alpha\} + a_3 a_1 x_3 x_1 \{- a_1 \sin\beta + a_2 \sin(\gamma - \alpha) \\ & \quad + a \sin\beta\} + a_1 a_2 x_1 x_2 \{a_1 \sin\gamma - a_2 \sin\gamma + a_3 \sin(\alpha - \beta)\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Determinante dieser quadratischen Form ist mit Abwerfung des Factors $a_1^2 a_2^2 a_3^2$:

$$\begin{vmatrix} a_2 \sin\gamma \cos\gamma - a_3 \sin\beta \cos\beta & \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin\gamma - a_2 \sin\gamma + a_3 \sin(\alpha - \beta)\right\} & \frac{1}{2}\left\{- a_1 \sin\beta + a_2 \sin(\gamma - \alpha) + a_3 \sin\beta\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin\gamma - a_2 \sin\gamma + a_3 \sin(\alpha - \beta)\right\} & a_3 \sin\alpha \cos\alpha - a_1 \sin\gamma \cos\gamma & \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin(\beta - \gamma) + a_2 \sin\alpha - a_3 \sin\alpha\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{- a_1 \sin\beta + a_2 \sin(\gamma - \alpha) + a_3 \sin\beta\right\} & \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin(\beta - \gamma) + a_2 \sin\alpha - a_3 \sin\alpha\right\} & a_1 \sin\beta \cos\beta - a_2 \sin\alpha \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man aber die Horizontalreihen bezüglich mit $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ und addirt sie dann zur ersten, so werden die Glieder der letzteren alle gleich Null.

Die Function e ferner ist hier gleich:

$$\left\{\begin{aligned} & a_1^2(a_2 \sin\gamma\cos\gamma - a_3\sin\beta\cos\beta) + a_2^2(a_3\sin\alpha\cos\alpha - a_1\sin\gamma\cos\gamma) \\ & \qquad + a_3^2(a_1\sin\beta\cos\beta - a_2\sin\alpha\cos\alpha) - a_2a_3\,\{a_1\sin(\beta-\gamma) \\ & \qquad + a_2\sin\alpha - a_3\sin\alpha\}\cos\alpha - a_3a_1\{-a_1\sin\beta + a_2\sin(\gamma-\alpha) \\ & \qquad + a_3\sin\beta\}\cos\beta - a_1a_2\{a_1\sin\gamma - a_2\sin\gamma + a_3\sin(\alpha-\beta)\}\cos\gamma; \end{aligned}\right.$$

fasst man die zusammengehörigen Glieder zusammen und berücksichtigt man die bekannte Identität:

$$\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) + \cos\beta\sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha-\beta) \equiv 0,$$

so findet man, dass e verschwindet.

Weil endlich hier $A_{11} = a_2a_3$, $A_{22} = a_3a_1$, $A_{33} = a_1a_2$, $A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$ ist, so sind die Geraden reciproke Polaren, sobald

$$\left\{\begin{aligned} & a_1^2a_2a_3(a_2\sin\gamma\cos\gamma - a_3\sin\beta\cos\beta) + a_1a_2^2a_3(a_3\sin\alpha\cos\alpha - a_1\sin\gamma\cos\gamma) \\ & \qquad + a_1a_2a_3^2(a_1\sin\beta\cos\beta - a_2\sin\alpha\cos\alpha) \end{aligned}\right.$$

verschwindet, was in der That der Fall ist.

Die Gleichung 41) kann man auch in der Form schreiben:

$$(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma).\begin{vmatrix} A_1\sin\alpha\cos\alpha & K_1 & \sin\alpha \\ A_2\sin\beta\cos\beta & K_2 & \sin\beta \\ A_3\sin\gamma\cos\gamma & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} - A\begin{vmatrix} x_1\sin\alpha\cos\alpha & K_1 & \sin\alpha \\ x_2\sin\beta\cos\beta & K_2 & \sin\beta \\ x_3\sin\gamma\cos\gamma & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

welche merkwürdige Folgerungen zulässt. Setzt man nämlich die zweite Determinante für sich allein der Null gleich, so bedeutet die dadurch entstandene Gleichung, wie die Theorie der Kegelschnittbüschel lehrt, eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten den Achsen des gegebenen Kegelschnitts parallel sind. Dieselbe geht durch den Höhenschnittpunkt des Fundamentaldreiecks ABC und durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts; denn erstens werden die erste und die dritte Verticalreihe gleich, sobald man $x_1 = 1 : \cos\alpha$, $x_2 = 1 : \cos\beta$, $x_3 = 1 : \cos\gamma$ setzt; wenn man zweitens A_1, A_2, A_3 statt x_1, x_2, x_3 in K_1, K_2, K_3 substituirt, so wird z. B. $a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$ nach Gleichung 4) gleich $\Delta\sin\alpha$, so dass nach Weghebung des Factors Δ die zweite Verticalreihe gleich der dritten wird. Die gerade Linie ferner, die durch die annullirte erste Determinante bezeichnet wird, geht durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts und berührt die correspondirende gleichseitige Hyperbel in diesem Mittelpunkt. Daraus ergiebt sich, dass jedem Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel zugeordnet ist, deren Asymptoten parallel sind den Achsen des Kegelschnitts und die durch den Höhenschnittpunkt des Fundamentaldreiecks und durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht, dadurch also vollkommen bestimmt ist. Für die Steiner'sche Ellipse ist z. B. die Gleichung dieser gleichseitigen Hyperbel:

