BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
AVEC LA COLLABORATION
DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME SIXIÈME. — JANVIER 1874.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, rue Monge, 29.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1874

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.

Ce BULLETIN, fondé en 1870, paraît régulièrement chaque mois. Il a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8° (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal forme depuis le 1er janvier 1873 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables), comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8°.

Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.

Prix pour un an (12 numéros en 2 volumes) :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége.	20

OUVRAGES REÇUS PAR LA RÉDACTION.

(SUITE.)

TODHUNTER (I.). A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace in two volumes. London, Macmillan and C°; 1873.

GILBERT (PH.). Rectification au sujet d'un Mémoire précédent. (Extrait du tome XXXV des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.*)

BONCOMPAGNI (B.). Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, tome VI; Gennaio 1873.

DILLNER (G.). Traité de Calcul géométrique supérieur. 1re Partie. (Extrait des *Acta Societatis Regiæ Upsaliensis.*)

RUBINI (R.). Trattato d'Algebra. *Parte Ia :* I primi Elementi d'Algebra. *Parte IIa :* Complemento agli Elementi d'Algebra. Napoli, 1872-1873.

WEYR (EM.) Ueber Durchschnittpunkte von Fokalen mit Kreisen und mit Lemniscaten. (*Sitzungsber. des k. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*, 23 mai 1873.)

IMSCHENETSKY (V.-G.). Note sur le rapport anharmonique du plan de courbure C, en un point quelconque P d'une ligne L d'intersection des deux surfaces quelconques S_1 et S_2, des plans tangents A et B à ces surfaces en ce même point P, et du plan D, mené par l'intersection des plans A, B, C. (Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége.*)

ZEUTHEN (H.-G.). Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer af fjerde Orden. (*Vidensk. Selsk. Skr.*, 5te Række, naturvid. og mathem. Afd. 10de Bd. IV.) Kjöbenhavn, 1873. In-4, 101-XXII p.

УМОВЪ (Н.). — Теорія термомеханическихъ явленій въ твердыхъ тѣлахъ. — Москва, 1871.

(*A suivre.*)

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,
Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,
Ancien élève de l'Ecole Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1874 est en cours de publication.

On ne peut s'abonner que pour l'année entière.

L'abonnement est augmenté de 3 francs à partir de l'année 1869, et les prix pour les divers pays se trouvent dorénavant fixés ainsi qu'il suit :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Égypte, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Portugal, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége, Suède	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861), au lieu de 240 francs, 200 francs payables de la manière suivante : 100 francs comptant, et les 100 francs restants en un bon à trois mois à l'ordre de M. Gauthier-Villars, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.

Les tomes X et XVI à XX (1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.

Les autres tomes de la première série se vendent séparément...... 12 fr.

La **DEUXIÈME SÉRIE**, commencée en 1862, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les tomes I à V (1862 à 1866) ne se vendent pas séparément.

Les tomes suivants de la deuxième série se vendent séparément... 15 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

JANVIER 1874.

Revue bibliographique.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME VI. — 1er SEMESTRE DE 1874.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1874

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. CHASLES, *président*.

BERTRAND.

PUISEUX.

SERRET.

N...,

LISTE DES COLLABORATEURS DU BULLETIN

PENDANT LES TROIS PREMIÈRES ANNÉES.

MM. Baillaud, agrégé de l'Université.
Battaglini, professeur à l'Université de Rome.
Beltrami, professeur à l'Université de Bologne.
Bertrand (J.), membre de l'Institut.
Bonnet (O.), membre de l'Institut.
Bouquet, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Clebsch, professeur à l'Université de Goettingue.
De Tilly, capitaine d'Artillerie, à Bruxelles.
Dewulf, commandant du Génie aux îles d'Hyères.
Ermakof, à Kazan.
Hermite, membre de l'Institut.
Imschenetsky, professeur à l'Université de Kharkof.
Klein, professeur à l'Université d'Erlangen.
Laguerre, répétiteur à l'École Polytechnique.
Lampe, professeur à Berlin.
Laurent (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.
Lie, professeur à l'Université de Christiania.
Lindelöf, professeur à l'Université de Helsingfors.
Lipschitz, professeur à l'Université de Bonn.
Mannheim, professeur à l'École Polytechnique.
Padova, professeur à Pise.
Pellet, professeur au Lycée de Bourg.
Potocki, licencié ès Sciences, à Bordeaux.
Resal, membre de l'Institut.
Serret (J.-A.), membre de l'Institut.
Simon (Ch.), professeur au Lycée Louis-le-Grand.
Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse.
Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

D'ABBADIE (Antoine), membre de l'Institut. — Géodésie d'Éthiopie, ou Triangulation d'une partie de la haute Éthiopie, exécutée selon des méthodes nouvelles. Vérifiée et rédigée par R. Radau. Paris; 1873. Gauthier-Villars. — In-4°, 534 p., avec 11 cartes et 10 planches. — Prix : 30 fr.

D'ABBADIE (Antoine). — Observations relatives a la physique du globe, faites au Brésil et en Éthiopie. Rédigées par R. Radau. — Paris, Gauthier-Villars. — In-4°, 204 p., avec 1 planche. — Prix : 15 fr.

Les deux voyages en Abyssinie dont M. d'Abbadie publie aujourd'hui les résultats ont eu lieu de 1837 à 1839 et de 1839 à 1849; ils comprennent un espace de douze ans, pendant lequel l'infatigable explorateur a recueilli d'immenses matériaux d'observation en se débattant au milieu de difficultés de tout genre. En 1836, il avait déjà fait un court voyage au Brésil, afin d'y observer les variations diurnes de l'aiguille aimantée. L'impression de la *Géodésie d'Éthiopie* ne put être commencée qu'en 1859; elle avait été précédée de la publication d'un *Résumé géodésique des positions déterminées en Éthiopie,* brochure de 36 pages, où l'on trouve déjà les coordonnées de 831 points. Ce délai de vingt-quatre ans, apporté à la publication complète des observations, des calculs et des cartes que renferment les deux Ouvrages de M. d'Abbadie, prouve assez qu'il s'agit ici d'une œuvre de longue haleine, qui n'a pu être menée à bonne fin qu'au prix de grands et sérieux efforts, et qui, enfin achevée, fait honneur à la Science française.

La *Géodésie d'Éthiopie* renferme la description des instruments emportés par le voyageur; les observations elles-mêmes dans la mesure où la reproduction en paraissait utile, et, dans les autres cas, les résultats du calcul; l'exposé des méthodes d'observation et des procédés de réduction employés; l'histoire détaillée de la construction des cartes; la liste des positions géodésiques, avec onze cartes topographiques et dix planches de profils de montagnes; l'itinéraire complet, d'après les manuscrits de voyage. Les instruments étaient des chronomètres, des sextants et des cercles à réflexion, enfin des théodolites, ou lunettes à deux cercles qui permettent de relever l'azimut et l'apozénith (distance zénithale) des objets terrestres. C'est sur l'emploi du théodolite que reposent les méthodes dont l'ensemble constitue ce que M. d'Abbadie nomme la *Géodésie expéditive,* méthodes ingénieuses et fécondes dont son Ouvrage est, pour ainsi dire, un long exemple.

Les opérations de la Géodésie ordinaire exigent des instruments lourds et très-précis, des signaux artificiels, installés en des points choisis à l'avance, et un personnel nombreux; elles nécessitent la mesure d'une base, la mesure des trois angles de chaque triangle, sans compter les observations astronomiques qui font connaître directement les latitudes et les longitudes des stations principales, et les nivellements qui déterminent les différences des hauteurs. Évidemment on ne peut songer à exécuter de pareils travaux en pays sauvage, avec les ressources restreintes dont dispose un voyageur isolé, trop heureux si la défiance toujours en éveil des indigènes ne l'empêche pas de profiter des occasions que lui procurent les hasards de la route. Aussi la plupart des voyageurs se bornent-ils à dresser une carte du pays qu'ils ont exploré, en mettant à profit des levés à vue ou des relèvements à la boussole, contrôlés par quelques observations de latitudes ou de latitudes et par l'estimation des temps de parcours. Les itinéraires dressés à l'aide de pareilles données sont en général très-défectueux, surtout lorsqu'il s'agit d'une contrée où le minerai de fer abonde, comme en Éthiopie, car alors l'usage de la boussole expose à des mécomptes sérieux; on peut s'en convaincre en parcourant les pages 255-259 de la *Géodésie d'Éthiopie,* où M. d'Abbadie a réuni les déclinaisons de l'aiguille aimantée qui résultent de ses relèvements.

Un simple coup d'œil jeté ensuite sur la longue série des *Tours d'horizon* (p. 150-215) et des *Azimuts ordonnés* (p. 216-255), sur la *Liste des positions* (p. 423-448) et sur la *Carte des principaux triangles,* suffit pour faire apprécier le pas immense qui a été fait. La Géodésie expéditive, telle que l'a imaginée M. d'Abbadie et qu'il l'a pratiquée pendant douze ans avec une étonnante persévérance, constitue, à n'en pas douter, un progrès qui fait époque dans l'histoire des voyages scientifiques. Elle est fondée sur le relèvement systématique des *signaux naturels,* c'est-à-dire de tous les objets saillants et faciles à identifier qui se dessinent à l'horizon. Le voyageur improvise des stations sur chaque éminence de terrain où il lui est permis de s'arrêter, ou bien dans les haltes dictées par les volontés de la caravane. Il y installe son théodolite sur une pierre ou sur un pied portatif, et il commence son *tour d'horizon,* en relevant avec soin le gisement et la hauteur angulaire des signaux qui s'offrent à son choix : pics de montagnes, toits d'édifices, cimes d'arbres, bosquets sacrés, angles de précipices, bords d'un lac ou d'une île. En même temps, s'il le peut, il prend la hauteur et l'azimut du Soleil, afin d'*orienter* son tour d'horizon, c'est-à-dire afin de pouvoir rapporter au méridien les angles azimutaux observés. L'observation du Soleil, combinée avec celle d'un bon signal, qui est nécessaire pour orienter un tour d'horizon, doit être faite le matin ou le soir : il y a un grand avantage à la faire des *deux* côtés du méridien, à deux moments de la journée où le Soleil se trouve à la même distance du zénith; c'est là le principe de la *méthode des azimuts correspondants,* généralisation ingénieuse de la méthode bien connue des hauteurs correspondantes, et qui sert à trouver en même temps la direction du méridien et l'instant de midi vrai (p. 143 et 478). Les tours d'horizon, accompagnés de croquis des signaux, qui permettent d'en constater plus facilement l'identité, forment la base d'une sorte de triangulation naturelle du pays, et fournissent le moyen de déterminer la situation relative d'une foule de points. Des latitudes et des longitudes observées chaque fois qu'on en trouve l'occasion, des altitudes mesurées par le moyen du baromètre ou de l'hypsomètre (thermomètre à eau bouillante), des distances déduites du temps de propagation du son, de petites bases mesurées au pas ou à la chaine complètent les matériaux qui permettront plus tard de fixer les trois coordonnées de chaque point de la carte. Il va sans dire qu'il ne faudra pas négliger les renseignements supplémentaires, tels que relèvements à la boussole, esquisses de la route, estimation des distances, temps de parcours d'une station à l'autre, enfin les mille indications qui pourront faciliter le remplissage de la carte, une fois que les positions des points de repère y auront été marquées d'une manière définitive.

La grande affaire, dans une triangulation, c'est de mesurer sur le terrain une base de quelques kilomètres, qui donne la dimension absolue des côtés des triangles. La Géodésie expéditive se procure une base, en déterminant, aussi exactement que possible, les latitudes de deux points, situés à peu près sous le même méridien, et le gisement réciproque de ces deux points. C'est ainsi que M. d'Abbadie a utilisé, comme base de la carte du Tigray, la distance d'environ 93 kilomètres qui sépare les deux stations Digsa et Saloda, et qui correspond à une différence de latitude de 48 minutes, avec un azimut de 22 degrés.

Par ces divers moyens, M. d'Abbadie a réussi à porter une chaîne continue de triangles des bords de la mer Rouge aux confins du pays de Kaffa, c'est-à-dire depuis le seizième jusqu'au sixième degré de latitude au nord de l'équateur. Il est évident, par la nature même de ces observations, qui n'ont pu être faites d'après un plan arrêté à l'avance, qu'il ne faut pas s'attendre à trouver partout une liaison très-rigoureuse entre les différentes parties du canevas géodésique. On s'est efforcé de faire concourir à la fixation de chaque point toutes les données dont on disposait, en attribuant à chacune de ces données une influence proportionnelle au degré de confiance qu'elle inspirait. Appliquer à de tels matériaux les procédés de calcul de la Géodésie de précision, c'est-à-dire la méthode des moindres carrés avec son cortége d'équations et de coefficients péniblement préparés, c'est toujours perdre son temps et méconnaître les principes mêmes du Calcul des probabilités. On trouve dans la *Géodésie d'Éthiopie* une méthode plus simple, plus directe, adaptée à la nature variée et souvent précaire des observations qu'un voyageur peut recueillir au hasard de la route et selon les facilités qui résultent de sa situation. Cette méthode, exposée aux pages 314-321, sous le titre de *Méthode de compensation,* part d'un système provisoire de positions que l'on perfectionne peu à peu par des tâtonnements qui ont pour but d'équilibrer en quelque sorte l'influence des diverses données (latitudes, longitudes, altitudes absolues ou différences de niveau, azimuts, apozéniths, distances), et de resserrer ainsi graduellement les mailles du réseau trigonométrique. Dans ce dessein, on construit de petites cartes spéciales pour chaque point du réseau, où, autour de la position provisoire, on trace le parallèle de la latitude observée, les trajectoires des azimuts observés et les autres lignes droites ou courbes qui représentent à l'œil des conditions à remplir (un arc de cercle représenterait une distance estimée). Il convient d'adopter pour ces constructions la projection de Mercator, où les azimuts sont des lignes droites. On s'efforce alors de corriger les diverses positions, de façon que, sur les cartes spéciales qui sont dans une dépendance mutuelle, les trajectoires se rapprochent et circonscrivent par un polygone de plus en plus petit une position centrale qui deviendra la position définitive du point que l'on veut fixer. Afin de faire concourir à cette compensation progressive des erreurs d'observation les angles zénithaux, on marque sur les trajectoires, de distance en distance, les altitudes correspondant à l'apozénith observé, et l'on cherche à mettre d'accord le mieux possible les altitudes dont la moyenne fournira l'altitude définitive du même point. C'est de cette manière qu'ont été déterminées les trois coordonnées des 857 points que renferme la *Liste des positions*. D'après M. Radau, l'incertitude de ces positions atteint rarement 1 minute d'arc.

Après avoir indiqué rapidement les principes des méthodes mises en pratique par M. d'Abbadie, il nous reste à donner quelques détails complémentaires sur les résultats que renferme la *Géodésie d'Éthiopie*. Dans l'Introduction, on trouve une brève narration du voyage, quelques explications sur le système de transcription des noms indigènes adopté par l'auteur, l'exposé du plan général de l'Ouvrage, et l'histoire des vicissitudes qui en ont retardé la publication.

Voici ensuite, en peu de mots, le contenu des Chapitres :

Chapitre I. *Instruments*.

Chapitre II. *Calcul du temps*. — Réduction des angles horaires. — Calcul des hauteurs correspondantes, avec cinq Tables auxiliaires. — États des chronomètres, etc.

Chapitre III. *Latitudes.* — Méthode de réduction, avec deux Tables auxiliaires. — Méthode pour observer une latitude sans chronomètre. — Résumé et discussion des soixante latitudes observées.

Chapitre IV. *Longitudes par observations de la Lune.* — Méthode pour appliquer la parallaxe aux positions de la Lune (deux Tables). — Calcul de la longitude par une occultation, par les hauteurs ou par les distances lunaires. — Tableau des occultations observées. — Observations de hauteurs et de distances lunaires, avec leurs résultats.

Chapitre V. *Altitudes hypsométriques.* — Observations du baromètre et de l'hypsomètre, avec leurs résultats; tables auxiliaires. — Liste des altitudes absolues.

Chapitre VI. *Bases par le son.* — Mesure des distances par la vitesse de propagation du son. — Mesures accessoires faites au mètre, au pas, etc.

Chapitre VII. *Azimuts et apozéniths.* — Réduction des relèvements faits au théodolite. — Méthode des azimuts correspondants.

Chapitre VIII. *Tours d'horizon.* — 325 tours d'horizon, renfermant 4750 relèvements. — *Azimuts ordonnés,* réduits et classés suivant l'ordre alphabétique des stations et l'ordre naturel des signaux. — *Déclinaisons de la boussole.*

Chapitre IX. *Quelques formules de Géodésie.*

Chapitre X. *Altitudes relatives.* — Calcul des différences de niveau par les apozéniths; tables auxiliaires. — Compensation des altitudes relatives.

Chapitre XI. *Tracé des cartes.* — Projection de Mercator. — Coefficient du papier. — Latitudes dilatées. — Correction Givry. — Correction des distances relevées sur une carte réduite.

Chapitre XII. *Construction des cartes.* — Calcul des trajectoires, des triangles, d'un quadrangle. — Orientation d'un tour d'horizon par la carte. — Placements par apozéniths. — Divers moyens de commencer une carte. — Méthode de compensation.

Chapitre XIII. *Coordonnées absolues.* — Latitudes, longitudes, altitudes absolues.

Chapitre XIV. *Histoire des quatre Cartes.* — Cartes du Tigray, du Bagemdir, du Gojam, du Damot. Degré de certitude des positions.

Chapitre XV. *Résidu des relèvements.* — Azimuts sans croisement.

Chapitre XVI. *Journées de route.* — Itinéraire détaillé, avec les temps de parcours.

Chapitre XVII. *Liste des positions.* — Positions, notes critiques.

Additions. — On y trouve notamment la méthode de M. Radau pour déterminer la longitude sans chronomètre, par les hauteurs et les azimuts de la Lune.

Détails des Cartes. — Renseignements supplémentaires sur la construction et le remplissage des *onze Cartes*, où les noms des points géodésiques et les lignes de route sont imprimés en rouge.

Planches. — Profils des signaux, ou croquis des contours d'un grand nombre de signaux naturels relevés dans les tours d'horizon.

Table alphabétique des noms et des matières.

Ce court sommaire suffit pour donner une idée de l'étendue des matériaux qui ont été soumis à une discussion approfondie, de la somme de travail que représente cet Ouvrage, et du fruit qu'en retireront les voyageurs qui voudront s'appliquer sérieusement à réunir les matériaux pour la carte d'un pays encore inexploré. Ils profiteront des perfectionnements qu'ont subis les instruments d'observation depuis vingt ans : ils pourront employer l'*aba,* théodolite à prisme et à lunette horizontale de M. d'Abbadie ; le polémomètre, qui sert à estimer les distances ; la planchette photographique d'Auguste Chevallier, qui fournit instantanément un tour d'horizon, et une foule d'autres instruments qui permettront de multiplier et de rendre encore plus précises les données qui serviront de fondement aux cartes futures.

Nous ne dirons que peu de mots du second Ouvrage de M. d'Abbadie, qui a pour titre : *Observations relatives à la Physique du globe.* Ce sont des observations de magnétisme terrestre et de météorologie, faites au Brésil, en Égypte et en Abyssinie, de 1836 à 1849. A Olinda, M. d'Abbadie a observé, en 1837, les variations diurnes de la déclinaison de l'aiguille aimantée, l'inclinaison magnétique et la force horizontale du magnétisme terrestre. En Afrique, il n'a observé, dans diverses stations, que l'inclinaison et la force horizontale. Les observations météorologiques de tout genre ont été faites pendant une traversée de l'Atlantique, ensuite au Brésil, en Égypte, en Éthiopie, quelques-unes en Algérie, au mois de mars 1867, à l'occasion d'une éclipse de Soleil. Il y a là notamment des observations psychrométriques assez nombreuses qui prouvent la sécheresse habituelle du climat éthiopien, des observations de la température du sol à diverses profondeurs, une discussion approfondie des phénomènes du tonnerre en Éthiopie, et des remarques curieuses sur le *qobar*, sorte de brume sèche qui obscurcit l'atmosphère. Parmi les Tables que renferme l'Ouvrage, nous citerons les Tables barométriques et hypsométriques de M. Radau. En résumé, on y trouve des résultats qui ont leur importance; il faut seulement regretter que la publication de ces observations ait été si longtemps différée, ce qui en a un peu diminué l'intérêt; il est vrai que plusieurs des résultats obtenus avaient été publiés séparément depuis longtemps. En définitive, ces deux Ouvrages renferment une somme considérable de faits bien constatés, de chiffres précis et d'idées nouvelles, et, à ce titre, ils garderont une place honorable dans la littérature des Sciences d'observation.

SUTER (Dr. Heinrich). — GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN. — *Erster Theil.* Von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. — 2. Auflage. Zürich, Druck und Verlag von Orell Füssli & Co.; 1873 (1).

Les perfectionnements essentiels qui, depuis l'apparition des Ouvrages de Montucla et de Bossut, ont été apportés séparément aux diverses parties de l'histoire des Mathématiques, font aujourd'hui sentir l'urgence de la publication d'un Traité général, destiné à remplacer les anciens, dont le plus récent date du commencement de ce siècle. Ce besoin est d'autant plus impérieux pour les jeunes professeurs français, que l'histoire des Mathématiques a pris place, depuis quelques années, parmi les matières exigées pour le concours d'agrégation. Or nous ne voyons pas trop comment, dans l'état de choses actuel, on peut se mettre au courant de cette science, si l'on

---

(1) SUTER (H.). — *Histoire des Sciences mathématiques.* Ire Partie. Depuis les temps les plus reculés jusqu'à la fin du XVIe siècle. — 2e édition. Zürich, Orell Füssli et Cie; 1873. — 1 vol. in-8o, VI-196 p., 2 pl. Prix : 10 fr. 75.

n'a pas à sa disposition une assez nombreuse collection de monographies, publiées soit en France, soit surtout à l'étranger.

Le volume que nous annonçons ici, et qui doit former le commencement d'un travail complet sur cette matière, répond en partie à ce *desideratum*. Un livre de cette étendue, rédigé en tenant compte des recherches modernes, avec des renvois aux sources et des indications chronologiques et bibliographiques aussi nombreuses que possibles, serait assurément du plus grand secours pour les lecteurs auxquels le temps et les ressources matérielles manquent pour compulser eux-mêmes des publications spéciales et fouiller les documents originaux, et qui trouveraient ainsi réunis un tableau général des progrès de la Science et un guide pour des études plus détaillées et plus approfondies.

Malheureusement il s'en faut de beaucoup que ce programme soit complétement réalisé dans l'Ouvrage qui nous occupe. Si l'on en excepte les parties où l'auteur a pu mettre à profit la remarquable monographie de M. Bretschneider (1), le Livre de M. Suter a été composé à un point de vue trop peu technique pour suffire aux exigences des lecteurs mathématiciens. Les sources de seconde main auxquelles l'auteur a puisé, et dont il donne lui-même la liste, sont loin de correspondre à l'état présent de la Science. Les renseignements bibliographiques sont à peu près absents, et les dates ne sont que très-rarement indiquées.

Comme on le voit par la lecture du titre, ce volume traite de l'histoire des Mathématiques, depuis les temps les plus reculés jusqu'à la renaissance des Sciences en Europe au XVIe siècle. Il se divise en sept Chapitres, précédés d'une Introduction où l'auteur énumère les autorités sur lesquelles il s'appuie. Ainsi que nous l'avons dit, cette liste présente des lacunes regrettables, et l'on est surpris de n'y pas voir figurer les noms des Wœpcke, des Th.-H. Martin, des Sédillot, et de tant d'autres savants qui enrichissent de leurs découvertes le précieux *Bullettino* de M. le prince Boncompagni.

Le Chapitre Ier contient un aperçu des commencements de la Science chez les peuples de l'Orient et chez les Égyptiens.

Le Chapitre II est consacré à l'histoire des Mathématiques chez les Grecs jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie. Cette partie,

---

(1) *Die Geometrie und die Geometer vor Euclides*. Voir *Bulletin*, t. IV, p. 113.

où l'auteur a mis à profit les travaux de M. Bretschneider, nous semble la plus satisfaisante de tout le Livre. Le sujet y est traité d'une manière claire et intéressante.

Le Chapitre III traite de l'histoire de l'École d'Alexandrie, depuis sa fondation jusqu'à l'époque de Claude Ptolémée. L'auteur, dans les quatre premières pages, s'occupe d'Euclide et de ses Ouvrages. Nous ne saurions partager son avis lorsqu'il compare le mérite des *Éléments de Géométrie* de Legendre à celui des *Éléments* du géomètre alexandrin. L'Ouvrage de Legendre porte certainement l'empreinte des progrès accomplis dans les temps modernes, et l'on y reconnaît en maint endroit l'œuvre d'un profond mathématicien ; mais il s'en faut de beaucoup qu'il présente l'unité de méthode, la cohésion et la solidité logique du Livre d'Euclide. Nous remarquons surtout avec surprise l'absence de toute mention du Livre des *Porismes* et des beaux travaux auxquels a donné lieu la restauration de cet Ouvrage, dont la perte était si regrettable, travaux qui ont tant ajouté à la gloire d'Euclide et à celle du grand géomètre qui les a menés à bonne fin !

Après avoir rapporté les découvertes des premiers astronomes alexandrins, l'auteur fait l'histoire de la vie et des travaux d'Archimède, qu'il signale avec raison comme le précurseur des inventeurs de l'Analyse infinitésimale, mais dont le mode d'exposition, quoi qu'en dise M. Suter, ne rappelle rien moins que le langage d'un auteur moderne.

Viennent ensuite les Notices consacrées à Apollonius, à Hipparque, et aux autres géomètres et astronomes qui ont illustré les derniers temps de la célèbre École.

Dans le Chapitre IV, l'auteur donne l'histoire de l'astronome Ptolémée et de ses commentateurs ; puis il consacre quelques pages à Diophante, ce mathématicien auquel on ne connaît ni prédécesseur ni disciple parmi les Grecs, et qui ne trouva de continuateurs que chez les Arabes. Il mentionne, un peu sommairement peut-être, les écrits de Pappus, celui que l'on peut appeler « le dernier des Grecs », et après lequel cesse toute activité productrice dans la civilisation gréco-latine.

Le Chapitre V nous présente un tableau de l'histoire des Mathématiques chez les Orientaux, et particulièrement chez les Arabes. Il eût été difficile à l'auteur de traiter ce sujet au point de vue de la Science actuelle, si, comme il l'indique, il n'a pas consulté d'auteurs postérieurs au XVIII^e siècle, en laissant de côté des géomètres orientalistes du mérite de Wœpcke, dont le nom n'est pas cité une seule fois. Aussi a-t-il été facile à M. Hankel (¹) de relever dans ce Chapitre d'assez nombreuses erreurs.

Le Chapitre VI traite de l'état des Mathématiques dans l'Occident pendant le moyen âge. Après avoir mentionné Bède et Alcuin, M. Suter énumère les travaux de Gerbert (Sylvestre II), sans citer le savant Ouvrage de M. Olleris. Il attribue à Gerbert l'introduction en Europe des chiffres arabes et hindous, quoiqu'il soit bien établi que Gerbert ne connut pas l'usage du zéro, et que c'est à Léonard de Pise que revient la gloire d'avoir fait connaître à l'Occident cette invention capitale (²).

M. Suter signale le XIV^e siècle comme le plus stérile de tout le moyen âge, au point de vue scientifique. Si cependant, au lieu de s'arrêter aux données de Montucla et de Weidler, il eût pris connaissance des travaux récents publiés par M. Curtze dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, il y aurait trouvé le nom du plus grand génie mathématique du moyen âge, de Nicole Oresme, dont les découvertes se rattachent immédiatement aux grandes inventions de Viète et de Descartes. Il est vrai que cet homme si éminent attend encore de ses compatriotes mêmes la justice qui lui est due, et que, s'il est permis de l'oublier à Paris, on est presque excusable de l'ignorer à Zurich.

Dans le Chapitre VII, l'auteur passe rapidement en revue Copernic et ses disciples immédiats, puis les géomètres tels que le cardinal de Cusa, Albert Dürer, Luca di Borgo, Zamberti (qu'il nomme à tort Lamberti), Commandin. Il arrive ensuite aux algébristes italiens, au sujet desquels il aurait pu consulter l'intéressant travail de M. Gherardi, dont M. Curtze a publié, dans les *Archives de Grunert*, une traduction allemande (³). De là il passe aux travaux de Viète, de Stifel, de Rudolf, de Ramus, de Clavius; enfin il reprend l'analyse des progrès de l'Astronomie depuis Copernic

(¹) Voir *Bullettino di Bibliografia*, etc., t. V, p. 297.

(²) *Voir* FRIEDLEIN, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer*, etc. Erlangen; 1869.

(³) T. LII; 1871. Voir *Bulletin*, t. III, p. 85.

jusqu'à Tycho Brahe et aux auteurs de la réforme grégorienne du calendrier.

Dans un Appendice, l'auteur jette un coup d'œil d'ensemble sur la marche générale des Sciences mathématiques depuis leur origine, et sur les travaux qui doivent suivre immédiatement l'époque à laquelle il s'est arrêté.

Malgré les critiques que nous avons été obligé de faire, nous devons néanmoins reconnaître que, parmi les Précis d'histoire générale des Mathématiques qui existent, l'Ouvrage de M. Suter est celui qui correspond le mieux aux connaissances actuellement acquises, et, à ce titre, nous ne pouvons que le recommander à l'attention de nos lecteurs. Nous espérons d'ailleurs que l'auteur trouvera bientôt, dans la publication d'une troisième édition, l'occasion de combler une bonne partie des lacunes que nous avons signalées.

J. H.

LAURENT (H.), répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, membre du Cercle des Actuaires français. — TRAITÉ DU CALCUL DES PROBABILITÉS. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. — 1 vol. in-8°, 268 p. Prix : 7 fr. 50.

Le Calcul des probabilités doit être considéré comme une création éminemment française. Parmi les fondateurs de ce Calcul, on voit, en effet, briller, au premier rang, des noms français : Pascal, Fermat, Montmort, de Moivre, d'Alembert, Condorcet, Laplace, Poisson, Bienaymé, etc.

Aucune branche des Mathématiques appliquées ne s'occupe de problèmes plus intéressants et plus immédiatement utiles pour la vie de tous les jours; aucune n'a plus contribué à détruire les préjugés et à mettre en lumière les conclusions du sens commun. C'est d'après des probabilités plus ou moins grandes que nous dirigeons tous nos actes, et la Science qui a pour but de nous guider dans l'appréciation relative de ces probabilités et de nous apprendre à tirer de l'observation les conclusions les plus rationnelles semblerait devoir occuper une place importante dans toute éducation vraiment scientifique.

Il est triste de dire que notre pays est peut-être, en Europe, celui où le Calcul des probabilités est le moins étudié, malgré les services inappréciables qu'il rend tous les jours, et ceux qu'il est appelé à rendre dans l'avenir par ses applications à la Statistique et à l'Administration.

Ce n'est pas ici le lieu de rechercher quelles sont les causes de cet abandon déplorable; mais nous n'en sommes que plus heureux d'avoir à signaler aujourd'hui l'apparition du nouveau Traité mathématique, dont nous sommes redevables à un jeune géomètre, déjà auteur de plusieurs Ouvrages devenus classiques (1).

M. Laurent, comme membre du Cercle des Actuaires français, a eu l'occasion de s'occuper spécialement des problèmes de probabilités qui se rapportent aux questions financières. Il a pu juger de l'insuffisance des Traités qui existent sur cette matière, et dont aucun ne comble la lacune qui sépare les livres tout à fait élémentaires, comme ceux de Lacroix et de Cournot, des Ouvrages de haute science de Laplace et de Poisson. Il s'est attaché à traiter les questions par des méthodes plus rigoureuses que celle des fonctions génératrices, employée par Laplace, et il a joint aux résultats connus de ses devanciers ceux qui sont dus aux travaux de Cauchy et de M. Bienaymé.

Après avoir résumé, dans son premier Chapitre, les formules de l'Analyse combinatoire et des développements en séries trigonométriques, il consacre les deux Chapitres suivants à l'exposition des principes fondamentaux du Calcul des probabilités.

Le Chapitre IV traite des méthodes dans les sciences d'observation, de la méthode des moindres carrés, avec les applications au tir des armes à feu et aux Tables de mortalité.

Le Chapitre V a pour objet les opérations des Compagnies d'assurances.

L'auteur nous avertit lui-même, dans sa Préface, qu'il ne traitera pas de l'application du Calcul des probabilités aux sciences morales, parce que, suivant lui, on ne peut appliquer le mot *probabilité* aux témoignages, lesquels ne sauraient être considérés comme des événements également probables. Il existe cependant dans les statistiques criminelles une constance de résultats tout aussi frappante que celle que l'on rencontre dans les Tables de mortalité. Dans les deux cas, les causes agissantes sont également inconnues. Or le

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 193.

Calcul des probabilités n'a pas à s'occuper nécessairement des causes, son but étant de raisonner sur les effets connus, dès que ceux-ci sont soumis à une régularité suffisante. Il semble donc que l'auteur ait cédé, dans cette occasion, à des considérations plus métaphysiques que mathématiques, en renonçant à poser les bases de la théorie, quelque imparfaites que soient, à l'heure présente, les données sur lesquelles cette théorie doit reposer.

La marche générale de la Science, à notre époque, tend à prouver que les faits psychologiques sont, comme les faits physiologiques, soumis à des influences inconnues, qui se manifestent à nous par la régularité frappante des résultats moyens ; mais quelque incomplètes que soient nos connaissances sur un ordre de phénomènes, le Calcul des probabilités a toujours prise sur les faits observés, pour nous apprendre à en tirer le meilleur parti, et nous montrer la direction qu'il faut prendre pour les compléter. L'homme moral n'est pas plus un mystère pour nous que l'homme physique ; le calcul est aussi bien applicable aux Tables de criminalité qu'aux Tables de mortalité, et nous ne voyons pas de différence essentielle entre la position de l'accusé en présence du juge et celle du malade en présence du médecin.

Nous regrettons aussi que les limites dans lesquelles M. Laurent a cru devoir se renfermer ne lui aient pas permis de donner plus de développement à l'application du Calcul des probabilités aux sciences d'observation et en particulier à la Méthode des moindres carrés, et de nous initier aux nouvelles recherches faites sur cette méthode, entre autres par M. Hansen. Nous espérons que, dans une nouvelle édition, l'auteur trouvera l'occasion d'élargir son cadre.

Il nous reste encore une remarque à faire au sujet de la Note II, relative au Calcul numérique dans les applications de la Méthode des moindres carrés. On sait qu'il est avantageux, dans ce cas, d'exécuter les multiplications à l'aide de la même Table qui donne les carrés, en s'appuyant sur la formule

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

A cette formule, M. Laurent propose de substituer la suivante :

$$ab = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right].$$

Il nous semble que cette dernière équation, exigeant trois lectures, est d'un usage moins expéditif que la précédente, qui n'en exige que deux, surtout quand on a à sa disposition une Table des *quarts de carrés,* comme on en trouve une à la suite des Tables de logarithmes à quatre décimales de J.-H.-T. Müller. Deux nombres étant écrits l'un sous l'autre, un calculateur exercé peut lire immédiatement, sans l'écrire, leur somme ou leur différence, ce qui ne saurait compter pour une opération. J. H.

RUBINI (R.), professore nella R. Università di Napoli. — TRATTATO D'ALGEBRA. — *Parte prima :* I primi Elementi d'Algebra. — *Parte seconda :* Complemento agli Elementi d'Algebra. — Napoli; 1872-1873. In-8°, 152-363 p. Prezzo : 2l,50e 6l,00.

Les deux Volumes que nous annonçons, et dont l'un en est à sa quatrième, l'autre à sa troisième édition, font partie d'un Cours complet de Mathématiques justement estimé, et que l'auteur s'applique sans relâche à perfectionner toutes les fois que le succès de son œuvre lui fournit l'occasion d'une réimpression nouvelle.

Le Traité complet d'Algèbre doit se composer de quatre Parties, dont les deux dernières, qui doivent contenir les théories et les algorithmes de la nouvelle Algèbre et les éléments de la Théorie des nombres, sont encore sous presse.

La première Partie traite des matières habituelles d'un Précis d'Algèbre élémentaire. Dans la deuxième Partie, l'auteur expose la théorie des permutations et des combinaisons, la formule du binôme, la théorie des déterminants, les fractions continues, les quantités complexes et la résolution de l'équation binôme, la théorie générale des équations de degré supérieur, l'élimination, les séries avec diverses applications.

Nous apprenons avec plaisir que M. Rubini prépare en ce moment une nouvelle édition de ses excellents *Elementi di Calcolo infinitesimale.* J. H.

ТОТГЁНТЕРЪ (И.), профессоръ Математики въ Кембриджѣ. — *Дифференціальное вычисленіе, съ собраніемъ примѣровъ для упражненій.* — Съ англійскаго перевелъ и дополнилъ приложеніами къ геометріи пространства трехъ измѣреній В.-Г. ИМШЕНЕЦКІЙ, профессоръ теоретической механики въ Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ. — С.-Петербургъ, изданіе В.-П. Печаткина; 1873. Цѣна : 3 р. (¹).

Avant de publier ses savants Ouvrages d'histoire critique des Sciences mathématiques (²) et son dernier travail sur le Calcul des variations (³), M. Todhunter s'était fait connaître par une série d'excellents livres classiques sur les diverses branches des Mathématiques, formant un Cours élémentaire complet. Les deux volumes qui contiennent le Calcul différentiel et le Calcul intégral (⁴) ont eu déjà plusieurs éditions et ont été traduits dans plusieurs langues. Ces deux Traités, en effet, peuvent être regardés comme des modèles d'exposition rigoureuse des théories fondamentales; mais ce qui les rend surtout précieux, c'est le grand nombre d'exemples bien choisis qui sont développés dans le texte, ou proposés comme exercices à la fin de chaque Chapitre.

Le seul reproche que nous croyions pouvoir adresser à ces Ouvrages, c'est l'attachement trop exclusif de l'auteur à la *forme* d'exposition du Calcul infinitésimal, dite *méthode des limites*. Il est certain que l'introduction des infiniment petits, lorsqu'on ne lui donne pas le principe des limites pour fondement, ne peut conduire qu'à des conclusions dénuées de toute espèce de rigueur; mais cette méthode, dont Poisson a été l'un des derniers représen-

---

(¹) Todhunter (I.), professeur de Mathématiques à Cambridge. — *Calcul différentiel, avec un recueil d'exemples pour servir d'exercices.* — Traduit de l'anglais et augmenté des applications à la Géométrie de l'espace à trois dimensions, par V.-G. Imschenetsky, professeur de Mécanique théorique à l'Université impériale de Kharkof. — Saint-Pétersbourg, chez V.-P. Petchatkine; 1873. — 1 vol. in-12, 458-112 p. Prix : 3 roubles.

(²) *A History on the Process of the Calculus of Variations during the nineteenth Century*. Cambridge; 1861. — *A History of the mathematical Theory of Probability, from the time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge; 1865.

(³) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 273.

(⁴) *A Treatise on the Differential Calculus, with numerous Examples.* — *A Treatise on the Integral Calculus and its Applications, with numerous Examples.*

tants, est aujourd'hui abandonnée par tous les auteurs qui attachent quelque prix à l'exactitude des raisonnements.

Tous les géomètres considèrent maintenant les infiniment petits comme caractérisés, non par leur *petitesse actuelle,* mais par leur *variabilité* et par la *possibilité* de leur attribuer des valeurs aussi voisines de zéro que l'on voudra. On tire de cette définition les règles d'après lesquelles on peut altérer les infiniment petits ou les remplacer par d'autres, sans changer les limites de leurs rapports ou de leurs sommes. Grâce à l'emploi de ces règles, rien n'empêche, tout en restant dans la rigueur la plus absolue, de conserver les simplifications qu'offrait l'ancienne conception rudimentaire des infiniment petits. On peut s'en convaincre en lisant la première édition du *Cours d'Analyse* de Duhamel (1840-1841).

Cependant un certain nombre de bons auteurs, M. Todhunter entre autres, inspirés par une prudence qui nous paraît excessive, ont cru qu'il était nécessaire d'abandonner entièrement la terminologie du Calcul infinitésimal, et, tout en conservant les notations leibnitziennes, de leur enlever leur signification primitive pour en faire de purs symboles, destinés seulement à *rappeler* l'origine des quantités qu'ils représentent. De cette manière, pour les partisans exclusifs du langage de la *méthode des limites,* $\frac{dy}{dx}$ et $\int y\,dx$ sont des symboles indécomposables, dénotant la dérivée et la fonction primitive de la quantité y, et c'est ainsi que l'on voit des Traités de *Calcul différentiel,* dans lesquels il n'est pas question de la *différentielle,* et où le mot d'*infiniment petit* n'est pas prononcé. Suivant notre conviction, cette forme tout artificielle que l'on donne à l'algorithme du Calcul infinitésimal n'ajoute en rien à la rigueur et nuit considérablement à la clarté des conceptions et à la commodité dans l'usage pratique. Aussi beaucoup de géomètres, après avoir voulu, comme Lagrange, écarter des principes de l'Analyse la notion des infiniment petits, se trouvent forcés d'y revenir dans les applications, mais cette fois aux dépens de la rigueur, puisqu'ils n'ont traité jusque-là le langage infinitésimal que comme un expédient abréviatif.

Le savant traducteur russe, dont les lecteurs du *Bulletin* connaissent les excellents travaux sur les équations aux dérivées partielles, a voulu combler, autant que possible, la lacune que nous venons de signaler dans l'Ouvrage original. Pour cela, il a étendu et développé notablement le dernier Chapitre du volume anglais, celui où M. Todhunter définit, pour la première fois, les différentielles, et, dans ces suppléments, il expose la théorie des infiniment petits.

Une autre addition importante, due à M. Imschenetsky, consiste dans un *Appendice* de six Chapitres (112 pages), contenant l'application du Calcul différentiel à la Géométrie des trois dimensions, M. Todhunter s'étant contenté, comme la plupart des auteurs anglais, de traiter les questions de Géométrie plane. Le dernier Chapitre de cet Appendice est consacré à la courbure des surfaces, et se termine par la théorie de la mesure de la courbure, d'après Gauss.

Nous espérons que M. Imschenetsky continuera son œuvre si utile, et qu'il dotera bientôt son pays d'une traduction du *Calcul intégral* de M. Todhunter, ainsi que du *Traité des équations différentielles* de Boole, qui en est le complément obligé. Nous savons d'avance que ces Ouvrages ne peuvent que gagner entre les mains d'un traducteur tel que l'éminent professeur de Kharkof.

J. H.

NICOLAI COPERNICI THORVNENSIS DE REVOLVTIONIBVS ORBIVM CÆLESTIVM LIBRI VI. Ex auctoris autographo excudi curauit Societas Copernicana Thorunensis. Accedit GEORGII IOACHIMI RHETICI DE LIBRIS REVOLVTIONVM NARRATIO PRIMA. — Thoruni, sumptibus Societatis Copernicanæ. MDCCCLXXIII. (Berolini, apud Weidmannos) (1).

Le 19 février de cette année, quatrième centenaire de la naissance de Nicolas Copernic, la Société copernicienne des Sciences et Arts de Thorn a pensé qu'elle ne pouvait offrir un plus beau présent commémoratif à la ville natale du grand homme qu'en donnant au monde savant, sous une forme digne de l'Ouvrage, une nouvelle édition de son Livre immortel, du *monumentum ære perennius* qu'il s'est élevé à lui-même. Tandis que l'auteur de ces lignes était chargé par la Société de collationner le manuscrit original avec la

(1) 1 vol. grand in-4°, xxx-496 p. Prix : 40 francs.

première édition, quelques-uns de ses collègues s'occupaient de la comparaison des quatre éditions publiées jusqu'ici. Prenant pour base les matériaux critiques ainsi rassemblés, j'entrepris, avec le secours de mon collègue Boethke, la constitution du texte. M. le professeur Hoüel m'ayant demandé, pour le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* un compte rendu de notre édition, je m'empresse de répondre à son appel dans la Note suivante.

Notre édition se distingue de toutes les précédentes principalement en ceci, qu'elle a été faite sur le manuscrit original de Copernic. Par un enchaînement remarquable de circonstances, ce manuscrit s'est conservé jusqu'à ce jour; il a heureusement échappé au pillage et aux dévastations que commirent les Espagnols au commencement de la guerre de Trente ans, en Moravie, après la bataille de la montagne Blanche, et il se trouve depuis lors en la possession de la maison des comtes de Nostitz, à Prague. L'inspection de ces précieuses pages m'a fourni l'occasion d'étudier à cette source même l'histoire de la composition successive du manuscrit. C'est, en effet, l'exemplaire de travail de l'auteur, dans lequel, pendant près de quarante années qu'il a employées à la création de son œuvre, il a consigné les changements et les corrections qui lui ont paru nécessaires. D'après la forme modifiée de son écriture depuis sa jeunesse jusqu'à son âge mûr, d'après la différence de l'encre et du papier employés, on peut conclure assez sûrement l'époque de la rédaction des divers Chapitres. On peut ainsi prouver, par exemple, que Copernic a soumis trois fois son Ouvrage à un remaniement intégral, et que les huit Livres de la rédaction primitive ont été successivement réduits à sept, puis à six. Dans les *Prolégomènes,* je me suis largement étendu sur ce point. J'ai montré aussi qu'aucune des quatre éditions publiées jusqu'ici n'a été et n'a pu être faite sur notre manuscrit original; que l'édition *princeps* (Nuremberg, 1543) a été probablement imprimée d'après une copie, faite sans doute par l'élève et l'intime ami de Copernic, Joachim Rheticus, et dans laquelle on s'est permis toute sorte de changements arbitraires.

Notre édition présente le texte du manuscrit original, tant qu'il n'a pas été nécessaire d'avoir égard à des erreurs d'écriture manifestes, et encore, en pareil cas, la leçon du manuscrit a-t-elle été indiquée en note au bas du texte. Elle contient les éléments critiques, en indiquant toutes les variantes de l'édition. De plus, en reproduisant au bas du texte tous les passages raturés qui pouvaient être de quelque importance pour l'histoire du texte ou pour toute autre cause, elle met le lecteur à même de se faire une idée du manuscrit sans l'avoir sous les yeux, et de se livrer lui-même aux intéressantes recherches dont j'ai parlé plus haut.

Une édition fondée simplement sur la comparaison des quatre éditions existantes (Nuremberg, 1543; Bâle, 1566; Amsterdam, 1616; Varsovie, 1854) aurait déjà suffi pour mettre en évidence un grand nombre d'erreurs dans cette dernière; mais, avec l'aide du manuscrit, j'ai eu souvent le bonheur de pouvoir remonter à la source de ces erreurs. La comparaison dont je viens de parler a donné de plus ce résultat remarquable, que la première édition est la plus correcte, et la dernière, celle de Varsovie, la plus incorrecte de toutes. Il y manque souvent des lignes entières, d'autres sont imprimées en double; on y rencontre les fautes d'impression les plus étranges, dues en partie à une fausse interprétation des abréviations. Cela est d'autant plus surprenant, que les éditeurs de Varsovie ont eu le manuscrit original à leur disposition. Il est vrai que, en lisant l'appréciation qu'ils en font dans leur édition, on serait tenté de croire qu'ils ont eu un tout autre manuscrit que moi sous les yeux; mais c'est ce que d'autres circonstances ne permettent pas d'admettre. J'insiste un peu longuement sur ce point, parce que, aussitôt après l'annonce de notre édition, un critique varsovien a sagement proclamé, dans le *Magazin für Litteratur des Auslandes,* qu'une nouvelle édition était inutile, par la raison que celle de Varsovie répondait à toutes les exigences. Je puis, au contraire, déclarer encore une fois publiquement que l'édition des *Revolutiones* publiée à Varsovie ne peut être d'aucune utilité pour l'étude du Livre à quiconque ne comprend pas le polonais, et, quant à la traduction polonaise, le premier astronome polonais actuellement vivant affirme, dans une Lettre que j'ai eu l'occasion de voir, qu'elle est encore plus mauvaise que le texte latin.

Parmi les découvertes les plus importantes auxquelles a donné lieu l'examen du manuscrit, on peut compter celle du passage où Copernic admet la possibilité d'un mouvement elliptique dans le ciel (p. 116 de notre édition). Bien qu'il ne soit question dans ce passage que du mouvement de libration de la Lune, la chose a cependant une grande portée, parce que Copernic s'est servi d'un mouvement semblable à la libration de la Lune, selon ses propres expressions, pour expliquer les mouvements des planètes, et parce que l'addition de ces mots : *Sed de his alias,* montre qu'il s'était longtemps occupé de l'ellipse, et que peut-être, comme le fait observer le critique des *Göttingische gelehrte Anzeigen,* il aurait fait le grand pas que Kepler a fait après lui, s'il n'avait pas été, avec tous ses contemporains, trop prévenu en faveur de l'excellence du mouvement circulaire. Du reste, Copernic fait encore, dans un autre endroit (lib. V, cap. IV, p. 326 de notre édition), des allusions à l'ellipse, que Kepler lui-même avait déjà relevées [1].

On a joint, comme Appendice à l'Ouvrage de Copernic, l'écrit par lequel ce Livre fut annoncé, pour la première fois, au monde savant, la *Narratio prima* de Georges Joachim, qui avait pris de son pays natal le nom de Rheticus. De cet écrit découlent d'importants renseignements sur la vie de Copernic, et, comme il a été rédigé sous les yeux mêmes de ce dernier, à Frauenburg, nous croyons qu'il se trouve ici à sa vraie place. De plus, j'ai ajouté à l'édition une liste sommaire des observations propres de Copernic, indiquées dans l'Ouvrage, ainsi qu'un *Index nominum.* Le projet d'un *Index rerum,* auquel j'avais songé, a dû être abandonné, faute du temps nécessaire.

Si l'Ouvrage a pu, au point de vue matériel, paraître d'une manière digne de sa destination comme souvenir de fête séculaire, nous le devons à la généreuse libéralité du Gouvernement royal, qui a mis à notre disposition des ressources que n'aurait pu fournir une Société d'hommes privés.

Faisons encore remarquer, en terminant, que l'on peut aussi se procurer, auprès de la Société Copernicienne des Sciences et Arts de Thorn, un portrait photographique de Copernic, et neuf *fac-simile* photographiés sur le manuscrit original, parmi lesquels se trouve le passage mentionné plus haut, où Copernic parle de l'ellipse.

Thorn, le 22 septembre 1873.

MAXIMILIEN CURTZE.

---

(1) *De motibus stellæ Martis,* lib. I, cap. V.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI, compilati dal Segretario. — Roma. In-4° (¹).

T. XXIV; 1870-1871.

VOLPICELLI (P.). — *Sur l'induction électrostatique, ou influence électrique. Mémoire historique et critique.* (4 art., 131 p.)

Suite d'un travail inséré au tome XXIII des *Atti*.

RESPIGHI (L.). — *Sur les observations spectroscopiques du bord et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire du Capitole.* (51 p.)

RESPIGHI (L.) — *Observation de l'éclipse de Soleil du 22 décembre 1870, à l'Observatoire du Capitole.* (4 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur certaines transformations de force vive en calorique, et sur la question qui s'y rapporte, tant entre le P. Grossi et Galilée, que sur le frottement de l'air.* (29 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur les variations de température produites, soit par le choc d'un courant d'air, soit par l'absorption de l'air par les poussières : formules pour déterminer la dépendance entre la quantité absorbée et le calorique qui s'y développe, ainsi que pour traduire les indications d'un thermomètre à air quelconque dans celles d'un thermomètre à mercure.* (2 art., 40 p.)

RESPIGHI (L.). — *Sur la constitution physique du Soleil.* (14 p.)

RESPIGHI (L.). — *Sur la lunette zénithale de l'Observatoire de l'Université Royale, au Capitole.* (20 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Note sur le plan d'épreuve.* (3 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur la doctrine de Galilée, concernant la résistance relative des poutres.* (13 p.)

L'auteur donne la démonstration mathématique de plusieurs lois

---

(¹) L'*Accademia Reale dei Lincei* existe, depuis 1870, distincte de l'*Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, dont elle a conservé les règlements et le mode de publication. Voir *Bulletin*, t. II, p. 19.

découvertes par Galilée sur la résistance que les poutres de diverses formes opposent à la rupture.

T. XXV; 1871-1872.

Volpicelli (P.). — *Sur les courants électriques, autrefois dits* de flexion (9 p.)

Cantoni (G.). — *Sur un travail critique du professeur Eccher, concernant l'électrophore et l'induction électrique.* (2 art., 5-6 p.)

Keller (F.). — *Sur la déviation du fil à plomb près des Frattocchie.* (4 p.)

Cette Note indique les résultats obtenus par l'auteur dans ses recherches sur la déviation du fil à plomb, à l'extrémité orientale de la base trigonométrique de la Voie Appienne, causée par le cratère Laziale. La montagne étant décomposée en couches horizontales de 1 mètre d'épaisseur, on a calculé les attractions exercées sur le fil à plomb par chacune de ces couches, en faisant certaines hypothèses sur leurs densités.

Volpicelli (P.). — *Solution complète et générale, par la Géométrie de situation, du problème relatif à la marche du cavalier sur un échiquier quelconque.* (2 art., 73-92 p., 1 tableau.)

Le cavalier, étant assujetti à ne pas toucher deux fois la même case de l'échiquier, pourra passer d'une case donnée à une autre, soit en parcourant toutes les cases de l'échiquier, soit en n'en parcourant qu'une partie. M. Volpicelli distingue ces deux modes de parcours sous les noms de *courses totales* et de *courses partielles*. Il se propose, dans ce Mémoire, de trouver le nombre et la forme de toutes les courses totales et partielles que peut faire le cavalier sur un échiquier de forme quelconque, en partant de chacune des cases. Ce problème comprend le suivant : Trouver le nombre et la forme des divers chemins par lesquels le cavalier, sur un échiquier de forme quelconque, peut arriver d'une case donnée à une autre case donnée, sans jamais repasser deux fois par la même case. L'auteur considère aussi bien les courses partielles que les courses totales, les seules dont on se fût occupé jusqu'à présent. Il parvient à la solution de la question par une méthode rationnelle, exclusive de tout tâtonnement et n'exigeant pas que l'on ait l'échiquier sous les yeux. Aux deux modes déjà connus de représentation de la marche du cavalier, soit par des numéros, soit par des lignes joignant les centres des cases, il en ajoute deux nouveaux. Le Mémoire contient un historique très-complet sur les travaux auxquels a donné lieu ce problème célèbre.

Respighi (L.). — *Observation de l'éclipse totale de Soleil du 12 décembre* 1871. (21 p.)

Relation des observations faites par l'auteur dans la station de Poodoocottah, gouvernement de Madras, où il s'était rendu en compagnie de l'expédition anglaise, conduite par M. Lockyer.

Respighi (L.). — *Sur le spectre de la lumière zodiacale et de la lumière des aurores polaires.* (3 p.)

Dans son voyage aux Indes-Orientales, l'auteur a pu observer, dans la lumière zodiacale, la raie lumineuse, signalée déjà par M. Ångström, et dont M. Liais avait contesté l'existence. Il considère comme probable l'identité de la lumière zodiacale avec celle des aurores polaires.

Battaglini (G.). — *Note sur la conique par rapport à laquelle deux coniques données sont polaires réciproques.* (8 p.)

Cette question, résolue par M. Cremona, dans son *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* à l'aide de considérations purement géométriques, a été traitée dans les *Actes de l'Académie de Modène,* par le professeur F. Ruffini, au moyen des coordonnées cartésiennes; mais la complication des formules obtenues n'a pas permis à cet auteur de discuter le problème dans toute sa généralité. M. Battaglini a repris ce sujet par les méthodes plus simples et plus élégantes de la Géométrie moderne; il a appliqué en outre à cette question la théorie des invariants.

Respighi (L.). — *Réponse à la Note du P. Secchi, intitulée :* « Sur la dernière éclipse du 12 décembre 1871 ». (14 p.)

Tarry (H.). — *De la prédiction du mouvement des tempêtes et des phénomènes qui les accompagnent.* (16 p.; fr.)

Respighi (L.). — *Sur les observations spectroscopiques du bord et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire de l'Université romaine, au Capitole.* 5e Note. (70 p.)

§ I. Structure, hauteur et composition de la chromosphère. — § II. Formes des protubérances. — § III. Dimensions des protubérances. — § IV. Origine, développement et transformations des protubérances. — § V. Durée des protubérances. — § VI. Fréquence des protubérances et ses variations périodiques. — § VII. Distribution des protubérances sur la surface du Soleil, et ses variations périodiques. — § VIII. Relations des protubérances avec les facules. — § IX. Relations des protubérances avec les taches. — § X. Conformation du bord solaire ou de la photosphère sur le contour des taches. — § XI. Relations des protubérances, ou éruptions solaires avec les aurores boréales. — § XII. Sur la cause des variations périodiques des protubérances et des taches solaires.

Keller (F.). — *Sur l'attraction d'un parallélépipède.* (11 p.)

L'auteur s'est proposé, dans cette Note, la résolution du problème suivant : « Trouver le rapport des arêtes d'un parallélépipède rectangle, d'après la condition que les attractions de ce solide sur les centres de ses faces soient égales entre elles ». Outre le cube, on trouve au moins deux prismes à base carrée satisfaisant à la question, et dont les arêtes x, y, z sont telles que, pour l'un, $y = z = \frac{x}{13,95}$, et pour l'autre, $y = z = 2,24x$. La Note se termine par une remarque sur un précédent travail de l'auteur, relatif à l'attraction d'une calotte sphérique.

Siacci (Fr.). — *Note sur les formes quadratiques.* (3 p.)

« U et V étant deux formes quadratiques à n variables, U′ et V′ leurs réciproques, on peut toujours, par une même substitution linéaire, passer de U à AV′ et de V à BU′, A et B étant les discriminants de U et de V; le déterminant C′ de la substitution est symétrique et égal à la moyenne géométrique entre les discriminants des formes U′ et V′. Si l'on considère C′ comme le discriminant d'une fonction W′, on peut, par la même substitution linéaire, réduire les trois formes U′, V′, W′ à ne contenir que les carrés des variables, et alors un coefficient de W′ est égal à la moyenne géométrique entre les coefficients homologues de U′ et de V′. M. Battaglini a trouvé que la conique, par rapport à laquelle deux autres coniques données sont polaires réciproques, jouit précisément de la même propriété; d'où l'on peut conclure que, dans le cas de

$n = 3$, W' représente la conique par rapport à laquelle U' et V' sont polaires réciproques. »

Brusotti. — *Considérations sur la loi de Richmann et sur les calories de température des corps.* (8 p.)

Brusotti. — *Détermination de la chaleur spécifique des corps au moyen de la quantité constante de chaleur développée par une action chimique déterminée.* (2 p.)

Brusotti. — *Relation entre le travail nécessaire pour soulever le plateau d'un électrophore et la déviation galvanométrique correspondante.* (6 p.)

Orsoni (Fr.). — *Divers systèmes pour analyser l'intensité relative de deux ou plusieurs sources de lumière.* (6 p.)

BULLETIN de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg [1].

T. XVII; 1871-72.

Savitsch (A.). — *Observations des planètes à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences.* (2 art., 6 col.)

Jacobi (M. v.). — *Note sur la fabrication des étalons de longueur par la galvanoplastie.* (5 col.)

Möller (A.). — *Calculs de la comète de Faye.* (3 col.; all.)

L'auteur, ayant repris en entier le calcul des perturbations de cette comète, en a déduit les corrections qu'il faut appliquer aux éléments donnés dans le n° 1522 des *Astronomische Nachrichten.* Il parvient aux conclusions suivantes :

1° Qu'il ne s'est encore produit aucun raccourcissement sensible du temps de la révolution;

2° Que la masse de Jupiter adoptée par Bessel s'accorde complétement avec les observations de la comète.

Wild (H.). — *Sur un nouvel instrument pour l'observation des variations de l'intensité verticale du magnétisme terrestre.* (9 col.; all.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 240.

T. XVIII; 1872.

Middendorff (A.-Th. v.). — *Quelques nouvelles observations servant à la connaissance du courant du cap Nord.* (5 col.; all.)

Jacobi (M. v.). — *Réduction galvanique du fer sous l'action d'un puissant solénoïde électromagnétique.* (7 col.; all.)

Glasenapp (M.-S.). — *Observations des satellites de Jupiter.* (12 col.)

Les astronomes sont d'accord sur la nécessité de refondre la théorie des satellites de Jupiter, donnée par Laplace. Malheureusement les observations de ces astres ayant été extrêmement négligées dans ces derniers temps, il serait difficile de déterminer aujourd'hui, avec une précision suffisante, les nouvelles constantes de cette théorie. M. Glasenapp, après avoir rappelé les recherches de Bailly sur les éclipses de ces satellites, donne le tableau des observations les plus récentes, faites, par divers astronomes, à Poulkova et à Moscou.

Somof (J.). — *Sur les vitesses virtuelles d'une figure invariable, assujettie à des équations de condition quelconques de forme linéaire.* (23 col.)

« M. Mannheim, dans son Mémoire intitulé : *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (¹), a trouvé, par une voie purement géométrique, diverses propriétés intéressantes des déplacements infiniment petits, ou des vitesses virtuelles, d'une figure invariable, en admettant que ces déplacements sont assujettis à des conditions descriptives, capables d'être réduites à une ou à plusieurs conditions simples savoir : « qu'un point de la » figure doit se déplacer sur une surface immobile. » Or cette condition n'est pas la plus générale; elle n'est qu'un cas particulier d'une autre, qui peut être exprimée par une équation quelconque de forme linéaire et homogène par rapport aux projections sur trois axes de la vitesse de translation et de la vitesse angulaire de rotation portées sur l'axe instantané, appartenant à un mouvement quelconque que peut avoir la figure invariable.

» Dans le présent Mémoire, l'auteur donne un moyen analytique

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 297.

pour déterminer les vitesses virtuelles d'une figure invariable, en supposant que ces vitesses doivent satisfaire à des équations de condition de la forme générale qu'on vient de citer. Il prend en même temps en considération les propriétés des complexes linéaires de Plücker, auxquelles les vitesses virtuelles d'une figure invariable sont intimement liées. »

ÖFVERSIGT af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. In-8° (¹).

T. XXVI; 1869.

Wrede (F.-J.). — *Sur le calcul des rentes viagères combinées.* (8 p.)

L'auteur propose une méthode approchée pour abréger les calculs énormes qu'exige la détermination de la valeur actuelle d'une rente viagère reposant sur plusieurs têtes.

Björling (C.-F.-E.). — *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule sous l'influence d'une force attractive ou répulsive, représentée par une fonction algébrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe.* (3 p.)

En désignant par η la fonction qui exprime la valeur de la force vive $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, la nature du mouvement dépend de celle des racines de l'équation $\eta = 0$.

Ericsson (J.). — *Sur l'influence de la chaleur solaire sur la rotation de la Terre.* (22 p.)

L'auteur examine l'influence que peut exercer sur la position de l'axe de la Terre et sur sa vitesse de rotation le déplacement des masses énormes de matière détachées des continents par l'action des eaux et portées dans la mer par les fleuves. D'une part, ces matières, en tombant au fond de la mer, se rapprochent du centre et tendent à accélérer la vitesse angulaire; d'autre part, elles peuvent être ou rapprochées ou éloignées de l'équateur, ce qui peut causer, suivant les cas, soit un ralentissement, soit une accélération

---

(¹) *Comptes rendus de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.* Voir *Bulletin*, t. I, p. 245.

du mouvement. Il calcule les actions qui peuvent être exercées dans l'un ou l'autre sens par les principaux fleuves, et il en conclut que la constance de la vitesse de rotation de la Terre est incompatible avec l'action de la chaleur solaire.

Lindhagen (D.-G.). — *Les déplacements de matières qui ont lieu à la surface de la Terre sont-ils capables d'altérer d'une manière sensible la durée du jour sidéral?* (13 p.)

Remarque au sujet du Mémoire précédent. M. Lindhagen établit que les diverses causes étudiées par M. Ericsson ne peuvent produire que des effets insensibles, ce qu'il était important de constater, la durée du jour sidéral étant un des éléments fondamentaux de l'Astronomie.

Edlund (E.). — *Sur la cause des phénomènes galvaniques de refroidissement et de réchauffement découverts par Peltier.* (8 p.)

Lemström (K.-S.). — *Observations sur l'électricité atmosphérique et l'aurore polaire pendant l'Expédition polaire suédoise de* 1868. (26 p.)

Edlund (E.). — *Sur le passage des courants électriques d'induction et de disjonction à travers des gaz d'inégale densité et entre des pôles de forme dissemblable.* (24 p.)

T. XXVII; 1870.

Edlund (E.). — *Sur la force électromotrice dans le contact de deux métaux.* (15 p.)

Dahlander (G.-R.). — *Sur quelques applications des lois du mouvement géométrique à la dynamique.* (8 p.)

L'auteur établit entre autres ce théorème : « Dans le mouvement d'un corps solide, la vitesse orthogonale est perpendiculaire au plan tangent commun aux deux surfaces coniques, dont le roulement l'une sur l'autre peut être considéré comme produisant le mouvement du corps autour de son centre de gravité. Elle forme un angle de 270 degrés avec l'accélération angulaire normale. »

Ericsson (J.). — *Influence de la chaleur solaire sur le mouvement de rotation de la Terre.* (17 p.)

L'auteur défend les idées et les calculs exposés dans son précédent Mémoire contre les objections de M. Lindhagen.

Dahlander (G.-R.). — *Quelques recherches relatives à la théorie mécanique de la chaleur*. (2 art.; 24 p.)

Sundell (A.-F.). — *Étude sur les courants électriques de disjonction* (58 p.)

Dunér (N.-C.). — *Détermination de l'inclinaison magnétique au Spitzberg*. (16 p.)

KONGLIGA SVENSKA Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny följd. Stockholm. In-4° (1).

T. VII; 1868.

Holmgren (Hj.). — *Intégration de l'équation différentielle*

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

58 p.; fr.)

L'intégration de cette équation, qui a été l'objet d'un grand nombre de recherches, a été abordée pour la première fois, dans toute sa généralité, par M. Liouville, au moyen de son *Calcul différentiel à indices quelconques*. Cependant, par suite d'une certaine indétermination que présentaient encore les formules du nouveau calcul, les intégrales données par M. Liouville ne pouvaient être considérées comme donnant la solution définitive du problème. M. Spitzer a consacré à cette équation plusieurs Mémoires, dont les résultats les plus remarquables ont été réunis dans la deuxième partie de ses *Études sur l'intégration des équations différentielles linéaires* (2). Mais les résultats obtenus par ce géomètre ont l'inconvénient de supposer les valeurs de la variable comprises entre certaines limites; quelquefois aussi ils ne fournissent qu'une intégrale particulière. M. Holmgren, s'appuyant sur les recherches auxquelles il s'est livré sur le Calcul différentiel à indices quelconques (3), a repris la question en prenant pour point de dé-

(1) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Suède*. Nouvelle série. Voir *Bulletin*, t. I, p. 242.

(2) *Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen*. Wien, 1860-1862; 3 fasc. in-8°.

(3) *Om Differentialkalkylen med indices af hvilken natur som helst* (*Mém. de l'Ac. de Stockholm*, t. V, n° 11). Voir *Bulletin*, t. I, p. 244.

part les travaux de M. Liouville, et il propose une méthode générale d'intégration, conduisant à des intégrales complètes où la valeur de la variable indépendante n'est sujette à aucune restriction.

Edlund (E.). — *Détermination du rapport de poids entre la livre suédoise* (skålpund) *et le kilogramme français.* (31 p.).

Résultats des comparaisons faites à Paris, en 1867, par MM. Ångström et Nordenskiöld. D'après ces recherches, le rapport entre les poids suédois et français en laiton, de densité $= 8,16$, pesés dans l'air à 15 degrés de température et $0^{m},76$ de pression barométrique, est exprimé par les égalités

$$1^{kg} = 2,3525214 \text{ livres suéd.}, \quad 1 \text{ liv. suéd.} = 425^{gr},0758.$$

T. VIII; 1869.

Lemström (S.). — *Recherches expérimentales sur la marche d'intensité des courants d'induction voltaïque.* (86 p., 4 pl.; fr.)

Lemström (S.). — *Observations magnétiques pendant l'Expédition polaire suédoise de* 1868. (47 p.)

Holmgren (K.). — *De l'électricité considérée comme force cosmique.* (45 p., 1 pl.)

T. IX; 1870.

Möller (A.). — *Étude sur le mouvement de la planète Pandore.* (122 p.)

L'auteur a calculé, à l'aide de la méthode de M. Hansen, les perturbations de cette planète, dues aux actions de Jupiter, de Saturne et de Mars.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE [1].

2e Série, t. III; 1873.

Ledent (J.). — *Fonctions invariables des paramètres de l'équation intégrale des surfaces du second degré.* (56 p.)

Une équation du second degré entre trois variables étant rapportée à trois axes quelconques, si l'on vient à changer les directions

---

[1] Paraissant à des époques indéterminées, par volumes in-8°.

des axes, les coefficients de l'équation varieront; mais il existe sept combinaisons de ces coefficients et des angles que font entre eux les axes, qui restent invariables dans cette transformation. L'auteur les détermine à l'aide des procédés de l'Algèbre ordinaire, et il en fait l'application à la discussion de la surface et à la recherche de ses propriétés.

Graindorge (J.). — *Sur quelques intégrales définies.* (7 p.)

L'auteur transforme les intégrales définies connues

$$\cot\alpha - \frac{1}{\alpha} = -\int_0^\infty \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\pi x} - 1}\,dx,$$

$$\frac{\pi}{2\beta}\tang\frac{\pi\alpha}{2\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}\,dx,$$

en y remplaçant α par $\alpha\sqrt{-1}$, et il en déduit un certain nombre d'autres intégrales définies.

Folie (F.). — *Nouvelle manière de présenter la théorie de la divisibilité des nombres.* (12 p.)

Le but de cette Note est, en premier lieu, de rendre la théorie de la divisibilité des nombres indépendante de celle du plus grand commun diviseur; et, en second lieu, de formuler un principe qui permette de découvrir les caractères de divisibilité d'un nombre par un nombre premier, d'une manière immédiate et applicable à tous les systèmes de numération, sans qu'il soit nécessaire de chercher les restes de la division des puissances de la base par ce nombre premier. L'auteur prend pour point de départ ce théorème, que les termes d'une fraction égale à une fraction irréductible sont nécessairement des équimultiples des termes de celle-ci.

Brasseur (J.-B.). — *Exposition nouvelle des principes du Calcul différentiel et du Calcul intégral.* (*Précédé d'un Avant-propos*, par M. Folie.) (17-62 p.)

L'auteur, ne trouvant pas satisfaisante l'exposition du Calcul différentiel fondée sur la considération des limites, a cru préférable de revenir à la conception développée par Lagrange dans sa *Théorie des fonctions analytiques.* Nous ne rappellerons pas ici les graves objections qui ont été faites au fondement même de la méthode de Lagrange, qui prend pour point de départ la possibilité du développement de l'accroissement de la fonction en une série ordonnée suivant les puissances de l'accroissement de la variable. Nous ferons seulement remarquer que c'est en vain que l'on espérerait éviter ainsi la considération des *limites;* car le développement d'une fonction en série suppose nécessairement l'existence d'une limite de la somme d'un nombre indéfiniment croissant de termes de cette série, et nous ne voyons pas en quoi la conception de cette limite de somme est plus simple que celle de la limite du rapport de deux variables infiniment petites. Il semble qu'il y ait quelque malentendu entre l'auteur et les géomètres qui adoptent, sous une forme plus ou moins modifiée, les principes établis avec tant de netteté par Carnot, Cauchy et Duhamel. Sans cela il eût été inutile de prévenir le lecteur que dx ne sera jamais supposé égal à zéro, ni dans le calcul, ni dans les applications, cette quantité perdant son caractère d'infiniment petit, c'est-à-dire de *variable,* dès qu'on lui assigne une valeur constante, telle que zéro. L'auteur applique sa méthode aux problèmes fondamentaux de la théorie des courbes et de la Mécanique.

Folie (F.). — *Note sur l'extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon aux courbes planes et aux surfaces du troisième ordre et de la troisième classe.* (9 p.)

Brasseur (J.-B.). — *Double perspective.* (23 p.)

L'objet de ce travail est une modification des méthodes de la Géométrie descriptive, où l'on remplace la double projection cylindrique par une double projection conique. Le procédé consiste à construire sur un même tableau deux perspectives d'un même objet, ou de deux points différents. Le plan horizontal de projection est pris pour tableau; les deux positions de l'œil sont données par leurs projections sur le tableau et les cotes de leurs hauteurs. L'auteur applique sa méthode à la démonstration de diverses propositions de Géométrie.

Graindorge (J.). — *Problème de Mécanique.* (14 p., 1 pl.)

Étude du mouvement d'un point sollicité vers une courbe fixe par une force exprimée en fonction de la distance r par la formule $Ar - \frac{B}{r^3}$, la vitesse initiale étant supposée perpendiculaire au rayon vecteur initial.

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN [1].

Année 1872.

SCHWARZ (H.-A.). — *Nouvel essai sur une espèce spéciale de surfaces minima.* (24 p., 1 pl.)

Ce Mémoire est une étude généralisée d'un problème posé par Gergonne dans le septième volume des *Annales de Mathématiques* (1816), et qui est le suivant : « Couper un cube en deux parties, de » manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses » de deux faces opposées, et que l'aire de cette section terminée à » la surface du cube soit un minimum? »

Une solution de ce problème a été donnée par Tédenat à l'aide de deux hélicoïdes symétriques.

L'auteur établit que cette solution n'est point complète (elle se rapporte au cas le plus simple) et donne l'équation générale de la surface cherchée, de laquelle, par des hypothèses particulières sur les coefficients, il déduit les équations de plusieurs groupes de surfaces, dont quelques-uns coïncident avec les surfaces étudiées par Meusnier, Scherk, Plateau, Enneper, etc.

RIESS. — *Réaction, dans un circuit invariable, des courants dérivés sur le courant principal d'une batterie de Leyde.* (11 p.)

DOBROWOLSKY (W.). — *La sensibilité de l'œil, selon la différence d'intensité des diverses couleurs du spectre.* (3 p.)

HELMHOLTZ (H.). — *Sur la théorie de l'électrodynamique.* (12 p.)

RIESS. — *Sur la détermination de la durée de la charge d'une batterie de Leyde.* (15 p.)

LIPSCHITZ (R.). — *Sur une extension de la théorie des surfaces minima.* (6 p.)

Meusnier a remarqué que les surfaces minima jouissent de la propriété que, en chacun de leurs points, la somme de valeurs récipro-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 187.

ques des mesures des courbures principales est égale à zéro. En s'appuyant sur cette remarque, l'auteur établit les formules qui définissent les quantités minima dans les variétés de $n-1$ dimensions. En faisant $n=3$, ces formules conduisent à la solution relative aux surfaces minima, donnée par Riemann et Weierstrass.

Spörer. — *Sur les relations entre les taches et les protubérances solaires.* (8 p.)

Kummer. — *Sur quelques genres particuliers de surfaces du quatrième degré.* (9 p.)

Les enveloppes de surfaces du deuxième degré, dans le cas où le contact entre l'enveloppe et l'enveloppée a lieu suivant une courbe du quatrième degré, sont de la forme

$$\varphi^2 = \psi \cdot \chi,$$

où φ, ψ, χ sont des fonctions arbitraires du deuxième degré des coordonnées. Le groupe des enveloppées est alors représenté par l'équation

$$\alpha^2 \psi + 2\alpha\varphi + \chi = 0.$$

L'auteur établit que, pour ce genre de surfaces du quatrième degré, le système de rayons (*Strahlensystem*), qui est en général du douzième ordre et de la vingt-huitième classe, se décompose en deux systèmes, l'un du quatrième ordre et de la douzième classe, l'autre du huitième ordre et de la sixième classe.

L'autre groupe de surfaces considéré est exprimé par la formule

$$\Phi^2 = pqrs,$$

où Φ est une fonction du deuxiène degré et p, q, r, s des fonctions linéaires des coordonnées. L'auteur étudie particulièrement le cas où Φ représente une surface sphérique, et p, q, r, s les quatre faces d'un tétraèdre régulier inscrit.

Kronecker (L.). — *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques.* (11 p.)

Des traductions de cette Note et de la suivante ont paru dans le *Bulletin*, t. IV, p. 256, et t. V, p. 301.

Borchardt (C.-W.). — *Sur l'ellipsoïde de volume minimum* *pour des valeurs données des aires d'un certain nombre de ses sections centrales.* (10 p.)

Schwarz (H.-A.) — *Expression de la deuxième variation de l'aire des surfaces minima en général, et des portions d'hélicoïde en particulier.* (18 p.)

L'auteur étudie principalement la relation entre les surfaces minima et les surfaces d'équilibre des masses liquides sans pesanteur; suivant M. Plateau, l'hélicoïde gauche à plan directeur n'a pas de limites de stabilité [1]. M. Schwarz établit que l'équilibre stable est limité et qu'il dépend du rapport entre la hauteur de la spire et le rayon de cylindre de l'hélice.

Quelques expériences qu'il a entreprises ont donné des résultats conformes à sa théorie.

Poggendorff. — *Contribution à la connaissance plus exacte de la machine électrique de deuxième espèce.* (28 p.)

Kronecker (L.). — *Démonstration de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques.* (2 p.)

Démonstration donnée par M. Zeller, inspecteur des écoles, curé à Schorndof (Wurtemberg). A. P.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES [2].

T. LXXVI, 1er semestre 1873 (*fin*).

N° 18. Séance du 5 mai 1873.

Dupuy de Lôme. — *Rapport sur un Mémoire de M.* Bertin, *relatif à la résistance opposée par la carène des navires aux mouvements de roulis.*

Collet. — *Mémoire sur les conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.*

---

(1) *Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur.* (*Mémoires de l'Académie Royale de Belgique,* t. XXXVII.)

(2) Voir *Bulletin*, t. V, p. 120.

Si $f_1=0, f_2=0,\ldots, f_m=0$ sont m équations renfermant n variables indépendantes $q_1, q_2,\ldots, q_n$, et les dérivées partielles p_1, $p_2,\ldots, p_n$, prises par rapport à ces variables, d'une fonction z, qui, d'ailleurs, n'entre pas dans ces équations, on pose

$$(1) \qquad (f_i, f_k)=\sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_h}\frac{\partial f_k}{\partial p_h}-\frac{\partial f_i}{\partial p_h}\frac{\partial f_k}{\partial q_h}\right);$$

l'auteur se propose de chercher les relations qui existent entre les fonctions diverses que l'on obtient en effectuant l'opération (1), soit avec les fonctions proposées, soit avec celles qui résultent déjà de cette opération.

STEPHAN. — *Nouvelle observation de la comète II,* 1867.

N° 19. Séance du 12 mai 1873.

SPOTTISWOODE (W.). — *Note sur la représentation algébrique des lignes droites dans l'espace.*

M. Spottiswoode remarque qu'on peut représenter une droite de l'espace au moyen de trois équations homogènes et linéaires à cinq variables, et étend à ce cas la définition et les relations que Plücker a données pour le cas où la droite est définie par deux équations homogènes et linéaires à quatre variables.

MATHIEU (É.). — *Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la Mécanique analytique.*

L'auteur montre d'abord que les théorèmes relatifs aux dérivées ordinaires d'une somme et d'une fonction composée sont vrais pour les dérivées qu'il appelle *dérivées principales;* il applique ensuite sa théorie des dérivées principales au problème des *perturbations.*

N° 20. Séance du 19 mai 1873.

FAYE. — *Note sur les cyclones solaires, avec une réponse de M.* RESPIGHI *à MM.* VICAIRE *et* SECCHI.

TRESCA. — *Note sur les propriétés mécaniques de différents bronzes.*

N° 21. Séance du 26 mai 1873.

Sédillot (L.-Am.) — *Rectification d'un point de la Communication de M.* Munk, *au sujet de la découverte de la variation.*

Boussinesq (J.). — *Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux transparents animés d'une translation rapide, dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation.*

L'auteur énonce la loi suivante :

« Les phénomènes lumineux que perçoit un observateur entraîné, dans un mouvement commun de translation par rapport à l'éther, avec la source de lumière et avec les milieux interposés, ne diffèrent pas de ceux qu'il observerait en regardant la même source à travers les mêmes milieux transparents, si, la translation n'existant pas, la densité de l'éther devenait, dans chaque milieu respectif et pour des ondes d'une direction déterminée, plus grande qu'elle n'est dans le rapport de l'unité au carré de la somme de l'unité et du quotient de la composante de la vitesse translatoire suivant la normale aux ondes par la vitesse de propagation de celles-ci à travers le milieu considéré. »

N° 22. Séance du 2 juin 1873.

Puiseux (V.). — *Note sur le passage de Vénus devant le Soleil en* 1882.

M. Puiseux communique à l'Académie les résultats de calculs entrepris pour déterminer à l'avance les principales circonstances du passage de Vénus sur le Soleil en 1882. Les calculs ont été faits à l'aide des Tables du Soleil et de Vénus de M. Le Verrier, le diamètre apparent du Soleil étant supposé de $32'0'',0$ à la distance moyenne; la parallaxe solaire a été supposée égale à $8'',86$; on a négligé l'aplatissement de la Terre et quelques autres petites quantités.

Circonstances du phénomène pour un observateur supposé au centre de la Terre :

1882, décembre 6. (Temps moyen de Paris.)

	h m
Entrée du *centre* de Vénus sur le disque du Soleil.	2.14,94
Sortie du *centre* de Vénus....................	8.12,00
Durée du passage du centre..................	5.57,06

Circonstances du phénomène pour un observateur placé à la surface de la Terre :

Heure de l'entrée.....	$2^h.14^m,9 +$	$7^m,9 \cos A_1 M$,
Heure de la sortie......	$8.12,0 -$	$7,9 \cos A_2 M$,
Durée du passage.......	$5.57,1 +$	$14,5 \cos A_3 M$;

$A_1 M$, $A_2 M$, $A_3 M$ désignent les arcs de grand cercle qui, sur la Terre supposée sphérique, joignent le lieu M d'observation aux trois points A_1, A_2, A_3, définis comme il suit :

	Longitude.	Latitude.
A_1.............	$-\ 95^\circ.26'$	$+\ 50^\circ.43'$
A_2.............	$-\ 45.31$	$+\ 23.25$
A_3.............	$+114.24$	$-\ 39.42$

Après une étude détaillée des diverses phases du phénomène, M. Puiseux conclut en ces termes : « En résumé, les mesures de distances et d'angles de position pourront donner la parallaxe, en 1882, à peu près avec le même degré de précision qu'en 1874; mais le passage de 1874 sera notablement plus avantageux que le suivant pour la détermination de la parallaxe solaire par les observations de contact, c'est-à dire par la méthode qui, après tout, donnera probablement les meilleurs résultats. Il est donc à désirer que rien ne soit négligé pour assurer dans les meilleures conditions l'observation du prochain passage. »

Secchi (le P.). — *Essai, pendant une éclipse solaire, de la nouvelle méthode spectroscopique proposée pour le prochain passage de Vénus.*

Hind, Stephan, Henry (Paul et Prosper), André et Baillaud. —*Documents relatifs à la Comète à courte période II,* 1867.

Henry (J.). — *Nouvelle petite planète, découverte à Washington.*

Ribaucour. —*Propriétés relatives aux déplacements d'un corps assujetti à quatre conditions.*

Si l'on fait prendre au corps toutes les positions infiniment voisines d'une position déterminée, une droite quelconque engendre un *pinceau;* parmi les pinceaux ainsi engendrés, il y en a qui sont des pinceaux de normales à une famille de surfaces; les droites qui engendrent ces pinceaux particuliers appartiennent à un complexe du premier ordre et de la première classe. M. Ribaucour étudie ce complexe en s'appuyant sur les formules relatives à la théorie des surfaces (équations de Codazzi, etc.) et en signale les propriétés principales.

N° 23. Séance du 9 juin 1873.

Vicaire (E.). — *Sur la théorie des taches et sur le noyau obscur du Soleil.*

Lockyer (J.-N.). — *Recherches d'Analyse spectrale au sujet du spectre solaire.*

N° 24. Séance du 16 juin 1873.

Duhil de Benazé et Risbec. — *Sur le mouvement complet du navire oscillant sur eau calme; relation des expériences faites sur l'*Elorn, *navire de* 100 *tonneaux de déplacement.*

Dans la première partie de ce Mémoire, les auteurs exposent la théorie du mouvement complet du navire oscillant sur eau calme, d'abord dans le cas d'un liquide sans résistance, puis dans un liquide réel, c'est-à-dire en introduisant les résistances qu'oppose réellement tout liquide au déplacement d'un corps immergé; dans la seconde partie, ils décrivent les expériences entreprises en vue de déterminer la loi du mouvement oscillatoire.

N° 25. Séance du 23 juin 1873.

Secchi (le P.). — *Nouvelle série d'observations sur les protubérances solaires; nouvelles remarques sur les relations qui existent entre les protubérances et les taches.*

Dubois (Ed.). — *Sur l'influence de la réfraction atmosphérique, relative à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

L'auteur de la Note trouve que la différence qui existe entre le temps de contact *réel* et le temps du contact apparent est inférieure à $0^s,67$.

Vicaire (E.). — *Sur la constitution du Soleil et la théorie des taches.*

N° 26. Séance du 30 juin 1873.

Serret (J.-A.). — *Réflexions sur le Mémoire de Lagrange intitulé : « Essai sur le problème des trois Corps ».*

« Le Chapitre premier du Mémoire de Lagrange sur le *Problème des trois Corps* mérite d'être compté parmi les travaux les plus importants de l'illustre auteur. Les équations différentielles de ce problème, lorsqu'on ne considère, ce qui est permis, que des mouvements relatifs, constituent un système du *douzième ordre,* et la solution complète exige en conséquence *douze* intégrations; les seules intégrales connues étaient celle des *forces vives* et les trois que fournit le principe des *aires :* il en restait donc *huit* à découvrir. En réduisant à *sept* le nombre des intégrations nécessaires pour l'achèvement de la solution, Lagrange a fait faire à la question un pas considérable, et les géomètres qui se sont occupés après lui du Problème des trois Corps ne sont pas allés au delà. Leurs efforts, cependant, n'ont pas été inutiles : des méthodes nouvelles et ingénieuses ont été proposées, comme, par exemple, celle que Jacobi a développée dans son célèbre Mémoire sur l'*Élimination des nœuds dans le Problème des trois Corps;* mais ces méthodes, comme celle de Lagrange, font dépendre la solution du Problème de *sept* intégrations.

» La méthode de Lagrange est des plus remarquables; elle montre que la solution complète du Problème exige seulement que l'on connaisse à chaque instant les côtés du triangle formé par les trois Corps; les coordonnées de chaque corps se déterminent effectivement ensuite sans aucune difficulté. Quant à la recherche du triangle des trois Corps, elle dépend de trois équations différentielles, parmi lesquelles deux sont du *deuxième ordre,* et la troisième du *troisième ordre.* Ces équations renferment deux constantes arbitraires introduites, l'une par le principe des *forces vives,* l'autre par celui des *aires,* en sorte que les distances des corps sont des fonctions du temps, et de *neuf* constantes arbitraires seulement. Parmi les *douze* arbitraires que l'intégration complète doit introduire, il y en a donc *trois* qui ne figurent pas dans les expressions des distances, circonstance que l'examen des conditions du Problème permet d'ailleurs de mettre en évidence *a priori.*

» Préoccupé assurément de l'application qu'il voulait faire de sa nouvelle méthode à la *Théorie de la Lune,* application qui fait l'objet du Chapitre IV de son Mémoire, Lagrange a négligé d'introduire, dans ses formules, la symétrie que comportait son analyse, symétrie qu'un très-léger changement dans les notations permet de rétablir. Les masses des trois Corps étant représentées par A, B, C, Lagrange étudie les mouvements relatifs de B et C autour de A, et il est bientôt amené à introduire en outre, dans ses formules, les quantités qui se rapportent au mouvement relatif du corps C autour de B. Une telle direction des calculs est incontestablement défectueuse, au point de vue de l'élégance mathématique, en ce sens que les coordonnées des trois orbites relatives considérées ne figurent pas symétriquement dans les formules; mais, pour éviter cet inconvénient, il suffit, comme je viens de le dire, d'une simple modification dans les notations de l'illustre auteur, et cette modification revient à introduire, au lieu des mouvements considérés : 1° le mouvement relatif du Corps B autour de C; 2° celui de C autour de A; 3° celui de A autour de B.

» Un habile géomètre allemand, M. Otto Hesse, a repris récemment l'analyse de Lagrange en se plaçant au point de vue que je viens d'indiquer, et il a publié son travail dans le tome 74 du *Journal de Crelle* (imprimé à Berlin, en 1872). M. Hesse ne considère que ce qu'il nomme le *Problème restreint,* c'est-à-dire celui qui a pour objet de déterminer à chaque instant le triangle des trois Corps; c'est à ce problème restreint que Lagrange a ramené d'ailleurs, comme je l'ai déjà dit plus haut, le problème général. M. Hesse, auquel la Science est redevable de plusieurs travaux importants, a été moins heureux ici qu'il ne l'avait été dans d'autres occasions. Non-seulement il n'a pas réussi à perfectionner l'analyse parfaitement rigoureuse que nous devons à Lagrange, mais une inadvertance l'a fait tomber dans une erreur grave, que j'indiquerai plus loin, et qui infirme absolument sa conclusion. Ajoutons que la notation particulière dont le géomètre allemand fait usage, pour abréger l'écriture des formules, ne paraît pas préférable à celle de son illustre devancier.

» Pour justifier les remarques qui précèdent, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails; je le ferai d'une manière succincte, en introduisant dans l'analyse de Lagrange les modifications nécessaires pour rétablir la symétrie des formules, et en dégageant la solution de tout ce qui n'est qu'accessoire.