$$\begin{vmatrix} x_1 \sin\alpha\cos\alpha & \dfrac{x_2}{\sin\gamma}+\dfrac{x_3}{\sin\beta} & \sin\alpha \\ x_2\sin\beta\cos\beta & \dfrac{x_3}{\sin\alpha}+\dfrac{x_1}{\sin\gamma} & \sin\beta \\ x_3\sin\gamma\cos\gamma & \dfrac{x_1}{\sin\beta}+\dfrac{x_2}{\sin\alpha} & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$$x_1(x_3\sin\gamma - x_2\sin\beta)\cos\alpha + x_2(x_1\sin\alpha - x_3\sin\gamma)\cos\beta + x_3(x_2\sin\beta - x_1\sin\alpha\cos\gamma = 0;$$

dies giebt: $x_2x_3\sin(\beta-\gamma)+x_3x_1\sin(\gamma-\alpha)+x_1x_2\sin(\alpha-\beta)=0$ oder die Gleichung der Kiepert'schen Hyperbel. Dadurch ist ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesen beiden Curven dargethan.

Ist bei einem gegebenen Kegelschnitt $A=0$, derselbe also eine Parabel, so ist die annullirte erste Determinante der Gleichung 42) die Gleichung ihrer Achse. So erhält man z. B. die Gleichung der Achse derjenigen Parabel, deren Brennpunkt wir oben bestimmt haben, in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} -\sin\alpha\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) & \left\{\begin{matrix} x_1\sin^2\alpha - x_2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha \\ -\,x_3\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha \end{matrix}\right\} & \sin\alpha \\ \sin\beta\cos\beta(\sin\beta+\sin\gamma\cos\alpha) & \left\{\begin{matrix} -\,x_1\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha + x_2(\sin^2\gamma \\ -\sin^2\alpha\sin^2\beta) + x_3\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha \end{matrix}\right\} & \sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\gamma(\sin\gamma+\sin\beta\cos\alpha) & \left\{\begin{matrix} -x_1\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha + x_2\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha \\ +\,x_3(\sin^2\beta - \sin^2\gamma\sin^2\alpha) \end{matrix}\right\} & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung liefert dasselbe Resultat, das wir schon oben gefunden haben.

Auch wenn die Kegelschnittsgleichung in cartesischen Coordinaten gegeben ist, lässt sich diese Methode anwenden. Denn sei

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{31}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

die gegebene Gleichung, so sind $\mathfrak{x} = A_{31} : A_{33}$, $\mathfrak{y} = A_{23} : A_{33}$ die Mittelpunkts-Coordinaten. Man setze nun $E^2 = (x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2 - 2\lambda f(x,y)$ und differentiire theilweise nach x und y, so kommt:

$$x - \mathfrak{x} = \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad y - \mathfrak{y} = \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial y},$$

also erhält man durch Elimination von λ das Product der Achsengleichungen in der Form:

$$(x-\mathfrak{x})\frac{\partial f}{\partial y} = (y-\mathfrak{y})\frac{\partial f}{\partial x}$$

oder, wenn man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe setzt:

$$(A_{33}x - A_{31})\frac{\partial f}{\partial y} = (A_{33}y - A_{23})\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ist die Curve eine Parabel, so ist $A_{33}=0$ und die Gleichung ihrer Achse:

$$A_{31}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=A_{23}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

In $3x^2+4xy+y^2-5x-6y-3=0$ ist z. B.

$$A_{33}=-1,\quad A_{31}=-\frac{7}{2},\quad A_{23}=4,$$

also die Gleichung der Achsen:

$$\left(-x+\frac{7}{2}\right)(4x+2y-6)=-(y+4)(6x+4y-5)$$

oder

$$4y^2-4x^2+4xy+18y+44x-41=0,$$

die man zerlegen kann in die Gleichungen:

$$2x-(\sqrt{5}+1)y=11+4\sqrt{5},$$

$$2x+(\sqrt{5}-1)y=11-4\sqrt{5}.$$

Bei der Parabel $(3x+4y)^2+22x+46y+9=0$ ist $A_{31}=100$, $A_{23}=-75$, also die Gleichung der Achse:

$$4[8(3x+4y)+46]+3[6(3x+4y)+22]=0,$$

oder

$$50(3x+4y)+250=0,$$

oder endlich

$$3x+4y+5=0.$$

Bensheim, im December 1892.