» 1. Soient x, y, z les coordonnées rectangles du Corps B par rapport à C; x', y', z' celles du Corps C par rapport à A; x'', y'', z''

celles de A par rapport à B; on aura

$$(1)\qquad x + x' + x'' = 0,\quad y + y' + y'' = 0,\quad z + z' + z'' = 0.$$

Soient aussi

$$(2)\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},\quad r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

» Les équations différentielles du mouvement forment trois groupes dont l'un est

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^3}x - A\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0,\\ &\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r'^3}x' - B\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0,\\ &\frac{d^2x''}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r''^3}x'' - C\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

et dont les deux autres se déduisent du précédent en changeant x en y et en z. A cause des formules (1), les équations de chaque groupe peuvent être réduites à deux distinctes; ces équations coïncideraient avec les équations (A), (B), (C) de Lagrange, si l'on y faisait le simple changement de x, y, z, x'', y'', z'' en $-x''$, $-y''$, $-z''$, $-x$, $-y$, $-z$.

» Du groupe (3) et des deux groupes analogues, on déduit

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{A\,dt^2} + \frac{x'\,d^2y' - y'\,d^2x'}{B\,dt^2} + \frac{x''\,d^2y'' - y''\,d^2x''}{C\,dt^2} = 0,$$

équation qui subsiste quand on exécute la substitution circulaire (x, y, z) et qu'on répète cette substitution. On conclut de là les trois intégrales des aires, savoir :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{y\,dz - z\,dy}{A\,dt} + \frac{y'\,dz' - z'\,dy'}{B\,dt} + \frac{y''\,dz'' - z''\,dy''}{C\,dt} = a,\\ &\frac{z\,dx - x\,dz}{A\,dt} + \frac{z'\,dx' - x'\,dz'}{B\,dt} + \frac{z''\,dx'' - x''\,dz''}{C\,dt} = b,\\ &\frac{x\,dy - y\,dx}{A\,dt} + \frac{x'\,dy' - y'\,dx'}{B\,dt} + \frac{x''\,dy'' - y''\,dx''}{C\,dt} = c,\end{aligned}\right.$$

a, b, c étant trois constantes arbitraires.

» Ensuite, si l'on fait

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} u^2 &= \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},\\ u'^2 &= \frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2},\\ u''^2 &= \frac{dx''^2+dy''^2+dz''^2}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

et que l'on ajoute ensemble les équations du groupe (3) et des deux analogues, après avoir multiplié ces équations respectivement par

$$\frac{2\,dx}{A},\quad \frac{2\,dx'}{B},\quad \frac{2\,dx''}{C},\quad \frac{2\,dy}{A},\quad \frac{2\,dy'}{B},\quad \frac{2\,dy''}{C},\quad \frac{2\,dz}{A},\quad \frac{2\,dz'}{B},\quad \frac{2\,dz''}{C},$$

on aura

$$(6)\quad d\left(\frac{u^2}{A}+\frac{u'^2}{B}+\frac{u''^2}{C}\right)+2(A+B+C)\left(\frac{dr}{Ar^2}+\frac{dr'}{Br'^2}+\frac{dr''}{Cr''^2}\right)=0,$$

ce qui donne, par l'intégration, l'équation des forces vives, savoir :

$$(7)\quad \left(\frac{u^2}{A}+\frac{u'^2}{B}+\frac{u''^2}{C}\right)-2(A+B+C)\left(\frac{1}{Ar}+\frac{1}{Br'}+\frac{1}{Cr''}\right)=f,$$

f étant une constante arbitraire.

» 2. Posons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x'x''+y'y''+z'z'' &= -p,\\ x''x+y''y+z''z &= -p',\\ xx'+yy'+zz' &= -p'',\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\quad \frac{r'^2+r''^2-r^2}{2}=p,\qquad \frac{r''^2+r^2-r'^2}{2}=p',\qquad \frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}=p'',$$

on aura

$$(10)\quad r^2=p'+p'',\quad r'^2=p''+p,\quad r''^2=p+p';$$

faisons en outre

$$(11)\quad \frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}=q,\quad \frac{1}{r''^3}-\frac{1}{r^3}=q',\quad \frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}=q'',$$

ce qui donnera

$$(12) \qquad q + q' + q'' = 0, \quad \frac{q}{r^3} + \frac{q'}{r'^3} + \frac{q''}{r''^3} = 0.$$

» Si l'on différentie deux fois la première équation (2), après l'avoir élevée au carré, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = \left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) + u^2,$$

et cette formule subsiste quand on y remplace x, y, z, r, u par x', y', z', r', u', ou par x'', y'', z'', r'', u''. Si donc on multiplie les équations (3) par x, x', x'' respectivement, et qu'on ajoute ensuite chacune des équations résultantes avec celles qu'on en déduit par le changement de x en y et en z, on aura, en vertu de la formule précédente,

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2(r^2)}{dt^2} + \dfrac{A+B+C}{r} + A(p'q' - p''q'') - u^2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2(r'^2)}{dt^2} + \dfrac{A+B+C}{r'} + B(p''q'' - pq) - u'^2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2(r''^2)}{dt^2} + \dfrac{A+B+C}{r''} + C(pq - p'q') - u''^2 = 0, \end{cases}$$

Ces formules (13) répondent aux formules (F) de Lagrange, ou, ce qui revient au même, aux formules (K), en tenant compte des formules (J) de l'auteur.

» Ajoutons les quatre équations, (13) et (7) après avoir divisé les trois premières par A, B, C respectivement, on aura

$$(14) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{1}{2A}\dfrac{d^2(r^2)}{dt^2} + \dfrac{1}{2B}\dfrac{d^2(r'^2)}{dt^2} + \dfrac{1}{2C}\dfrac{d^2(r''^2)}{dt^2}\right] \\ \qquad - (A+B+C)\left(\dfrac{1}{Ar} + \dfrac{1}{Br'} + \dfrac{1}{Cr''}\right) = f. \end{cases}$$

» Cette équation coïncide avec l'équation (L) de Lagrange, quand on y permute les lettres r et r''; c'est une transformée de l'intégrale des forces vives; elle ne renferme que les seules distances r, r', r''.

» 3. D'après les formules (1), les trois quantités

$$\begin{gathered}
(x'\,dx''+y'\,dy''+z'\,dz'')-(x''\,dx'+y''\,dy'+z''\,dz'),\\
(x''\,dx+y''\,dy+z''\,dz)-(x\,dx''+y\,dy''+z\,dz''),\\
(x\,dx'+y\,dy'+z\,dz')-(x'\,dx+y'\,dy+z'\,dz)
\end{gathered}$$

sont égales entre elles. Si l'on désigne par $\rho\,dt$ leur valeur, on aura, par le moyen des formules (8),

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}
x'\,dx''+y'\,dy''+z'\,dz''&=\tfrac{1}{2}(-dp+\rho\,dt),\\
x''\,dx+y''\,dy+z''\,dz&=\tfrac{1}{2}(-dp'+\rho\,dt),\\
x\,dx'+y\,dy'+z\,dz'&=\tfrac{1}{2}(-dp''+\rho\,dt),\\
x''\,dx'+y''\,dy'+z''\,dz'&=\tfrac{1}{2}(-dp-\rho\,dt),\\
x\,dx''+y\,dy''+z\,dz''&=\tfrac{1}{2}(-dp'-\rho\,dt),\\
x'\,dx+y'\,dy+z'\,dz&=\tfrac{1}{2}(-dp''-\rho\,dt).
\end{aligned}\right.$$

» La quantité auxiliaire ρ que nous introduisons n'est autre chose que celle qui est désignée par $-\dfrac{d\rho}{dt}$ dans le Mémoire de Lagrange; il est évident que cette quantité peut être exprimée en fonction des vitesses u, u', u'', des distances r, r', r'' et de leurs différentielles dr, dr', dr''. En effet, considérons quatre directions respectivement parallèles à celles des rayons r, r' et des vitesses u, u'; soient L, M, N les cosinus des angles formés par la direction de r' avec les directions de u, u', r; L_1, M_1, N_1 les cosinus des angles formés par les directions de u' et r, de u et r, de u et u'. On aura entre ces six cosinus la relation connue

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}
&1-(L^2+M^2+N^2+L_1^2+M_1^2+N_1^2)+(L^2L_1^2+M^2M_1^2+N^2N_1^2)\\
&\quad+2(L_1MN+M_1NL+N_1LM+L_1M_1N_1)\\
&\qquad\qquad-2(LL_1MM_1+MM_1NN_1+NN_1LL_1)=0.
\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs, par les formules précédentes,

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
L&=-\frac{\rho\,dt+dp''}{2r'u\,dt},\quad M=\frac{dr'}{u'\,dt},\quad N=-\frac{p''}{rr'},\\
L_1&=\frac{\rho\,dt-dp''}{2ru'\,dt},\quad M_1=\frac{dr}{u\,dt},\quad N_1=-\frac{u^2+u'^2-u''^2}{2uu'}.
\end{aligned}\right.$$

» Faisons, pour abréger, avec Lagrange,

$$(18)\qquad \frac{u'^2+u''^2-u^2}{2}=v,\quad \frac{u''^2+u^2-u'^2}{2}=v',\quad \frac{u^2+u'^2-u''^2}{2}=v'',$$

d'où

$$(19)\qquad u^2=v'+v'',\quad u'^2=v''+v,\quad u''^2=v+v',$$

et

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma &= r^2\rho^2-2\left(p'\frac{dp''}{dt}-p''\frac{dp'}{dt}\right)\rho\\
&\qquad +p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2+p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2+p\left[\frac{d(r^2)}{dt}\right]^2,\\
\Sigma' &= r'^2\rho^2-2\left(p''\frac{dp}{dt}-p\frac{dp''}{dt}\right)\rho\\
&\qquad +p''\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+p\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2+p'\left[\frac{d(r'^2)}{dt}\right]^2,\\
\Sigma'' &= r''^2\rho^2-2\left(p\frac{dp'}{dt}-p'\frac{dp}{dt}\right)\rho\\
&\qquad +p\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2+p'\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+p''\left[\frac{d(r''^2)}{dt}\right]^2,
\end{aligned}\right.$$

l'équation (15) deviendra, après la substitution des valeurs (17),

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\rho^2+\frac{dp\,dp'+dp'\,dp''+dp''\,dp}{dt^2}\right)^2-4(\Sigma v+\Sigma' v'+\Sigma'' v'')\\
&\qquad +16(pp'+p'p''+p''p)(vv'+v'v''+v''v)=0;
\end{aligned}\right.$$

c'est précisément l'équation (N) de Lagrange. Si l'on suppose que u^2, u'^2, u''^2 y soient remplacés par leurs valeurs tirées des équations (12), la quantité auxiliaire ρ ne dépendra que des distances r, r', r'' et de leurs différentielles du premier et du deuxième ordre.

» 4. Puisque l'on a

$$(x\,dx'-x'\,dx)+(y\,dy'-y'\,dy)+(z\,dz'-z'\,dz)=\rho\,dt,$$

il s'ensuit par la différentiation

$$(x\,d^2x'-x'\,d^2x)+(y\,d^2y'-y'\,d^2y)+(z\,d^2z'-z'\,d^2z)=d\rho\,dt,$$

et, si l'on élimine les différentielles secondes des coordonnées au moyen des équations (3) et de celles qui s'en déduisent par le changement de x en y et en z, on aura

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{A}pq + \mathrm{B}p'q' + \mathrm{C}p''q'' = 0; \tag{22}$$

cette équation n'est autre que l'équation (H) de Lagrange, en tenant compte du changement de notation.

» 5. Revenons maintenant aux équations (4) : on a identiquement

$$\begin{aligned}(y\,dz - z\,dy)(y'\,dz' - z'\,dy') &+ (z\,dx - x\,dz)(z'\,dx' - x'\,dz') \\ &+ (x\,dy - y\,dx)(x'\,dy' - y'\,dx') \\ = (xx' + yy' + zz')&(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz') \\ &- (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')(x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz).\end{aligned}$$

et cette formule subsiste quand on écrit x', y', z' ou x'', y'', z'' au lieu de x, y, z ou bien x'', y'', z'' ou x, y, z au lieu de x', y', z'. D'après cela, si l'on fait

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2,$$

et que l'on ajoute les équations (4), après les avoir élevées au carré, on aura, en faisant usage de la précédente formule, ainsi que des formules (2), (5), (15) et (18),

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{A}^2}\left[r^2u^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{\mathrm{B}^2}\left[r'^2u'^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r'^2)}{dt}\right)^2\right] \\ &\qquad + \frac{1}{\mathrm{C}^2}\left[r''^2u''^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r''^2)}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{\mathrm{BC}}\left[pv - \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right] \\ &\qquad + \frac{2}{\mathrm{CA}}\left[p'v' - \frac{1}{4}\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{\mathrm{AB}}\left[p''v'' - \frac{1}{4}\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2\right] \\ &\quad = k^2 - \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2\mathrm{ABC}}\rho^2,\end{aligned}\right. \tag{23}$$

ce qui est l'équation (H) de Lagrange.

» Si maintenant on suppose que u^2, u'^2, u''^2 soient remplacés partout par les valeurs tirées des formules (13) et que, par le moyen de l'équation (21), ρ soit éliminé des équations (22) et (23), celles-ci ne contiendront plus que les distances r, r', r''; la première sera du troisième ordre et l'autre du deuxième; en les joignant à l'équation (14), on obtiendra le système différentiel découvert par Lagrange. Ce qui précède résume la partie esssentielle du Mémoire de l'auteur.

» 6. Différentions les équations (5) et remplaçons ensuite les différentielles secondes par les valeurs tirées des équations (3) et des analogues : on aura, en faisant usage des formules précédentes,

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d(u^2)}{dt} - 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\dfrac{d\frac{1}{r}}{dt} + \mathrm{A}\left(q'\dfrac{dp'}{dt} - q''\dfrac{dp''}{dt}\right) + \mathrm{A}q\rho = 0, \\[2ex] \dfrac{d(u'^2)}{dt} - 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\dfrac{d\frac{1}{r'}}{dt} + \mathrm{B}\left(q''\dfrac{dp''}{dt} - q\dfrac{dp}{dt}\right) + \mathrm{B}q'\rho = 0, \\[2ex] \dfrac{d(u''^2)}{dt} - 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\dfrac{d\frac{1}{r''}}{dt} + \mathrm{C}\left(q\dfrac{dp}{dt} - q'\dfrac{dp'}{dt}\right) + \mathrm{C}q''\rho = 0; \end{cases}$$

ces formules coïncident avec les équations (I) de Lagrange, quand on tient compte des équations (J) de l'auteur. M. Hesse leur substitue les trois combinaisons obtenues quand on les ajoute entre elles, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{1}{\mathrm{A}}, \frac{1}{\mathrm{B}}, \frac{1}{\mathrm{C}}$, puis par $\frac{1}{\mathrm{A}r^3}, \frac{1}{\mathrm{B}r'^3}, \frac{1}{\mathrm{C}r''^3}$, puis enfin par p, p', p''. La première combinaison n'est autre chose que l'équation (6); la deuxième combinaison donne, en se servant des formules (12),

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{A}r^3}\dfrac{d\left(u^2 - 2\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r}\right)}{dt} + \dfrac{1}{\mathrm{B}r'^3}\dfrac{d\left(u'^2 - 2\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r'}\right)}{dt} \\[2ex] \quad + \dfrac{1}{\mathrm{C}r''^3}\dfrac{d\left(u''^2 - 2\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r''}\right)}{dt} \\[2ex] \quad - \left(q^2\dfrac{dp}{dt} + q'^2\dfrac{dp'}{dt} + q''^2\dfrac{dp''}{dt}\right) = 0; \end{cases}$$

enfin la dernière combinaison, qui seule contient ρ, est, en faisant usage de l'équation (22),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \rho \frac{d\rho}{dt} &= p \frac{d\left(u^2 - 2\,\frac{A+B+C}{r}\right)}{dt} \\ &+ p' \frac{d\left(u'^2 - 2\,\frac{A+B+C}{2}\right)}{r'} + p'' \frac{d\left(u''^2 - 2\,\frac{A+B+C}{dt}\right)}{r''} \\ &+ Ap\left(q' \frac{dp'}{dt} - q'' \frac{dp''}{dt}\right) + Bp'\left(q'' \frac{dp''}{dt} - q \frac{dp}{dt}\right) \\ &+ Cp''\left(q \frac{dp}{dt} - q' \frac{dp'}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

» Supposons que l'on différentie l'équation (23), ce qui fera disparaître l'arbitraire k, et que, de l'équation résultante, on tire la valeur de $\rho \frac{d\rho}{dt}$ pour la substituer dans l'équation (26). Alors, comme u^2, u'^2, u''^2 représentent les valeurs fournies par les équations (13), les équations (6), (25) et (26), qui sont toutes du troisième ordre et ne renferment aucune arbitraire, constitueront, d'après M. Hesse, le système différentiel duquel dépendent les distances r, r', r'', quand on ne fait pas intervenir les principes des forces vives et des aires. Enfin si, des mêmes équations (6), (25) et (26), on tire les valeurs de $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$ pour les porter dans l'une des équations (24), celle-ci donnera, d'après le même géomètre, une valeur de ρ qui sera seulement du deuxième ordre; en portant cette valeur dans l'équation (23) et en joignant ensuite cette équation aux équations (14) et (26), on obtiendra un système composé de deux équations du deuxième ordre et une du troisième ordre, dans lequel figureront les deux constantes arbitraires f et k.

» Telle est la solution que M. Hesse propose de substituer à celle de Lagrange, solution qui serait évidemment beaucoup plus simple que celle de l'illustre auteur; mais il n'est pas difficile de se convaincre de l'inexactitude des résultats obtenus par M. Hesse, ou du moins de sa conclusion. Effectivement l'équation (26), après qu'on en a éliminé $\rho \frac{d\rho}{dt}$ par l'équation (23) différentiée, n'est pas autre chose que l'équation (6) multiplié par le facteur $\frac{r^2}{A} + \frac{r'^2}{B} + \frac{r''^2}{C}$; les trois équations du troisième ordre, qui composent le premier système de M. Hesse, ne sont donc pas distinctes. Le deuxième système du même géomètre ne saurait, en conséquence, avoir d'existence réelle, puisque les équations du premier système sont impropres à fournir les valeurs des différentielles du troisième ordre, ou, ce qui revient au même, les valeurs des différentielles $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$. On ne saurait se dispenser, dans la recherche dont nous nous occupons, de tenir compte de l'équation (21), comme Lagrange a eu soin de le faire.

» Les réflexions qui précèdent ont été l'objet d'une Communication verbale que j'ai eu l'honneur de faire récemment au Bureau des Longitudes; la théorie qu'elles concernent a une si grande importance, que j'ai jugé utile de les présenter à l'Académie en leur donnant un certain développement. »

Souillart. — *Sur la théorie analytique des satellites de Jupiter.*

Le but du Mémoire de M. Souillart est, en premier lieu, de compléter un premier travail (*Annales scientifiques de l'École Normale,* t. II, 1re série) en ce qui concerne les inégalités séculaires des excentricités et des longitudes des périjoves; et, en second lieu, de comparer les formules obtenues pour le calcul des longitudes et des rayons vecteurs avec celles qu'on trouve dans la *Mécanique céleste.*

Curie (J.). — *Sur le désaccord qui existe entre l'ancienne théorie de la poussée des terres et l'expérience.*

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. MAXIMILIEN CURTZE.

... Dans l'article que vous avez consacré [1] à mes recherches sur les travaux de votre compatriote Nicole Oresme, vous avez insisté avec raison sur l'urgence qu'il y aurait pour les géomètres fran-

[1] Voir *Bulletin*, t. III, novembre 1872.

çais à réparer l'injuste oubli dans lequel les plus illustres historiens de la Science ont laissé la mémoire de celui qui fut incontestablement le plus grand mathématicien du XIV^e siècle. C'est une dette dont j'aurais cru la France plus empressée de s'acquitter....

Vous avez indiqué, dans cet article, que j'avais récemment découvert d'autres Ouvrages d'Oresme, tant manuscrits qu'imprimés. Peut-être ne sera-t-il pas sans intérêt, pour vous et pour plus d'un ami de l'histoire scientifique, d'apprendre de nouveaux détails sur ces divers écrits. Je me permets donc de vous communiquer les Notes suivantes, dont vous ferez l'usage que vous jugerez convenable.

1° La *Bibliothèque Mazarine*, à Paris, possède deux exemplaires d'une édition parisienne du Traité *De proportionibus* d'Oresme (n° 4621, f° 312-333, et n° 5754, f° 40-61), qui m'était restée inconnue jusqu'ici. Cette édition porte pour titre, sur le f° 1 : « Tractatus proportionum || Alberti de Saxonia || Tractatus proportionum *Thome bra-* || *duardini* || Tractatus proportionum *Nicholai horen.* || Venales reperiuntur *Parisiis* in vico diui || *Iacobi* iuxta templum *Sancti yuonis* sub || signo *pellicani.* » Les mots en italiques sont imprimés en lettres rouges. Entre les lignes 5 et 6 se trouve la marque de l'imprimeur Godefroy de Marnef [1]. Il y a 22 feuilles à deux colonnes, de 65 lignes chacune. Les feuilles ne sont pas numérotées; mais on trouve sur les feuilles 2-4; 7, 8, 10; 13-15; 17, 18; 19-21, les signatures Aii-Aiiij; B, Bij, Biij; Cj, Ciij, Cij; Dj, Dij; Ej-Eiij. Le Traité d'Oresme comprend depuis la feuille 12 jusqu'à la fin.

2° Le Manuscrit de la *Bibliothèque publique de Bâle*, n° F. III. 31. (4°), contient, feuilles 2 r.-29 r., une copie du *Tractatus de vniformitate et difformitate intensionum* d'Oresme.

Il commence ainsi (feuille 2 r., l. 1-2) : *Cum ymaginationem meam de vniformitate et difformitate intensionum cepissem ordinare, occurrerunt mihi quedam alia que huic proposito interieci.* On lit plus bas (l. 5) : *Huius autem tractatus tres sunt partes principales; prima est de definitione et primo vniformitatis et difformitatis qualitatum permanentium; secunda de definitione et primo successionum; tertia de aquisicione et mensura qualitatum et velocitatum.*

---

[1] *Voir* BRUNET, *Manuel*, 5^e édition, t. I. Paris, 1860; colonne 810.

Viennent ensuite les titres des Chapitres, qui sont au nombre de 44 pour la première Partie, de 40 pour la deuxième, de 16 pour la troisième.

La première Partie commence feuille 2 v., col. 2 : *Omnis res mensurabilis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitatis continue,* et finit feuille 12 r. : *de quo scriptum est in libro Danielis, quod ipse reuelabit profunda et abscondita,* etc.

La deuxième Partie commence immédiatement après par ces mots : *Omnis motus successiuus, scilicet diuisibilis, habet partem et est diuisibilis vno modo,* et finit feuille 25 v., l. 7 : *et sic explicit pars secunda.*

L'Ouvrage entier se termine (feuille 29 r., l. 27-29) par ces mots : *Multa quidem alia possent ex prædictis inferri, sed hæc tanquam capitula sufficiant. Explicit tractatus vtilis sicut patet intuenti diligenter M. Oreb* (sic).

Le Manuscrit contient à la suite, écrite d'une autre main, une série de relations géométriques, et enfin une Philosophie morale. Le *codex* a été écrit à la fin du XIV^e^ siècle ou au commencement du XV^e^.

3° Dans le Manuscrit de la même Bibliothèque, n° F. V. 6, se trouve, feuille 48 r.-53 v., une *Editio Nicholai Oresme contra Astrologos,* traduction de l'Ouvrage français intitulé : *Liber de Diuinacionibus* (¹). Cet écrit commence ainsi (feuille 48, l. 3 et sqq.) : *Capitulum primum de artibus quibus inquiritur de occultis. Plures artes siue scientie sunt per quas scitur de futuris,* et se termine par ces lignes (f° 53 v., l. 18-20) : *Explicit liber magistri Nicholai Oresme de diuinacionibus translatus in latinum, quia ipse composuit in gallico, scriptus anno domini* MCCC° LXI° *die decima septima mensis decembris. Sed hic scriptus anno* 1411° *ipso die beati remigij.*

4° La même Bibliothèque possède encore un exemplaire de l'écrit composé en latin par Oresme lui-même contre les astrologues : *Contra astrologos iudiciarios.* Cet exemplaire fait partie du Manuscrit A. IX. 21 (f° 51 r.-63 v.).

Il commence ainsi : *Incipit : Tractatus Orem . que pars astronomie sit sectanda : s...s. Multi principes et magnates noxia cu-*

(¹) N° XII de la liste donnée dans le tome III du *Bulletin,* p. 325.

riositate solliciti vanis nituntur artibus perquirere et inuestigare futura. Voici la conclusion : *Quoniam infallibilis veritas dicit : Rex siue princeps perdet populum suum, et principatus sensati stabilis erit, et cetera ideo et sic est finis.*

Explicit tractatus venerandi in xpo patris et domini magistri Nicolai Oresme eggregij (sic) *in theologia professoris et episcopi Normannie. In quo tractatu clare demonstratur que pars astrologie scientie sit sectanda et que non. Scriptus parisijs anno domini* 1404.

Aux altérations de toute sorte que les copistes ont fait subir au nom d'*Oresme,* le Manuscrit F. III. 31. ajoute encore, comme nous venons de le voir, la forme singulière *Oreb.* Le Manuscrit F. V. 6. nous montre, de plus, que l'écrit *de diuinacionibus,* sous sa forme française, a été achevé le 27 décembre 1361, et, par conséquent, comme le dit Meunier, *après* la sortie d'Oresme du collége de Navarre, laquelle eut lieu le 4 décembre 1361 ; mais Meunier est dans l'erreur, lorsqu'il place la composition de cet Ouvrage *après* l'année 1361. L'Ouvrage fut écrit immédiatement après qu'Oresme eut recouvré la liberté de langage, et ne fut plus astreint à l'usage du latin.

Thorn, le 8 août 1873.

M. Curtze.

DE L'EMPLOI DES PETITES PLANÈTES POUR LA DÉTERMINATION DE LA PARALLAXE SOLAIRE ;

Par M. Ch. ANDRÉ (1).

Dans le tome III de ce Recueil, nous avons montré que l'observation des planètes télescopiques, faite dans des conditions convenables, pouvait peut-être conduire à une détermination pour ainsi dire continue et de plus en plus approchée de la parallaxe du Soleil. La planète Phocée (25) était, l'an dernier, la plus favorable pour ce genre d'observations ; malheureusement, la lettre par laquelle M. Galle, de Breslau (2), recommandait ces observations

---

(1) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, vol. III, p. 274.
(2) *Astronomische Nachrichten*, n° 1943.

aux Observatoires de l'hémisphère austral, arriva à Cordova bien longtemps après l'opposition de cette planète; au Cap de Bonne-Espérance, le temps ne fut pas favorable, de telle sorte qu'aucune observation n'a été faite dans l'hémisphère austral. Dans l'hémisphère boréal, au contraire, MM. Brünnow à Dunsink, Möller à Lund, Becker à Neuchâtel et Bruhns à Leipzig ont observé Phocée d'une façon continue, lors de sa dernière opposition; mais ces observations, quoique assez nombreuses, ne peuvent évidemment conduire au but que l'on s'était proposé, puisqu'elles n'ont point leurs correspondantes dans l'hémisphère austral.

Néanmoins, même pour cet objet, elles ne doivent pas être considérées comme entièrement perdues, car leur discussion complète peut évidemment donner une notion assez précise de l'approximation du procédé.

De ces quatre séries d'observations, trois ont été faites en vue même d'obtenir la parallaxe solaire, et par conséquent avec des précautions particulières; les autres, au contraire, celles de M. Bruhns, à Leipzig, ne sont que des observations ordinaires de la planète Phocée, destinées à la correction de son orbite. M. Galle a cru devoir néanmoins les joindre à sa discussion ([1]).

A Dublin, nous disposons de 8 jours d'observations avec 24 comparaisons par jour;

A Lund, nous trouvons 11 jours d'observations et 40 comparaisons par jour;

A Neuchâtel, 7 jours d'observations et 14 comparaisons par jour.

Les deux premières séries seules ont été faites avec des instruments de premier ordre (12 pouces d'ouverture), supportant un grossissement assez fort, environ 300 fois; tandis qu'à Neuchâtel le D[r] Becker ne disposait que d'une lunette de 6 pouces d'ouverture, dont le grossissement maximum ne dépassait pas 168 fois; en outre, à Dublin et à Lund seulement, les observations ont été faites sur un plan uniforme; celles-là seules sont donc réellement comparables. Malheureusement, les deux séries d'observations dont nous parlons n'ont qu'un jour commun, de telle sorte qu'il convient de comparer leurs résultats séparés avec ceux qu'ont donnés les deux autres séries faites à Neuchâtel et à Leipzig.

([1]) *Astronomische Nachrichten*, n° 1948.

Quoi qu'il en soit, le plan d'observations recommandé par M. Galle était le suivant : Chaque soir, on mesure micrométriquement la différence de déclinaison entre la planète et deux étoiles, dont l'une la précède tandis que l'autre la suit en ascension droite, et tellement choisies que la planète ait une déclinaison intermédiaire entre les leurs, sans que pour cela la différence de déclinaison entre la planète et chacune d'elles dépasse 5 minutes. De la sorte, on pourra se servir d'un grossissement assez fort et avoir des pointés plus précis. On répétera ces comparaisons en nombre suffisant, en faisant occuper à chaque fois, aux deux astres que l'on compare, des positions différentes dans le champ de l'instrument; puis on recommencera les mêmes mesures dans la seconde position de l'instrument, et l'on combinera ensemble les résultats ainsi trouvés. En opérant ainsi, avec la plus grande symétrie possible, on aura éliminé la plupart des erreurs qui peuvent se présenter, telles que l'irrégularité du pas de la vis, les variations de ce pas et de la distance focale par suite des changements de température, les défauts de l'éclairement du champ, l'équation personnelle. MM. Brünnow et Möller ont adopté ce plan et l'ont rigoureusement suivi; aussi leurs observations paraissent-elles d'une grande précision. Ainsi l'erreur moyenne de chaque pointé est de $\pm 0'',29$ pour Dunsink et $\pm 0'',32$ pour Lund; d'où l'on déduit comme erreur probable de la moyenne $\pm 0'',02$ dans le premier cas, et $\pm 0'',01$ dans le second.

D'un autre côté, la comparaison des différences de déclinaison entre Phocée et les deux étoiles donne, pour le seul jour commun aux deux stations, Dublin (D) et Lund (L) :

A l'aide de l'Étoile australe....... D-L $= -0'',18$

A l'aide de l'Étoile boréale.......... D-L $= +0'',22$

ce qui conduit, en moyenne, à la valeur

$$+0'',02$$

pour moyenne des différences, c'est-à-dire pour l'erreur dont on doit considérer comme affecté le résultat des observations faites, pendant cette soirée, dans les deux stations précédentes.

Les observations de M. Becker sont beaucoup moins précises, cet astronome ne faisant dans chaque soirée que 14 pointés sur les étoiles et la planète et n'observant que dans une seule position de son instrument, dont le champ était d'ailleurs assez irrégulièrement éclairé. Aussi l'erreur moyenne d'un pointé est-elle relativement forte, $\pm 0'',54$. Quant à la précision des observations de M. Bruhns, nous n'en avons pas de mesure exacte, mais on peut bien certainement la considérer comme au plus égale à celle des observations de M. Becker. Ceci étant posé, la comparaison des observations faites en des jours communs dans deux de ces quatre stations donne, pour la correction de leurs observations prises deux à deux, les nombres suivants, où N et Le désignent les observations de Neuchâtel et Leipzig, et les lettres A et B indiquent si l'étoile est boréale ou australe par rapport à la planète.

Dublin.

L - D	Août	18	$+0'',18$	A
»		18	$-0,22$	B
N - D		18	$-0,32$	A
»		19	$-0,53$	A
»		29	$+0,19$	B
Le - D		30	$0,00$	A
Moyenne...			$-0,12$	

Leipzig.

D - Le	Août	30	$0'',00$	A
L - Le		25	$+0,50$	B
»		25	$-0,98$	A
»		28	$-0,05$	B
N - Le		25	$+0,79$	B
»		25	$-1,02$	A
»	Sept.	6	$-0,22$	A
»		6	$+0,88$	B
Moyenne...			$-0,01$	

Lund.

D - L	Août	18	$-0'',18$	A
»		18	$+0,22$	B
N - L		16	$-0,04$	B
»		17	$+0,19$	B
»		18	$-0,50$	A
»		25	$+0,29$	B
»		25	$-0,04$	A
Le - L		25	$-0,50$	B
»		25	$+0,98$	A
»		28	$+0,05$	B
Moyenne...			$+0,05$	

Neuchâtel.

D - N	Août	18	$+0'',32$	A
»		19	$+0,53$	A
»		29	$-0,19$	B
L - N		16	$+0,04$	B
»		17	$-0,19$	B
»		18	$+0,50$	A
»		25	$-0,29$	B
»		25	$+0,04$	A
Le - N		25	$-0,79$	B
»		25	$+1,02$	A
»	Sept.	6	$+0,22$	A
»		6	$-0,88$	B
Moyenne...			$+0,05$	

L'écart moyen étant toujours très-petit et d'autant plus faible que les nombres des comparaisons de la planète avec une étoile australe et boréale sont plus voisins de l'égalité, on est en droit de conclure que, si l'un des quatre Observatoires considérés se fût trouvé dans l'hémisphère austral, la valeur que l'on aurait déduite pour la parallaxe solaire n'aurait pas été entachée d'une erreur plus considérable que les précédentes, erreur qui ne porterait que sur son troisième chiffre. Il y a donc lieu, d'après M. Galle, de continuer l'essai de détermination qu'il a proposé.

Il faut remarquer cependant que l'accord, à quelques centièmes de seconde près, que nous avons constaté plus haut dans les quatre cas que nous avons considérés, peut n'être qu'accidentel, et qu'alors la conclusion que nous en avons déduite ne serait rien moins qu'assurée. Aussi devra-t-on, à l'avenir, diriger, dans les différents Observatoires, toutes les observations d'après un plan commun, les faire de la même manière et surtout avec des instruments aussi analogues que possible.

D'un autre côté, les saisons étant opposées dans les deux hémisphères, il arrivera souvent qu'à des nuits favorables pour l'observation dans l'hémisphère austral correspondront, dans notre hémisphère, des nuits où le ciel sera couvert; ce seront évidemment autant de nuits perdues. Le seul moyen d'atténuer ce grand inconvénient est d'augmenter le plus possible le nombre des Observatoires qui coopèrent à cet essai de détermination de la parallaxe solaire; mais alors surgit immédiatement un nouvel obstacle, car il devient de plus en plus difficile de faire partout les observations avec des instruments à peu près équivalents.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bierens de Haan (D.). — Over eenige nieuwe herleidings formulen bij de theorie der bepaalde integralen. 1 fl. 40.

Durège (H.). — Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. — 2. Aufl. Leipzig, Teubner. In-8, XII-223 p. 1 Thlr. 22 Ngr.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME SIXIÈME. — FÉVRIER 1874.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, rue Monge, 29.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

OUVRAGES REÇUS PAR LA RÉDACTION.

(SUITE.)

Baltzer (R.). Mathematische Bemerkungen. (*Berichte d. K. Sächs. Gesellschaft d. Wiss.*, Nov. 1873).

Battaglini (G.). Sulla Geometria projettiva. (*Atti della R. Accad. delle Scienze di Napoli*, 1873. In-4.)

Berger (Al.) Om periodiska funktioner. Upsala, 1873.

Billbergh (Th.-C.). Om spetskonturer beskrifna af andra gradens och vissa tredje gradens komplexa funktioner. Vesterås, 1873.

Clausius (R.). Ueber einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationäre Bewegung. (*Sitzungsberichte der Niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde*, 16. Juni 1873.)

XIX Febbraio MDCCCLXXIII. Commemorazione di Nicolò Copernico nella Regia Università di Bologna; 1873. In-8.

Gilbert (Ph.). Recherches sur le développement de la fonction Γ et sur certaines intégrales définies qui en dépendent (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*. Bruxelles, 1873.)

Klein (F.). Ueber den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve. (*Ibid.*; 8. Dec. 1873.)

Kronecker (L.). Ueber die verschiedenen Sturmschen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. (*Monatsbericht d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, Febr. 1873.)

Lie (S.). Partielle Differential-Gleichungen 1. O., in denen die unbekannte Function explicite vorkommt. (*Verhandl. d. Gesellschaft der Wiss. zu Christiania*, 1873.)

— Ueber partielle Differential-Gleichungen 1. O. (*Ibid.*, 1873.)

— Ueber eine Verbesserung der Jacobi-Mayerschen Integrations-Methode. (*Ibid.*, 1873.)

— Neue Integrations-Methode eines $2n$-gliedrigen Pfaffschen Problems. (*Ibid.*, 1873.)

— Zur analytischen Theorie der Berührungs-Transformationen. (*Ibid.*, 1873.)

Lindemann (F.). Ueber unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. (*Sitzungsberichte d. phys.-med. Soc. zu Erlangen*, 28. Juli 1873.)

Lipschitz (R.). Beitrag zu der Theorie des Hauptaxen-Problems. (*Abh. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1873.)

Ovidio (E. d'). Studio sulla Geometria projettiva. (*Annali di Matem. pura ed appl.*, t. VI°.)

(*A suivre.*)

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

ENVOI FRANCO PAR LA POSTE EN FRANCE.

COURS DE MÉCANIQUE

APPLIQUÉE AUX MACHINES,

PAR J.-V. PONCELET.

PUBLIÉ PAR M. X. KRETZ,
Ingénieur en chef des Manufactures de l'État.

UN FORT VOLUME IN-18 AVEC 117 FIG. DANS LE TEXTE ET 2 PLANCHES; 1874. — 12 FRANCS.

M. Resal a présenté ce Livre à l'Académie des Sciences, dans la séance du 1er décembre 1873. Après avoir fait l'historique des premières éditions publiées en feuilles lithographiées, M. Resal s'est exprimé en ces termes :

« On comprendra toute l'importance de l'Ouvrage par le simple énoncé des Chapitres qui le composent : 1° *Considérations générales sur les machines en mouvement;* 2° *principaux moyens de régulariser l'action des forces sur les machines et de transmettre les vitesses dans des rapports donnés;* 3° *calcul des résistances passives dans les pièces à mouvement uniforme;* 4° *influence de la variation de la vitesse sur les résistances.* Le COURS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES est, à quelques détails près, très-complet. Les lacunes inhérentes aux progrès des sciences et des mécanismes ont été comblées par des Notes placées au bas des pages, qui témoignent des soins consciencieux apportés par M. Kretz à cette publication. Parmi ces Notes, les unes ont surtout pour but de mettre en lumière les idées, parfois mal interprétées, de l'auteur; les autres résument certains travaux récents encore peu connus (*Régulateurs isochrones à poids variables, à ressorts, à boules conjuguées, à bras croisés, à ailettes; — câbles en fil de fer*, etc.); d'autres enfin se font remarquer par leur originalité. Je crois devoir signaler parmi celles-ci : *Période de mise en marche des machines. — Des conditions de bon fonctionnement. — De l'écart proportionnel des vitesses au point de vue de la régularisation; effet du couplement sur la régularité. — Détermination de la vitesse de règle et conditions de régularité des machines industrielles. — Corrélation entre le régulateur et le volant. — Équations du mouvement d'une transmission en tenant compte de l'élasticité des liens. — Rapport des accélérations maxima et minima des manivelles simples et à double effet. — Volant des machines couplées. — Ralentissement dans les transmissions par courroies; loi des tensions d'une courroie sur une poulie en mouvement. — Influence de l'écartement des arbres sur le fonctionnement des outils.* En résumé, le COURS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE, de Poncelet, traite avec une haute autorité toutes les questions qui forment aujourd'hui le fonds de l'enseignement en ce qui concerne la science de l'Ingénieur et du Mécanicien, et les Notes qui y ont été ajoutées renferment des considérations utiles qui établissent de nouveaux liens entre la théorie et la pratique industrielles. »

TABLE DES MATIÈRES.

FÉVRIER 1874.

Revue bibliographique.

Revue des publications périodiques.

Bulletin bibliographique.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BRIOT et BOUQUET, professeurs à la Faculté des Sciences. — THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. 2e édition. Premier fascicule. In-4°, 416 p. — Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 30 fr.

La première édition de la *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, était depuis longtemps épuisée. Les rares exemplaires qui se trouvaient dans le commerce avaient atteint un prix élevé. Cet excellent Ouvrage, qui a marqué un progrès si considérable dans l'étude des fonctions d'une variable imaginaire, était sur le point de manquer aux jeunes géomètres. Nous devons donc remercier d'abord MM. Briot et Bouquet d'avoir bien voulu nous donner une nouvelle édition de leur travail, considérablement étendue et mise en rapport avec les progrès les plus récents de l'Analyse. Le premier fascicule seul de la nouvelle édition a paru ; mais nous avons lieu de penser que, dans quelques semaines, l'Ouvrage sera complétement terminé. Nous attendrons l'apparition du deuxième fascicule pour indiquer d'une manière générale le plan et le but des auteurs ; mais, dès à présent, nous devons rendre un compte détaillé des sujets importants traités dans la partie que nous avons sous les yeux. Nous nous contenterons de faire remarquer que l'exposition des matières a reçu un développement qui en accroît de beaucoup l'intérêt et la portée ; plusieurs Chapitres sont entièrement nouveaux, en sorte que la première édition peut tout au plus être considérée comme un abrégé de la nouvelle. Les auteurs donnent, cette fois, tous les développements nécessaires pour l'intelligence complète des théorèmes, et nous sommes convaincu que leur Ouvrage servira désormais de guide sûr et clair aux personnes désireuses de bien approfondir la théorie des variables imaginaires.

La *Théorie des fonctions elliptiques* est divisée en Livres ; les Livres se subdivisent en Chapitres.

Le Livre Ier est intitulé : les *Fonctions algébriques*.

Il traite de la représentation des variables imaginaires et de la définition des fonctions et de leurs dérivées. Les auteurs ont changé les dénominations qu'ils avaient autrefois adoptées d'après Cauchy.

C'est ainsi qu'ils appellent *monotropes à l'intérieur d'un contour* C toutes les fonctions qui n'ont qu'une seule valeur pour un point z, situé à l'intérieur de ce contour, quel que soit le chemin qu'on suive à l'intérieur de ce contour pour arriver du point initial z_0, où la valeur de la fonction est donnée, au point considéré z. Une fonction rationnelle est monotrope dans toute l'étendue du plan. La fonction est dite *holomorphe* quand elle est monotrope et a une dérivée dans toute l'étendue du plan considéré. Les *pôles* sont les points pour lesquels la fonction u devient infinie, mais de telle manière que la fonction $\frac{1}{u}$ demeure holomorphe dans le voisinage du pôle. Enfin les fonctions *méromorphes* sont celles qui sont holomorphes dans toute une partie du plan, excepté en certains pôles. A cette classe appartiennent, par exemple, les fractions rationnelles. Ajoutons que, pour étudier la fonction quand la variable devient infinie, les auteurs, à l'exemple de Riemann, emploient la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui rend de si grands services, en ramenant l'étude de la fonction pour les valeurs infinies à l'examen de ce qui se passe autour d'un point.

Les premières fonctions étudiées sont les fonctions algébriques. Le Chapitre II est consacré à la démonstration du théorème fondamental sur la théorie des équations, au théorème de Cauchy sur les racines imaginaires, à l'étude de ces racines et aux lois de leur permutation autour des points critiques. Plusieurs exemples numériques permettent au lecteur de se familiariser avec les propriétés si importantes des fonctions algébriques.

Le Livre II traite des *Fonctions définies par les séries*.

Le Chapitre I[er] comprend l'étude des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable. L'application des principes établis aux fonctions e^z, sin z, cos z et aux fonctions inverses fait l'objet du Chapitre suivant. Les auteurs examinent ensuite la théorie des séries à double entrée, et de la fonction $\Theta(z)$ définie par la série

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{nz+n^2a}.$$

Ils démontrent que cette fonction est holomorphe dans toute l'étendue du plan, qu'elle est paire et simplement périodique, etc.

Cette fonction, par des transformations très-simples, donne naissance à quatre autres fonctions, dont les quotients sont les fonctions elliptiques. L'étude des propriétés les plus élémentaires de ces fonctions termine le Livre II.

Le Livre III traite des *Intégrales définies*. Après avoir exposé les principes essentiels et leur application à quelques exemples très-élégants, mais particuliers, MM. Briot et Bouquet abordent la conséquence la plus importante de ces principes, je veux dire le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable. Ils donnent le théorème de Taylor, tel qu'il a été démontré par Cauchy, et en font l'application à la formule de Lagrange. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de cette série sont bien connues : elles ont été indiquées avec toute la netteté possible par Cauchy et par F. Chiò. Il n'y a donc plus rien de nouveau à établir sur cette question, et ce qui a pu faire illusion, dans ces derniers temps, à quelques géomètres, c'est que, dans son beau Mémoire sur cette série, M. Rouché s'est contenté de donner une condition suffisante pour la convergence, mais nullement nécessaire. MM. Briot et Bouquet traitent cette question avec une clarté parfaite, et en donnent des exemples qui ne peuvent laisser de doute dans l'esprit de personne. Le Livre se termine par l'examen de la question difficile des périodes, où les auteurs ont mis à profit, en les développant, les recherches de leurs devanciers, en particulier celles de MM. Clebsch et Gordan.

Les Livres précédents étudient la génération des fonctions par les équations implicites, par les séries, par les intégrales définies, et préparent l'examen des propriétés générales des fonctions, qui fait l'objet du Livre IV.

C'est dans ce Livre que sont étudiés les caractères distinctifs qui séparent une fonction entière, ou simplement rationnelle, ou algébrique irrationnelle de z, de toutes les autres fonctions ; les propriétés de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction; et enfin les théorèmes généraux relatifs aux fonctions doublement périodiques. Les auteurs commencent par démontrer les propositions qui figurent dans la première édition, et en particulier les beaux théorèmes de M. Liouville, sur le nombre des zéros et des infinis, sur l'expression de toute fonction périodique au moyen d'une fonction du second ordre et de sa dérivée; ils ajoutent plusieurs propositions nouvelles et très-générales, au nombre desquelles nous citerons la suivante :

« Étant donnée une fonction méromorphe doublement périodique $u = f(z)$, de l'ordre n, aux périodes élémentaires ω, ω', toute autre fonction méromorphe qui admet ces deux périodes s'exprime rationnellement au moyen de la première fonction et de sa dérivée. »

Le Chapitre V est consacré à l'exposition de la méthode générale pour le développement d'une fonction en une somme composée d'une infinité de termes rationnels, et à l'application de cette méthode aux fonctions circulaires et elliptiques.

Le Chapitre VI comprend le développement des fonctions en produits, les propriétés de ces produits, et l'application de la méthode générale à $\sin z$, $\cos z$, aux fonctions θ et aux fonctions elliptiques proprement dites.

Le Livre V traite d'un mode de génération des fonctions, que les auteurs avaient réservé avec juste raison, car son étude détaillée exige des connaissances plus étendues; nous voulons parler de la définition par des équations différentielles. Les travaux de MM. Briot et Bouquet sur cette question sont bien connus : ils ont pris place dans plusieurs Traités classiques de Calcul intégral; les auteurs les exposent avec tous les développements nécessaires; ils examinent notamment le cas où le coefficient différentiel devient indéterminé ou infini. Cet examen, sans doute, avait été fait dans le Mémoire original des auteurs, mais il ne figurait pas dans l'édition précédente. La méthode générale est ensuite appliquée à la fonction logarithmique et aux fonctions elliptiques.

Le Chapitre IV traite de l'*Intégration par les fonctions elliptiques*. MM. Briot et Bouquet examinent une équation différentielle, algébrique et irréductible, entre u et $\frac{du}{dz}$, ne contenant pas la variable z, et ils énoncent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle admette une intégrale monotrope. Ces conditions sont les suivantes. Si l'équation est

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

1° les coefficients $f_1(u), \ldots, f_m(u)$ doivent être des polynômes entiers, et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré,..., le dernier du degré $2m$; 2^o chaque racine de l'équation, tant qu'elle ne devient pas nulle, doit rester holomorphe par rapport à u; 3^o chaque racine nulle et d'un degré plus petit que l'unité doit être du degré $1-\frac{1}{p}$, p étant le nombre des racines du système circulaire auquel elle appartient; 4^o enfin l'équation différentielle, déduite de la proposée en posant $u=\frac{1}{v}$, doit présenter, pour $v=0$, les mêmes caractères.

Les auteurs examinent ensuite dans quels cas l'intégrale sera algébrique, simplement ou doublement périodique et font ensuite l'application des résultats généraux aux équations binômes et trinômes. L'indication de la méthode générale d'intégration termine le premier fascicule.

L'analyse précédente aura sans doute fait ressortir tout l'intérêt et toute la richesse des matériaux mis en œuvre dans cette première Partie de l'Ouvrage, qui ne comprend pas moins de cinquante-deux feuilles d'impression. Cependant l'éditeur, M. Gauthier-Villars, annonce que la seconde Partie sera à peu près aussi volumineuse que la première. Nous aurons donc enfin un Traité complet et classique, un véritable monument, remplaçant avantageusement l'Ouvrage vieilli de Legendre. G. D.

PLATEAU (J.). — STATIQUE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE DES LIQUIDES SOUMIS AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES. 2 vol. grand in-8°, avec figures dans le texte, 450 et 495 p. — Gand, Clemm; Paris, Gauthier-Villars; 1873. Prix : 15 fr.

On connaît aujourd'hui les procédés par lesquels M. Plateau annule l'effet de la pesanteur sur un liquide, de manière que celui-ci prend alors la figure qu'il affecterait si cette force n'agissait pas sur lui. L'auteur a exposé les nombreuses applications de ses procédés dans une suite de Mémoires dont plusieurs journaux scientifiques ont donné des résumés. Ces Mémoires sont épars dans sept volumes de la collection de l'Académie de Belgique, de 1843 à 1868. L'auteur a réuni aujourd'hui toutes ses recherches dans un seul Ouvrage, sous le titre indiqué ci-dessus. Voici les matières principales dont il traite :

1° Réalisation, à l'aide du premier procédé (celui de l'immersion d'une masse d'huile dans un alcool dilué de même densité), des figures d'équilibre, et spécialement de celles de révolution ; étude détaillée de ces figures, par la théorie et par l'expérience.

2° Réalisation des mêmes figures par le deuxième procédé (celui des lames liquides minces).

3° Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

4° Tension des surfaces liquides et des lames liquides; historique. Théorie de la génération de ces lames. Assemblages laminaires, leur développement, leurs lois.

5° Recherche des causes principales d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides; ces causes résident dans un rapport convenable entre la tension et une viscosité propre des deux couches superficielles; historique de la viscosité superficielle; historique des lames liquides.

6° Étude, par l'expérience et par la théorie, des conditions de stabilité des figures d'équilibre. L'examen de ces conditions à l'égard du cylindre conduit à une théorie complète de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires. Le liquide d'une semblable veine se meut, à la vérité, sous l'action de la pesanteur; mais on comprend que, pendant la chute libre d'un liquide, la pesanteur ne met point d'obstacle au jeu des forces moléculaires. Accord constant de cette théorie avec les belles expériences de Savart. Historique de la constitution des veines liquides.

FRENET (F.), professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon. — Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal. Troisième édition. 1 vol. in-8°, xiv-410 p. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. Prix : 7 fr. 50.

Nous avons le plaisir d'annoncer la publication de la troisième édition de cet Ouvrage, qui a déjà rendu tant de services à l'enseignement, et dont le mérite a été apprécié de tous ceux qui s'occupent de l'étude de l'Analyse infinitésimale. Les Recueils de cette nature sont extrêmement multipliés en Angleterre, et surtout en Allemagne, tandis que l'Ouvrage de M. Frenet est unique en

France; mais, grâce aux soins que le savant et consciencieux auteur a apportés à la rédaction de son Ouvrage, et aux améliorations qu'il a introduites dans les éditions successives, le Recueil français peut à lui seul remplacer presque tous les autres; et aucun de ceux que nous avons sous les yeux ne l'égale pour la variété et le choix judicieux des exemples, et surtout pour les compléments théoriques qui s'y trouvent intercalés.

M. Frenet s'est préoccupé avant tout de graduer la difficulté des exercices, particulièrement dans les questions de pur calcul. Ayant reconnu, dans sa longue expérience de l'enseignement, combien il est important pour les commençants de se familiariser aussitôt que possible avec le maniement du calcul, il n'a pas craint de donner un développement considérable aux Chapitres consacrés à la différentiation et à l'intégration des fonctions explicites, et il a accordé, avec raison, à l'intégration des équations différentielles une place beaucoup plus étendue qu'on ne l'a fait dans la plupart des autres Recueils.

La division de l'Ouvrage est celle qui est adoptée dans le plus grand nombre des Cours de Calcul infinitésimal. Le volume comprend trois Parties, consacrées la première au Calcul différentiel, la deuxième au Calcul intégral, et la troisième à des questions diverses. Chaque Partie contient un recueil d'énoncés, à la fin duquel se trouve le recueil des réponses correspondantes, distribuées de la même manière en Chapitres. Peut-être eût-il été préférable, pour la facilité des recherches, que les trois recueils de questions eussent été placés à la suite les uns des autres, sans être mêlés avec les solutions.

L'auteur a voulu donner à ses lecteurs une idée de diverses théories utiles qu'un Cours classique ne renferme pas nécessairement; aussi a-t-il introduit dans son Livre des notions sur les séries doubles et les produits infinis, deux modes de développement si importants et sujets à tant de difficultés; sur les opérations symboliques; sur la notation, trop peu connue, des fonctions hyperboliques; sur les nombres de Bernoulli, sur les points associés, etc. Il a traité un petit nombre de questions de Physique, parmi lesquelles figurent la formule de Lambert, généralisant celle de Petit, et le théorème de Dupin généralisant celui de Malus.

M. Frenet a pris soin, dans les applications à la Géométrie, de prendre pour sujets d'exercices la plupart des courbes célèbres qui rentraient dans son cadre : épicycloïde, hypocycloïde, cissoïde, conchoïde, logarithmique, chaînette, spirale logarithmique, tractoire, ellipse sphérique, loxodromie, courbe élastique, etc., en y rattachant quelques indications historiques, quand il y avait lieu. La réunion des articles relatifs à une même courbe, étant facilitée par des renvois, donne souvent de cette courbe une étude assez complète.

Toutes les fois qu'il a pu mettre une question, même très-simple, sous le patronage d'un nom célèbre, il a eu soin de le faire, persuadé que par là on relève un détail, même insignifiant, et on lui donne de l'intérêt.

Le Chapitre consacré à la Géométrie à trois dimensions mérite particulièrement l'attention; il renferme les recherches propres à l'auteur, où se trouvent établies ses formules si simples et si remarquables concernant la double courbure des lignes.

Pour exécuter le travail considérable qu'a dû lui coûter la rédaction d'un Recueil aussi étendu et aussi soigneusement élaboré, M. Frenet s'est servi avant tout des sources originales et a puisé de préférence ses exemples dans les œuvres des grands maîtres. Il s'est inspiré aussi des publications analogues répandues dans les pays voisins, et principalement de l'excellente collection due à D.-F. Gregory [1].

La seconde édition du présent Recueil, publiée en 1866, se distinguait de la première (1856) par des additions assez considérables, qui en avaient notablement accru le volume. Celle-ci n'apporte à la précédente que des améliorations de détail, parmi lesquelles nous citerons l'intercalation des figures dans le texte. J. H.

BERGER (Alexander). — OM PERIODISKA FUNKTIONER. Akademisk afhandling. — Upsala; 1873 [2].

Dans le premier paragraphe de ce Mémoire, j'ai étudié quelques propriétés des fonctions $f(z)$, telles que, en chaque point du plan,

---

(1) *Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus.* 2d edition, Cambridge; 1846. 1 vol. in-8°.

(2) BERGER (Al.). — *Sur les Fonctions périodiques.* Thèse doctorale. In-8°, 51 p. (Analyse rédigée par l'auteur.)

l'une ou l'autre des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ soit toujours synectique. Une pareille fonction prend évidemment en chaque point une valeur indépendante du chemin parcouru par z; de plus, elle ne perd sa synecticité qu'en des points isolés, où elle devient infinie. Pour abréger, j'ai donné à de telles fonctions le nom de *hémisynectiques*. Parmi les propositions que j'ai démontrées concernant ces fonctions, je citerai ici les deux suivantes :

I. Si $f(z)$ est une fonction hémisynectique, telle qu'aucune des deux équations

$$f(z) = A_1, \quad f(z) = A_2$$

n'ait de racine située sur un contour fermé donné; si, en même temps, une variable A peut passer d'une manière continue de A_1 en A_2, sans rencontrer aucune valeur pour laquelle l'équation

$$f(z) = A$$

ait une racine située sur le contour, les deux équations

$$f(z) = A_1, \quad f(z) = A_2$$

auront le même nombre de racines à l'intérieur du contour.

II. S'il se trouve au moins deux valeurs que la fonction hémisynectique $f(z)$ ne puisse prendre pour $z = \infty$, par quelque chemin que l'on fasse tendre z vers l'infini, $f(z)$ sera une fonction rationnelle de z.

Le paragraphe II contient une théorie de la classe des fonctions périodiques hémisynectiques qui jouissent de la propriété que $f(z)$ converge vers une valeur déterminée (finie ou infinie) et indépendante du point de départ du mouvement de z, lorsque z va vers l'infini perpendiculairement à la direction de la période ω, et cela soit que z se meuve à droite ou à gauche de ω. Si ρ désigne une quantité réelle et positive, cette propriété peut s'exprimer par les deux équations

$$\lim f(z + \rho i \omega) = H,$$
$$\lim f(z - \rho i \omega) = K,$$

pour $\rho = \infty$, H et K étant deux quantités déterminées et indépendantes de z. Déduire purement et simplement de la notion de périodicité les propriétés de ces fonctions, tel est le but que je me suis proposé. On obtient d'abord, par une modification d'un théorème énoncé plus haut, la proposition suivante :

« Dans chaque intervalle périodique, l'équation $f(z) = A$ a un nombre de racines fini et indépendant de A, tant que A n'est pas égal à H ou à K. »

En se fondant sur ces considérations, les fonctions dont il s'agit ici se partagent, d'après le nombre des racines contenues dans chaque intervalle, en fonctions du premier, du deuxième, du troisième,... ordre. Comme supplément à ce théorème, j'ai démontré que, pour les fonctions périodiques du premier ordre, l'équation $f(z) = H$ n'est satisfaite par aucune valeur autre que

$$z = \lim(z + \rho i \omega),$$

et l'équation $f(z) = K$ par aucune valeur autre que

$$z = \lim(z - \rho i \omega).$$

Si, $u = f(z)$ étant une fonction périodique du premier ordre, et $v = F(z)$ une fonction périodique du $n^{\text{ième}}$ ordre, on ne trouve, pour chaque valeur de u, qu'une seule valeur correspondante de v, on démontre encore facilement que, en chaque point, soit v, soit $\frac{1}{v}$, est une fonction synectique de u, de sorte que v est une fonction hémisynectique de u; de plus, cette fonction, qui converge évidemment vers une valeur finie et déterminée, lorsque u tend vers l'infini en suivant n'importe quel chemin, doit, en vertu du théorème du paragraphe I, être rationnelle. Ainsi se trouve démontrée la proposition suivante :

« Si u et v sont deux fonctions périodiques du premier et du $n^{\text{ième}}$ ordre respectivement, et ayant la même période, v est une fonction rationnelle du $n^{\text{ième}}$ degré de u. »

Parmi les théorèmes que j'ai déduits de cette proposition, je citerai les deux suivants :

1° *Toute fonction périodique* $u = f(z)$ *du premier ordre sa-*

tisfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dz} = A + Bu + Cu^2,$$

A, B, C *étant des constantes.*

2° *Toute fonction périodique* $v = f(z)$ *du* $n^{\text{ième}}$ *ordre, synectique dans toute l'étendue du plan, satisfait à une équation différentielle linéaire du* $n^{\text{ième}}$ *ordre à coefficients constants et à second membre constant.*

Jusqu'ici nous n'avons rien dit sur la question de l'existence réelle ou de la non-existence des fonctions périodiques. S'il existe de telles fonctions du premier ordre, il faut les chercher parmi les intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = A + Bu + Cu^2,$$

et la discussion de cette équation fait voir que, tant que l'on n'a pas

$$4AC - B^2 = 0,$$

elle est satisfaite par une fonction du premier ordre, ayant pour période $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}}$.

Dans le paragraphe III, j'ai appliqué la théorie précédente aux fonctions circulaires. Après avoir posé les définitions suivantes :

1. Par $\tang z$, on entend la fonction périodique impaire du premier ordre de z, qui a pour période π, et qui prend pour $z = 0$ la valeur zéro, et pour $z = \frac{\pi}{4}$ la valeur 1 ;

2. Par $\cot z$, on entend la fonction périodique impaire du premier ordre de z, qui a pour période π, et qui prend pour $z = 0$ la valeur ∞, et pour $z = \frac{\pi}{4}$ la valeur 1 ;

3. Par $\sin z$, on entend la fonction périodique impaire du second ordre, synectique dans toute l'étendue du plan, qui a pour période 2π, et qui prend pour $z = \frac{\pi}{2}$ la valeur 1 ;

4. Par $\cos z$, on entend la fonction périodique paire du second ordre, synectique dans toute l'étendue du plan, qui a pour période 2π, et qui prend pour $z = 0$ la valeur 1, et pour $z = \pi$ la valeur -1;

J'ai déduit de ces seules définitions les propriétés les plus importantes des fonctions circulaires et leurs relations mutuelles.

A. Berger.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXVII, 2e semestre 1873.

N° 3. Séance du 21 juillet 1873.

Villarceau (Yvon). — *Note concernant le changement de vitesse de régime dans les régulateurs isochrones.*

Dans le Mémoire présenté le 10 juin 1842, M. Villarceau a montré comment on pouvait changer la vitesse, lorsque le changement proposé doit être permanent; dans la Note actuelle, il s'occupe du cas où le changement proposé doit être temporaire, comme cela est exigé dans les applications du régulateur isochrone au mouvement des équatoriaux.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

Didion (le Général). — *Mouvement d'un segment sphérique sur un plan incliné.*

Sur un plan horizontal on place un segment sphérique, et l'on incline le plan peu à peu; on demande, en tenant compte du frottement, quel mouvement prendra le corps.

Tel est le problème dont la solution fait l'objet du Mémoire cité.

Caligny (de). — *Expériences sur le mouvement de la houle* *produite dans un canal factice, et faisant monter l'eau le long d'une plage inclinée à une hauteur sensiblement constante.*

TACCHINI. — *Nouvelles observations spectrales, en désaccord avec quelques-unes des théories émises sur les taches solaires.*

CATALAN (E.). — *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet.*

Si l'on pose

$$C_\mu = \lim \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{\mu+n-1} - l(\mu+n-1) \right],$$

M. Catalan montre que

$$C_\mu = -\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu};$$

pour $\mu = 1$, on a la *constante d'Euler*.

N° 4. Séance du 28 juillet 1873.

HERMITE. — *Sur la fonction exponentielle* (suite).

SAINT-VENANT (DE). — *Examen d'un essai de théorie de la poussée des terres contre les murs destinés à les soutenir.*

Après avoir énuméré les Notes et Mémoires présentés par M. Curie, savoir : Note présentée le 30 juin 1873 : *Sur le désaccord entre l'ancienne théorie de la poussée des terres et l'expérience;* Note du 14 juillet 1873 : *Nouvelles expériences sur cette théorie,* etc..., M. de Saint-Venant ajoute :

« Il m'a semblé utile, pour prévenir l'introduction fâcheuse, dans cette partie de la Mécanique, d'idées fausses présentées avec persistance et appuyées sur une prétendue conformité aux faits, de donner ici les motifs qui ont déterminé une Commission de 1868, dont je suis le seul membre subsistant, à refuser son approbation au Mémoire cité de M. Curie, et à n'en point faire l'objet d'un rapport à l'Académie. »

DUPUY DE LÔME. — *Des positions proposées pour établir un service régulier de navires porte-trains entre Calais et Douvres.*

SECCHI (le P.). — *Nouvelles recherches sur le diamètre solaire.*

Ledieu (A.) — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

Zeuthen (H.-G.). — *Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre.*

Une branche est dite *ouverte* ou *fermée* suivant qu'elle rencontre une droite en un nombre impair ou pair de points; l'auteur nomme *ovale* une branche fermée sans aucun arc rentrant, et *n-folium* une branche fermée douée de n arcs rentrants. Ceci admis, voici la classification établie par M. Zeuthen : 1° 1 quadrifolium et 2 ovales externes; 2° 1 quadrifolium et 1 ovale interne; 3° 1 trifolium, 1 unifolium et 2 ovales; 4° 2 bifolia et 2 ovales; 5° 1 bifolium, 2 unifolia et 1 ovale; 6° 4 unifolia.

L'auteur n'a nommé que les formes présentant le nombre maximum d'arcs rentrants et de branches séparées; les autres résulteront de l'évanouissement d'arcs rentrants ou d'ovales.

Flammarion (C.). — *Sur la planète Mars.*

N° 5. Séance du 4 août 1873.

Hermite. — *Sur la fonction exponentielle* (suite et fin).

M. Hermite commence par chercher les expressions approchées de n fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, par des fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \ldots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$, de manière que les développements en séries suivant les puissances croissantes de la variable coïncident jusqu'à une puissance déterminée x^μ. Il applique ensuite cette recherche aux quantités $\varphi_1(x) = e^{ax}$, $\varphi_2(x) = e^{bx}, \ldots, \varphi_n(x) = e^{hx}$: tel est le point de départ de l'étude intéressante qui fait l'objet des diverses Communications présentées par M. Hermite dans les séances des 7, 21, 28 juillet et 4 août. L'auteur établit l'impossibilité d'une relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0,$$

$a, b, \ldots, h$ étant des nombres entiers, ainsi que les coefficients N, $N_1, \ldots, N_n$, c'est-à-dire que *le nombre e ne peut pas être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.*

M. Hermite donne deux démonstrations de cette importante proposition; il rappelle, à ce sujet, que c'est M. Liouville qui a démontré le premier que le nombre e n'était racine ni d'une équation du second degré, ni d'une équation bicarrée (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 192-193).

Le Mémoire se termine par une application numérique du mode d'approximation qui est le point de départ de ce beau travail; voici quelques-uns des résultats : on a

$$e = \frac{337}{124}, \quad e^2 = \frac{916}{124};$$

l'erreur ne porte que sur les dix-millièmes; puis

$$e = \frac{58291}{21444}, \quad e^2 = \frac{158452}{21444},$$

l'erreur portant sur les dix-millionièmes.

Faye. — *Sur la théorie physique du Soleil, proposée par M.* Vicaire.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

N° 6. Séance du 11 août 1873.

Faye. — *Réponse à de nouvelles objections de M.* Tacchini.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

Gaussin (L.). — *De la propagation de la marée sur divers points des côtes de France. Changement dans l'heure de la pleine mer du Havre, depuis les travaux d'endiguement de la Seine.*

Revellat (J.-P.). — *Solution analytique du tracé des courbes à plusieurs centres, décrites d'après le procédé géométrique de Perronet.*

N° 7. Séance du 18 août 1873.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

Picquet. — *Note sur les courbes gauches algébriques.*

L'auteur se propose de déterminer l'ordre de la surface engendrée par les sécantes triples d'une courbe gauche d'ordre m, puis le nombre des sécantes quadruples. Il trouve, pour l'ordre de la surface engendrée par les sécantes triples,

$$(m-2)\left[h_m - \frac{1}{6}m(m-1)\right],$$

et pour le nombre des sécantes quadruples

$$\frac{1}{2}h_m(h_m - 4m + 11) - \frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13);$$

m est l'ordre de la courbe gauche, et h_m le nombre des sécantes doubles (c'est-à-dire rencontrant deux fois la courbe) qu'on peut mener par un point arbitrairement choisi.

N° 8. Séance du 25 août 1873.

Faye. — *Théorie des scories solaires selon M.* Zöllner.

Resal. — *Note sur le planimètre polaire.*

En présentant le planimètre polaire du professeur Amsler de Schaffouse, M. Resal montre comment la théorie des rotations conduit simplement à l'équation de ce planimètre.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite et fin).

Le commencement de ce Mémoire, dont l'extrait comprend environ trente-quatre pages des *Comptes rendus,* a été présenté dans la séance du 14 juillet 1873. Voici les titres des divers Chapitres développés par l'auteur :

1. Considérations générales. — 2. Exposé de la marche suivie pour arriver aux démonstrations. — 3. Établissement de diverses

formules principales. — 4. Explications relatives aux mouvements et aux vitesses, tant d'ensemble que propres, dans un système de points matériels. — 5. Relations entre les forces vives réelles, d'ensemble et propres des points du système. — 6. Relation générale entre les travaux extérieurs, les énergies potentielles et les forces vives d'ensemble et propres des points d'un système. — 7. De l'énergie calorifique des corps et de leur équilibre calorifique. — 8. Démonstration du principe de l'équivalence mécanique de la chaleur. — 9. Quantités qui caractérisent : 1° la température absolue d'un corps; 2° son état physique et constitutif. — 10. Expression générale de la température d'un corps. Capacité calorifique absolue. Expression de la température en fonction de la force vive moyenne de vibration. — 11. Relation entre la quantité de chaleur appliquée à un corps, le changement de température et la variation de durée des vibrations. — 12. Démonstration directe du principe amplifié de Carnot.

L'extrait présenté dans cette séance contient la fin de l'exposé de la *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique;* il serait difficile d'en faire ici une analyse détaillée; mais les titres des divers paragraphes donnent une idée de cet important Mémoire et de la marche suivie par l'auteur.

Borrelly et Henry (Paul). — *Découverte de deux nouvelles comètes.*

N° 9. Séance du 1er septembre 1873.

Faye. — *Sur les aurores boréales, à l'occasion d'un récent Mémoire de M.* Donati.

Stephan (E.). — *Observation de la planète* (133) *et de la comète de M. Borrelly.*

Rayet et André. — *Sur les changements de forme et le spectre de la comète* 1873, IV.

N° 10. Séance du 8 septembre 1873.

De la Gournerie. — *Note sur le nombre des points d'intersection que représente un point multiple commun à deux courbes planes, lorsque diverses branches de la première sont tangentes à des branches de la seconde.*

Le procédé employé par M. de la Gournerie consiste à remplacer l'équation de chaque courbe par les équations caractéristiques des différentes branches qui se croisent au point multiple commun, suivant une méthode qu'il a fait connaître en 1869, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIV, p. 425, t. XV, p. 1, 2e série.

Plummer (W.). — *Éphéméride de la comète à courte période de Brorsen, calculée d'après les éléments de M.* Hind.

Stephan (E.). — *Sur la comète de Brorsen et la comète de Faye, retrouvées à l'Observatoire de Marseille.*

Tacchini. — *Nouvelles observations relatives à la présence du magnésium sur le bord du Soleil, et réponse à quelques points de la théorie émise par M. Faye.*

N° 11. Séance du 15 septembre 1873.

Faye. — *Réponse à la dernière Note de M.* Tacchini.

Rayet et André. — *Sur les changements de forme de la comète* 1873, IV.

Mercadier (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.*

N° 12. Séance du 22 septembre 1873.

Boussinesq (J.). — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles des cylindres isostatiques qui se produisent à l'intérieur d'un massif ébouleux soumis à de fortes pressions.*

A la fin de sa Note, l'auteur fait remarquer que l'équation

$$\begin{aligned}(k^2x^2 - y^2)\,r + 2(k^2+1)\,xys + (k^2y^2 - x^2)\,t\\ + (ax+by)\,p + (ay-bx)\,q + cz = 0,\end{aligned}$$

où z est une fonction inconnue des deux variables indépendantes x, y; p, q, r, s, t ses dérivées partielles du premier et du second ordre; a, b, c, k des constantes, peut se transformer en

$$\frac{d^2z}{du\,dv} + \frac{(a+kb)-(k^2+1)}{4k^2}\frac{dz}{du} + \frac{(a-kb)-(k^2+1)}{4k^2}\frac{dz}{dv} + \frac{c}{4k^2}z = 0,$$

en prenant

$$u = \mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2} - k \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}, \quad v = \mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2} + k \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

Mercadier (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.* (2e Note.)

N° 13. Séance du 29 septembre 1873.

Morin (le Général). — *Observations relatives aux sujets traités dans le* N° 21 *du* Mémorial de l'Officier du Génie.

M. le Général Morin termine en ces termes le résumé qu'il a fait de ce numéro du *Mémorial :* « On voit que ce volume constitue un Recueil aussi riche en recherches scientifiques qu'en résultats pratiques relatifs à l'art de l'ingénieur militaire ; mais nous croyons surtout devoir faire remarquer l'heureux usage que les savants officiers, auteurs de ces travaux, savent faire de la Géométrie pour représenter les données de l'expérience et de la théorie, en en facilitant l'application. »

Respighi (L.). — *Sur la grandeur des variations du diamètre solaire.*

N° 14. Séance du 6 octobre 1873.

Chasles. — *Rapport sur un Mémoire de M.* Mannheim « *Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions.* »

« Dans un précédent travail, intitulé *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable,* inséré dans le *Recueil des Mémoires des Savants étrangers,* M. Mannheim a traité diverses questions concernant la construction des normales aux trajectoires des points d'une figure qui éprouve dans l'espace un déplacement complétement déterminé, c'est-à-dire dans lequel chaque point de la figure ne peut prendre qu'une direction. Ce Mémoire contient, en outre, des recherches relatives à une figure dont le déplacement n'est pas complétement défini, sujet qui n'avait pas encore été abordé et qui devait prendre, comme on va le voir, un grand développement.

» Six conditions assurent l'immobilité d'un corps, disons d'une figure dans l'espace; conséquemment cinq conditions seulement permettent un déplacement, dans lequel chaque point ne peut décrire à chaque instant qu'un élément linéaire; et quatre conditions seulement permettent à chaque point de décrire une infinité d'éléments linéaires de directions diverses et appartenant tous à l'élément d'une surface que M. Mannheim appelle *surface trajectoire* du point.

» Ce sont les propriétés relatives à ces *surfaces trajectoires* des différents points d'une figure douée de mouvements déterminés par quatre conditions qui font le sujet principal du Mémoire dont nous avons à rendre compte.

» Nous rappellerons d'abord quelques théorèmes, extraits de Communications antérieures de l'auteur, qui sont des préliminaires nécessaires du travail actuel. C'est ainsi que tout s'enchaîne progressivement et laborieusement dans les théories de pure Géométrie.

» Nous citerons : 1° *la détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite dont quatre points se déplacent sur quatre surfaces données* (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 1215); 2° *la construction de l'axe de courbure de la surface développable, enveloppe d'un plan qui se déplace en satisfaisant à quatre conditions* (*ibid.*, t. LXX, p. 1259); 3° *le lieu des centres de courbure des points d'une droite mobile dans l'espace : courbe à double courbure du cinquième ordre* (*ibid.*, t. LXXVI, p. 551); 4° *le lieu des centres des sphères osculatrices des trajectoires des points d'une droite : cubique gauche* (*ibid.*, t. LXXVI, p. 635).

» Passons au Mémoire actuel. On sait que, dans tout mouvement infiniment petit d'une figure dans l'espace, les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite G passent tous par une même droite G′, qu'on a appelée la *conjuguée* de G, et laquelle, considérée comme participant au mouvement de la figure, a pour *conjuguée*, réciproquement, la droite G.

» Tous les mouvements infiniment petits que peut prendre une droite G quelconque, dont le déplacement n'est assujetti qu'à quatre conditions, donnent lieu, chacun, à une *conjuguée* G′. M. Mannheim démontre d'abord ce théorème fort important, que *les normales aux surfaces trajectoires des différents points d'une droite* G *s'appuient toutes sur une quelconque des droites conjuguées* G′, conséquemment sur deux droites conjuguées, *et forment donc un hyperboloïde ;* d'où s'ensuit que *toutes les conjuguées d'une droite* G, *relatives à tous les déplacements que comportent les quatre conditions du déplacement de la figure, forment un hyperboloïde dont la droite* G *est elle-même une génératrice du même système que ses conjuguées,* les génératrices de l'autre système étant les normales aux *surfaces trajectoires* des points de la droite G.

» Que l'on considère, maintenant, un point quelconque *m* de la figure en mouvement, la normale à la *surface trajectoire* de ce point *m* rencontre en deux points l'hyperboloïde dont il vient d'être question, et, conséquemment, s'appuie sur deux des conjuguées de la droite G. Or, autre fait très-important, M. Mannheim démontre que *ces deux conjuguées sont toujours les mêmes pour tous les points de la figure en mouvement.*

» Ces deux droites, que l'auteur désigne par les lettres D et Δ, jouissent nécessairement, dans les déplacements de la figure, d'une propriété particulière et caractéristique; cette propriété est que *chaque point de chacune des deux droites ne peut décrire, dans tous les déplacements possibles de la figure, qu'un seul élément linéaire* (au lieu d'un élément de surface) : *le plan normal à cet élément passe par l'autre droite.*

» Ces propriétés remarquables forment le premier paragraphe du Mémoire.

» Dans le paragraphe suivant, M. Mannheim démontre diverses propriétés des *surfaces trajectoires* des points d'une droite, dérivant principalement de la considération de l'hyperboloïde lieu des normales à ces *surfaces trajectoires*. Nous citerons les suivantes :

» *Parmi les surfaces trajectoires des points d'une droite, il y en a deux qui sont tangentes à la droite.*

» *La développable, enveloppe des plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite, est du quatrième ordre et de la troisième classe.*

» *Les plans normaux aux surfaces trajectoires des points d'une droite, menés par les éléments rectilignes d'un déplacement quelconque, déterminent, dans ces surfaces trajectoires, des sections dont les centres de courbure sont sur une cubique gauche.*

» Puis M. Mannheim cherche combien il y a de points, sur une droite, qui décrivent des trajectoires satisfaisant à diverses conditions, relatives aux *surfaces trajectoires* de ces points.

» Ainsi il détermine :

» 1° Combien il y a de points, sur une droite, dont les trajectoires soient tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points;

» 2° Combien dont les trajectoires soient osculatrices aux lignes géodésiques des surfaces trajectoires, et dont les plans osculateurs, dès lors, soient normaux aux surfaces trajectoires;

» 3° Combien dont les trajectoires ont leur rayon de courbure nul;

» 4° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul;

» 5° Combien dont les trajectoires sont tangentes aux lignes de courbure des surfaces trajectoires;

» 6° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal infini;

» 7° Combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux;

» 8° Enfin combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires.

» Considérant les trajectoires, non plus simplement des points d'une droite, mais de tous les points de la figure en mouvement, M. Mannheim parvient à divers théorèmes qui étendent ce vaste sujet de recherches.

» Il nous faut citer ses résultats principaux pour donner une idée de la nouveauté et de l'importance qu'ils comportent.

» *Le lieu des points dont les trajectoires, dans un quelconque des déplacements que permettent quatre conditions données, sont tangentes à des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points, est une surface du troisième ordre qui contient les deux droites* D *et* Δ *et le cercle imaginaire de l'infini.*

» *Le lieu des points dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points est une surface du sixième ordre, qui passe par le cercle imaginaire de l'infini.*

» *Le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul est la surface réglée du quatrième* *ordre dont les génératrices s'appuient sur les deux droites* D, Δ *et sur le cercle imaginaire de l'infini.*

» *Le lieu des points dont les trajectoires ont leur rayon de courbure nul est une surface imaginaire du second ordre.*

» M. Mannheim appelle *point parabolique* sur une surface un point où la surface a l'un de ses rayons de courbure principaux infini. Il trouve que *les points d'une figure en mouvement, qui sont des points paraboliques de leurs surfaces trajectoires, forment une surface du sixième ordre qui passe par le cercle de l'infini.*

» Enfin *le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux est une surface du huitième ordre;*

» Et *le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires est une surface du cinquième ordre.*

» En terminant, l'éminent géomètre fait observer qu'en ce qui concerne les trajectoires des points d'une droite faisant partie d'une figure en mouvement il a toujours été question d'une droite quelconque; mais qu'il y a certaines droites jouissant de propriétés particulières. Il annonce qu'il reviendra sur ce sujet, qui lui donnera lieu de considérer aussi ce qui se rapporte à des plans de la figure en mouvement, et particulièrement aux surfaces trajectoires des points de ces plans, *lesquelles ont leurs centres de courbure principaux sur une surface du sixième ordre,* qui présente quelque analogie avec le lieu des points dont les *surfaces trajectoires* ont un centre de courbure principal sur un plan.

» Les géomètres comprendront, sans que nous ayons besoin d'insister, toute l'importance d'un travail qui réunit dans une même théorie, absolument nouvelle, en les déduisant d'un mode uniforme de démonstration, des résultats aussi précis et aussi considérables. Nous ne saurions le recommander trop vivement aux encouragements de l'Académie, et la Commission déclare, à l'unanimité, que ce Mémoire lui paraît très-digne d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Respighi (L.). — *Sur la grandeur et les variations du diamètre solaire* (2e Note).

Curie (J.). — *Sur la théorie de la poussée des terres.*

« L'objet de la présente Note, dit M. Curie, est de répondre aux objections de M. de Saint-Venant (*voir* la séance du 28 juillet 1873), et de faire saisir d'une manière encore plus claire, s'il est possible, qu'il ne l'a fait, en quoi consiste la différence qui existe entre la théorie que je propose, théorie avec laquelle les expériences mentionnées dans ma Note du 14 juillet présentent un accord frappant, et l'ancienne théorie considérée comme approximativement équivalente à la *théorie rationnelle* due à M. Maurice Levy. »

ČASOPIS PRO PESTOVÁNÍ MATHEMATIKY A FYSIKY, kterýž se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje Dr. F. J. STUDNIČKA, professor Mathematiky na C. K. Universitě Pražské, a vydává JEDNOTA ČESKÝCH MATHEMATIKŮ. Stálí spolupracovníci : Dr. G. BLAŽEK a Dr. Em. WEYR, professorové Mathematiky na Kr. Č. Polytechnice, a Dr. M. NEUMANN, docent Fysiky na C. K. Universitě. — V Praze. Tiskem Dra. Edvarda Grégra. — Nákladem Jednoty Českých Mathematiků (¹).

T. I; 1872.

RYBIČKA (A.). — *Stanislas Vydra, Notice biographique.* (2 art., 11 p.)

Vydra (1741-1804) est auteur d'Ouvrages sur les diverses branches des Mathématiques, les premiers qui aient été composés en langue tchèque.

(¹) *Journal pour l'étude des Mathématiques et de la Physique*, rédigé spécialement pour l'usage des Étudiants, par le Dr *F.-J. Studnička*, professeur de Mathématiques à l'Université I. et R. de Prague, et publié par la *Société des Mathématiciens bohêmes*. Avec la collaboration du Dr *G. Blažek* et du Dr *Em. Weyr*, professeurs de Mathématiques à l'Institut Royal Polytechnique de Bohême, et du Dr *M. Neumann*, docent de Physique à l'Université I. et R. — Prague, imprimerie du Dr E. Grégr. — Aux frais de la Société des Mathématiciens bohêmes. — Publié par fascicules bimensuels, in-8°, en langue bohême.

Pour faciliter la lecture des noms propres, nous indiquerons les principales règles de la prononciation bohême. Les lettres *a, b, d, e, f, i, k, l, m, n, o, p, r, t, v, y, z* se prononcent comme en français; *ch, g, j, u* comme en allemand; *c* = *ts* = *z* allemand; *č* = *tch*; *ě* = *ié*; *h* fortement aspiré, et quelquefois = *ch* all.; *ň* = *gn* (dans *signe*); *ř* = *ž* = *j* fr.; *s* = *ç* toujours dur; *š* = *ch* fr. (dans *chose*); *d', p', t'* se prononcent en faisant entendre légèrement le son *i*. Les voyelles accentuées *á, é, í, ú, ů, ý* sont longues. L'accent tonique est généralement sur la première syllabe.

Nous devons ce compte rendu à l'obligeance de M. le Dr Em. Weyr.

Studnička (F.-J.). — *Nouvelle démonstration du théorème sur la relation entre les déterminants et les déterminants mineurs du système primitif et du système adjoint.* (4 p.)

Si l'on désigne par A_{pq} le déterminant mineur, correspondant à l'élément a_{pq} du déterminant

$$\Delta = \sum \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

on a, comme on sait,

$$\Delta^{n-k}(a_{11}a_{22}\ldots a_{k-1,k-1}) = (A_{kk}\ldots A_{nn}),$$

ce qui est établi, dans la présente Note, d'une manière inductive très-simple, qui peut remplacer, pour les commençants, la démonstration de Borchardt, reproduite par Baltzer, dans sa *Théorie des déterminants.*

Krejčí (J.). — *Éléments de cristallographie mathématique.* (4 art., 35 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les triangles d'arcs de cercle.* (6 p.)

L'auteur, partant de la méthode des projections stéréographiques, traite des figures planes formées par trois arcs de cercle, et qu'il appelle *triangles circulaires* (*Kreisdreiecke*). Il démontre d'abord que l'on peut considérer trois cercles quelconques dans le plan comme les projections stéréographiques de trois grands cercles d'une sphère, c'est-à-dire que tout triangle circulaire peut être regardé comme la projection d'un triangle sphérique. Si A_1, A_2, A_3 sont les trois sommets d'un triangle circulaire, les arcs de cercle passant deux à deux par un même sommet se coupent, quand on les prolonge suffisamment, en trois autres points, d'où résultent trois nouveaux sommets A'_1, A'_2, A'_3, que l'on peut appeler les *conjugués* des premiers. Les cercles passant par deux points conjugués sont dits *cercles transversaux.* Il en existe ainsi trois systèmes dans le triangle circulaire. A chaque triangle circulaire correspond un *cercle principal,* dont le centre O est le centre radical des trois cercles qui forment le triangle, et dont le diamètre est égal à la longueur de la plus petite corde des trois cercles qui puisse être menée par O′.

A chaque proposition de la théorie du triangle sphérique correspond une proposition sur le triangle circulaire, et réciproquement. Par exemple :

« Les grands cercles bissecteurs des angles intérieurs d'un triangle sphérique ont un diamètre commun. »	« Les cercles transversaux bissecteurs des angles intérieurs d'un triangle circulaire ont une corde commune, c'est-à-dire qu'ils passent par les deux mêmes points. »

On établit de même les théorèmes suivants sur les triangles circulaires :

« Dans le triangle circulaire, les six cercles transversaux bissecteurs des angles extérieurs et intérieurs se coupent quatre fois, trois à trois, en deux points. On obtient ainsi quatre couples de points Q, Q′, pour chacun desquels O est un point de la ligne de jonction QQ′, et l'on a $OQ.OQ' = P^2$, P désignant le rayon du cercle principal. »

« Les cercles transversaux qui coupent à angles droits les côtés opposés ont une corde commune. »

« Les cercles transversaux bissecteurs des angles extérieurs du triangle circulaire coupent les côtés opposés en des points d'un cercle qui rencontre le cercle principal aux deux extrémités d'un de ses diamètres. »

« Il en est de même pour les cercles transversaux bissecteurs de deux angles intérieurs et du troisième angle extérieur. »

« Si l'on projette, du point O, les pôles des côtés du triangle circulaire ([1]) sur les côtés correspondants, et que, par ces projections et les sommets opposés, on mène des cercles transversaux, ceux-ci passeront tous par un même point. »

Blažek (G.). — *Sur l'élément superficiel.*

L'auteur fait voir, dans une courte Note, comment on peut établir d'une manière simple les expressions connues de l'élément différentiel d'une surface, dans le cas des coordonnées soit rectangulaires, soit polaires, en partant de ce théorème, que le carré d'une aire plane est égal à la somme des carrés des projections de cette aire sur trois plans coordonnés rectangulaires.

Weyr (Ed.). — *Sur le cône du second degré.*

([1]) On considère comme *pôle* l'intersection des tangentes aux extrémités du côté du triangle.

Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont les angles des trois couples de génératrices principales (situées dans les trois plans principaux) d'un cône du second degré, on a l'équation

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_3 \cos\varphi_1 + 1 = 0.$$

Un des trois angles est toujours imaginaire.

STUDNIČKA (F.-J.). — *Sur les fractions convergentes intermédiaires, et sur leur application.*

Après avoir exposé les propriétés fondamentales de ces fractions, que l'auteur nomme *fractions adjointes,* on montre leur utilité dans la résolution des équations indéterminées du premier degré.

STUDNIČKA (F.-J.). — *Sur la formule d'Euler pour transformer des series convergentes en d'autres qui convergent plus rapidement.*

Soit proposé de transformer la série

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots, \quad \text{ou} \quad u_1 > u_2 > u_3 > \ldots,$$

et introduisons la notation

$$\Delta^{m+1} u_k = \Delta^m u_k - \Delta^m u_{k+1};$$

on trouve ainsi

$$2s = u_1 + \Delta u_1 - \Delta u_2 + \ldots = u_1 + \Delta(u_1 - u_2 + u_3 - \ldots),$$

ou

$$2s = u_1 + \Delta s.$$

En calculant au moyen du symbole d'opération Δ, on en tire

$$s = \frac{u_1}{2 - \Delta},$$

et, si l'on effectue la division indiquée et que l'on rende au symbole Δ sa signification propre, on obtient la formule connue d'Euler

$$s = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Delta^k u_1}{2^{k+1}}.$$

STUDNIČKA (F.-J.). — *Sur la quadrature du cercle.* (4 p.)

Le but de cet article est de servir de réponse à tous ceux qui veulent avoir trouvé, « avec l'aide de Dieu », la quadrature du cercle. Il contient en abrégé les raisons de l'impossibilité de la solution cherchée, et le tableau des résultats obtenus depuis Archimède (250 avant J.-C.) jusqu'à Richter (1855), dans l'évaluation de π; il se termine par la valeur de cette constante, trouvée par Shanks, avec 530 décimales.

Hoza (F.). — *Contribution à l'histoire des trochoïdes.* (6 p.)

Hervert (J.). — *La dioptrique au point de vue de la Géométrie supérieure.* (3 art. 33 p.)

Neumann (M.). — *Sur la tension superficielle des liquides.* (16 p.)

Blažek (G.). — *Contribution à la théorie des lentilles.* (2 p.)

Weyr (Em.). — *Deux théorèmes sur les sections coniques.* (3 p.)

En se fondant sur la rationalité des sections coniques, on établit, moyennant l'introduction d'un paramètre rationnel, ces deux théorèmes connus :

1° *L'hypoténuse d'un triangle rectangle inscrit, tournant autour du sommet de l'angle droit, passe par un point fixe de la normale en ce sommet.*

2° *La ligne qui joint les deux points d'intersection de la conique avec deux droites, menées par un de ses points et également inclinées sur la normale en ce point, passe par un point fixe de la tangente en ce point.*

Ovidio (E. d'). — *Les points, les plans et les droites en coordonnées homogènes.* (2 art., 36 p.; en fr.)

L'auteur reprend les études qu'il a publiées dans divers articles du *Giornale di Matematiche* (¹), et où il avait entrepris de traiter plus méthodiquement et plus complétement qu'on ne le fait en général les formules principales qui servent de base à l'application des coordonnées trilinéaires et quadriplanaires des points, des coordonnées triponctuelles et quadriponctuelles des plans, et des coordonnées plückériennes des droites dans l'espace. Il a remarqué,

---

(¹) T. VI, VII, VIII, IX, X, 1868-1872. Voir *Bulletin*, t. I, p. 152, 333; t. III, p. 172; t. IV, p. 196.

depuis, que l'on pouvait généraliser presque tous ses résultats, sans en altérer la simplicité, en considérant des points, des droites et des plans qui ne sont pas tous rapportés au même triangle ou au même tétraèdre. Cette extension fait l'objet du présent Mémoire, qui contient en outre de nouveaux théorèmes et de nouvelles démonstrations de théorèmes connus.

Zahradník (K.). — *Lieu géométrique des intersections des tangentes à une conique avec les polaires des points de contact par rapport à une autre conique.*

Weyr (Em.). — *Détermination des éléments à l'infini dans les figures géometriques.* (26 p.)

Prenant pour point de départ les coordonnées homogènes de Hesse, l'auteur développe l'équation des droites de l'infini et des droites parallèles; il détermine les points et les asymptotes infiniment distants des courbes planes algébriques, en particulier des sections coniques spéciales et générales, l'équation des points-cercles imaginaires ($x^2+y^2=0$); puis il passe aux coniques semblables et semblablement placées. Si l'on écrit l'équation d'une courbe plane algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré sous la forme

$$u_n+u_{n-1}+\ldots+u_1+u_0=0,$$

u_k désignant généralement l'ensemble des termes de degré k, on obtient les points à l'infini $\left(\text{avec les valeurs de } \frac{y}{x} \text{ pour ces points}\right)$ au moyen de l'équation $u_n=0$, qui donne pour le rapport $\frac{y}{x}$ les n valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. En s'appuyant sur les propriétés connues des fonctions homogènes, l'auteur fait voir maintenant que l'équation des asymptotes est

$$\frac{\xi\dfrac{\partial u_n}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial u_n}{\partial y}+u_{n-1}}{x^{n-1}}=0,$$

où, après avoir effectué la division par x^{n-1}, on remplacera $\frac{y}{x}$ successivement par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Après quelques remarques préliminaires générales sur le cas où il manque des termes u dans l'équation de la courbe, l'auteur traite, d'après la théorie exposée, la cissoïde, la cardioïde et la conchoïde, et détermine les équations des asymptotes de ces courbes.

Seydler (A.). — *Remarques sur l'intégration de quelques équations différentielles linéaires.* (3 p.)

L'auteur considère deux équations différentielles linéaires du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\sum_{k=n}^{k=0} a_k y^{(k)} = 0, \quad \sum_{k=n}^{k=0} b_k y^{(k)} = 0,$$

ayant une intégrale particulière commune y_1, laquelle satisfera évidemment aussi à l'équation

$$\sum_{n}^{0} (a_k X + b_k Y) y^{(k)} = 0,$$

X et Y étant les fonctions de $x, y, y', y'', \ldots$. Si ces fonctions ne contiennent que x, c'est-à-dire si la dernière équation est elle-même linéaire, on peut, par la variation des constantes, former une nouvelle équation différentielle linéaire, de l'ordre $n - 1$. La condition que les deux premières équations aient une intégrale commune sera une équation contenant les constantes a_k, b_k, que l'on tirera des deux premières équations par l'élimination de $y, y', y'', \ldots$. Si a_k, b_k sont des constantes, l'intégrale sera de la forme $e^{\alpha x}$, α devant satisfaire aux équations du $n^{\text{ième}}$ degré

$$\sum_{n}^{0} a_k \alpha^k = 0, \quad \sum_{n}^{0} b_k \alpha^k = 0.$$

Au moyen de ces deux équations, on peut déterminer l'équation entre a_k, b_k, et obtenir la valeur de α. Pour $n = 2$, on peut employer avec avantage l'équation de condition, très-simple dans ce cas. Ainsi $y_1 = e^{\alpha x}$ sera une intégrale particulière de

$$(a_2 X + b_2 Y) y'' + (a_1 X + b_1 Y) y' + (a_0 X + b Y) y = 0,$$

si α satisfait aux équations

$$a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0,$$
$$b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0 = 0,$$

d'où résulte

$$\alpha = \frac{(a_0 b_1)}{(a_2 b_0)} = \frac{(a_2 b_0)}{(a_1 b_2)},$$

Des six quantités a, b, il y en a donc cinq d'arbitraires, tandis que, pour la sixième, l'équation précédente, quadratique par rapport à toutes les quantités, fournira deux valeurs. Si l'on pose, dans notre équation différentielle, $y = ue^{\alpha x}$, il vient

$$(a_2 X + b_2 Y) u'' + [(a_1 + a_2\alpha) X + (b_1 + b_2\alpha) Y] u' = 0,$$

équation qui peut s'intégrer immédiatement.

La dernière équation de condition peut encore être satisfaite en posant

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = m,$$

et notre équation différentielle aura dans ce cas le facteur $X + mY$. Après la séparation de ce facteur, on obtiendra une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

L'équation de condition $\frac{(a_0 b_1)}{(a_2 b_0)} = \frac{(a_2 b_0)}{(a_1 b_2)}$ prend une forme très-élégante dans le cas où X et Y sont des fonctions trigonométriques, par exemple $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Si l'on pose de plus

$$a_k = m_k \cos v_k, \quad b_k = m_k \sin v_k,$$

l'équation différentielle devient

$$m_2 \cos(v_2 + x) y'' + m_1 \cos(v_1 + x) y' + m_0 \cos(v_0 + x) y = 0,$$

laquelle admettra l'intégrale particulière $y = e^{\alpha x}$, si l'on a

$$\frac{\sin^2(v_0 - v_2)}{m_1^2} = \frac{\sin(v_1 - v_0)}{m_2} \, \frac{\sin(v_2 - v_1)}{m_0}.$$

On a en même temps

$$\alpha = \frac{m_1 \sin(v_1 - v_0)}{m_2 \sin(v_0 - v_2)} = \frac{m_0 \sin(v_0 - v_2)}{m_1 \sin(v_2 - v_1)}.$$

On peut prendre pour exemple l'équation

$$(3 - x) y'' - (9 - 4x) y' + (6 - 3x) y = 0,$$

dans laquelle $X = 1$, $Y = x$ satisfont bien aux conditions demandées, et où, de plus, $\alpha = 1$, ce qui donne $y = ue^x$, et, par suite,

$$(3 - x)u'' - (3 - 2x)u' = 0,$$

$$u' = C'e^{2x}(3 - x)^3, \quad u = C + C'\int e^{2x}(3 - x)^3\,dx,$$

d'où enfin

$$y = Ce^x + C'e^{3x}(183 - 150x + 42x^2 - 4x^3).$$

Pánek (A.). — *Sur quelques intégrales définies.* (5 p.)

L'auteur représente par des intégrales définies certaines séries trigonométriques infinies, en partie connues, et calcule, à l'aide des formules obtenues, quelques fonctions du nombre π.

Pánek (A.). — *Sur les formules fondamentales de la Goniométrie.*

Si la perpendiculaire abaissée, du sommet C du triangle ABC, sur le côté opposé AB, divise ce côté en deux segments

$$AE = m = b\cos A, \quad EB = n = a\cos B,$$

on a, d'après le théorème des sinus,

$$b : (m + n) = \sin B : \sin C,$$

ou, à cause de $C = 180^\circ - (A + B)$,

$$b\sin(A + B) = (m + n)\sin B = (a\cos B + b\cos A)\sin B,$$

ou, à cause de $a\sin B = b\sin A$,

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B.$$

En vertu des équations $\cos^2(A + B) = 1 - \sin^2(A + B)$, $1 = \sin^2 A + \cos^2 A$, on a, par une simple addition et une extraction de racine carrée,

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B.$$

Studnička (F.-J.). — *Nouveaux théorèmes sur les déterminants.*

Zenger (K.-V.). — *Sur la vitesse de la lumière dans les milieux chimiques.* (5 p.)

Traduit des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 670, 16 septembre 1872.

STUDNIČKA (F.-J.). — *Remarque sur la théorie des trochoïdes.*

Dans cette courte Note, l'auteur établit, comme complément à la théorie des trochoïdes, contenue dans ses *Principes d'Analyse transcendante* (¹), les équations différentielles des trochoïdes, pour le cas où la base est une droite. Il fait voir alors que l'on n'a qu'à éliminer r et r' entre les équations

$$r=f(\rho),\quad \eta'=\frac{r'}{r},\quad \eta^2(1+\eta'^2)=r^2,$$

pour obtenir l'équation $\eta=\varphi(\xi)$ de la trochoïde cherchée.

Si, au contraire, on cherche la base sur laquelle la courbe $r=f(\rho)$ doit rouler pour que la trochoïde soit une droite, on n'a pareillement qu'à éliminer r et r' entre les équations

$$r=f(\rho),\quad -y'=\frac{r'}{r},\quad y=r,$$

pour obtenir l'équation $y=\mathrm{F}(x)$ de cette courbe.

— Chaque numéro du *Journal* est terminé par des énoncés de questions à résoudre, par des solutions de questions posées dans les numéros précédents et par des articles de nouvelles scientifiques et de bibliographie. E. W.

ZPRAVY JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ (²).

Années 1870, 1871 et 1872.

WEYR (Ed.). — *Sur la nouvelle Géométrie. Des figures projectives dans le plan.* (23 p.)

Théorèmes sur le rapport anharmonique d'une série de points ou d'un faisceau de droites. Définition des figures projectives, des faisceaux perspectifs, etc. Applications à diverses questions de Géométrie.

(¹) STUDNIČKY *Základové vyšši mathematiky*, t. III, p. 85.

(²) *Bulletins de la Société des Mathématiciens tchèques.* Rédigés par *M. Neumann* et *A. Pánek.* Il paraît chaque année un fascicule in-8°, en langue bohême.

Weyr (Em.). — *Sur la nouvelle Géométrie. De l'involution. — Des propriétés projectives du cercle.* (11-13 p.)

Ce Mémoire est une continuation du précédent. L'auteur y expose, d'une manière simple, les théories connues.

Seydler (A.). — *Nouvelle méthode pour calculer les orbites des planètes.* (2 p.)

Le problème de la détermination des éléments des orbites des planètes et des comètes, au moyen des coordonnées géocentriques de trois positions de l'astre, a été traité par Gauss (*Theoria motus*, etc.), qui a indiqué plusieurs solutions, conduisant toutes à des calculs longs et pénibles. M. Seydler indique une nouvelle méthode, où il introduit les coordonnées orthogonales de la planète par rapport à un système ayant pour origine le Soleil et pour plan des xy l'écliptique, et il établit des formules dont la mise en nombres peut seule faire connaître les avantages.

Hervert (J.) — *Exposé sommaire de la théorie mécanique de la chaleur.* (32 p.)

Neumann (M.). — *Exposé de la théorie des tons de Helmholtz.* (6 p.)

Dufek (P.-A.). — *Application de la nouvelle Géométrie à la Physique.* (2 p.)

Le centre d'un miroir concave, son centre de courbure et deux foyers conjugués quelconques forment quatre points harmoniques. D'après cette propriété, on peut remplacer la discussion relative aux positions des foyers conjugués par la considération des faisceaux harmoniques.

Neumann (M.). — *Des ondes vibrant sous l'action d'un archet.* (8 p.)

Strouhal (Č.-B.) — *Sur les coordonnées bipolaires.* (8 p.)

Résumé d'une conférence faite devant le premier Congrès des Mathématiciens et des Physiciens tchèques. L'emploi des coordonnées bipolaires facilite la résolution des deux problèmes suivants : « Mener la tangente à une courbe en un point donné », et « Trouver un système de trajectoires orthogonales d'un système de courbes de même espèce ». L'auteur donne la solution de ces deux problèmes pour le cercle, l'ellipse, l'hyperbole, les courbes de Cassini.

NEUMANN (M.). — *Le diapason galvanique et son utilité dans l'Acoustique.* (2 p.)

PÁNEK (A.). — *Valeurs approchées du radical* $\sqrt{a^2+b^2}$. (4 p.)

En posant $\sqrt{a^2+b^2} = \alpha a + \beta b$, on peut calculer les coefficients α, β, de manière à obtenir l'approximation voulue. Ce problème est traité par le méthode de Poncelet [1].

STUDNIČKA (F.). — *Contributions à la théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires complètes* [2]. (71 p.)

On sait que, étant donnée l'intégrale générale

$$y = \sum_{m=1}^{m=n} C_m y_m \tag{1}$$

d'une équation linéaire sans second membre, on peut en déduire l'intégrale générale de l'équation complète

$$\sum_{k=n}^{k=0} X_k y^{(k)} = X,$$

sous la forme

$$y = \sum_{m=1}^{m=n} A_m y_m + \sum_{m=1}^{m=n} y_m \int \xi_m \, dx,$$

composée de l'intégrale générale (1) de l'équation sans second membre et d'un terme complémentaire pouvant être déterminé par la variation des constantes. L'auteur cherche à déterminer ce terme complémentaire d'une manière directe, en établissant les relations qui existent entre la forme et les coefficients de ce terme, et les coefficients du second membre X, sur la composition duquel il fait plusieurs hypothèses particulières.

---

[1] Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{a^2 \pm b^2}$. (*Journal de Crelle*, t. 13.)

[2] Cette Note a paru en allemand dans les *Sitzungsberichte der Königl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften in Prag*; 1870.

Hervert (J.). — *De la conservation des forces dans la nature* (22 p.)

Neumann (M.). — *Sur le laboratoire de Physique.* (7 p.)

Description des procédés employés pour le travail du verre et des métaux.

Pánek (A.). — *Sur l'intégrale définie de la forme*

$$\int_0^{-\infty} \frac{e^x}{x}(e^{ax} - 1)\,dx.$$

En posant $e^{ax} = \lim \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{a\omega}$, et intégrant par séries, l'auteur trouve la valeur de cette intégrale égale à $\log(1 + a)$.

Pánek (A.). — *Détermination de la valeur de l'intégrale définie* $\int_0^1 \frac{x^{-\mu} + x^{\mu-1}}{1 + x}\,dx$. (4 p.)

Studnička (F.). — *Contribution à la théorie de la décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.* (2 p.)

Les numérateurs des fractions simples se calculent généralement à l'aide de formules récurrentes. L'auteur établit des formules qui permettent de déterminer ces numérateurs indépendamment les uns des autres.

Hoza (F.). — *Description d'un appareil pour faciliter l'enseignement de la méthode des projections orthogonales* [1]. (4 p.)

Neumann (M.). — *Contribution à l'étude des couches de poussière de Kundt.* (9 p.)

Pokorný (M.). — *Contribution au calcul des amortissements.* (3 p.)

Pánek (A.). — *Calcul de la valeur de l'intégrale eulérienne* $\int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{(1 + x)^{a+b}}\,dx$. (6 p.)

Hervert (J.). — *Formes particulières des flammes sous l'influence des tubes sonores.* (15 p.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 377.

Studnička (F.). — *Contributions au calcul des symboles d'opérations.* (7 p.)

Soit un système de grandeurs représentées par les symboles

$$\begin{array}{llll} \Delta^0 a_0, & \Delta^0 a_1, & \Delta^0 a_2, \ldots, & \Delta^0 a_k, \ldots, \\ \Delta' a_0, & \Delta' a_1, & \Delta' a_2, \ldots, & \Delta' a_k, \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ \Delta^m a_0, & \Delta^m a_1, & \Delta^m a_2, \ldots, & \Delta^m a_k, \ldots, \end{array}$$

tel que l'on ait

$$\Delta^m a_{k+1} = \Delta^m a_k + \Delta^{m-1} a_k.$$

L'auteur établit des formules pour exprimer : 1° la valeur d'un terme quelconque en fonction des éléments *a*) de la ligne verticale, *b*) de la ligne horizontale, auxquelles il appartient ; 2° la somme de n termes d'une ligne verticale ou horizontale en fonction des éléments des lignes horizontales ou verticales correspondantes.

Jarolímek (Č.). — *Lignes d'illumination sur les surfaces géométriques.* (10 p.)

Étude des courbes d'égale illumination sur les surfaces éclairées par un faisceau de rayons convergents ou parallèles.

Neumann (M.). — *Description de quelques appareils scolaires pour les expériences de Physique.* (14 p.)

Jičínský (K.). — *Quadrature du cercle avec l'approximation de* 3,1415.

L'auteur indique une construction géométrique qui permet de déterminer graphiquement, par la règle et le compas, la longueur de la circonférence à $\frac{1}{10000}$ près du diamètre.

— Ce Recueil contient en outre des analyses de divers Mémoires et Ouvrages scientifiques, rédigées par M. Seydel, ainsi que des énoncés de problèmes de Mathématiques et de Physique, avec leurs solutions.

A. P.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGL. BÖHMISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN PRAG (¹).

Année 1870.

BLAŽEK (G.). — *Sur les axes de symétrie.* (2 p.; boh.)

En appelant axes de symétrie un système de droites passant par un même point et partageant le plan en angles égaux ou l'espace en angles polyèdres égaux, la somme des carrés des projections orthogonales d'une longueur constante, de direction quelconque, sur ces axes est constante, et son rapport au carré de la longueur est $\frac{n}{2}$ pour le plan, $\frac{n}{3}$ pour l'espace. On en déduit simplement diverses propriétés de l'ellipsoïde.

STUDNIČKA (Fr.). — *Sur le caractère distinctif des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.*

Si $V = \sum f_{ik}\alpha_i\alpha_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ est le polynôme dont le signe sert à distinguer le maximum du minimum, et qu'on l'ait mis sous la forme

$$V = \sum_{1}^{n} \frac{H_i}{H_{i-1}} X_i,$$

H_0 étant $= 1$, et $H_1, H_2, \ldots, H_n$ étant des invariants de la fonction V, qui se confondent ici avec les déterminants hessiens, il y aura un minimum quand on aura, quel que soit i, $H_i > 0$, et un maximum quand on aura $(-)^i H_i > 0$.

WEYR (Em.). — *Sur les involutions de degré supérieur.* (5 p.)

x étant la distance d'un point m d'une droite G à un point fixe O de cette même droite, f et φ des fonctions entières et rationnelles du $n^{\text{ième}}$ degré, et λ un paramètre variable, l'équation

$$f(x) - \lambda\varphi(x') = 0$$

représente une involution du $n^{\text{ième}}$ degré sur la droite G. M. Weyr

(¹) *Comptes rendus des séances de la Société royale des Sciences de Bohême, à Prague.* — Publiés chaque semestre par fascicules in-8°, en allemand et en bohême.

établit ce théorème remarquable : « Si une involution du $n^{\text{ième}}$ degré possède deux éléments n-uples, les éléments de tous les » groupes se grouperont en figures projectives. »

Weyr (Em.). — *Sur la Géométrie des courbes du troisième ordre.* (5 p.)

Studnička (Fr.). — *Contributions à la théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires complètes.* (7 p.)

Nous avons donné plus haut (p. 98) l'analyse de ce Mémoire, reproduit dans les *Bulletins de la Société Mathématique de Prague.*

Année 1871.

Weyr (Em.). — *Sur les podaires des courbes dans l'espace.* (10 p.)

Les courbes dans l'espace ont deux sortes de podaires, suivant qu'on les considère comme enveloppes de leurs tangentes ou de leurs plans osculateurs. L'auteur étudie les propriétés de ces deux classes de courbes.

Weyr (Em.). — *Sur l'action à distance des solénoïdes électriques et des plans matériels.* (18 p.)

Addition au Mémoire de l'auteur, intitulé : *Ueber die magnetische Fernwirkung elektrischer Ströme und Stromringe* ([1]).

Studnička (Fr.). — *Sur le calcul des opérations.* (5 p.)

Voir plus haut (p. 101) une analyse de cette Note, reproduite dans les *Bulletins de la Société mathématique.*

Domalíp. — *Nouvelles recherches sur le magnétisme.* (4 p.)

Küpper (K.). — *Sur les courbes du troisième ordre, considérées comme enveloppes de coniques.* (5 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les relations angulaires involutoires de la cardioïde.*

Si l'on joint les points d'intersection de la tangente double et de trois tangentes parallèles entre elles avec le point m, milieu du

---

([1]) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XIII, 1868.

rayon qui joint le pôle de la courbe (considérée comme produit d'un cercle) au centre de ce cercle, on obtient trois rayons faisant entre eux des angles de 60 degrés.

Année 1872 (1[er] semestre).

Weyr (Em.). — *Sur le problème fondamental des involutions du troisième degré.* (3 p.)

L'auteur établit ce théorème important : « Les côtés d'un triangle coupent une conique quelconque en trois couples de points, qui, avec les trois points suivant lesquels les sommets du triangle sont projetés, d'un point quelconque de la conique sur la conique elle-même, forment trois triades de points en involution cubique. »

Pelz (K.). — *Sur la détermination des axes de projections centrales du cercle.* (4 p., 1 pl.)

Weyr (Em.). — *Sur les singularités du second ordre des courbes planes rationnelles.* (6 p.)

Suite des recherches de l'auteur, publiées dans les recueils suivants :

Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. XVI; 1871.

Giornale di Matematiche, t. IX; 1871.

Annali di Matematica, 2[e] série, t. IV; 1871.

Mach. — *Sur l'analogie de la différence personnelle entre les deux yeux avec la différence que présentent les divers points de la rétine dans le même œil.* (9 p.)

Studnička (Fr.). — *Sur une classe particulière de déterminants symétriques, et sur leur emploi dans la théorie des fractions continues.* (3 p.)

Studnička (Fr.). — *Contribution à la théorie des déterminants.* (2 p.)

Si les éléments des diverses lignes horizontales ou verticales d'un déterminant d'ordre n forment des séries arithmétiques de degré $\leqq n-2$, le déterminant s'annule.

Si les éléments d'un déterminant persymétrique d'ordre n forment une série arithmétique du degré $n-1$, le déterminant $= \pm (\Delta^{n-1} a_{1,1})^n$.

Krejčí. — *Sur un mode analogue de calcul et de représentation des cristaux des systèmes cubique et rhomboédrique.* (6 p.)

Zrzavý. — *Sur le calcul du réseau trigonométrique du dernier ordre.* (4 p.)

Weyr (Em.). — *Sur la courbure des surfaces gauches.* (4 p.)

Durège (H.). — *Sur les coniques osculatrices d'une courbe du troisième ordre.* (15 p.)

Steiner a énoncé sans démonstration ([1]) ce théorème, que, par trois points quelconques d'une courbe du troisième ordre, on peut mener à la courbe neuf coniques osculatrices, dont trois sont réelles et six imaginaires. A cette proposition principale se rattachent d'autres théorèmes relatifs au groupement de ces coniques osculatrices et aux relations entre les points réels d'osculation et les points réels d'inflexion. La proposition principale a été démontrée par M. F. August ([2]). Le but du travail de M. Durège est d'examiner la liaison de cette proposition avec cet autre théorème, énoncé aussi par Steiner, que, par un point quelconque d'une conique, on peut mener trois cercles osculateurs à cette courbe, et dont les points de contact se trouvent sur un même cercle que le point donné, théorème que Steiner dit être, *jusqu'à un certain point* (*gewissermassen*), un cas particulier du précédent.

ABHANDLUNGEN der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. — In-4° ([3]).

6e Série, t. IV; 1870.

Waltenhofen (A. v.). — *Sur l'attraction qu'exerce une spirale magnétique sur un noyau de fer mobile.* (14 p., 2 pl.)

Dienger (J.). — *Études sur la théorie des covariants et des invariants des formes binaires.* (47 p.)

([1]) *Journal de Crelle*, t. 32, p. 300.
([2]) *Ibid.*, t. 68, p. 235.
([3]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 99, et t. III, p. 170.

Ce Mémoire contient moins une théorie complète des covariants et invariants des fonctions de deux variables qu'une suite d'études détachées sur divers points de cette théorie, se succédant de manière que chacune s'appuie sur les précédentes.

Zenger (K.-W.). — *Le photomètre différentiel, et une nouvelle pile thermo-électrique.* (21 p., 2 pl.)

Weyr (Em.). — *Génération des courbes algébriques au moyen de figures élémentaires multiformes.* (36 p.)

Ce travail peut être considéré comme une Introduction au Livre publié par l'auteur sur le même sujet ([1]). Il se divise en deux Parties, dont la première a pour titre : « Développement des relations générales »; la seconde : « Génération des figures multiformes ».

T. V; 1871-1872.

Zenger (K.-W.). — *La balance tangentielle, et son emploi pour la détermination des densités des corps solides et fluides, au moyen d'une lecture directe.* (21 p., 2 pl.)

Matzka (W.). — *Méthode propre de W.-G. Horner, pour la résolution des équations numériques algébriques. Étude historique pour l'éclaircissement et l'appréciation de cette méthode.* (47 p.)

Horner a publié, vers 1819, dans les *Philosophical Transactions* et dans le *Leybourn's Repository,* sa découverte d'une nouvelle méthode pour la résolution numérique des équations algébriques. Cette méthode, adoptée maintenant par les géomètres anglais et allemands, n'a été généralement connue que par l'exposition qui en a été faite, en 1835, par J.-R. Young. Mais ce n'est pas là, à proprement parler, la méthode primitive, exposée et pratiquée par Horner lui-même; c'en est une modification, indiquée en passant comme moyen de faciliter les calculs, mais à laquelle Horner, doué d'une prodigieuse facilité pour les calculs de tête, préférait des procédés plus pénibles, mais plus directs. M. Matzka, en se livrant à l'étude assez laborieuse, des travaux originaux de Horner, a reconnu

---

([1]) *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse.* Leipzig, Teubner, 1869. In-8°, VII-175 p.

que son premier procédé, qu'a fait oublier le perfectionnement développé par Young, fournit, avec une étonnante rapidité, un nombre considérable de chiffres. Il présente, avec étendue et clarté, les trois méthodes d'approximation données successivement par Horner, et les discute au double point de vue de l'originalité et des avantages pratiques.

Šolin (J.-M.). — *Sur l'intégration graphique, contribution à l'Arithmographie.* (10 p., 1 pl.)

Dans cette Note, qui forme un Chapitre important de la Statique graphique, l'auteur donne les moyens d'exécuter graphiquement les opérations de la différentiation, de l'intégration, soit d'une fonction explicite, soit d'une équation aux différentielles totales entre deux ou trois variables.

Waltenhofen (A. v.). — *Sur la détermination du grossissement et du champ visuel des lunettes.* (15 p., 1 pl.)

La méthode indiquée par l'auteur se recommande par la facilité de son emploi; elle n'exige d'autre appareil qu'une lentille et une échelle tracée sur le papier, appareil qui peut tenir sur une table ordinaire.

Domalíp (K.). — *Recherches électromagnétiques, particulièrement sur quelques lois empiriques établies par Dub et par Müller.* (19 p.)

Weyr (Em.). — *Génération des figures élémentaires multiformes dans l'espace.* (55 p.)

Suite du Mémoire publié dans le volume précédent.

Dienger (J.). — *Sur un théorème du Calcul des probabilités, et sur quelques intégrales définies qui s'y rattachent.* (44 p.)

L'auteur s'occupe de l'intégrale $\int_0^\infty \cos ax \left(\frac{\sin bx}{bx}\right)^n \frac{\sin \varepsilon x}{x}\, dx$, qui exprime la probabilité pour qu'une inconnue, déterminée par des observations répétées, soit comprise entre des limites données. Il corrige une erreur commise par Poisson dans l'évaluation de cette intégrale. Il parvient, par une méthode différente de celle de Laplace, à la définition de la valeur moyenne dans le cas qu'il considère.

Küpper (C.). — *Contributions à la théorie des courbes du troisième et du quatrième degré.* (19 p., 1 pl.)

Ce Mémoire comprend deux Chapitres : I. Les courbes du troisième ordre (C^3) et les courbes du quatrième ordre (C^4) à deux points doubles considérées comme enveloppes de sections coniques. II. Sur un réseau spécial de coniques et sur une involution quadratique centrale dans le plan.

ACTA Societatis Scientiarum Fennicæ. Helsingfors. — In-4° (¹).

T. IX; 1871.

Gadolin (Axel.). — *Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographiques avec leurs subdivisions.* (71 p., 15 pl.; fr.)

Gyldén (H.). — *Relations entre les cosinus et les sinus des angles irrationnels.* (36 p.; suéd.)

L'auteur a été conduit, par un calcul astronomique, à développer le cosinus et le sinus d'un angle donné en série, procédant suivant les cosinus et les sinus des multiples d'un autre angle, incommensurable avec le premier. Il n'a pu trouver, dans les travaux mathématiques publiés jusqu'à ce jour, aucune méthode vraiment pratique qui conduisît à la solution de cette question par des séries assez rapidement convergentes. Il lui a fallu dès lors chercher comment on peut déduire des séries de Fourier de nouvelles séries jouissant d'une convergence suffisante.

Moberg (Ad.). — *Remarques sur les courants électriques induits par un aimant dans les plaques métalliques tournantes.* (35 p.; suéd.)

Hallstén (K.). — *Sur la chaleur considérée comme mouvement.* (10 p.; suéd.)

Lindelöf (L.). — *Sur la figure apparente d'une planète.* (13 p.; fr.)

L'auteur applique la transformation homographique à la solution

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 274.

de ce problème, traité par Bessel (¹) : Déterminer la figure apparente d'une planète telle, qu'elle résulte de sa position relative par rapport au Soleil et à la Terre, la forme de la planète étant supposée celle d'un sphéroïde aplati.

HALLSTÉN (K.). — *Sur les constantes de la chaleur*. (10 p.; suéd.)

LINDELÖF (L.). — *Sur les limites entre lesquelles la caténoïde est une surface minima*. (8 p.; fr.)

Cette question, dont la discussion a été mentionnée déjà dans le *Bulletin* (t. IV, p. 273), acquiert un nouvel intérêt depuis les belles expériences de M. Plateau sur les figures d'équilibre des fluides soustraits à l'action de la pesanteur. M. Lindelöf a joint à l'étude générale du problème les résultats de ses calculs numériques relatifs aux dimensions de la caténoïde limite.

LINDELÖF (L.). — *Quelques formules relatives à la courbure moyenne d'une courbe fermée*. (5 p.; fr.)

L'auteur a été conduit à ses recherches sur cette question en traitant le problème des polyèdres maxima (²). Il parvient au théorème suivant : « Une figure plane, limitée par une courbe continue, étant divisée en secteurs égaux infiniment petits par des rayons émanés d'un point arbitraire, la courbure moyenne des éléments d'arc ainsi déterminés s'obtient en divisant le périmètre entier par le double de l'aire. »

KRUEGER (A.). — *Détermination de l'orbite de la comète*, 1785, II. (23 p.; all.)

Les éléments de la comète découverte le 26 septembre 1867 simultanément par MM. Bäker, à Nauen, et Winnecke, à Bonn, ayant présenté quelque ressemblance avec ceux de la comète découverte par Messier, à Paris, le 11 mars 1785, il a paru intéressant à M. Krueger de déterminer avec plus de précision les éléments de cette dernière comète, bien qu'il n'y eût pas lieu de s'attendre à pouvoir l'identifier avec celle de 1867.

(¹) *Astronomische Untersuchungen*, Bd. I.
(²) Voir *Bulletin*, t. I, p. 242.

GIORNALE DI MATEMATICHE, pubblicato per cura di G. BATTAGLINI, E. FERGOLA, etc. (¹).

T. XI, 1er semestre; janvier-juin 1873.

JANNI (G.). — *Exposition de la théorie des substitutions.* (32 p.)

Dans cette troisième Partie de son Mémoire, l'auteur traite des substitutions linéaires. Cette Partie se compose des Chapitres dont voici les titres : I. Représentation analytique des substitutions. — II. Généralités sur les substitutions linéaires. — III. Ordre du groupe linéaire. — IV. Facteurs de composition du groupe linéaire. — V. Forme canonique des substitutions linéaires.

TORELLI (G.). — *Sur quelques intégrales formées au moyen des intégrales elliptiques, et sur leurs applications.* (21 p.)

L'auteur s'occupe des intégrales que l'on obtient, en intégrant par rapport au module l'intégrale elliptique multipliée par une puissance du module, et il donne quelques applications des formules obtenues à la simplification des intégrales complètes de certaines équations différentielles.

BONOLIS (A.). — *Résolution de $2n$ équations à $2n$ inconnues, qui se présentent dans certaines questions de Mécanique appliquée aux constructions.* (4 p.)

NEUMANN (C.). — *Notice sur* Rodolphe-Frédéric-Alfred CLEBSCH. (5 p.)

Traduit de l'allemand.

GAMBARDELLA (F.). — *Sur les coefficients des facultés analytiques.* (25 p.)

L'auteur se propose, dans cette Note, d'étudier les développements des deux fonctions que l'on désigne sous le nom de *facultés analytiques* ou de *factorielles*, l'une à exposant positif, l'autre à exposant négatif; il s'occupe de la recherche des expressions générales des coefficients de leurs développements. La Note est suivie d'un Appendice sur le développement des fonctions isobariques.

BATTAGLINI (G.). — *Sur la théorie des moments d'inertie.* (9 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 254.

Pour faire suite aux Notes relatives à la Statique et à la Cinématique des systèmes de forme invariable, traitées d'après les conceptions géométriques et mécaniques de Plücker, l'auteur se propose d'étudier, par la même méthode, la Dynamique de ces systèmes.

Dans cette Note, rapportant le système à un tétraèdre fondamental, il développe la théorie des moments d'inertie par rapport à un point, à un plan et à une droite.

Beltrami (E.). — *Sur les fonctions bilinéaires.* (9 p.)

L'auteur considère certains problèmes auxquels donne lieu la théorie des fonctions bilinéaires, lorsqu'on écarte la restriction que les deux séries de variables soient assujetties à des substitutions identiques ou à des substitutions inverses.

Aschieri (F.). — *Sur les systèmes de droites dans l'espace.* (3 p.)

Dans cette Note (qui sera continuée), l'auteur établit certaines propriétés relatives à deux séries de complexes du premier degré, dans lesquelles les complexes de chaque série satisfont à la condition de passer par une droite déterminée.

Affolter (G.). — *Démonstration élémentaire de cette propriété, que deux triangles polaires dans un cercle sont en position perspective.* (2 p.)

Ryew (L.). — *Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre.*

Démonstration de ce théorème, que les lignes de courbure d'une surface du second ordre touchent les huit génératrices qui passent deux à deux par les quatre points où la surface est rencontrée par le cercle imaginaire de l'infini.

Pittarelli (G.) et Caporali (E.). — *Solution de questions proposées dans le* Giornale di Matematiche. (8 p.)

Siacci (F.). — *Questions proposées.* (2 p.)

Sardi (C.). — *Sur les progressions par différence.* (30 p.)

Ce Mémoire contient certains théorèmes sur les progressions par différence, avec les applications à la résolution du problème des partitions d'un nombre donné avec trois ou quatre nombres désignés.

Clebsch (A.). — *Notice sur* Julius Plücker. (2 p.) Traduit de l'allemand par *E. Beltrami.*

Tognoli (O.). — *Quelques considérations sur la Géométrie des surfaces et sur les courbes gauches du genre zéro.* (12 p.)

G. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annuaire pour l'an 1874, publié par le *Bureau des Longitudes*. Avec des Notices scientifiques. — Paris, Gauthier-Villars, 1 vol. in-18, 504 p. 1 fr. 50.

TITRE DES NOTICES SCIENTIFIQUES.

Faye : Sur la constitution physique du Soleil. 2^e Partie. (85 p., 7 pl.)

Dölp (H.). — Die Determinanten, nebst Anwendungen auf die Lösung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben. — Darmstadt, Brill. In-8°. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Gauss (C.-F.). — Werke. Bd. IV. — Göttingen, Rente, 1873. In-4°, 492 p. 6 Thlr.

Kelland (P.) and Tait (P.-G.). — Introduction to Quaternions, with numerous Examples. — London, Macmillan. Post-8°, 328 p. 7 sh. 6 d.

Korteweg (D.-J.). — Oplossningen der Vraagstukken voorkomende in Briot et Bouquet : *Leçons de Géométrie analytique.* Reeks I-V, benevens een gelijk aantal Vraagstukken ter oefening. 1 fl. 60.

ERRATA.

Page 56, 2^e ligne de la formule (26), *lisez :*

$$+p'\frac{d\left(u'^2-2\dfrac{A+B+C}{r'}\right)}{dt}+p''\frac{d\left(u''^2-2\dfrac{A+B+C}{r''}\right)}{dt}.$$

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
AVEC LA COLLABORATION
DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME SIXIÈME. — MARS 1874.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, rue Monge, 29.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1874

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.

Ce Bulletin, fondé en 1870, paraît régulièrement chaque mois. Il a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8° (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal forme depuis le 1er janvier 1873 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables), comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8°.

Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.

Prix pour un an (12 numéros en 2 volumes) :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége.	20

OUVRAGES REÇUS PAR LA RÉDACTION.

(SUITE.)

Bellavitis (G.). — Tavole numeriche del Logaritmo-integrale ossia dell' Esponenziale-integrale e di altri integrali Euleriani. (*Mem. del R. Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti*, t. XVIII, 1874.)

Genocchi (A.). — Sur quelques développements de la fonction $\log \Gamma(x)$. (*Bulletins de l'Acad. royale de Belgique*, t. XXXVI, n° 11, nov. 1873.)

— Observations relatives à une Note précédente de M. Menabrea concernant la série de Lagrange. (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, 29 déc. 1873).

Gyldén (H.). — Ableitung der Declinationen aus den am Verticalkreise der Pulkowaer Sternwarte in den Jahren 1842-1849 angestellten Beobachtungen. (*Observations de Poulkova*, t. V.)

— Om summation af periodiska funktioner. (*Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, Bd. 11, n° 1, 1872.)

— Antydningar om lagbundenhet i stjernornas rörelser. (*Öfversigt af Kongl. Vet.-Akad. Förhandlingar*, 1871, n° 8. Stockholm.)

— Formler och tabeller för beräkning of fyrars lysvidd. (*Ibid.*, 1872, n° 1.)

— Relationer emellan stjernornas glans, antal och relativa medelafstånd från vår ståndpunkt i verldsrymden. (*Ibid.*, 1872, n° 7.)

— Om stjernkatalogen i *Lacaille's* « Astronomiæ Fundamenta ». (*Ibid.*, 1873, n° 2.)

— Om beräkningen af Solvärmets relativa intensitet på olika punkter af jordytan. (*Bihang till K. Svenska Vet.-Akad Handlingar.* Bd. 1, n° 7, 1872.)

Mansion (P.). — Notes sur les transformations arguesiennes de M. Saltel. (*Bulletins de l'Ac. Roy. de Belgique*, décembre 1873).

Rapisardi (Fr.). — Elementi di Geometria. — Catania, 1874. 1 vol. in-8°, 460 p., 350 fig.

Riccardi (P.). — Di alcune recenti Memorie sul processo e sulla condanna del Galilei. Nota e documenti aggiunti alla bibliografia Galileiana (*Memorie della R. Acc. di Sc., Lett. ed Arti di Modena*, t. XIV; 1873).

Siacci (F.). — Sur le problème des trois Corps. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janv. 1874.)

Tait (P.-G.). — An Elementary Treatise on Quaternions; second edition. Oxford, 1873. 1 vol. in-8°.

Zahradnik (K.). — Zur Theorie der Curven dritter Ordnung und vierter Classe. (*Sitzungsb. d. k. b. Ges. d. Wiss. zu Prag*, 7 nov. 1873.)

(*A suivre.*)

TABLE DES MATIÈRES.

MARS 1874.

Revue bibliographique.

Revue des publications périodiques.

Bulletin bibliographique.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BOOTH (J.), F. R. S., vicar of Stone. — A TREATISE ON SOME NEW GEOMETRICAL METHODS, containing essays on Tangential Coordinates, Pedal Coordinates, Reciprocal Polars, the Trigonometry of the Parabola, the geometrical origin of Logarithms, the geometrical properties of Elliptic Integrals, and other kindred subjects. — London, Longmans & Co.; 1873. In-8° en 2 vol.; t. I, 368 p.

Parmi les découvertes importantes, il en est qui apparaissent comme des conséquences naturelles des notions antérieurement acquises. Elles appartiennent quelquefois à plusieurs géomètres; elles sont publiées presque en même temps dans différents Mémoires; quelquefois aussi un savant les signale avant tous les autres; mais, comme elles constituent le développement nécessaire des progrès déjà acquis, nous comprenons qu'elles devaient nécessairement prendre place dans la Science par le seul effet des études communes des géomètres sur les idées fécondes introduites auparavant.

La découverte des coordonnées tangentielles est un des exemples les plus remarquables peut-être qu'on puisse citer à l'appui des remarques qui précèdent. La belle théorie des polaires réciproques créée par Brianchon et Poncelet, l'étude des relations entre les courbes et les polaires réciproques, combinées avec les notions dues à Descartes sur les systèmes de coordonnées, avaient conduit les géomètres à considérer les courbes sous un double point de vue. A l'ancienne génération des lieux géométriques par le mouvement d'un point était venue se joindre la notion corrélative de la génération des courbes par le déplacement d'une droite.

L'idée de définir les courbes par les propriétés de leurs tangentes ne pouvait tarder à apparaître; elle fut proposée presque en même temps par Plücker et par M. Chasles. Pourtant le Mémoire de Plücker est antérieur.

Dans ce travail, publié en 1829 (¹), Plücker considère les coordonnées tangentielles sous la forme analytique qui leur a été conservée par presque tous les géomètres.

Étant donnée une droite par l'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

(¹) *Journal de Crelle*, t. 6, p. 167.

u, v, w sont appelés par Plücker les coordonnées homogènes de la ligne droite, et toute équation homogène entre ces quantités représente une courbe au même titre que les équations en coordonnées ordinaires. Plücker divise toutes les équations en coordonnées tangentielles d'après leur degré, qui constitue la classe de la courbe, et il commence une étude détaillée de son système de coordonnées. Il discute le point ou lieu de première classe; puis il étudie les lieux de seconde classe, dont il donne plusieurs belles propriétés, et l'on peut dire qu'il a bien compris toute l'importance du nouvel instrument analytique qu'il avait déduit, de son propre aveu, de la méthode des polaires réciproques. A la fin de son travail, il annonce ensuite de nouvelles recherches, devant paraître dans les *Analytisch-geometrischen Entwicklungen*, qui étaient alors sous presse et qui ont en effet paru en 1828 et 1831.

En même temps que Plücker, M. Chasles s'occupait aussi des systèmes de coordonnées propres à représenter une courbe par ses tangentes ou une surface par ses plans tangents. Ayant appris par la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quetelet la publication de Plücker, il s'empressa d'écrire, le 10 décembre 1829, à M. Quetelet une lettre dont nous reproduisons quelques passages :

« M'étant aussi occupé d'un nouveau système de coordonnées, propre à un grand nombre de questions auxquelles les systèmes usités ne s'appliquent pas, je m'empresse de vous en faire connaître très-rapidement le principe, pour donner date à mon travail dans le cas où je me serais rencontré avec M. Plücker.

» Vous vous rappellerez peut-être, Monsieur, que, dans ma lettre du 11 juin dernier, j'avais l'honneur de vous dire que je terminais un travail par un essai sur une méthode propre à la démonstration directe d'un grand nombre de propositions déjà connues, par divers modes de transformation.

» J'ai eu occasion aussi d'annoncer cet écrit à M. Hachette dans une lettre du 5 juillet. « Je me suis occupé, disais-je, d'un nouveau » mode d'application de l'Algèbre à la Géométrie, qui se prête à la » démonstration de propriétés toutes nouvelles des figures, qu'il me » paraîtrait difficile de traiter par les systèmes de coordonnées en » usage. Voici quelques-unes de ces propriétés.... »

Après ces remarques, l'illustre géomètre définit son système de coordonnées. « Par trois points fixes A, B, C, je mène trois axes parallèles entre eux. Un plan quelconque rencontre ces axes en trois points, dont les distances aux points A, B, C sont les coordonnées x, y, z du plan. Une équation $F(x, y, z)$ entre ces coordonnées donne lieu à une infinité de plans, et représente par conséquent la surface enveloppe de ces plans. »

Pour les personnes au courant de ces questions, il ne peut y avoir de doute : le système de M. Chasles était tout aussi général que celui de Plücker; M. Chasles, comme Plücker, avait, dès le début, envisagé la question avec tout le degré de généralité qu'elle a comporté jusqu'à l'introduction des coordonnées tétraédriques.

Après avoir fait des applications de ce premier système, et au nombre de ces applications s'en trouve une très-belle sur le centre des moyennes distances des points de contact des plans tangents parallèles à une direction donnée, M. Chasles en indique un second, équivalant à la notion la plus générale des coordonnées tangentielles tétraédriques, et enfin, dans une Note supplémentaire, il indique encore de nouveaux théorèmes, conséquences de ses méthodes.

M. Booth, de son côté, eut connaissance de la lettre de M. Chasles; ses réflexions et ses études sur la méthode des polaires réciproques le conduisirent à édifier un ouvrage entier sur les nouveaux systèmes de coordonnées, qui parut en mars 1840, et fut accueilli avec faveur par les géomètres. C'est le premier volume de la seconde édition que l'auteur présente aujourd'hui au public mathématicien. Nous allons analyser rapidement le contenu de ce premier volume.

Les deux premiers Chapitres traitent du point, de la ligne droite dans le plan et des sections coniques. Les Chapitres III et IV traitent de différentes applications des principes et de la parabole. Les Chapitres V et VI sont consacrés à la ligne droite, au point et au plan dans l'espace. Les Chapitres VII, VIII et IX traitent des surfaces du second ordre, et en particulier des paraboloïdes. Le Chapitre X a pour objet l'application de l'Algèbre à la théorie des polaires réciproques.

Le Chapitre XI traite des surfaces concycliques, c'est-à-dire des polaires réciproques des surfaces homofocales, et le Chapitre suivant de la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde.

Les développements donnés jusqu'ici peuvent être considérés comme la partie classique, élémentaire de l'Ouvrage. L'Auteur applique ensuite la méthode des coordonnées tangentielles à la recherche des propriétés des courbes transcendantes et autres courbes d'un ordre supérieur au second. Citons les épicycloïdes et hypocycloïdes, les courbes parallèles, les développées, les pédales ou podaires, et toutes les questions qui se rattachent à ces courbes, rayons de courbure, rectification des courbes planes, etc.

Le Chapitre XXIV et les suivants traitent de la théorie géométrique des polaires réciproques, de son application au développement d'une nouvelle méthode pour dériver les propriétés d'une surface du second ordre, à trois axes inégaux, de celles d'une sphère, et à l'examen de plusieurs théorèmes et problèmes réellement intéressants : propriétés des surfaces de révolution, surfaces concycliques, etc.

Avec le Chapitre XXIX l'Auteur aborde les relations métriques. La théorie de la logocyclique, la trigonométrie de la parabole, et l'origine géométrique des logarithmes, qui forment la matière des Chapitres XXX à XXXIII, donnent lieu à des propositions très-variées. Le premier volume se termine par un Chapitre consacré aux surfaces homofocales.

Tel est, rapidement indiqué, le contenu de cette première Partie de l'Ouvrage. On sent, en le lisant, que l'auteur a travaillé longtemps et avec soin les questions sur lesquelles il écrit. A toutes les pages l'Ouvrage porte une empreinte personnelle, qui le distingue d'une foule d'autres Traités sur le même sujet : nous le recommandons volontiers et aux professeurs et aux élèves. G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXVII, 1873, 2e semestre (suite).

N° 15. Séance du 13 octobre 1873.

N° 16. Séance du 20 octobre 1873.

Bertrand (J.). — *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe.*

« Les orbites planétaires sont des courbes fermées ; c'est la cause principale de la stabilité de notre système, et cette circonstance importante résulte de la loi d'attraction qui, quelles que soient les circonstances initiales, fait mouvoir chaque corps céleste, qui n'est pas expulsé de notre système, suivant la circonférence d'une ellipse. On n'a pas remarqué jusqu'ici que la loi d'attraction newtonienne est la seule qui remplisse cette condition.

» Parmi les lois d'attraction qui supposent l'action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrive nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d'attraction *permettent* des orbites fermées; mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*.

» On démontre ce théorème de la manière suivante :

» Soit $\varphi(r)$ l'attraction exercée à la distance r sur la molécule considérée, et dirigée vers le centre d'attraction, que nous prendrons pour origine des coordonnées. r et θ désignant les deux coordonnées polaires du mobile, on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

et, en posant $\frac{1}{r} = z$, $r^2\varphi(r) = \psi(z)$,

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2}\psi(z) = 0. \tag{1}$$

Multiplions les deux membres par $2dz$ et intégrons; en posant

$$2\int \psi(z)\,dz = \varpi(z), \tag{2}$$

nous aurons

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}\varpi(z) - h = 0,$$

h étant une constante.

» On en déduit

$$d\theta = \pm \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}}.$$

» Si la courbe représentée par l'équation qui lie z à θ est fermée, la valeur de z aura des maxima et des minima pour lesquels $\frac{dz}{d\theta}$ sera nul, et les rayons vecteurs correspondants, normaux à la trajectoire, seront nécessairement pour elle des axes de symétrie. Or, quand une courbe admet deux axes de symétrie, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit fermée est que leur angle soit commensurable avec π. Si donc α et β représentent un minimum de z et le maximum qui le suit, la condition demandée est exprimée par l'équation

$$(3) \qquad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}},$$

où m désigne un nombre commensurable. Cette équation doit avoir lieu, quels que soient h et k et, par suite, les limites α et β qui en dépendent.

» On a

$$h + \frac{1}{k^2}\varpi(\alpha) - \alpha^2 = 0,$$

$$h + \frac{1}{k^2}\varpi(\beta) - \beta^2 = 0;$$

par conséquent

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

$$h = \frac{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha)}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \quad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2[\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)]}}.$$

» La fonction $\varpi(z)$ doit être telle que cette équation ait lieu pour toutes les valeurs de α et de β. Le nombre commensurable m doit d'ailleurs être constant; car, s'il changeait d'une orbite à l'autre, une variation infiniment petite dans les conditions initiales apporterait un changement fini dans le nombre et la disposition des axes de symétrie de la trajectoire.

» Supposons α et β infiniment peu différents; soit

$$\beta = \alpha + u,$$

z restant compris entre α et β, nous pouvons poser

$$z = \alpha + y,$$

et y sera, comme u, infiniment petit. Nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\sqrt{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)} = \sqrt{u\varpi'(\alpha)}.$$

Dans l'expression placée sous le radical au dénominateur de l'intégrale (4), les infiniment petits du premier ordre se réduisent à zéro, et il en est de même de ceux du second; ce sont ceux du troisième qu'il faut conserver, et l'on a, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$\begin{aligned}\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2[\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)]\\ = [\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)](u^2y - uy^2).\end{aligned}$$

L'équation (4) devient

$$m\pi = \int_0^u \frac{dy\sqrt{\varpi'(\alpha)}}{\sqrt{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}\sqrt{uy - y^2}},$$

c'est-à-dire, en effectuant l'intégration et supprimant les facteurs communs,

$$m = \sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}},$$

ou

$$(1 - m^2)\varpi'(\alpha) + m^2\alpha\varpi''(\alpha) = 0.$$

On en déduit

$$\varpi'(\alpha) = \frac{A}{\alpha^{\frac{1}{m^2} - 1}},$$

$$\varpi(\alpha) = A\frac{\alpha^{2 - \frac{1}{m^2}}}{2 - \frac{1}{m^2}} + B,$$

A et B désignant des constantes.

» D'après les relations supposées entre les fonctions ϖ, ψ et φ, il en résulte

$$\psi(z) = \frac{A}{2\, z^{\frac{1}{m^2}-1}},$$

$$\varphi(r) = \frac{A}{2}\, r^{\frac{1}{m^2}-3}.$$

Telle est la seule loi d'attraction possible, m y désignant un nombre commensurable quelconque; mais il n'en résulte pas qu'elle remplisse, quel que soit m, toutes les conditions de l'énoncé. On doit avoir, en effet, pour toutes les valeurs de α et de β,

$$(6) \qquad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}}}{\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{\beta^2}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}} + (\beta^2-\alpha^2)\dfrac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2\left(\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}\right)}}$$

» Supposons d'abord $\frac{1}{m^2} - 2$ négatif; posons $\alpha = 0$, $\beta = 1$, l'équation devient

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\dfrac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2}} = \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{m^2}-1}\,dz}{\sqrt{1 - z^{\frac{1}{m^2}}}},$$

et l'équation (6) donne

$$m\pi = m^2\pi, \quad m = 1.$$

La loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = \frac{A}{r^2}.$$

» Si l'on suppose $\frac{1}{m^2} - 2$ positif, l'équation (6) devient, pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$,

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit $m = \frac{1}{2}$, et la loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = A\,r.$$

» Deux lois seulement remplissent donc les conditions demandées, celle de la nature, par laquelle l'orbite fermée n'a qu'un axe de symétrie passant par le centre d'action, et l'attraction proportionnelle à la distance, pour laquelle il y en a deux.

» Notre illustre Correspondant M. Tchebychef, à qui j'ai communiqué la démonstration qui précède, m'a fait judicieusement observer que le théorème, inutile aujourd'hui pour la théorie si parfaite des planètes, pourra être utilement invoqué pour étendre aux étoiles doubles les lois de l'attraction newtonienne. »

Faye. — *Sur les* Astronomische Mittheilungen *du Dr Rodolphe Wolf.*

Faye. — *Sur l'explication des taches solaires proposée par le Dr Reye.*

D'Avout. — *Recherche d'une méthode facile pour mesurer la capacité des navires.*

La méthode d'approximation que donne l'auteur permet de calculer cette capacité par des formules qui ne contiennent que des mesures faciles à prendre, même sur des navires chargés.

N° 17. Séance du 27 octobre 1873.

Secchi (le P.). — *Réponse à une Note de M. Respighi, sur la grandeur des variations du diamètre solaire.*

N° 18. Séance du 3 novembre 1873.

Faye. — *Analyse et critique d'un « Essai sur la constitution et l'origine du système solaire,* par M. Roche ».

En terminant l'analyse du Livre de M. Roche, M. Faye ajoute :

« Le Livre nouveau de M. Roche ne se recommande pas seulement à l'attention de l'Académie par la vieille et légitime autorité scientifique de l'auteur, mais aussi par la nouveauté des résultats et un style assez clair pour rendre aisément accessibles les délicates questions de nos origines. Ce livre manquait dans la littérature astronomique, et M. Roche était probablement le seul auteur suffisamment préparé à l'écrire, grâce à ses travaux antérieurs. »

Bertrand (J.). — *Action mutuelle des courants voltaïques.*

Il s'agit, dans cette Communication, de la loi nouvelle présentée par M. Helmholtz. Voici d'ailleurs l'historique de la question, que nous citerons textuellement, d'après M. Bertrand :

« Il y a deux ans environ, dans la séance du 23 octobre 1871, j'appelais l'attention de l'Académie sur une formule nouvelle proposée par un savant allemand, M. Helmholtz, et destinée par lui à remplacer la loi d'Ampère sur l'action élémentaire des courants.

» La loi nouvelle, je l'ai démontré, ne correspond à aucune force de grandeur et de direction déterminées s'exerçant entre les deux éléments, et cela seul, suivant moi, devait conduire à la rejeter. Une année plus tard, le 14 octobre 1872, je revenais sur la même question pour examiner la réponse faite par M. Helmholtz à mon objection, et insérée au tome LXXV du *Journal de Mathématiques*, publié à Berlin, par M. Borchardt.

» M. Helmholtz reconnaît sans difficulté qu'aucune force, d'après la loi qu'il propose, ne saurait représenter l'action d'un élément infiniment petit sur un élément infiniment petit; mais il n'y voit aucun argument décisif contre sa théorie : l'action de deux éléments se composera d'une force et d'un couple agissant sur chacun d'eux, et cela, dans son opinion, n'implique aucune contradiction.

» Mais en suivant jusqu'au bout les conséquences des principes admis, en calculant le moment du couple, on trouve que les forces qui le produisent devraient avoir une intensité finie.

» Quelle que soit la ténacité d'un fil, une infinité de forces, de grandeur finie, distribuées sur sa longueur, doivent en procurer la rupture; je l'ai montré avec détail dans la Note du 14 octobre 1872, croyant cette fois avoir établi rigoureusement l'impossibilité de la loi nouvelle.

» On me communique le *Compte rendu de l'Académie de Berlin,* du 6 février 1873. M. Helmholtz, revenant sur la question, n'a rien changé, je le vois, à ses convictions. J'ai traduit son Mémoire, assez court pour figurer aux *Comptes rendus,* et j'espère, après l'y avoir inséré en entier, montrer avec évidence, dans la séance prochaine, les causes précises de son illusion et l'inexactitude de ses formules. »

Suit la traduction du Mémoire ayant pour titre :

Comparaison de la loi d'Ampère et de celle de Neumann sur les forces électrodynamiques. (8 p. des *Comptes rendus.*)

Secchi (le P.). — *Suite des observations des protubérances so-*

laires, pendant les six dernières rotations de l'astre, du 23 avril au 2 octobre 1873; conséquences concernant la théorie des taches.

Morin (le général). — *Rapport sur un Mémoire de M.* Graeff, *sur l'application des courbes de débits à l'étude du régime des rivières et au calcul des effets produits par un système multiple de réservoirs.*

« Le nouveau travail présenté par M. Graeff se compose de deux parties distinctes : la première est relative aux questions qui concernent le régime des rivières et l'alimentation des canaux; la seconde traite de l'action simultanée d'un système multiple de réservoirs sur le régime d'une rivière. La méthode qu'il suit pour cette discussion est basée sur la représentation graphique des résultats des observations continues qu'il a fait recueillir depuis de longues années. »

Après avoir analysé ce Mémoire, le Rapporteur ajoute :

« La conclusion générale de cet important travail est empreinte de cette prudence que de longues observations inspirent aux ingénieurs expérimentés. »

Elle peut se résumer ainsi qu'il suit :

« L'effet d'un réservoir unique sur une région prochaine en aval est certain et peut être calculé avec un degré suffisant d'exactitude.

» Celui de plusieurs réservoirs, établis sur un même cours d'eau, est encore certain, quoique plus difficile à apprécier avec précision.

» Enfin, lorsqu'il existe à la fois des réservoirs sur le cours d'eau principal et sur des affluents, les incertitudes augmentent tellement, que ce système ne serait admissible que dans des cas tout à fait spéciaux.

» Aussi l'auteur est-il sagement d'avis, avec les ingénieurs les plus habiles, que le système multiple des réservoirs disséminés sur tous les affluents des grands fleuves ne peut être conseillé par la prudence. »

M. le Rapporteur conclut à l'insertion du Mémoire de M. Graeff dans le *Recueil des Mémoires des Savants étrangers.*

Oudemans. — *Observations relatives à une Communication de M.* Edm. Dubois, *sur l'influence de la réfraction atmosphérique, à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

N° 19. Séance du 10 novembre 1873.

Bertrand (J.). — *Examen de la loi proposée par M.* Helmholtz, *pour représenter l'action de deux éléments de courant.*

Après avoir rappelé l'origine de la loi proposée par M. Helmholtz, M. Bertrand montre d'abord l'impossibilité de l'hypothèse proposée, et établit ensuite l'inexactitude des formules nouvelles, données par M. Helmholtz, qui ne s'accordent même pas avec l'hypothèse dont il croit les déduire.

Mathieu (Ém.). — *Mémoire sur le Problème des trois Corps.*

On sait qu'on peut ramener la question à l'intégration de huit équations différentielles ayant la forme hamiltonienne; M. Mathieu suppose ces huit équations intégrées, et il se propose seulement de montrer comment on pourra éviter les éliminations, qui seraient probablement fort pénibles, pour exprimer les coordonnées des trois Corps en fonction du temps; il prouve qu'on n'aura plus qu'à faire des quadratures et à intégrer une équation différentielle ordinaire du second ordre.

Marchand (E.). — *De l'influence exercée par la Lune sur les phénomènes météorologiques.*

N° 20. Séance du 17 novembre 1873.

Faye. — *Réponse aux remarques de M.* Tarry, *sur la théorie des taches solaires.*

Dubois (E.). — *Réponse aux observations de M.* Oudemans, *sur l'influence de la réfraction atmosphérique, à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

Reye (Th.). — *Réponse à M.* Faye, *concernant les taches solaires.*

Spottiswoode (W.). — *Sur les plans tangents triples à une surface.*

N° 21. Séance du 24 novembre 1873.

Marié-Davy. — *Observations, à propos d'une Note récente de*

M. Reye, *sur les analogies qui existent entre les taches solaires et les tourbillons de notre atmosphère.*

Parville (H. de). — *Note sur les cyclones terrestres et sur les cyclones solaires.*

Flammarion (C.). — *Orbite apparente et période de révolution de l'étoile double ξ de la Grande Ourse.*

La période de révolution est d'environ soixante ans sept mois.

Moutier (J.). — *Note sur la décharge des conducteurs électrisés.*

JOURNAL de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville (1).

T. XVII; 2e série; 1872 (suite).

Mathieu (E.). — *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles de la Physique mathématique.* (75 p.)

Dans le Mémoire actuel, l'auteur se propose de trouver les intégrales générales des équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -a^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

dans des corps de forme quelconque, en les supposant continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Dans un premier paragraphe, il passe en revue diverses expressions qui satisfont aux équations aux différences partielles de la Physique mathématique (20 p.), et donne ensuite le développement en séries de certaines fonctions qui se présentent fréquemment dans ces études. (19 p.)

Voici les propositions principales énoncées par M. Mathieu, en résumant les recherches faites dans ce Mémoire :

---

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. 379.

« 1° Toute fonction qui satisfait à l'intérieur d'une surface σ à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\alpha^2 u,$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, a pour expression

$$\int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément $d\sigma$, et r la distance du point (x, y, z) à $d\sigma$.

» Toute fonction qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\alpha^2 u$$

dans l'intérieur d'une ligne s et qui y varie d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, est exprimée par la formule

$$\int \mathrm{N} \rho \, ds, \quad \text{où} \quad \mathrm{N} = \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega) \, d\omega,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément ds, et r la distance du point (x, y) à l'élément ds.

» 2° Si une fonction u satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t},$$

dans l'intérieur d'une surface σ, et satisfait aux conditions précédentes de continuité, elle est donnée par la formule

$$u = \int \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r + 2a\varepsilon\sqrt{t}, \theta, \psi) \, e^{-\varepsilon^2} \, d\varepsilon \, d\sigma,$$

f étant une fonction arbitraire de trois quantités, r la distance du point (x, y, z) intérieur à σ à l'élément $d\sigma$, et θ et ψ deux coordonnées propres à déterminer un point de cette surface.

» La solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

est

$$u = \int \psi(r, t, \upsilon)\, ds,$$

où

$$\psi(r, t, \upsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t}, \upsilon) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, e^{-\alpha^2} d\omega,$$

F (r, υ) étant une fonction arbitraire de deux variables, et υ une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s qui limite l'espace dans lequel a lieu l'équation précédente.

» 3° La solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dans l'intérieur d'une surface σ est donnée par la formule

$$u = \int \frac{f(r + at, \theta, \psi) + \mathrm{F}(r - at, \theta, \psi)}{r}\, d\sigma,$$

f et F étant des fonctions arbitraires de trois variables, et θ, ψ étant deux coordonnées qui servent à déterminer un point de la surface σ.

» Si une fonction u de deux coordonnées rectangulaires x, y, et du temps t satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dans l'intérieur d'une courbe s, cette fonction est de la forme

$$u = \int \psi(r, t, \upsilon)\, dr,$$

avec

$$\psi(r, t, \upsilon) = \int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + at, \upsilon) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega,$$

en désignant par F (r, υ) une fonction arbitraire de deux variables, et par υ une coordonnée propre à déterminer un point de contour. »

Funérailles de M. Duhamel. — *Discours de M.* Jamin, membre de l'Institut, au nom de la Section de Physique (4 p.)

Funérailles de M. E. Laugier.

Discours de M. Faye, président de l'Académie des Sciences, au nom de l'Académie. (3 p.)

Discours de M. Delaunay, membre de l'Institut, au nom du Bureau des Longitudes. (4 p.)

Discours de M. Jurien de la Gravière, membre de l'Institut, au nom de la Marine. (2 p.)

Marie (M.). — *Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville.* (11 p.)

Il s'agit, dans cette Note, de diverses remarques sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire de la suite des points d'un lieu plan pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est réel.

Funérailles de M. Delaunay. — *Discours de M.* Faye, président de l'Académie des Sciences, au nom de l'Académie. (3 p.)

Jordan (C.). — *Recherches sur les substitutions.* (17 p.)

L'auteur s'est proposé de résoudre la question suivante :

Déterminer à quelles conditions doivent satisfaire les deux entiers m et k pour qu'il existe des groupes $k+12$ fois transitifs, de degré $m+k$ et d'ordre $(m+k)(m+k-1)\ldots m(m-1)$;

Et il démontre que :

1° *Le nombre m doit être premier ou puissance d'un nombre premier;*

2° *Le nombre k ne peut surpasser l'unité.*

Les seuls groupes qui fassent exception à cette dernière règle sont les groupes symétriques ou alternés, et les groupes de onze et douze lettres de M. Mathieu. Ce dernier groupe n'est donc pas, comme le groupe trois fois transitif de six lettres, le premier anneau d'une série. Il reste unique de son espèce.

« Si p est un nombre premier >3, il existera trois groupes primitifs de la classe p, lorsque $p+1$ est une puissance de 2, un seul dans le cas contraire. »

Jordan (C.). — *Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions.* (35 p.)

La question que M. Jordan se propose de résoudre est la suivante :

« Déterminer le nombre des solutions de la congruence du second degré à m inconnues

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots \equiv c \pmod{M}. \text{ »}$$

Le problème se ramène immédiatement au cas où le module M est une puissance d'un nombre premier. Le principe de la méthode développée par l'auteur repose sur la propriété des congruences du second degré de pouvoir se réduire par un changement de variables à des formes plus simples dites *canoniques*.

MANNHEIM (A.). — *Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand.* (3 p.)

Il s'agit de la relation établie par M. Bertrand entre les positions de deux normales à une surface, menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux tracés sur cette surface à partir d'un même point (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XII, p. 343).

MANNHEIM (A.). — *Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes* (12 p.)

M. Bertrand avait donné le premier la relation qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales de cette courbe soient en même temps normales principales d'une autre courbe (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 332). M. Mannheim se propose d'étudier la surface gauche engendrée par les normales principales de deux courbes, en faisant intervenir les propriétés des *pinceaux de droites* et des *normalies* qu'il a données dans son Mémoire, inséré dans le *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 109 [1]. Après avoir transformé la question, M. Mannheim démontre très-simplement les relations énoncées par M. Bertrand, dont MM. P. Serret et Curtis avaient déjà donné des démonstrations géométriques (*Théorie nouvelle, géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, p. 109, et *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. I, p. 223); il signale ensuite plusieurs propriétés intéressantes et nouvelles de la surface gauche en question.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 382.

Mathieu (É.). — *Sur la publication d'un cours de Physique mathématique, professé à Paris en 1867 et 1868* (¹). (4 p.)

Laurent (H.). — *Sur un théorème de Poisson.* (4 p.)

Les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ étant les intégrales d'un problème de Dynamique dont les variables sont $q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots$, M. Laurent généralise le théorème de Poisson, en démontrant que les expressions de la forme

$$\sum_{ij} \frac{\mathrm{D}(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho)}{\mathrm{D}(q_i, q_j, p_i, p_j)}, \quad \sum_{ijk} \frac{\mathrm{D}(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi)}{\mathrm{D}(q_i, q_j, q_k, p_i, p_j, p_k)}, \ldots$$

restent constantes pendant toute la durée du mouvement; les notations, sous les signes sommatoires, désignent les déterminants fonctionnels.

Graindorge (J.). — *Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.* (7 p.)

T. XVIII; 2ᵉ série; 1873.

Dieu. — *Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe, eu égard au frottement.* (24 p.)

M. Dieu établit d'abord les équations générales du mouvement pour le cas d'une courbe quelconque, et énonce, en passant, cette proposition :

« La moitié de la différentielle de la force vive est égale à la différence entre les travaux élémentaires dus à la force appliquée et au frottement de la courbe fixe sur le mobile. »

Il applique ensuite ses formules générales, et discute, avec beaucoup de soin, les circonstances intéressantes du mouvement pour les cas suivants :

1. La courbe fixe est une droite indéfinie; la force P est quelconque.

2. La courbe fixe est une circonférence située dans un plan vertical; la force P est le poids du mobile.

3. La courbe fixe est une parabole dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force P est le poids du mobile.

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 231.

4. La courbe fixe est une cycloïde dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force est le poids du mobile.

5. La courbe fixe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical; la force P est le poids du mobile.

Mathieu (É.). — *Sur la fonction cinq fois transitive de vingt-quatre quantités.* (22 p.)

Dans un Mémoire *Sur les fonctions de plusieurs quantités*, publié dans le tome VI (2e série; 1861) du *Journal de Mathématiques*, M. Mathieu avait annoncé qu'il possédait une fonction cinq fois transitive de vingt-quatre quantités, en se contentant d'en indiquer le nombre des valeurs distinctes; il se propose, dans la Note actuelle, de montrer comment il était parvenu à la découvrir.

Après avoir donné quelques indications sur son procédé de recherche, il l'applique à la détermination des fonctions transitives de 7, 11 et 23 lettres; il en conclut les fonctions transitives de 8, 12 et 24 lettres.

L'auteur termine son Mémoire en remarquant que les fonctions transitives de 7, 11 et 23 quantités, et celles de 8, 12 et 24, sont dues à ce que les nombres premiers 7, 11 et 23 sont des doubles de nombres premiers augmentés d'une unité; et qu'une fonction transitive, dont le nombre des lettres est à la fois un nombre premier et le double d'un nombre premier augmenté d'une unité, est au moins deux fois transitive.

Boussinesq (J.). — *Addition au Mémoire sur la théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire, etc.* (6 p.)

Cette Note a pour objet une démonstration nouvelle, sans l'hypothèse restrictive qui avait d'abord été adoptée, de la formule fondamentale (14) du Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XVII (1872).

Marie (M.). — *Détermination du point critique où est limitée la convergence de la série de Taylor.* (15 p.)

Marie (M.). — *Détermination du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor et des positions des différentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir* *le développement de cette fonction suivant la série de Taylor.* (33 p.)

M. Marie appelle *point critique* d'un lieu $f(x, y) = 0$ le point réel ou imaginaire qui a pour coordonnées la valeur de x à laquelle correspond une *valeur critique* de y, et cette valeur de y; parmi les m points du lieu $f(x, y) = 0$, de degré m, qui correspondent à une valeur critique de x, il appelle *critique* celui dont l'ordonnée est infinie ou dont l'ordonnée a ses dérivées infinies à partir d'un certain ordre.

Après avoir ainsi précisé la nature des points critiques, l'auteur indique la marche qu'on devra suivre pour les déterminer : c'est là l'objet du premier Mémoire. Le second Mémoire est consacré à la détermination du périmètre de la région de convergence; après avoir établi plusieurs théorèmes, et montré comment ces théorèmes permettent de se rendre compte de la forme que doit affecter, dans chaque cas, la limite de la région de convergence et de la manière dont cette limite change, l'auteur applique sa méthode aux deux équations

$$xy = \frac{c^2}{4}, \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Bourget (J.). — *Mémoire sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice.* (28 p.)

Il serait difficile d'analyser en détail les calculs de cet élégant Mémoire; nous n'avons rien de mieux à faire que d'en citer textuellement l'*Introduction*, qui précise nettement l'état de la question et fait bien connaître la nature de la solution que présente M. Bourget.

« La fonction perturbatrice est

$$R = \frac{rr' \cos\delta}{r'^3} - \frac{1}{\rho},$$

en nommant

r, r' les distances au Soleil des deux planètes m et m',
δ la distance apparente des deux planètes vues du Soleil,
ρ leur distance vraie.

» Il est facile de calculer les perturbations de la planète m, produites par m', quand on a développé R suivant les puissances des exponentielles imaginaires E^{iT}, $E^{iT'}$, E désignant la base des logarithmes népériens, et i le symbole $\sqrt{-1}$. On sait que chacun des termes de cette série, uni à son conjugué, fournit, au moyen d'un système d'équations différentielles simultanées, une inégalité du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice.

» Le développement de R est un problème difficile, non pas en lui-même, mais par la longueur des calculs qui s'y rapportent. On cherche habituellement à exprimer le coefficient du terme général $E^{(n'T'+nT)i}$, que nous désignerons par $A_{n,n'}$, en séries ordonnées suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons des deux planètes, quantités petites dans le plus grand nombre des cas. Pour obtenir ce résultat, on suit le plus souvent la méthode donnée par Laplace dans la *Mécanique céleste;* mais, comme les calculs y sont superposés, on ne peut point par cette voie obtenir un terme isolé du développement ; de plus, la moindre erreur dans les longs calculs que l'on est obligé de faire quand on veut aller jusqu'à un ordre élevé entraîne à d'autres erreurs, qu'il est impossible de corriger sans reprendre en entier tout le travail.

» On comprend donc l'importance d'une méthode qui permettrait de trouver, sous forme algébrique, un coefficient déterminé $A_{n,n'}$, par une série d'opérations simples, faciles à répéter, et ne dépendant d'aucune autre.

» Cette méthode a été indiquée pour la première fois par Cauchy [1]. J'ai présenté moi-même deux Mémoires à l'Institut, dans lesquels j'apportais quelques perfectionnements aux calculs de l'illustre géomètre [2]. M. Puiseux, de son côté, a publié dans le *Journal de M. Liouville* deux articles sur le même sujet [3]. C'est en lisant son travail qu'il m'a semblé possible de simplifier encore notablement la solution du problème du développement de R, par l'introduction des transcendantes de Bessel. J'ai déjà montré, dans deux autres Mémoires, que ces transcendantes fournissent une solution très-élégante du problème de Kepler et d'autres problèmes analogues [4], et qu'elles permettent de calculer par interpolation les coefficients des divers termes de la fonction perturbatrice [5].

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie*, t. XI.

(2) *Comptes rendus de l'Académie*, 1856, mars, juillet.

(3) *Journal de Liouville*, 1860.

(4) *Journal de Liouville*, 1861.

(5) *Annales de l'Observatoire*, t. VII.

» En résumé, j'arrive à une expression très-simple du terme général de la fonction perturbatrice; mais les quantités petites, suivant lesquelles s'ordonnent les développements en séries, ne sont pas les quantités habituelles. L'excentricité e est remplacée par $\eta = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$, ψ étant donné par $e = \sin\psi$; l'excentricité entre aussi dans les transcendantes de Bessel définies par l'équation

$$(o, n)_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j} \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du, \quad \text{où} \quad x = \mathrm{E}^{u\sqrt{-1}} = \mathrm{E}^{ui},$$

et l'on sait que chaque transcendante est de l'ordre marqué par la valeur absolue de son indice j. Enfin l'inclinaison mutuelle des orbites y entre par la quantité $\upsilon = \sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}$, qui est du second ordre. Les séries de notre développement procèdent donc suivant les puissance de η, η' υ, et suivant les facteurs $(o, n)_j$, $(o, n')_{j'}$. La symétrie des résultats nous semble faire compensation à l'accroissement du nombre des lettres ordonnatrices.

» Nous remarquerons aussi que nous évitons l'emploi des transcendantes $b_s^{(i)}$ de Laplace; chaque terme de $\mathrm{A}_{n,n'}$ se présente sous forme de série ordonnée suivant les puissances de $\alpha = \frac{a}{a'}$.

» Pour arriver à l'expression explicite d'un coefficient correspondant à un argument donné, ou encore pour trouver tous les termes d'un ordre donné, il suffit de résoudre en nombre entiers et positifs certaines équations de la forme

$$x + y + z + t + u + v = n.$$

La simplicité et la régularité de cette opération permettent d'éviter toute erreur dans le résultat final. »

Graindorge (J.). — *Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles.* (10 p.)

Voici quelques-uns des résultats donnés par M. Graindorge :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 n\varphi}{n^4} = \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{48}(3\pi - 2\varphi),$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 n\varphi}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^4 n\varphi}{n^4} = \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^4}{2},$$

$$\int_0^1 l(1 - 2x\cos\varphi + x^2)\frac{dx}{x} = \varphi\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi^2$$

Besge. — *Sur une équation différentielle.* (3 p.)

L'équation différentielle

$$(1) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2py^2,$$

où p est une fonction donnée de la variable indépendante x, se ramène à la forme

$$(2) \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 = p,$$

en posant $y = e^{\int 2\sigma dx}$; c'est la forme à laquelle se ramènerait l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{dx} = pu,$$

en posant $u = e^{\int \sigma dx}$.

Liouville (J.). — *Sur quelques formules générales qui se rattachent à certaines formes quadratiques.* (3 p.)

Liouville (E.). — *Sur la statistique judiciaire.* (18 p.)

Bienaymé. — *Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon* (prix de 1870). (10 p.)

Bienaymé. — *Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon* (prix de 1871). (6 p.)

Puiseux (V.). — *Rapport sur deux Mémoires présentés à l'Académie, par M. Maximilien Marie, et ayant pour titres, l'un : « Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor », l'autre : « Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor. »* (5 p.)

Il s'agit des deux Mémoires cités ci-dessus. Le Rapport de M. Puiseux a été inséré *in extenso* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. V, p. 126; 1873.

Marie (M.). — *Note au sujet du Rapport précédent.* (17 p.)

Après avoir rappelé la suite de ses recherches et résumé la théorie de la série de Taylor, M. Marie présente plusieurs observations relatives au Rapport précédent.

Chasles. — *Détermination immédiate, par le principe de cor-*

respondance, du nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie. (10 p.)

Chasles. — *Note relative à la question précédente* (¹). (8 p.)

Darboux (G.). — *Note sur la résolution de l'équation du quatrième degré.* (16 p.)

La méthode suivie par M. Darboux met en évidence, sans faire appel à la théorie des invariants, les éléments essentiels qui figurent dans les différentes solutions. L'auteur fait dépendre la résolution d'une équation biquadratique de la détermination des points communs à deux coniques; c'est-à-dire qu'il considère d'abord un système de deux fonctions du second degré, homogènes, à trois variables, et qu'il en fait le point de départ de son analyse pour établir les relations préliminaires qui doivent le conduire aux différents modes de résolution de l'équation du quatrième degré. Il retrouve ainsi, d'abord la belle méthode de M. Hermite (*Journal de Borchardt*, t. 52), puis celle de M. Cayley. M. Darboux donne ensuite l'expression de la fonction la plus générale d'une racine par une somme de trois radicaux qui contiennent les carrés des racines de l'équation résolvante; c'est un résultat nouveau. Il déduit de là les formules de M. Aronhold, puis le résultat important obtenu par M. Hermite dans sa méthode de résolution de l'équation du troisième degré par les fonctions elliptiques.

Darboux (G.). — *Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues.* (5 p.)

La question consiste à déterminer en fonction d'un paramètre arbitraire les expressions les plus générales de x, y, s, satisfaisant à l'équation proposée et débarrassées de tout signe d'intégration. M. Darboux retrouve, par un procédé simple, les formules qu'Euler avait données pour l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2.$$

Il résout ensuite la question pour les équations

$$dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

(¹) Voir *Bulletin*, 1873, t. IV, p. 78; t. V, p. 122.

Levy (M.). — *Sur une théorie rationnelle des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement.* (60 p.)

Dans le premier paragraphe de son Mémoire, M. Levy définit l'objet de son travail et résume les résultats obtenus ; nous le citerons textuellement :

« Les formules ou règles géométriques, d'après lesquelles les Ingénieurs français calculent l'épaisseur des grands murs de soutènement, sont dues au colonel Audoy (*Mémorial de l'Officier du Génie,* nº 11), au général Poncelet (*id.,* nº 13), et à M. l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées de Saint-Guilhem (*Journal de Mathématiques,* t. IX, 1844). Elles sont toutes fondées sur cette double hypothèse, due à Coulomb, que dans un massif de terre dont l'équilibre se rompt les surfaces de glissement ou de *rupture des terres* sont planes, et détachent du massif des prismes exerçant sur les murs qui les soutiennent des pressions maxima.

» En soumettant ces hypothèses à l'analyse, j'ai reconnu que, sauf dans deux cas très-particuliers, elles sont mathématiquement incompatibles. Malgré cela, on éprouve une certaine hésitation à les rejeter à cause de l'autorité des noms qui s'y attachent, et parce qu'elles sont extrêmement ingénieuses, et aussi parce qu'il semble au premier abord qu'on ne saurait les abandonner sans les remplacer par d'autres hypothèses plus ou moins douteuses et sujettes à leur tour à être condamnées par une analyse mathématique trop rigoureuse. Il n'en est heureusement pas ainsi ; on peut étudier les surfaces de glissement des terres en toute rigueur et sans aucune idée préconçue quant à leur forme ou leur nature. Posée dans ces termes, la question cesse d'appartenir à la Mécanique empirique pour entrer dans le domaine de la Mécanique rationnelle et de la Géométrie. Elle acquiert ainsi un véritable intérêt scientifique, tout en conduisant, dans les cas ordinaires de la pratique, à des formules et à des constructions géométriques notablement plus simples que celles dont les Ingénieurs ont l'habitude de se servir.

» C'est ce que je me propose de montrer dans ce travail. En le faisant, je n'abandonne pas ce que je regarde comme véritablement fondamental et fécond dans la pensée de Coulomb : l'idée même d'étudier la poussée des terres au moyen des surfaces de rupture qui s'y produiraient si leur équilibre venait à être brusquement rompu, cette idée, je la conserve tout entière, mais en la dégageant des hypothèses dont elle est jusqu'ici demeurée enveloppée.

» Je commence par étudier la répartition des pressions dans un massif de terre terminé par une surface cylindrique ou prismatique à arêtes horizontales, quelle que soit la forme de la section droite du prisme ou du cylindre.

» J'examine ensuite plus particulièrement le cas pratique d'un massif limité par un talus plan indéfini d'une inclinaison quelconque, et je détermine les pressions exercées sur un mur de soutènement plan dans un semblable massif.

» Je montre combien mes formules sont simples par rapport à celles que donnent les hypothèses de Coulomb. Enfin je termine en établissant l'impossibilité mathématique que présentent en général ces hypothèses.

» Mon travail est suivi d'une Note résumant les règles pratiques à suivre pour faire le calcul des pressions que subit un mur de soutènement. »

Voici maintenant les titres des divers paragraphes contenus dans le Mémoire de M. Maurice Levy :

II. Propriétés générales des terres en équilibre.

III. Équilibre d'un massif de terre terminé par un talus plan indéfini.

IV. Stabilité des murs de soutènement.

V. Impossibilité de la théorie de Coulomb telle qu'elle a été appliquée jusqu'ici.

VI. Note résumant les règles pratiques à suivre pour faire le calcul des pressions exercées sur un mur de soutènement.

Une première rédaction de ce Mémoire a été présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 3 juin 1867 : son insertion au *Recueil des Savants étrangers* a été ordonnée par l'Académie le 7 février 1870.

Serret (J.-A.). — *Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module.* (4 p.)

Nous donnons plus loin (p. 140) une analyse de cette Note.

Boussinesq (J.).— *Recherches sur les principes de la Mécanique,* *sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits.* (56 p.)

Ce long Mémoire est divisé en neuf paragraphes, dont les titres suivent :

I. Points matériels, vitesses et accélérations.

II. Principes des forces vives et autres lois générales de la Mécanique.

III. Attraction newtonienne et actions moléculaires.

IV. Énergie actuelle et énergie potentielle.

V. Énergie physique ou moléculaire, et énergie chimique ou atomique.

VI. Éther, lumière et chaleur, température.

VII. Principe fondamental de la Thermodynamique.

VIII. Action moléculaire dans un corps isotrope; solidité et fluidité.

IX. Essai sur la théorie moléculaire des gaz.

Boussinesq (J.). — *Note complémentaire au Mémoire précédent. — Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au* § VI. (30 p.)

Boussinesq (J.). — *Note sur la théorie des tourbillons liquides.* (2 p.)

Villarceau (Y.). — *Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre.* (42 p.)

M. Villarceau a publié, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2e série, t. XII, p. 65, 1867) un premier théorème sur les attractions locales, qui établit une relation entre les effets de ces attractions sur les longitudes et les azimuts.

Depuis, M. Villarceau a fait connaître deux autres théorèmes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 28 décembre 1868, 2 octobre 1871, 7 août 1873), où figurent les latitudes combinées soit avec les longitudes, soit avec les azimuts, soit avec les deux éléments réunis. Ce sont les Mémoires où se trouvent ces théorèmes et leur application qui sont reproduits ici.

Le premier Mémoire donne le second théorème sur les attractions locales, et en présente l'application à une première détermination de la vraie figure de la Terre, fondée sur la comparaison des nivellements géométriques et géodésiques.

Le second Mémoire contient le troisième théorème et son application à une seconde détermination de la vraie figure de la Terre, obtenue sans le concours des nivellements proprement dits. On arrive à cette détermination en calculant la distance Δ d'un point M' de la surface de niveau cherchée au point M où la normale en M' à cette surface de niveau rencontre la surface de l'ellipsoïde de comparaison.

Dans un troisième Mémoire, l'auteur présente sous une nouvelle forme l'application de son troisième théorème à la détermination de la figure de la Terre. M. Villarceau fait ainsi connaître trois méthodes différentes pour aborder cette importante question de la figure de la Terre; il les compare avec soin et discute leurs avantages et leurs inconvénients respectifs.

Serret (J.-A.). — *Sur les fonctions entières suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module.* (15 p.)

Nous réunissons ici l'analyse de ce Mémoire avec celle de la Note indiquée plus haut (p. 138).

ANALYSE DES DEUX ARTICLES PUBLIÉS PAR M. J.-A. SERRET :

1° *Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module.* (septembre 1873.)

2° *Sur les fonctions entières irréductibles suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module.* (décembre 1873.)

I.

C'est à Galois que nous devons les premières des notions que nous possédons sur les congruences irréductibles d'un degré quelconque. M. Serret a constitué plus tard une théorie complète de ces congruences; ses recherches sur ce sujet important ont été publiées, pour la première fois, dans le tome XXXV du *Recueil des Mémoires de l'Académie des Sciences,* et l'auteur les a reproduites dans la troisième édition de son *Algèbre supérieure.*

M. Serret a fait connaître, dans le travail étendu dont nous venons de parler, les propriétés fondamentales des congruences irréductibles, c'est-à-dire des congruences obtenues en égalant à zéro, suivant un module premier p, les fonctions entières irréductibles prises suivant le même module. Il a donné en même temps l'expression du nombre total des fonctions entières irréductibles d'un degré quelconque, et il a établi à l'égard de ces fonctions une classification analogue à celle qui concerne les simples nombres entiers, dans la théorie ordinaire des nombres.

Parmi les problèmes qui se présentent dans la théorie dont il s'agit ici, l'un des plus importants est celui qui a pour objet *la formation d'une fonction entière d'un degré quelconque donné* ν, *irréductible suivant un module premier* p. Toutes les applications de la théorie reposent effectivement sur l'emploi d'une *racine imaginaire* d'une congruence irréductible.

La règle générale pour obtenir une telle congruence irréductible de degré ν consiste à diviser la fonction $x^{p^\nu} - x$, suivant le module p, par le produit des facteurs communs à cette fonction et aux fonctions $x^{p^\mu} - x$, où μ désigne les diviseurs de ν. Le quotient obtenu est décomposable en facteurs irréductibles, tous du degré ν, et l'on peut *théoriquement* déterminer ces facteurs par la méthode des coefficients indéterminés.

Cette règle est presque impraticable en raison de la longueur des calculs qu'elle exige, même dans les cas les plus simples. Aussi M. Serret s'est-il préoccupé, dans ses premières recherches, des moyens de former directement, pour chaque degré et pour chaque module, une fonction entière irréductible; une telle fonction de degré ν étant connue, la théorie indique le mode de formation de toutes les autres fonctions irréductibles du même degré. M. Serret a réussi à résoudre le problème qu'il s'était proposé dans deux cas, savoir : 1° lorsque le degré ν ne renferme aucun facteur premier différent de ceux qui divisent $p - 1$; 2° lorsque le degré ν est précisément égal au module p. Tel était encore l'état de la question, au moment où M. Serret a publié ses récentes recherches.

Dans son nouveau travail M. Serret s'occupe exclusivement des fonctions entières irréductibles suivant le module premier p, dont le degré est égal à p ou à une puissance quelconque de p. Son analyse repose sur la considération de la fonction

$$X_\mu \equiv x^{p^\mu} - \frac{\mu}{1} x^{p^{\mu-1}} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{p^{\mu-2}} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^{p^{\mu-3}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} x^p + (-1)^\mu x \quad (\text{mod. } p),$$

où μ désigne un indice quelconque; cette fonction satisfait à la congruence

$$X_{\mu+1} \equiv X_\mu^p - X_\mu \quad (\text{mod. } p).$$

Nous nous bornerons à indiquer succinctement les résultats auxquels l'auteur est parvenu.

II.

Dans son premier article, M. Serret s'occupe de la recherche des fonctions entières du degré p, irréductibles suivant le module p. Désignant par V le produit de toutes ces fonctions, on a

$$V \equiv (X_1^{p-1} - 1)(X_2^{p-1} - 1) \ldots (X_{p-1}^{p-1} - 1) \quad (\text{mod. } p),$$

ce qui conduit naturellement à distinguer en différents *genres* les polynômes dont il s'agit. M. Serret nomme fonctions du $\lambda^{\text{ième}}$ genre celles dont le produit est égal à $X_\lambda^{p-1} - 1$, c'est-à-dire égal ou congru à

$$(X_\lambda - 1)(X_\lambda - 2) \ldots (X_\lambda - \overline{p-1}).$$

En particulier les fonctions entières du premier genre ont pour expression générale

$$x^p - x - g,$$

g désignant l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$. M. Serret avait déjà considéré ces fonctions du premier genre dans ses premières recherches.

L'auteur nous fait connaître une propriété importante qui sert à caractériser les fonctions d'un même genre quelconque.

Si l'on prend ici, pour *base* des imaginaires, une racine i de la congruence irréductible

$$i^p - i - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

on a ce théorème :

Les racines des congruences obtenues en égalant à zéro les fonctions entières irréductibles suivant le module p, du degré p et du $\lambda^{ième}$ genre, sont exprimables par des fonctions entières de i dont le degré est précisément égal à λ.

C'est en se fondant sur cette propriété que M. Serret a obtenu l'expression générale des fonctions irréductibles d'un genre quelconque. Voici le théorème auquel il est parvenu :

Si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ désignent des nombres entiers indéterminés et que, pour abréger l'écriture, on fasse $a_k + a_{k-1} = a'_k$, les indices étant pris suivant le module p, de manière que a_p et a_0 représentent le même nombre, l'expression générale des fonctions entières $F(x)$ de degré p, irréductibles suivant le module p, sera

$$F(x) = -\begin{vmatrix} a_0 - x & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-3} & a_{p-2} & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a'_0 - x & a_1 & \ldots & a_{p-4} & a_{p-3} & a_{p-2} \\ a_{p-2} & a'_{p-1} & a'_0 - x & \ldots & a_{p-5} & a_{p-4} & a_{p-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3 & a'_4 & a'_5 & \ldots & a'_0 - x & a_1 & a_2 \\ a_2 & a'_3 & a'_4 & \ldots & a'_{p-1} & a'_0 - x & a_1 \\ a_1 & a'_2 & a'_3 & \ldots & a'_{p-2} & a'_{p-1} & a'_0 - x \end{vmatrix}.$$

Si l'on ne veut comprendre dans cette formule que les fonctions du $\lambda^{ième}$ genre, on fera

$$a_{\lambda+1} = 0, \quad a_{\lambda+2} = 0, \ldots, \quad a_{p-1} = 0,$$

et aussi

$$a_{\lambda-1} = 0;$$

puis on donnera aux autres indéterminées les valeurs 0, 1, 2,..., $p-1$, *en exceptant toutefois la valeur zéro pour l'indéterminée* a_λ. *On obtiendra de la sorte les* $(p-1)p^{\lambda-1}$ *fonctions du* $\lambda^{\text{ième}}$ *genre.*

En particulier, on a :

1° pour $\lambda = 1$, $F(x) = x^p - x - a_1$,

2° pour $\lambda = 2$, $F(x) = (x-a_0)\left[(x-a_0)^{\frac{p-1}{2}} - a_2^{\frac{p-1}{2}}\right]^2 - a_2$.

Enfin, dans le $(p-1)^{\text{ième}}$ genre, M. Serret remarque les fonctions

$$F(x) = (x-a'_0)^p + a_{p-1}[(x-a'_0)^{p-1} - 1],$$

qui répondent au cas où les indéterminées $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ sont nulles, et qui ont cette propriété, que les racines de la congruence

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

sont des fonctions rationnelles fractionnaires et linéaires de l'une quelconque d'entre elles.

III.

Dans son second article, M. Serret considère les fonctions entières irréductibles dont le degré est une puissance quelconque du module p, et il fait connaître le mode de formation de ces fonctions.

Désignant par V_n le produit de toutes les fonctions entières de degré p^n, irréductibles suivant le module premier p, M. Serret trouve cette expression

$$V_n \equiv (X_{p^{n-1}}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+1}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+2}^{p-1} - 1)\ldots(X_{p^n-1}^{p-1} - 1) \pmod{p},$$

et, procédant comme dans le cas de $n=1$, il répartit en divers genres les facteurs irréductibles de V_n. Il nomme *fonctions irréductibles du* $\lambda^{\text{ième}}$ *genre* celles dont le produit est congru à $X_{p^{n-1}+\lambda-1}^{p-1} - 1$, fonction qui se décompose immédiatement en $p-1$ facteurs $X_{p^{n-1}+\lambda-1} - g$, g ayant les valeurs 1, 2,..., $p-1$. Le nombre λ, qui marque le genre, peut prendre les valeurs

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad (p-1)\,p^{n-1},$$

et le dernier genre, celui qui répond à $\lambda = (p-1)\,p^{n-1}$, est dit par l'auteur le *genre principal.*

Cela posé, et avant d'entrer dans le fond du sujet, M. Serret établit le théorème suivant :

Soit $F(x)$ *une fonction entière du degré* p^n, *irréductible suivant le module premier* p. *Si cette fonction appartient au* $\lambda^{ième}$ *genre supposé non principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *ou* $F(X_1)$ *sera réductible, et elle se décomposera en* p *facteurs du degré* p^n, *irréductibles suivant le module* p *et appartenant au* $(\lambda+1)^{ième}$ *genre. Mais, si la fonction* $F(x)$ *de degré* p^n *appartient au genre principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *sera elle-même irréductible suivant le module* p, *et elle appartiendra au premier genre des fonctions de degré* p^{n+1}.

Abordant ensuite le problème qu'il s'est proposé, l'auteur établit en premier lieu une règle générale pour former les fonctions entières, irréductibles du degré p^n et du premier genre. Nous nous bornerons ici à indiquer cette règle, dont la démonstration exige un certain développement.

Soit P_μ *une fonction entière et à coefficients entiers de* μ *quantités* $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$, *qui ne renferme aucune puissance de ces quantités au delà de la* $(p-1)^{ième}$, *et dans laquelle le terme* $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ *figure avec un coefficient différent de zéro;* P_μ *se réduit à un simple nombre entier lorsque* $\mu = 0$. *Si l'on représente par*

$$F_n(X_1) \equiv 0 \pmod{p}$$

le résultat de l'élimination de $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ *entre les congruences*

$$i_1^p - i_1 \equiv P_0, \quad i_2^p - i_2 \equiv P_1, \quad \ldots, \quad i_{n-1}^p - i_{n-1} \equiv P_{n-2} \pmod{p},$$

et

$$X_1 \equiv P_{n-1} \pmod{p},$$

$F_n(X_1)$ *ou, ce qui revient au même,* $F_n(x^p - x)$ *sera l'expression générale des fonctions entières de degré* p^n *et du premier genre, irréductibles suivant le module* p.

Il faut remarquer que l'on peut, sans diminuer la généralité du résultat, attribuer telles valeurs que l'on veut aux coefficients des fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$; la seule restriction à observer est que le coefficient de $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ dans P_μ ne soit pas nul.

Il n'y a donc pas, dans $F_n(X_1)$, d'autres arbitraires que celles qui figurent dans P_{n-1}. Le nombre de celles-ci est p^{n-1}; mais M. Serret prouve que, pour l'élimination qu'il a en vue, on peut faire disparaître $n-1$ d'entre elles, en sorte qu'il n'existe en réalité que $p^{n-1} - n + 1$ coefficients indéterminés. Ces coefficients peuvent recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$, à l'exception de l'un d'eux, qui ne peut être nul; il s'ensuit que le nombre des fonctions $F_n(X_1)$ est $(p-1)\,p^{p^{n-1}-n}$, ce qui résulte *a priori* de l'expression de V_n donnée plus haut.

Si l'on ne veut chercher qu'une seule fonction entière irréductible du degré p^n, le plus simple sera en général de réduire P_{n-1} au seul terme qui doit y figurer nécessairement, ou à ce terme augmenté d'une constante

Par exemple, dans le cas de $n = 2$, on posera

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1} \pmod{p}.$$

Le résultat de l'élimination de i_1 entre ces deux congruences est

$$X_1^p + X_1^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

en conséquence, $X_1^p + X_1^{p-1} - 1$ ou $(x^p - x)^p + (x^p - x)^{p-1} - 1$ est une fonction irréductible du degré p^2 et du premier genre.

M. Serret fait encore l'application de sa règle au cas de $n = 3$. Il pose

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad i_2^p - i_2 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1}, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} i_2^{p-1} - 1 \pmod{p}.$$

Le résultat de l'élimination de i_1, i_2 est

$$(X_1 + 1)^3 X_1 P^{p-2} - (X_1 + 1)^2 X_1 Q - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$P = X_1(X_1+1)(X_1^p + X_1^{p-1} - 1),$$

$$Q = X_1^{p-3} + \frac{4}{2} X_1^{p-5} P + \ldots + \frac{(\mu+2)(\mu+3)\ldots 2\mu}{2.3\ldots\mu} X_1^{p-2\mu-1} P^{\mu-1} + \ldots$$
$$+ \frac{\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\ldots(p-1)}{2.3\ldots\frac{p-1}{2}} P^{\frac{p-3}{2}}.$$

Le premier membre de la congruence précédente est une fonction entière irréductible du degré p^3 et du premier genre.

Après avoir traité avec détail le cas des fonctions entières irréductibles de degré p^n et du premier genre, M. Serret s'occupe des fonctions des divers genres. Le produit des fonctions d'un même genre quelconque peut être représenté par

$$X_\mu^{p-1} - 1,$$

l'indice μ ayant l'une quelconque des valeurs

$$p^{n-1},\quad p^{n-1}+1,\quad p^{n-1}+2, \ldots,\quad p^n - 1.$$

Voici la règle obtenue par M. Serret pour former les diviseurs irréductibles de la fonction $X_\mu^{p-1} - 1$.

L'indice μ étant mis sous la forme

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots + \alpha_{n-1} p^{n-1},$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des entiers positifs ou nuls et inférieurs à p, désignons par ξ_0 un entier arbitraire, et posons généralement

$$\xi_{k+1} = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} i_{k+1} + a_2^{(k)} i_{k+1}^2 + \ldots + a_{\alpha_k - 1}^{(k)} i_{k+1}^{\alpha_k - 1} + i_{k+1}^{\alpha_k},$$

où $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots$ sont des fonctions entières de $i_1, i_2, \ldots, i_k$ du degré $p-1$ au plus, et se réduisent à des entiers dans le cas de $k=0$; la quantité ξ_{k+1} doit elle-même être réduite à l'unité dans le cas de $\alpha_k = 0$. Soit aussi P_k une fonction entière de $i_1, i_2, \ldots, i_k$ du degré $p-1$ par rapport à chacune de ces quantités, et qui n'est assujettie qu'à la seule condition que le terme

$i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_k^{p-1}$ *y figure avec le coefficient* $(-1)^k$. *Si l'on désigne par*

$$f_\mu(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

le résultat de l'élimination de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *entre les congruences*

$$x \equiv \xi_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \pmod{p},$$

et

$$i_1^p - i_1 \equiv 1,\quad i_2^p - i_2 \equiv P_1,\quad i_3^p - i_3 \equiv P_2,\quad \ldots,\quad i_n^p - i_n \equiv P_{n-1} \pmod{p},$$

$f_\mu(x)$ *sera l'expression générale des diviseurs irréductibles de* $X_\mu^{p-1} - 1$, *c'est-à-dire l'expression générale des fonctions entières irréductibles du degré* p^n *et d'un genre quelconque.*

PAMIĘTNIK Towarzystwa Nauk ścisłych w Paryżu [1].

La *Société des Sciences exactes*, fondée en 1860 par les Polonais résidant à Paris, et réorganisée en 1870, a pour but principal de recueillir et d'utiliser pour le pays les travaux scientifiques des Polonais dispersés à l'étranger. Elle publie tous les ans, depuis sa réorganisation, un Recueil de Mémoires originaux, écrits en polonais, et ayant pour objet les sciences mathématiques, physiques et naturelles, ainsi que leurs applications. Elle édite, en outre, séparément les Ouvrages ou Traités qui, à cause de leur étendue, ne pourraient entrer dans le cadre du Recueil. Nous indiquerons à la fin de cet article les titres des Ouvrages publiés jusqu'au commencement de l'année 1873.

Cette grande activité, déployée en si peu de temps, et dont les

---

(1) *Mémoires de la Société des Sciences exactes, à Paris.* — Paris, librairie du Luxembourg, rue de Tournon, 16. Imprimerie de Rouge frères, Dunon et Fresné, rue du Four-Saint-Germain, 43. — Il paraît chaque année un volume grand in-4°.

Pour faciliter la lecture des noms propres, nous indiquerons quelques règles de la prononciation polonaise. Les lettres *a*, *b*, *d*, *e*, *f*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *r*, *t*, *x*, *z* se prononcent comme en français; *ch*, *g*, *h*, *j*, *u*, *w* comme en allemand; *c* = *ts* = *z* all.; *s* = *ç* fr., toujours dur; *ą* = *an* ou *on* nasal; *ę* = *in* dans *fin*; *é* se prononce très-fermé; *ó*, très-ouvert; *ń* = *gn* fr. dans *signe*; *cz* = *tch* fr.; *sz* = *ch* dans *chose*; *rz* = *ż* = *j* fr.; *ć*, *ł*, *ś*, *ź* ont une prononciation spéciale aux langues slaves. L'accent tonique est généralement sur la pénultième.

effets ont été ressentis de la manière la plus heureuse dans les anciennes provinces polonaises, où elle a contribué à stimuler le mouvement scientifique et à révéler les hommes de talent, est due en grande partie à la généreuse initiative du Président actuel de la Société, M. le comte Działyński, qui a bien voulu prendre à sa charge les frais considérables de ces publications. A. Potocki.

T. I; 1871.

Gosiewski (W.). — *Sur l'élasticité des corps solides homogènes.* (56 p.)

La théorie mathématique de l'élasticité, dont les bases ont été posées par les plus célèbres géomètres de notre temps, et qui est appelée, dans un avenir plus ou moins lointain, à expliquer tous les phénomènes de la Physique, est envisagée ici à un point de vue un peu différent de celui qu'on a adopté jusqu'à ce jour, et traitée par une méthode nouvelle.

Les définitions de l'homogénéité et des forces élastiques, ainsi que l'équation des moments, qui sert de point de départ à la recherche des lois fondamentales de l'élasticité, sont établies avec une clarté et une précision qui facilitent beaucoup l'intelligence des résultats qui en découlent. Nous ne les reproduirons pas ici pour ne pas trop allonger notre article, et nous nous bornerons à donner la définition des corps homogènes des divers ordres.

Les corps homogènes du *premier ordre* sont ceux dans lesquels les déformations élémentaires, ainsi que les forces élastiques, sont des fonctions des dérivées du premier ordre $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ seulement des accroissements u, v, w des coordonnées x, y, z de l'élément, dues à sa déformation, les dérivées d'ordres supérieurs n'y entrant pas. Si ces déformations dépendent, en outre, des dérivées secondes $\frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)^2}$, les corps seront dits homogènes *du second ordre*, et ainsi de suite. En général, un corps sera homogène du $n^{\text{ième}}$ *ordre* lorsque les déformations et les forces élastiques auront des expressions de la forme

$$F\left[\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}, \frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)^2}, \ldots, \frac{d^n(u, v, w)}{d(x, y, z)^n}\right].$$

Le présent travail a surtout en vue les corps homogènes du premier ordre; quelques pages seulement sont consacrées à l'étude de ceux d'ordre supérieur.

La plus grande partie des résultats de la théorie est obtenue par la considération des déformations, abstraction faite des forces qui les produisent. Les neuf dérivées représentées par le symbole $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, et dont dépendent les déformations, étant considérées comme des paramètres, conduisent à un *ellipsoïde de déformation*, analogue à l'ellipsoïde d'élasticité, et à une *droite de déformation*. En combinant entre eux ces paramètres, on parvient à des ellipsoïdes et à des droites d'ordre supérieur, dont la considération peut conduire à l'explication de certains phénomènes dans les corps élastiques.

La considération du travail mécanique élémentaire fournit aussi des résultats remarquables, parmi lesquels nous citerons en passant celui-ci, que les dérivées partielles de la pression P, par rapport aux quantités $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, expriment les forces élastiques correspondantes.

Dans le cas des corps homogènes triaxiques du premier ordre, les équations fondamentales de cette théorie conduisent aux équations qui expliquent les lois de la propagation de la lumière dans les cristaux biréfringents, et à celles qui représentent la loi de la propagation de la chaleur dans les corps solides, telles qu'elles ont été établies par Lamé dans sa *Théorie analytique de la Chaleur*, par la considération de la conductibilité. Ce dernier résultat est surtout important : il établit une liaison entre l'élasticité des corps et leur conductibilité pour la chaleur.

Dans le cas des corps homogènes du troisième ordre, on obtient de même les équations qui expliquent la dispersion de la lumière et la rotation du plan de polarisation. Dans ce dernier cas, en désignant par α l'angle de torsion, on a

$$\alpha = -\frac{2\pi^2 b(z-z_0)}{al^2},$$

résultat conforme aux lois expérimentales de Biot, savoir : que l'angle de torsion est proportionnel à l'épaisseur $z - z_0$ du corps, et en raison inverse du carré de la longueur d'onde l.

En tenant compte des infiniment petits d'ordre supérieur dans l'expression de la vitesse de propagation des rayons lumineux, on parvient à ce résultat, que la rotation du plan de polarisation est toujours accompagnée de la dispersion; seulement cette dernière est extrêmement petite.

GOSIEWSKI (W.). — *Des fonctions simultanées de même espèce.* (32 p.)

Soient u, v, w trois fonctions simultanées et de même espèce des quatre variables x, y, z, t, dont les trois premières sont aussi de même espèce. Supposons que u, v, w représentent les déformations d'un élément élastique, dont les coordonnées soient x, y, z, et que t soit le temps. Les fonctions de cette nature jouent un grand rôle dans la théorie de l'élasticité.

Si l'on excepte quelques mots qui leur sont consacrés dans les *Leçons sur la théorie de l'Élasticité,* de Lamé, nous ne connaissons aucune étude spéciale sur ces fonctions. Le présent travail a pour objet l'étude des propriétés géométriques et analytiques de ces fonctions et de leurs dérivées partielles. La considération de ces dérivées et de leurs combinaisons comme paramètres d'ellipsoïdes et de droites de divers ordres, dont il a été déjà question plus haut, permet d'établir plusieurs théorèmes curieux, applicables aux lois des mouvements intérieurs des corps élastiques, mais dont le détail nous entraînerait hors des limites imposées à cet article. Nous nous bornerons à faire remarquer que, en considérant trois variables seulement, on est conduit au théorème général que voici :

Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$, *n fonctions continues simultanées et de même espèce de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Pour que toutes les dérivées* $\dfrac{d(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *de ces fonctions aient des valeurs finies et déterminées, il faut que les fonctions données soient les dérivées partielles d'une même fonction* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *finie et déterminée.*

Après avoir établi les propriétés des dérivées $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, l'auteur étudie les propriétés de leurs fonctions, lesquelles, dans le cas où

x, y, z sont de même espèce, peuvent toujours être ramenées à des fonctions de six paramètres de l'ellipsoïde correspondant, et il examine en particulier les polynômes homogènes entiers du deuxième et du troisième degré par rapport à ces paramètres.

Dans le cas des coefficients indépendants de u, v, w, un polynôme de cette classe (du deuxième degré) exprime le travail élémentaire des forces élastiques dans les corps homogènes dont la nature ne varie pas avec leur mouvement intérieur.

En considérant le travail mécanique élémentaire comme exprimé par un polynôme dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions de u, v, w, la théorie de l'élasticité se trouvera étendue aux corps qui changent de nature sous l'action des forces intérieures, et l'étude appropriée de ces polynômes pourra servir de point de départ aux recherches mathématico-chimiques, et permettra peut-être de vérifier si la cause des phénomènes chimiques est la même que celle de beaucoup d'autres phénomènes de la nature, c'est-à-dire le mouvement.

Żmurko (W.). — *Démonstration du théorème de Hesse, relatif aux déterminants fonctionnels.* (4 p.)

Żmurko (W.). — *Contribution à la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.* (8 p.)

Ce Mémoire a été publié, en allemand, dans le Recueil des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Vienne,* pour l'année 1866.

Franke (J.-N.). — *Relations projectives des projections des systèmes géométriques.* (8 p.)

Trzaska (W.). — *Quelques propriétés des fonctions d'une variable imaginaire.* (3 p.)

L'auteur donne deux démonstrations, l'une géométrique et l'autre analytique, du théorème suivant, énoncé sans démonstration par M. Dewulf, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. I, p. 156; 1862 :

« Soient $w = u + iv$ une fonction monodrome et monogène; une courbe fermée $f(x, y) = 0$ dans le plan horizontal des indices de z; un cylindre vertical qui a $f(x, y) = 0$ pour base; deux plans verticaux P et P' rectangulaires. Supposons que w ne devienne ni nulle ni infinie dans l'intérieur de $f(x, y) = 0$, et que l'indice de z parcoure $f(x, y) = 0$. Sur chaque génératrice (x, y) du cylindre portons, à partir de la base, les longueurs u et v correspondantes, nous obtiendrons ainsi deux courbes U et V. L'aire de la projection de U ou de V sur le plan P est égale à l'aire de la projection de V ou de U sur le plan P'. »

Il établit, en outre, les deux propositions suivantes :

1° Les aires de U et de V ayant une projection commune sur le plan de $f(x, y) = 0$ sont égales.

2° Les projections sur P des aires de U et de V ayant une projection commune sur le plan de $f(x, y) = 0$ sont respectivement égales aux projections correspondantes des aires de V et de U sur P'.

TRZASKA (W.). — *Une application des déterminants fonctionnels.* (9 p.)

Étant données n fonctions de m variables indépendantes, il est souvent utile de chercher s'il existe entre ces fonctions des relations indépendantes des variables. Ce problème, dont la solution ordinaire consiste dans l'élimination, peut être résolu à l'aide du théorème suivant :

« Pour que les n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des m variables indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_m$ satisfassent à p relations indépendantes de ces variables, il faut et il suffit qu'il y ait $n - p$ fonctions, telles que leur déterminant fonctionnel de degré $n - p$,

$$\frac{d(u_1, \ldots, u_{n-p})}{d(z_1, \ldots, z_{n-p})},$$

par rapport à $n - p$ des variables z_k, soit différent de zéro, et que les $p(m - n + p)$ déterminants fonctionnels du degré $n - p + 1$,

$$\frac{d(u_1, \ldots, u_{n-p}, u_i)}{d(z_1, \ldots, z_{n-p}, z_k)}, \quad (n - p + 1 \leq i \leqq n), \quad (n - p + 1 \leq k \leqq n),$$

soient identiquement nuls pour toutes les valeurs des variables z_k. Ce théorème n'a lieu que pour $m > n - p > 0$. »

M. Trzaska donne deux démonstrations de ce théorème.

TRZASKA (W.). — *Tracer sur une sphère un cercle tangent à trois cercles donnés sur cette sphère.* (10 p.)

Plusieurs Géomètres, entre autres Gergonne [1], ont donné des

---

[1] *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV, VII et XIII.

solutions géométriques de ce problème. Le présent Mémoire expose une méthode analytique, fondée sur la considération de la relation connue qui existe entre les cosinus des arcs de grand cercle a_{rs} $(r, s = 1, 2, 3, 4)$, représentant les distances mutuelles de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 situés sur une sphère, savoir :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a_{12} & \cos a_{13} & \cos a_{14} \\ \cos a_{21} & 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{31} & \cos a_{32} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{41} & \cos a_{42} & \cos a_{43} & 1 \end{vmatrix},$$

laquelle conduit aux huit solutions de ce problème.

L'auteur applique, en outre, cette méthode à la résolution d'autres problèmes du même genre, par exemple : « Tracer une circonférence inscrite ou circonscrite à un triangle sphérique », et il démontre le théorème général suivant :

« Considérons n points $A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_s, \ldots, A_n$ $(n > 4)$, situés d'une manière quelconque dans l'espace, et soit a_{rs} la distance de deux de ces points A_r, A_s. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ distances a_{rs} satisfont toujours à la relation

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & \ldots & a_{1n}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & \ldots & a_{2n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}. \text{ »}$$

En combinant n points r à r, on obtient $\sum_{r=5}^{r=n} z_{nr}$ relations semblables, z_{nr} représentant le nombre de combinaisons de n objets pris r à r.

Sujet de concours *proposé par la Société des Sciences exactes :* Appréciation des travaux mathématiques de Hoene Wroński.

T. II; 1872.

Gosiewski (W.). — *Quelques remarques concernant le nombre des valeurs différentes que peut prendre une fonction par suite de la permutation des variables dont elle dépend.* (25 p.)

Désignons par $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$ l'opération de la permutation de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\nu$ ($\alpha, \beta, \ldots, \nu$ étant les nombres 1, 2, ..., m, groupés dans un ordre quelconque).

Soit un arrangement P_1 de m quantités, et une permutation $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ conduisant à l'arrangement P_2. En appliquant à ce dernier la même opération, on obtient l'arrangement P_3, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un arrangement P_l, qui reproduise, par la même opération, l'arrangement primitif P_1. Les arrangements tels que $P_1, P_2, \ldots, P_l$ jouissent de cette propriété, que l'une quelconque des opérations $\left(\frac{P_1}{P_2}\right), \left(\frac{P_1}{P_3}\right), \ldots, \left(\frac{P_1}{P_l}\right)$, appliquée à l'un quelconque de ces arrangements, les reproduit tous dans un ordre différent. Les arrangements $P_1, \ldots, P_l$ seront dits *inséparables par rapport à* $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$, et les opérations $\left(\frac{P_1}{P_2}\right), \ldots, \left(\frac{P_1}{P_l}\right)$ seront les permutations *déterminées* par $P_1, P_2, \ldots, P_l$.

Les arrangements inséparables jouissent donc de la propriété que l'application de l'une quelconque des permutations qu'ils déterminent ne change ni leur nombre ni leur nature; mais, étant donnés l arrangements jouissant de cette propriété, on ne peut pas toujours affirmer réciproquement qu'ils soient inséparables. Il peut arriver, au contraire, que, parmi les permutations déterminées, il s'en trouve un certain nombre ($< l$), avec lesquelles on pourra reproduire tous les arrangements. Ces permutations ont cette propriété, que les arrangements inséparables par rapport à chacune d'elles ont un arrangement commun. Ces arrangements sont dits *invariables* par rapport aux permutations qu'ils déterminent.

Cela posé, on peut établir les théorèmes suivants :

1° *Une fonction de m variables indépendantes, qui ne change pas de valeur par suite de la permutation* $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$, *a une seule valeur pour tous les arrangements de* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *inséparables par rapport à* $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$.

2° Théorème de Lagrange. — *Le nombre des valeurs différentes d'une fonction de m variables indépendantes est un diviseur du nombre m!.*

3° *Les valeurs égales d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ correspondent aux arrangements invariables par rapport aux permutations qu'ils déterminent.*

Tels sont les principaux résultats de ce travail. Nous passons sous silence plusieurs théorèmes relatifs aux permutations définies plus haut.

Trzaska (W.). — *Remarques sur les fonctions complexes à plusieurs caractéristiques.* (12 p.)

Une fonction complexe d'une seule variable à n caractéristiques, qui admet un nombre fini ou infini de déterminations différant entre elles de quantités finies, pour chaque valeur de la variable, et qui n'est constante pour aucune de ces déterminations, ne peut avoir plus de n périodes *distinctes,* c'est-à-dire de périodes telles qu'aucune d'elles ne puisse s'obtenir par l'addition ou la multiplication des autres. M. Trzaska donne une démonstration géométrique de ce théorème, d'abord pour $n = 2$, puis pour $n = 3$.

Trzaska (W.). — *Démonstration d'un théorème relatif aux fonctions complexes à n caractéristiques.* (7 p.)

Une fonction complexe de m variables indépendantes à n caractéristiques, qui admet un nombre fini ou infini de déterminations différant entre elles de quantités finies, pour chaque système de valeurs des variables, et qui n'est constante pour aucune de ces déterminations, ne peut avoir plus de mn périodes distinctes.

Dans ce théorème, ainsi que dans le précédent, on admet que les quantités à n caractéristiques satisfont aux lois de l'addition algébrique.

Kucharzewski (F.). — *Sur l'Astronomie en Pologne. Matériaux pour servir à l'histoire de cette science.* (106 p.)

T. III; 1873.

Folkierski (W.). — *Sur les équations simultanées aux dérivées partielles.* (30 p.)

Ce travail se divise en deux Parties. La première a pour objet les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas où le nombre des variables indépendantes est supérieur de plus d'une unité au nombre des équations. En appliquant les méthodes de Jacobi à ce problème considéré à un point de vue général, l'auteur démontre quelques théorèmes qui permettent de le résoudre dans tous les cas où cette solution peut être ramenée aux équations différentielles ordinaires. Les résultats s'accordent avec ceux que Clebsch a obtenus [1] par une voie un peu différente. Dans la seconde Partie, les résultats obtenus pour le cas des équations du premier ordre sont appliqués à celui des équations du second ordre, que l'auteur traite par la méthode d'Ampère.

Kluger (W.). — *La turbine de Fourneyron. Théorie rigoureuse et théorie approchée de cette machine.* (36 p.)

Kucharzewski (F.). — *Exposition et analyse des travaux de M.* Maurice Levy, *sur la théorie du mouvement rectiligne des liquides, et son application au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.* (46 p.)

Doliński (F.). — *Sur l'atomicité des noyaux avec un aperçu sur les nouvelles théories chimiques.* (95 p.)

Gosiewski (W.). — *Contribution à la théorie des forces vives.* (7 p.)

L'auteur donne une nouvelle expression de la somme des forces vives d'un système de points matériels, expression qui renferme un théorème de Coriolis [2], et donne en outre la somme des forces vives correspondant à la *déformation* du système.

En faisant des applications de cette dernière expression, qui est

$$\frac{\Sigma mm'\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2}{\Sigma m}$$

(R étant la distance des deux points matériels m, m'), l'auteur obtient les deux propositions suivantes :

1° La force vive due à l'allongement ou au raccourcissement d'un fil élastique extensible est égale au douzième de la masse du fil multipliée par la vitesse d'allongement ou de raccourcissement.

---

(1) *Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.* (*Borchardt's Journal*, Bd. 65; 1865.) — M. Folkierski annonce que son travail est antérieur à la publication de celui de Clebsch.

(2) *Voir* Sturm, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, t. II, p. 356.

2° Une particule infiniment petite de matière continue peut être considérée comme un système de quatre points matériels.

Martynowski (A.). — *Théorie de la pression des liquides sur des parois planes ou courbes.* 1re Partie : Parois planes. (135 p.)

A. P.

Liste des Ouvrages scientifiques polonais édités par M. le comte Działyński, président de la *Société des Sciences exactes, à Paris,* jusqu'au 19 février 1873.

Niewęgłowski (G.-H.), professeur d'Analyse à l'École supérieure Polonaise, examinateur au Lycée Saint-Louis, à Paris. — *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych.* (Arithmétique, avec la théorie des approximations numériques.). In-8, 352 pages.

— *Geometryi część I. Geometrya płaska.* (Géométrie, 1re Partie. Géométrie plane). 2e édition. 1868, in-8, 436 pages, figures dans le texte.

— *Geometryi częś I i II.* (Géométrie, 1re et 2e Partie). Cours complet, 2e édition, contenant la Géométrie des anciens et les méthodes de la Géométrie moderne. 1868, in-8, VIII-778 pages.

— *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* (Trigonométrie rectiligne et sphérique, avec la théorie des quantités imaginaires et des notes). 1870, in-8, XV-407 pages.

— *Mechanika rozumowa.* (Mécanique rationnelle, en 2 tomes). Tome Ier, Statique. 1873, in-8, 512 pages, figures. Prix : 10 fr.

Folkierski (Wł.), ingénieur civil, licencié ès sciences, professeur de Mécanique à l'École supérieure Polonaise. — *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami.* (Éléments du Calcul différentiel et du Calcul intégral, avec des applications). Tome I : Calcul différentiel, avec une Note de M. Trzaska, sur les déterminants, 1870, in-8, XLIII-1087 pages, 136 figures dans le texte. — Tome II : Calcul intégral, 1re Partie, intégration des différentielles, etc. 1873, in-8, XVI-752 pages, 76 figures.

Kucharzewski (F.) et Kluger (W.), ingénieurs civils, anciens élèves de l'École des Ponts et Chaussées. — *Wykład Hydrauliki.* (Traité d'Hydraulique). 1873, LVI-1018 pages, 110 figures dans le texte. Prix : 20 fr.

GOSIEWSKI (W.), professeur de Physique mathématique, à Lemberg. — *Wykład mechaniki cząsteczkowéj* (molekularnéj). (Traité de Mécanique moléculaire.) Tome Ier, 1re livraison. 1873, in-8, 176 pages. Prix : 4 fr.

SĄGAJŁO (A.), professeur de Mathématiques. — *Wykład zupełny Algebry.* (Traité complet d'Algèbre, en quatre volumes). Tome Ier, Éléments d'Algèbre. 1873, in-8, 632 pages, figures. Prix : 5 fr. 50 c.

ŻEBRAWSKI (Dr Theofil), membre de l'Académie des Sciences de Cracovie. — *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań.* (Bibliographie de la littérature polonaise relative aux Sciences mathématiques et physiques et à leurs applications). Cracovie, 1873, in-8, 617 pages, 4 planches. Prix : 3 thalers.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ANNUAIRE MÉTÉOROLOGIQUE ET AGRICOLE de l'Observatoire de Montsouris, pour l'an 1874. — Paris, Gauthier-Villars. In-18, 272 p. 2 fr.

BOURGET (J.) et HOUSEL (Ch.). — Traité de Géométrie élémentaire, à l'usage des aspirants aux Écoles du Gouvernement. — Paris, Hachette; 1874. Petit in-8°, 382 p., 348 fig. dans le texte. 5 fr.

DUBOIS (E.), Examinateur-Hydrographe de la Marine. — Les passages de Vénus sur le disque solaire, considérés au point de vue de la détermination de la distance du Soleil à la Terre. Passage de 1874. Notions historiques sur les passages de 1761 et 1769. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. In-18, XII-245 p. 3 fr. 50

FLAMMARION (C.), Astronome, Membre de plusieurs Académies, etc. — Études et lectures sur l'Astronomie, Tome IV. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. In-18, XII-336 p., 33 figures astronomiques. 2 fr. 50

Hill (C.-J.-D.). — *Deo favente, Matheseos fundamenta nova analytica. Pars Ima, Mathesin universalem, in usum prælectionum, comprehendens. Pars IIda, Theoriam differentiarum et derivatorum generaliorum, una cum variis binomii consectariis comprehendens. — Calculi differentialis et integralis regulæ generales. — Computatio functionum hyperbolicarum per differentias. — De functionibus rationaliter logarithmicis integrandis, et speciatim de derivatis Lammatum. — Tabula functionis Lamma ejusque derivatæ. — Londini Gothorum,* 1860-1868. — Paris, Gauthier-Villars. — 2 fascicules in-4, 226-286 p. 12 fr.

— Tables arithmétiques correctes. *Felfria Räkne-Tabeller, angifvande tals factorer, producter, reciproker, potenser, visare (indices) och logarithmer. — De proprietate seriei harmonicæ, cum quadam hujus tabula.* — Lund et Stockholm, 1828-1867. — Paris, Gauthier-Villars. — Ensemble 56 p. in-4. 2 fr.

Instruction sur les Paratonnerres, adoptée par l'Académie des Sciences. 1re *Partie,* 1823, M. Gay-Lussac rapporteur; 2e *Partie,* 1854, M. Pouillet rapporteur; 3e *Partie*, 1867, M. Pouillet rapporteur. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-12, 143 p., 58 figures dans le texte, 1 planche en taille-douce. 2 fr. 50

Poncelet (J.-V.). — Cours de Mécanique appliquée aux Machines, publié par M. X. Kretz, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8°, xxii-520 p., 127 figures dans le texte, 2 planches en taille-douce. 12 fr.

Radau (R.). — Tables barométriques et hypsométriques pour le calcul des hauteurs, précédées d'une instruction sur l'usage des Tables. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-12, 24 p. 1 fr.

Rapisardi (Fr.) — Elementi di Geometria. — Catania, 1874. In-8°, 459 p., 350 fig. dans le texte. 8 fr.

Tait (P.-G.). — An Elementary Treatise on Quaternions. Second edition, enlarged. — Oxford, Clarendon Press, 1873. In-8°, xx-296 p. 12 s. 6 d.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME SIXIÈME. — AVRIL 1874.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* rue Monge, 29.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.

Ce BULLETIN, fondé en 1870, paraît régulièrement chaque mois. Il a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8° (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal forme depuis le 1er janvier 1873 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables), comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8°.

Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.

Prix pour un an (12 numéros en 2 volumes) :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége	20

OUVRAGES REÇUS PAR LA RÉDACTION.

(SUITE.)

ABRIA. Études sur la double réfraction. Vérification de la loi d'Huyghens. (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. I, 1874.)

BIERENS DE HAAN (D.). Notice sur des Tables logarithmiques hollandaises. (*Bull. di Bibliogr. e di Storia, etc.*, t. VI, mai 1873.)

BREDICHIN (Th.). Observations spectroscopiques du Soleil, faites pendant l'été (et l'automne) de 1873. II. Moscou, 1874. In-8.

CHELINI (Il P.). Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio et nelle superficie. (*Mem. dell' Acc. delle Sc. dell' Istituto di Bologna*, t. VIII, 1869.)

— Nuova dimostrazione elementare delle proprietà fondamentali degli assi conjugati di rotazione e degli assi permanenti. (*Atti dell' Acc. Pontif. de' Nuovi Lincei*; maggio 1869.)

— Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti. (*Mem. dell' Acc. delle Sc. dell' Ist. di Bologna*, t. X, 1870.)

— Sulla nuova geometria de' complessi. (*Ibid.*, Serie III, t. I. 1871.)

— Interpretazione geometrica di formole essenziali alle scienze dell' estenzione, del moto e delle forze. (*Ibid.*, t. III, 1873.)

FALK (M.). Handlingar rörande Herr C.-F.-E. Björlings matematiska läroboksförfattareskap, utgifna af M. Falk. Upsala, 1874. In-8.

GENOCCHI (A.). Breve Riposta al signor conte L.-F. Menabrea. (*Bullettino di Bibliografia e di Storia, etc.*, novembre 1873.)

— Sur l'impossibilité de quelques égalités doubles. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 9 février 1874.)

GÜNTHER (S.) (trad. di A. SPARAGNA). Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell' antichità e nel medio evo. (*Ibid.*, t. VI, août 1873.)

GYLDÉN (H.). Om separerande factorer och deres använding i astronomin. (*11te Skandinaviske Naturforskermöde i Kjöbenhavn*, 1873.)

JUNG (G.). Nozioni elementari sopra i limiti. (*Periodico di Sc. matem. e nat. per l'insegn. secondario*, Roma, 1873.)

(*A suivre.*)

TABLE DES MATIÈRES.

AVRIL 1874.

Revue bibliographique.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

TAIT (P.-G.), M. A., professor of Natural Philosophy in the University of Edinburgh. — AN ELEMENTARY TREATISE ON QUATERNIONS. Second edition, enlarged. — Oxford, Clarendon Press; 1873. 1 vol. in-8°, XX-296 p.

KELLAND (P.), M. A, F. R. S, & TAIT (P.-G.), M. A., professors in the Department of Mathematics in the University of Edinburgh. — INTRODUCTION TO QUATERNIONS, WITH NUMEROUS EXAMPLES. — London, Macmillan & Co.; 1873. — 1 vol. petit in-8°, XI-227 p.

La méthode des quaternions constitue un procédé d'Analyse géométrique, inventé, comme on sait, par sir William-Rowan Hamilton, qui en a exposé pour la première fois la théorie complète dans ses *Lectures on Quaternions* (¹). Cette découverte ne semble pas avoir attiré l'attention d'un grand nombre de géomètres sur le continent; les seuls travaux que nous connaissions sur ce sujet, en dehors des travaux anglais, sont des expositions sommaires de la théorie, dues à MM. Bellavitis (1858), Allégret (1862), Hankel (1867).

Cependant cette méthode, comme les autres méthodes géométriques, a ses avantages aussi bien que ses inconvénients, suivant la nature de la question que l'on veut traiter, et il en est de son usage comme de celui de tous les systèmes de coordonnées, rectilignes ou curvilignes, ponctuelles ou tangentielles, etc.

Ce qui distingue toutefois ce mode de détermination des autres, c'est que, opérant sur des éléments plus complexes, il donne lieu à des opérations moins simples, qui ne présentent pas les mêmes propriétés générales que les opérations de l'Algèbre ordinaire. De là la nécessité d'introduire certaines modifications dans les règles du calcul, notamment dans tout ce qui se rapporte à la multiplication et aux opérations qui en dépendent. La nouvelle Algèbre ainsi constituée exige, dans la pratique, de plus grandes précautions et une attention plus soutenue. En revanche, elle admet de nouveaux symboles d'opérations dont l'usage permet de traiter certains problèmes importants avec une merveilleuse facilité. D'ailleurs, au point de

(¹) Dublin, 1853; 1 vol. in-8°, 64-LXXII-736 p.

vue de l'Analyse pure, elle pourra dans la suite ouvrir des voies encore inexplorées, et qui conduiront peut-être à de nouveaux problèmes, ou à des solutions plus simples de problèmes déjà posés.

C'en était assez déjà pour que les compatriotes de Hamilton n'aient pas cru devoir laisser dans l'oubli une méthode aussi féconde, et dont on ne saurait trop admirer les ingénieux procédés. L'édition des *Lectures* se trouvant épuisée, Hamilton employa les dernières années de sa vie à la rédaction d'un second Traité aussi étendu que le premier (1); la mort le surprit (2) pendant le cours de l'impression, qui a été achevée par les soins de son fils.

Hamilton, comme la plupart des grands inventeurs, s'était peu préoccupé, surtout dans son premier Ouvrage, de se mettre à la portée des intelligences ordinaires. Ses deux Livres sont de véritables encyclopédies mathématiques, dans lesquelles il traite par sa méthode, sans s'assujettir à un plan nettement accusé, les questions les plus diverses, à mesure que le développement de sa théorie lui en fournit l'occasion. Aussi bien peu de géomètres, même sur le sol britannique, ont eu le courage de pousser jusqu'au bout l'exploration de ces riches mines scientifiques. Quelques-uns cependant, ayant pu profiter des leçons et des encouragements du maître, se sont approprié la méthode, et l'emploient avec un succès croissant dans les recherches les plus compliquées de la Physique mathématique.

Parmi ces disciples zélés, il faut citer en première ligne M. Tait, ancien fellow de St.-Peter's College, à Cambridge, et aujourd'hui professeur de Physique à l'Université d'Édimbourg. C'est à lui qu'on doit le premier Traité classique, à la fois complet et élémentaire, qui ait été composé sur cette branche des Mathématiques. La première édition de son Livre, dont les matériaux étaient prêts depuis longtemps, mais dont la publication fut retardée par suite du désir qu'Hamilton avait exprimé de faire paraître auparavant ses *Elements,* porte la date de 1867. L'accueil empressé que cet Ouvrage a reçu, tant en Angleterre qu'en Amérique, est une preuve incontestable du talent de l'auteur et de la bonté de la méthode. L'année dernière, M. Tait a dû procéder à une seconde édition, et il en a

---

(1) *Elements of Quaternions*. London, 1866; 1 vol. in-8°, LXVI-762 p.
(2) 2 septembre 1865.

profité pour apporter à son Livre plusieurs améliorations, en faisant disparaître quelques erreurs typographiques, et donnant un plus grand développement aux deux derniers Chapitres.

Donnons un aperçu rapide du contenu de cet excellent Traité.

Dans le Chapitre I, l'auteur établit les premières bases du nouveau calcul, en définissant l'addition et la soustraction des droites dirigées ou *vecteurs,* qui déterminent les translations d'un système parallèlement à lui-même; ces opérations correspondent à la composition et à la décomposition des translations.

Il considère ensuite, dans le Chapitre II, l'opération qui change à la fois la grandeur et la direction d'un vecteur, et que l'on assimile à la multiplication du vecteur par un symbole appelé *biradiale.* L'expression analytique de ce symbole a reçu le nom de *quaternion,* parce qu'elle résulte de l'addition de quatre termes, rapportés à quatre unités irréductibles entre elles. L'auteur expose les règles de calcul algébrique relatives à la multiplication et à la division des quaternions, comprenant, comme cas particuliers, les règles relatives aux vecteurs.

Le Chapitre III contient diverses transformations de formules, avec leur interprétation géométrique. On voit, par les exemples traités, la correspondance qui existe entre chaque opération de calcul et un mouvement d'une figure, de sorte que chaque équation fait image, et parle, pour ainsi dire, aux yeux.

Le Chapitre IV a pour objet la différentiation des fonctions de quaternions, opération qui n'a plus la même simplicité que dans le cas des quantités complexes ordinaires. L'auteur y définit le symbole différentiel ∇, une des plus ingénieuses découvertes d'Hamilton, et dont l'emploi a permis d'étendre aux quaternions l'opération de l'intégration, tant simple que multiple. Si $F(\rho)$ est une fonction du vecteur $\rho = ix + jy + kz$, dont la valeur soit toujours égale d'un nombre réel, ce symbole ∇ représente l'opération

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

i, j, k étant les trois unités imaginaires, correspondant à trois directions orthogonales fixes. Le vecteur exprimé par $\nabla F(\rho)$ est la normale à la surface au point (x, y, z), et la différentielle $dF(\rho)$

peut se mettre sous la forme $S[\nabla F(\rho)\,d\rho]$, le signe S désignant la partie réelle ou *scalaire* d'un quaternion.

Dans le cas des fonctions implicites, la détermination de la différentielle exige la résolution d'une équation du premier degré, problème qui, dans l'Algèbre des quaternions, est loin d'être aussi facile que dans l'Algèbre ordinaire. Cette résolution fait le sujet du Chapitre V. L'auteur expose d'abord la belle méthode créée par Hamilton pour la solution générale de la question. Cette méthode est fondée sur les propriétés des fonctions linéaires d'un vecteur, désignées par le symbole φ, et qui jouent un rôle capital dans presque toutes les applications. Ces propriétés découlent de la considération d'une équation du troisième degré à coefficients réels, à laquelle satisfait identiquement ce symbole, et que Hamilton apprend à former. De cette équation, on déduit immédiatement l'inversion de la fonction φ, et par suite la résolution de l'équation $\varphi(\rho)=\gamma$. A la fin du Chapitre, M. Tait montre comment on peut, dans les cas les plus simples et les plus usuels, abréger les calculs, en substituant à la méthode générale des méthodes particulières et directes.

Après avoir ainsi exposé les principales règles du calcul des quaternions, l'auteur passe aux applications. Dans le Chapitre VI, il traite de la droite et du plan, et déjà l'on peut juger de la rapidité et de l'élégance des solutions que peut fournir la méthode d'Hamilton.

Les Chapitres VII et VIII sont consacrés à l'étude de la sphère et du cône de révolution, et à celle des surfaces à centre du second ordre. La théorie de la courbure des lignes et des surfaces est développée dans le Chapitre IX.

Le Chapitre X est intitulé *Cinématique*. L'étude du mouvement curviligne est fondée sur la considération de la courbe qu'Hamilton a nommée *hodographe*, et dont le vecteur est la dérivée par rapport au temps du vecteur de la trajectoire. L'auteur en fait diverses applications aux mouvements planétaires et à la théorie de certaines courbes engendrées par le mouvement d'une figure. Il donne ensuite les formules relatives aux rotations d'un système rigide. Il définit la dilatation homogène (*homogeneous strain*), c'est-à-dire celle dont l'effet transforme des éléments semblables entre eux et d'autres éléments semblables aussi entre eux. Une pareille dilatation s'exprime immédiatement à l'aide de la fonction φ, des propriétés de laquelle elle donne une représentation physique. M. Tait traite encore de la combinaison des dilatations avec les rotations, et des propriétés des moments d'inertie.

Le Chapitre XI et dernier, le plus intéressant du Livre, a pour titre : *Applications physiques*. Voici le sommaire des diverses sections : Équilibre et mouvement d'un système rigide. Mouvement du pendule simple; pendule de Foucault. Surfaces réfléchissantes. Théorie de la double réfraction de Fresnel, surface des ondes, etc. Électrodynamique. Applications physiques de l'opérateur ∇ : déplacement des groupes de points; intégrales doubles et triples; calcul des variations, etc.

Chaque Chapitre est terminé par un recueil de questions, proposées au lecteur comme exercices.

Malgré son titre de *Traité élémentaire,* il ne faudrait pas croire que le Livre de M. Tait fût d'une lecture courante. Tel n'a pas été d'ailleurs le but de l'auteur, et, dans l'intérêt même des étudiants, il n'a pas voulu leur frayer un *chemin royal,* bon pour ceux qui ne visent qu'à atteindre le plus vite possible un but déterminé, mais impropre à donner cette souplesse d'esprit et cette largeur de vues, que l'on ne peut acquérir que par un labeur personnel. Il avoue cependant que la difficulté des premiers Chapitres pourrait bien rebuter quelques commençants, et c'est en faveur des travailleurs moins intrépides qu'il a collaboré, avec son collègue M. Kelland, à la rédaction du Livre vraiment élémentaire que nous annonçons en second lieu.

Le plan général de cet Abrégé ne diffère guère de celui des premiers Chapitres du précédent Ouvrage. Seulement toutes les parties qui exigent l'emploi des calculs transcendants sont omises. Voici les titres des Chapitres :

I. Introduction.
II. Addition et soustraction des vecteurs.
III. Multiplication et division des vecteurs.
IV. La ligne droite et le plan.
V. Le cercle et la sphère.
VI. L'ellipse.
VII. La parabole et l'hyperbole.
VIII. Les surfaces à centre du second ordre.

IX. Formules, avec leurs applications.

X. Équations du premier degré entre des vecteurs.

Comme dans le *Elementary Treatise,* les divers Chapitres de l'Abrégé sont suivis d'un recueil de questions à résoudre. Les solutions détaillées des plus difficiles et des plus intéressantes sont données dans un *Appendice* placé à la fin du volume. J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN ([1]).

T. LXXIX; n^os 1873-86; 1871-72.

D'Arrest. — *Sur la position de la raie* D_3 *dans le spectre des protubérances.*

Désignons par H_α, H_β, H_γ, H_δ les quatre raies de l'hydrogène; on sait que les protubérances donnent toujours H_α et H_β avec une certaine raie D_3 d'origine inconnue; quant à H_γ et H_δ, elles n'apparaissent que très-exceptionnellement. Bien que D_3 n'appartienne pas au système des raies de l'hydrogène, M. d'Arrest pense qu'elle a avec elle quelque rapport de parenté. Or le tableau des nombres de vibrations donne à première vue l'équation très-simple

$$D_3 - H_\alpha = \frac{1}{3}(H_\beta - H_\alpha).$$

D'ailleurs, ce même tableau donne encore

$$\log H_\gamma - \log H_\delta = \frac{1}{3}(\log H_\beta - \log H_\delta),$$

de sorte que l'on arrive à ce résultat très-singulier, qu'il existe entre les nombres de vibrations de D_3, H_α et H_β la même relation numérique qu'entre les logarithmes de ces mêmes nombres pour H_γ, H_δ et H_β.

Il semble exister des relations de même nature entre les raies brillantes auxquelles se réduisent respectivement certaines nébuleuses.

([1]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 87.

Peters (C.-H.-F.). — *Éphéméride pour l'opposition de Ianthe* (98) *en* 1872. (Angl.)

Lorenzoni (G.). — *Sur les raies spectrales f et h de la chromosphère.* (Ital.)

On a vu (*Bulletin*, t. V, p. 182) que M. Lorenzoni, en plaçant convenablement la fente du spectroscope, avait réussi à apercevoir nettement, en outre des cinq raies dont nous venons de parler, la raie *f* (4484 Ä) qu'il considère comme nouvelle. M. d'Arrest a fait remarquer ensuite que cette raie avait déjà été aperçue dans deux ou trois circonstances particulières. M. Lorenzoni répond que les dispositions de son appareil lui permettent de la voir *constamment* en plein soleil et sur tous les points du disque. Elle est surtout visible dans une zone comprise entre 25 et 155 degrés de distance polaire boréale héliographique. Elle s'affaiblit près des pôles, ce qui pourrait bien tenir à une moindre intensité dans la température de la chromosphère : de même, pour la raie *h* ou H_δ.

Bruhns (C.). — *Éphéméride de Bellone, pour l'opposition de* 1871-1872.

Becker (E.). — *Éléments et éphéméride de Béatrix, pour l'opposition de* 1872.

Oppolzer (Th. v.). — *Égine* (91) *retrouvée.*

Talmage (C.-G.). — *Observation de l'occultation de Vesta, le* 30 *décembre* 1871. (Angl.)

La planète brillait d'un éclat surprenant, jusque sur le limbe de la Lune, auquel elle a semblé rester suspendue, pendant près de deux secondes.

Palisa (J.). — *Observations faites à Genève : Thisbé; comète d'Encke.*

Grützmacher (A.). — *Éléments et éphéméride de la planète* (115).

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations faites à Athènes : Comète d'Encke,* 1871.

Cette comète a été observée simultanément au chercheur et au réfracteur, pendant toute la durée de son apparition. Elle a à peu près constamment présenté la forme d'une nébulosité arrondie.

Pour mesurer son diamètre au chercheur, M. Schmidt le comparait, à l'aide des cartes de Bonn, à la distance des composantes de tel ou tel couple d'étoiles bien connues situées dans le champ de l'instrument. Par suite de l'indécision des contours, ces mesures sont assez différentes de celles qui ont été prises au réfracteur; mais les deux séries de mesures s'accordent à montrer que, comme dans les apparitions précédentes, le diamètre réel de la comète allait *en diminuant,* à mesure qu'elle se rapprochait du périhélie.

La circonstance la plus remarquable de cette apparition, c'est que, le 2 décembre, tandis que le noyau prenait un éclat plus vif, il s'est formé, du côté du Soleil, une expansion lumineuse en forme de croissant ou de *halo*. Cette apparence, qui se manifeste souvent dans les grandes comètes, ne s'était jamais présentée dans la comète d'Encke : elle semble du reste avoir disparu dès le lendemain.

D'Arrest. — *Sur une équation qui existe dans le système des satellites d'Uranus.*

Lorsque les deux satellites *intérieurs* sont en conjonction, les deux satellites *extérieurs* ne peuvent être eux-mêmes en conjonction qu'à une longitude unique et déterminée, de sorte que c'est à *cette longitude seulement* que peut avoir lieu la conjonction des quatre satellites.

Cette équation, qui correspond à la libration des satellites de Jupiter, est une conséquence d'une relation non remarquée jusqu'ici entre les durées des révolutions synodiques des satellites d'Uranus, relation tellement approchée qu'elle donne à moins de $\frac{1}{13000}$ près le temps que M. Lassell assigne dans ses dernières déterminations à la révolution synodique du premier satellite. Les perturbations considérables dont M. Adams a constaté l'existence dans le monde d'Uranus, dépendent sans doute en grande partie de cette équation.

Powalky (C.). — *Détermination de la parallaxe du Soleil par la comparaison des masses du Soleil et de la Terre.*

La valeur numérique que donnent les méthodes astronomiques pour le rapport des masses de la Terre et du Soleil dépendent de celle que l'on attribue à la parallaxe, et réciproquement; d'autre part, ce rapport entre dans l'expression de certaines perturbations : ces dernières peuvent donc à leur tour servir à faire connaître ou à rectifier la parallaxe.

Or, si l'on ajoute à la longitude du nœud ascendant de Vénus, lors du passage de 1761, la variation séculaire théorique de cette longitude pour $88^{\text{ans}},56$, on trouve pour la longitude du nœud en 1850 un nombre qui diffère de $34''$ de celui que l'on peut déduire de l'observation directe. On peut d'ailleurs conclure de la théorie de Vénus, donnée par M. Le Verrier dans le tome VI des *Annales de l'Observatoire de Paris,* que cette différence provient à peu près en entier d'une erreur commise dans la masse de la Terre considérée comme correspondant à la parallaxe $8'',57$. En partant de ces données, M. Powalky montre que cette parallaxe doit être évaluée à $8'',77$. Ce nombre se rapproche fort, comme on voit, de la parallaxe la plus probable, $8'',86$.

Peters (C.-H.-F.). — *Corrections de l'orbite de Ianthe* (98).

Hind (J.-R.). — *Éléments de Camille* (107). (Angl.)

Leeson Prince (C.). — *Lettre au rédacteur.* (Angl.)

L'auteur rappelle qu'il a signalé la lumière cendrée de Vénus en septembre 1863 [1].

Adolph (C.). — *Correction de l'éphéméride de Mnémosyne.* (Angl.)

Secchi (le P.). — *Lettre au rédacteur.* (Fr.)

L'Auteur donne le résumé de ses observations sur les protubérances, du 23 avril au 31 octobre 1871. Le nombre et la hauteur des protubérances croissent avec l'activité solaire manifestée d'ailleurs par la fréquence des taches et des facules; trois cent soixante-dix protubérances sur quatre cent soixante et onze se sont montrées inclinées de l'équateur au pôle, ce qui confirme la loi de circulation précédemment énoncée par l'auteur lui-même et par M. Spörer. Les éruptions proprement dites sont d'une durée très-courte; quelquefois, en moins d'une heure, tout est fini. La plus grande hauteur à laquelle la matière soit parvenue a été de $4'32''$; mais c'est l'hydrogène et la matière de la raie D_3 qui atteignent à cette élévation. Les vapeurs des autres métaux n'arrivent qu'à des hauteurs relativement très-faibles.

Bruhns (C.). — *Observations de planètes et de comètes.*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. V, p. 179.

Winnecke (A.). — *Observations de quelques minima de* U *de la Couronne en* 1871, *et éphémérides pour* 1872.

Strasser (G.). — *Suite des observations méridiennes des planètes en* 1870, *à l'Observatoire de Kremsmünster.*

Gericke (H.). — *Observations au cercle.* (Leipzig.)

Stephan et Borrelly. — *Observations de Lomia* (117).

Stephan. — *Observations de nébuleuses.*

Tietjen (F.). — *Observations et éphéméride d'Iphigénie; éphéméride de Sémélé.*

Galle (J.-G.). — *Sur l'aurore boréale du* 4 *février* 1872, *et sur une méthode propre à déterminer la hauteur des rayons lumineux.* (Breslau.)

On sait que les rayons de l'aurore boréale sont en chaque lieu *sensiblement* parallèles à l'axe de l'aiguille aimantée librement suspendue. Il en résulte, par un effet de perspective, que ces rayons semblent diverger des points où le prolongement de cet axe viendrait percer la voûte céleste. Lorsque l'aurore est très-intense, celui de ces points qui est situé dans l'hémisphère sud, et que l'on appelle quelquefois le *zénith magnétique,* se trouve ainsi le centre d'une couronne lumineuse.

Cette couronne était très-brillante dans l'aurore du 4 février 1872, qui a été visible de presque tous les points du globe. Or MM. Galle et Reimann ont fait à Breslau une remarque importante : c'est que le centre de la couronne se trouvait à quelques degrés *au-dessous* du zénith magnétique et que le point de convergence des rayons très-éloignés était situé *encore plus au sud.* Pareille observation avait déjà été faite par M. Reimann sur l'aurore boréale du 25 octobre 1870. Ce n'est pas là, d'après M. Galle, une discordance accidentelle : elle tient à un important phénomène de parallaxe qui permet de déterminer la hauteur de la région de l'atmosphère où se montrent les rayons lumineux.

On peut admettre en effet que chacun de ces rayons est parallèle à la direction que prend l'aiguille aimantée *au lieu du globe qui voit à son zénith le milieu du rayon.* Il en résulte évidemment que, d'une station donnée O, on doit apercevoir le centre de la couronne dans une direction parallèle à celle de l'aiguille du point

O′ situé verticalement au-dessous de la région atmosphérique où se trouvent les rayons qui donnent lieu à cette apparence; par suite, le centre lumineux doit apparaître au sud du zénith magnétique.

En outre, soit v l'angle formé par les rayons menés du centre de la Terre aux points O et O′, qu'onpeut supposer, pour plus de simplicité, pris sur le même méridien magnétique.

Soient aussi :

z la hauteur verticale de la région atmosphérique où se forme la couronne;

h l'inclinaison de la droite menée du point O au centre de cette couronne;

u l'angle de cette droite avec la direction de l'aiguille aimantée au point O;

r le rayon terrestre.

On trouve très-facilement la formule approchée

$$z = rv \operatorname{tang} h.$$

D'ailleurs les cartes de Lamont donnent, pour l'Europe moyenne,

$$v = \frac{5}{9} u,$$

d'où

$$z = \frac{5}{9} ru \operatorname{tang} h.$$

Une formule analogue donne la hauteur des rayons éloignés du centre, mais situés dans le méridien magnétique; le calcul est un peu plus compliqué pour les rayons situés hors de ce méridien.

Cette méthode, appliquée aux observations de l'aurore de février 1872, donne 56 milles géographiques (415 kilomètres pour la hauteur de la couronne, et 60 milles (442 kilomètres) pour celle des rayons éloignés. On trouve une hauteur plus grande encore (530 kilomètres) pour l'aurore boréale du 25 octobre 1870.

Appendice au Mémoire précédent. — Dans cet Appendice, M. Galle applique sa méthode aux observations faites dans quelques stations de l'Allemagne du Nord et de la Hollande. Partout, malgré des variations considérables, le zénith magnétique s'est constamment tenu, pendant l'aurore, à quelques degrés *au nord* du centre de la couronne. Voici les résultats auxquels conduisent les moyennes des observations :

Stations	Hauteur de l'aurore boréale.
Münster..	258 kilomètres
Deventer....	354 »
Groningue................	304 »
Dantzig...................	422 »

La concordance entre ces résultats et les précédents est assez marquée pour donner une grande probabilité à l'hypothèse fondamentale adoptée par l'auteur. Remarquons toutefois que cette théorie assignerait à l'atmosphère une hauteur bien supérieure à celle que paraissent indiquer les observations faites sur le crépuscule et sur l'incandescence des étoiles filantes. Ajoutons aussi que les grandes oscillations de l'aiguille aimantée et la difficulté que présente la détermination exacte de la position du centre de la couronne laissent à la question quelque incertitude. Les observateurs futurs devront s'attacher à déterminer aussi exactement que possible les intersections mutuelles d'un petit nombre de raies bien définies. Il faudra aussi obtenir astronomiquement la position des extrémités de ces raies, ce qui donne à la fois leur point de milieu et leur longueur absolue. On connaîtra ainsi l'épaisseur de la couche atmosphérique dans laquelle se passent les phénomènes lumineux des aurores boréales.

Engelmann (R.). — *Observations méridiennes*. (Leipzig).

Peters (C.-H.-F.). — *Observations de Sirona* (116). (Angl.)

Oppolzer (Th. v.). — *Éphéméride d'Égine* (91).

Rümker (G.). — *Observations à l'équatorial*. (Hambourg).

Ces observations se rapportent aux planètes Amalthée, Sirona, Lomia, Mnémosyne, ainsi qu'aux comètes I et II, 1871, et à la comète d'Encke. Cette dernière présentait, pendant tout le mois de novembre, une chevelure en forme d'éventail ; du 4 au 6 décembre, l'observateur a cru voir une ou même deux queues très-courtes se dirigeant d'abord vers le Soleil et repoussées ensuite en arrière. (*Voir* plus haut les observations de M. Schmidt.)

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations de taches solaires*.

Hall (A.). — *Observations à l'équatorial* (Washington). (16 col., angl.)

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables.*

Möller (Axel). — *Correction des éléments de la comète de Faye.* (Lund.)

En comparant les observations à la théorie, l'auteur est conduit à modifier très-légèrement les éléments de la comète. Il y aurait aussi un très-petit changement à faire à la masse de Jupiter. Au lieu de la valeur adoptée par Bessel

$$m' = \frac{1}{1047,879 \pm 0,235},$$

il vaudrait mieux prendre

$$m' = \frac{1}{1047,788 \pm 0,275}.$$

On voit, au reste, que chacune des valeurs moyennes est comprise dans les limites extrêmes de l'autre.

Oppenheim (H.). — *Détermination de l'orbite de Lydia* 110 *par les observations faites pendant sa première opposition.*

Tietjen (F.). — 1° *Observations d'Até.* 2° *Éléments d'Iphigénie.*

Valentiner (W.) et Becker (E.). — *Observations de planètes et d'étoiles de comparaison au cercle méridien de Leyde.*

Galle. — *Observations télescopiques d'étoiles filantes composées de plusieurs fragments.*

Lorsqu'une étoile filante passe dans le champ du télescope, elle se présente en général comme composée de deux ou plusieurs fragments lumineux séparés par des intervalles obscurs. (Observations de MM. Haidinger, Schmidt, Reimann, etc.). D'après M. Galle, les bruits successifs que l'on entend, lors de la chute d'un aérolithe, tiennent à ce que ce corps se morcelle plusieurs fois avant son explosion définitive, laquelle n'a lieu qu'au moment où, la vitesse planétaire étant à peu près détruite par la résistance de l'air, l'action de la pesanteur devient prépondérante. Reste à savoir si la subdivision existait déjà en partie avant la rencontre de l'aérolithe et de la

Terre, ou si elle ne commence qu'au moment où ce corps pénètre dans l'atmosphère.

LUTHER (R.). — *Observations faites à Düsseldorf : découverte d'une nouvelle planète* (118).

KAISER (F.). — *Observations au 6 pouces de Leyde.*

LIPPIG (H.). — *Observations de taches solaires.*

HOLETSCHEK. — *Éléments et éphéméride d'Até* (111).

PECHÜLE, TIETJEN, BRUHNS, MÖLLER. — *Observations de Peitho* (118).

LEPPIG, BÖRGEN, PETERS (C.-F.-W.). — *Occultations d'étoiles par la Lune.*

PASCHEN. — *Sur l'emploi de la photographie pour l'observation du passage de Vénus.* (34 col.)

Dans des Mémoires précédents, M. Paschen avait donné un exposé sommaire de la méthode qu'il propose, et répondu à quelques objections. (Voir *Bulletin*, t. V, p. 178). Aujourd'hui cet astronome développe minutieusement tous les détails de cette méthode et des expériences préliminaires qu'il a faites pour s'assurer de son exactitude. L'importance de cette communication, qui servira de règle à presque tous les astronomes allemands, lors du passage de Vénus, nous engage à en donner une analyse étendue.

On sait que M. Paschen place au foyer de l'objectif un verre quadrillé qui doit être photographié en même temps que l'image du Soleil. Il compte éviter ainsi les erreurs qui pourraient provenir de la déformation de cette image, mais la méthode exige quelques précautions.

Quatre conditions sont indispensables :

1° Le grossissement doit être assez fort, et donner une image bien délimitée. Un diamètre de 4 pouces est suffisant, et la délimitation est suffisante aussi, si l'erreur ne dépasse pas $0^{mm},01$, ce qui correspond à un angle de $0'',16$. L'exactitude qui en résulte est comparable à celle que pourraient donner des mesures directes prises à l'héliomètre de Königsberg.

2° L'image doit être orientée par rapport à la verticale, ou mieux encore par rapport à l'axe terrestre.

3° Les erreurs qui pourraient provenir du retrait du collodion doivent être éliminées par l'appareil lui-même.

4° Comme il n'est pas certain que l'image chimique et l'image optique du Soleil aient absolument même diamètre, pour qu'il soit possible de déduire les distances angulaires des centres de Vénus et du Soleil de mesures prises sur l'épreuve photographique, il faut que l'appareil donne le moyen d'évaluer avec la plus grande exactitude la valeur d'angle qui correspond au diamètre de cette épreuve.

L'appareil se compose d'un objectif de Steinheil, qui donne une image focale de 19,2 millimètres de diamètre, et d'un oculaire spécial qui grossit six fois cette image sur le négatif. Bien que la distance entre le foyer optique et le foyer chimique de l'oculaire ne soit pas négligeable, on peut y remédier par un déplacement convenable du châssis; mais, pour l'objectif, il est indispensable que cette différence soit à peu près nulle, puisque le réseau qui est au foyer optique doit être photographié en même temps que l'image du Soleil. En outre, il a fallu, par suite de cette dernière circonstance, disposer au point de vue de l'oculaire une fenêtre de 10 millimètres d'ouverture. Cette fenêtre est nécessaire, parce que, chaque région du plan focal recevant ainsi son grossissement d'une partie déterminée de l'oculaire, les erreurs accidentelles, s'il y en a, portent à la fois sur le réticule et sur le verre quadrillé.

Le travail préparatoire de M. Paschen consistait surtout à éprouver l'oculaire de son appareil. Pour cela, il a tracé sur verre, à l'aide de la machine à diviser de Repsold, un double réseau de lignes parallèles qui se coupent orthogonalement; il en a obtenu l'image photographique à l'aide de son oculaire, et il a pris ensuite minutieusement des mesures comparatives sur le réticule et sur l'épreuve.

Les mesures prises sur le réticule ont montré que les traits étaient parfaitement droits et parallèles. Les angles correspondant aux intervalles entre deux traits voisins ont été déterminés comme pour les fils de l'instrument des passages.

Quant à l'image, elle est légèrement déformée par l'oculaire; les distances des lignes photographiées à la ligne centrale ne sont pas absolument proportionnelles aux distances correspondantes comptées sur le réticule; d'où il suit que les lignes de l'épreuve ne sont pas rigoureusement droites. On trouve, en outre, que le grossissement augmente sur les bords, et qu'il n'est pas symétrique par rapport au centre, lorsque le prolongement de l'axe optique de l'oculaire ne passe pas par le centre du réticule. Voici comment M. Paschen remédie à ces inconvénients.

A l'aide d'une série empirique, il exprime les longueurs R comptées sur l'épreuve en fonction des longueurs r comptées sur le verre divisé. Dès lors, pour avoir la position d'un point sur le disque solaire, il suffit de prendre les distances aux côtés du carré qui le renferme, et *une seule* interpolation donne sa distance au centre, exprimée en secondes. Ce procédé est évidemment exact, du moment que les déformations photographiques portent à la fois sur le verre et sur l'image solaire.

On obtient ainsi les coordonnées du centre du Soleil et celles du centre de Vénus; on les corrige de la réfraction, et l'on a alors toutes les données nécessaires pour la recherche de la parallaxe, pourvu que les traits du verre soient orientés par rapport à la verticale ou par rapport à l'axe du monde.

Cette orientation n'offre aucune difficulté, si l'on emploie la monture inventée par Hansen, monture qui permet à la lunette de se mouvoir autour de deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical, tandis que le pied porte en outre un troisième axe parallèle à l'axe du monde. Si, dans un tel appareil, on dispose la plaque de verre de manière que l'une des séries de traits soit rigoureusement perpendiculaire, ou mieux encore, parallèle à l'axe horizontal, la photographie donne immédiatement la *différence de hauteur* des centres des deux astres, ce qui suffit, puisque la parallaxe ne produit de déplacement que dans le sens de la verticale. Un simple pied parallactique exigerait non-seulement un plus grand nombre de mesures, mais encore la détermination rigoureuse de l'angle formé par les deux séries de traits.

Reste le retrait du collodion. Les expériences de M. Paschen montrent que ce retrait est incontestable, mais qu'il est à peu près uniforme. Peu importe, d'ailleurs, à moins qu'il ne se produise des fissures, puisque l'image du Soleil et la plaque de verre sont photographiées simultanément.

D'Arrest. — *Observations spectroscopiques de deux nébuleuses.*

On sait que le spectre des nébuleuses gazeuses se réduit, en général, à trois raies qu'on peut désigner par les notations (1), (2), (3). M. d'Arrest a déterminé le spectre de la belle nébuleuse planétaire H.IV.45, si souvent observée et dessinée par Herschel, lord Rosse, Lassell, etc. Ce spectre se réduit presque absolument à la raie (1), raie de l'azote. On aperçoit des traces des raies (2) et (3). Le noyau donne un spectre continu presque insensible.

La nébuleuse H.IV.37 donne les trois raies : la première est la plus brillante; les raies (2) et (3) paraissent l'emporter alternativement l'une sur l'autre.

La parallaxe de cette dernière nébuleuse est insensible.

Tebbutt (J.). — *Observation de l'éclipse partielle de Soleil du 12 décembre 1871, à Paramatta.*

Peters (C.-H.-F.). — *Sur l'orbite de Miriam* (102). *Éphéméride pour l'opposition de 1872.*

L'auteur rectifie les éléments de cette planète qui ne représentaient plus les observations, soit à cause d'une erreur de réduction, soit par suite d'une confusion commise précédemment entre la planète et quelque petite étoile.

Oppolzer (V.), Bruhns, Pechüle. — *Observations et éphéméride de Peitho* (118).

Borrelly. — 1° *Observations de Peitho* (118) *et d'Égine;* 2° *nébuleuses nouvelles;* 3° *étoile variable.* (Fr.)

Cette étoile varie de la 8e à la 10e grandeur. Ultérieurement, M. Luther annonce qu'il l'avait marquée sur ses cartes, d'abord comme de 9e grandeur, ensuite de 9e-10e.

Henry (Paul). — *Découverte d'une nouvelle planète* (119). (Fr.)

Bruhns. — *Observation de cette même planète.*

Borrelly. — *Découverte d'une nouvelle planète* (120). (Fr.)

Dembowski. — *Observation d'étoiles doubles* (Fr.)

(*A suivre.*) G. L.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et Ch. BRISSE.

2e Série, t. XI; 1872 [1].

HERMITE (Ch.). — *Sur l'équation* $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$.

On doit à Euler les formules qui vérifient identiquement cette équation, et Binet, dans une *Note sur une question relative à la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 248), a observé qu'on pouvait réduire ces formules aux expressions plus simples

$$\begin{aligned} x &= (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b, \\ y &= -(a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b, \\ z &= (a^2 + 3b^2)(a + 3b) + 1, \\ u &= -(a^2 + 3b^2)(a - 3b) - 1. \end{aligned}$$

M. Hermite établit ces résultats en s'appuyant sur la propriété générale des surfaces du troisième ordre, consistant en ce que leurs points se déterminent individuellement. A cet effet, il considère l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1$$

comme représentant une surface du troisième ordre. Une droite variable, qui s'appuiera sur deux droites fixes de cette surface, la coupera en un troisième point variable, dont les coordonnées s'expriment rationnellement. On retrouve ainsi les formules de Binet.

JOACHIMSTHAL. — *Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde.* (2 art., 12 p.)

Suite de la traduction d'un Mémoire inséré dans le *Journal de Crelle*.

LAGUERRE. — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace.* (8 p.)

Étant donné un point imaginaire de l'espace, l'auteur considère le cône ayant ce point pour sommet et pour base le cercle à l'infini.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 75.
Nous avons dû, par suite des limites qui nous sont imposées, supprimer les énoncés de courts articles ou de questions résolues qui se trouvent en grand nombre dans ce Recueil.

Ce cône admet un cercle réel A, qui peut servir à représenter le point imaginaire. Comme par un cercle A et par le cercle de l'infini on peut faire passer deux cônes, le cercle A correspond à deux points imaginaires conjugués l'un de l'autre. Pour distinguer ces deux points, on convient de considérer le cercle comme décrit dans un certain sens par le point mobile; le sens dans lequel il sera supposé décrit déterminera celui des deux points dont il sera la représentation.

Il y a dans ce mode de représentation une question à se poser : Comment se distribuent tous les cercles qui représentent tous les points d'une courbe plane ou gauche? L'auteur étudie, dans cet article et dans les suivants, la solution de cette question pour les courbes gauches qui sont l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.

Koehler. — *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre.* (13 p.)

L'auteur développe une théorie de ces courbes, en prenant pour base la méthode donnée par M. Chasles pour construire une cubique déterminée par neuf points.

Hilaire (A.). — *Note sur le lieu du point de contact de deux cercles mobiles qui doivent être tangents chacun à deux cercles fixes.*

Hunyady (de). — *Étant donnée la fonction*

$$y = A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx,$$

déterminer les coefficients $A_1, \ldots, A_n$, *de manière que, pour* $x = \frac{k\pi}{2n+1}$, y *prenne la valeur* y_k; $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$ *étant des quantités données.*

Painvin (L.). — *Étude d'un complexe du second ordre.* (6 art., ensemble 70 p.)

La question que se propose l'auteur est la suivante : on donne un ellipsoïde; étudier la position des droites par lesquelles on peut mener à cet ellipsoïde des plans tangents rectangulaires.

Ces droites forment un de ces assemblages auxquels les géomètres ont, après Plücker, donné le nom de *complexes*. Le complexe particulier étudié ici est du second ordre; il présente les rapports les plus intimes soit avec les surfaces homofocales, soit avec les surfaces des ondes. L'auteur a toujours eu soin de démontrer directement, sans recourir à la théorie générale des complexes, toutes les propositions sur lesquelles il s'appuie, de telle manière que l'étude qu'il a faite se suffit à elle-même. Quant à l'énoncé de quelques résultats, voir (*Bulletin*, t. II, p. 72) un résumé du travail de l'auteur.

Laguerre. — *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces.* (6 p.)

L'auteur se propose de donner une démonstration nouvelle des formules de la théorie des surfaces dues à MM. Bonnet, Bour, Codazzi. A cet effet, il part des formules plus générales, relatives au déplacement d'un corps solide quelconque, qui ont déjà été employées par quelques auteurs, et notamment par M. A. Picart (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. VI).

Koehler. — *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre.* (11 p.)

Suite de l'article déjà signalé. L'auteur donne le théorème de Carnot, celui de Cotes; il étudie les polaires coniques, et construit les tangentes issues d'un point de la cubique.

Le Besgue (V.-A.). — *Question de théorie des nombres. Si l'équation* $x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4$ *est résolue par*

$$r^2 = t^4 + at^2u^2 + bu^4,$$

elle le sera aussi par

$$x = r^4 - (a^2 - 4b)\,t^4u^4, \quad y = t^4 - bu^4, \quad z = 2rtu.$$

Laguerre. — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace.* (2e art., 10 p.)

Mansion (P.). — *Sur la méthode de Brisson, pour intégrer les équations différentielles à coefficients constants.*

La méthode que signale M. Mansion, et qui est très-ingénieuse, est fondée sur l'emploi des facteurs symboliques. Cauchy en a fait remarquer la fécondité (*Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 175).

Elle consiste à décomposer l'expression

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n\right) y$$

en facteurs

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) y.$$

On sait que les géomètres anglais emploient fréquemment des décompositions symboliques de ce genre. On les utilise même dans la théorie des équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

Koehler. — *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre.* (3e art., 5 p.)

Courbe hessienne. — Faisceaux de cubiques passant par neuf points.

Compagnon. — *Note sur les éléments de Géométrie.*

Hermite (Ch.). — *Sur l'intégration des fonctions rationnelles.*

M. Hermite se propose de montrer que le procédé élémentaire d'intégration des fractions rationnelles $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ peut être présenté sous une forme telle, que la résolution de l'équation $F(x) = 0$ ne soit plus nécessaire pour le calcul de la partie algébrique de l'intégrale, mais seulement pour en obtenir la partie transcendante.

Laguerre. — *Sur les propriétés des sections coniques qui se rattachent à l'intégration de l'équation d'Euler.* (6 p.)

L'auteur parvient au théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où $f(x)$ représente un polynôme du quatrième degré en x, si l'on décompose d'une manière arbitraire le polynôme $f(x)$ en deux facteurs du second degré, en posant

$$f(x) = \theta(x)\varphi(x),$$

l'intégrale générale de cette équation est

$$\frac{\sqrt{\theta(x)\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\varphi(x)}}{x-y} = C,$$

C *désignant une constante arbitraire.*

Allégret. — *Remarques sur une famille de courbes planes.* (6 p.)

Compagnon. — *Démonstration du théorème fondamental relatif au pôle et à la polaire dans le cercle.*

Brocard (H.). — *Démonstration élémentaire des formules relatives à la sommation des piles de boulets.*

Resal (H.). — *Étude géométrique sur le mouvement d'une sphère pesante glissant sur un plan horizontal.* (10 p.)

« Il m'a paru intéressant, dit l'auteur, de chercher à arriver géométriquement aux curieuses propriétés, toutes géométriques d'ailleurs, du mouvement d'une bille qui glisse sur un plan horizontal, propriétés auxquelles Coriolis est arrivé par une belle analyse, peut-être un peu difficile à suivre, à cause du grand nombre de notations qu'elle comporte. »

Laguerre. — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires en Géométrie de l'espace.* (3e art., 14 p.)

L'auteur étudie plus spécialement les normales aux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, au sujet desquelles il donne divers théorèmes.

Padova (E.). — *Démonstration de deux théorèmes de Géométrie.* (6 p.)

Gilbert (Ph.). — *Extrait d'une Lettre adressée à la Rédaction.* (9 p.)

Transon (A.). — *Simples Notes : 1° sur la limite des racines; 2° sur un théorème de Cauchy; 3° sur une question de Licence.* (6 p.)

Faure. — *Théorie des indices, par rapport à une courbe et à une surface du second degré.* (8 p.)

Voici la définition de l'indice : si, par un point m, on mène une transversale rencontrant aux points a, b une conique donnée, le rapport du produit $ma.mb$ au carré du demi-diamètre parallèle à la transversale est l'indice du point m par rapport à la conique.

L'indice d'une droite est égal à l'indice du point où cette droite est rencontrée par le diamètre conjugué à sa direction, divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.

On a des définitions analogues pour les surfaces du second degré.

COMPAGNON. — *Note sur les éléments de Géométrie.* (10 p.)

DEWULF (E.). — *Des intersections des faisceaux de courbes et des faisceaux de leurs polaires inclinées.* (8 p.)

On sait que M. Dewulf a nommé *première polaire inclinée d'un point* P le lieu des points où toutes les droites issues de P rencontrent la courbe sous un angle constant, et *coefficient d'inclinaison* la tangente k de cet angle. L'auteur démontre plusieurs théorèmes importants relatifs à ces polaires.

GERONO. — *De la réalité des racines de l'équation du troisième degré en* S.

MOREAU (C.). — *Sur les permutations circulaires distinctes.* (6 p.)

ANDRÉ (D.). — *Si l'on désigne par a, n deux nombres entiers quelconques supérieurs à l'unité, le quotient* $\frac{n(n+1)\ldots(na-1)}{a^n}$ *est fractionnaire si a est premier, entier si a n'est pas premier.*

LAGUERRE. — *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre, qui est la réciproque de la surface de Steiner.* (3 art., 30 p.)

L'auteur rattache la théorie de cette surface à celle des formes biquadratiques simultanées. Il en retrouve très-simplement les lignes asymptotiques, qui ont été, comme on sait, déterminées d'abord par Clebsch. Les articles suivants contiennent diverses propriétés de la surface.

BROCARD (H.). — *Trouver l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ordinaire.*

Resal (H.). — *Méthode directe pour déterminer l'influence de la rotation de la Terre sur la chute des graves.*

Mister (J.). — *Sur l'hyperboloïde de révolution.*

Zolotareff. — *Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre.* (9 p.)

Dostor (G.). — *Surfaces de révolution du second degré.* (11 p.)

Faure. — *Théorie des indices par rapport à une courbe et une surface du second degré.* (2e art., 20 p.)

M. Faure donne différents théorèmes, dans lesquels interviennent les rapports anharmoniques. Un Chapitre spécial est consacré aux propriétés d'un système de deux, trois ou quatre points, droites et plans, conjugués à une surface du second ordre. La théorie des indices proposée par l'auteur paraît mériter d'être étudiée avec soin.

Maleyx. — *Séparation des racines des équations à une inconnue.* (14 p.)

Resal (H.). — *Interprétation géométrique de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide.* (6 p.)

Aronhold. — *Sur les vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième degré.*

Article traduit de l'allemand, et extrait des *Monatsberichte der Berliner Akademie,* 1864.

Faure. — *Théorèmes de Géométrie.* (7 p.)

Zolotareff. — *Sur l'équation* $Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} Z^2 = 4X$. (11 p.)

T. XII; 1873.

Transon (A.). — *Sur un nouveau mode de construction des coniques.* (16 p.)

Si, en chaque point d'une conique à centre, et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la normale, on porte une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux rayons focaux relatifs à ce point, l'extrémité de cette longueur décrira une conique concentrique à la première et de même genre qu'elle.

Transon (A.), — *Sur un théorème de Dandelin.*

Laguerre. — *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner.* (4e art., 17 p.)

Peaucellier. — *Note sur une question de géométrie du compas.* (7 p.)

L'auteur appelle *compas composé* un système quelconque de pièces rigides articulées à liaison complète, et il fait connaître les compas composés traçant les lignes les plus connues : la droite, le cercle, les coniques, les conchoïdes, la cissoïde. Il rappelle en même temps la solution rigoureuse qu'il a donnée, en 1867, du problème proposé par Watt, et dont le parallélogramme, qui porte le nom de ce célèbre ingénieur, ne donne que la solution approchée.

Resal. — *Sur la capillarité.* (5 p.)

Cet article est extrait du *Traité de Mécanique générale* en cours de publication, et dont le premier volume a déjà paru.

André (D.). — *Théorèmes sur les combinaisons.* (5 p.)

Saltel (L.). — *Théorèmes sur les coniques et sur les surfaces du second ordre.*

Bellavitis (G.). — *Exposition de la méthode des équipollences.* (7 art., 130 p.)

Mémoire publié, à Modène, en 1854; traduit de l'italien par M. Laisant.

M. Hoüel a déjà exposé d'une manière rapide [1] les principes de la méthode des équipollences, et, pour rendre compte de l'utilité et de l'intérêt du travail de M. Laisant, nous ne pouvons mieux faire que de reproduire les appréciations de notre collaborateur.

« Carnot, dans sa *Géométrie de position,* parle des avantages que retirerait la Géométrie de l'introduction d'un algorithme représentant à la fois la grandeur et la position des diverses parties d'une figure, de telle sorte que, sans avoir besoin de recourir à des considérations géométriques spéciales, on pût obtenir les résultats cherchés par l'application d'un calcul fondé sur un petit nombre de lois générales.

» Le désir de Carnot est complétement réalisé, depuis trente-cinq

---

[1] *Nouvelles Annales,* 2e série, t. VIII; 1869.

ans, par le *Calcul des équipollences,* dû au génie inventif de M. Bellavitis. Bien que cette méthode féconde ne soit pas encore connue dans notre pays, cependant les principes sur lesquels elle repose ont été établis pour la première fois en France, il y a plus de soixante ans, par Argand, et développés ensuite à diverses reprises par les travaux de Français, de Mourey, de Saint-Venant, de Cauchy. Nous pourrions encore citer, parmi les Ouvrages relatifs au même sujet, le *Calcul de situation* de Scheffler (Brunswick, 1851), le Mémoire de Siebeck, sur la *Représentation graphique des fonctions imaginaires* (*Journal de Borchardt,* t. 55, 1858), le *Calcul géométrique* de Dillner, etc., etc.

» La méthode des équipollences se distingue principalement par les avantages suivants :

» 1° L'abondance des théorèmes qui découlent d'un principe unique, toute propriété de points placés en ligne droite donnant immédiatement une propriété des points d'un plan, dès qu'on change les équations relatives aux premiers points en équipollences relatives aux seconds;

» 2° La facilité avec laquelle on parvient à la solution graphique des problèmes;

» 3° La théorie des courbes, débarrassée de tout système spécial de coordonnées, conduit à des formules plus simples et en même temps plus générales, qui expriment les propriétés et les affections des courbes, sans qu'il soit besoin de les rapporter à aucun système arbitraire;

» 4° Elle fournit le type réel des quantités imaginaires, par lequel sont pleinement justifiés les calculs de l'Algèbre, de la manière que Cauchy regardait comme la seule satisfaisante. »

Saint-Loup. — *Du rayon de courbure d'une courbe décrite par un point d'une figure mobile.* (13 p.)

Saint-Germain (A. de). — *Détermination des éléments infinitésimaux relatifs aux lignes à double courbure.* (3 art., 14 p.)

Dieu (Th.). — *Mouvement d'un point pesant et libre dans un fluide homogène en repos.* (15 p.)

L'auteur exprime la résistance du fluide par un binôme de la forme $Av + Bv^2$.

LAURENT (H.). — *Note sur un passage de la* Théorie analytique des probabilités.

RÉALIS (S.). — *Scolies pour un théorème d'Arithmétique.* (11 p.)

SABININE. — *Sur l'accélération normale à la trajectoire d'un point d'un système invariable mobile dans son mouvement le plus général.* (8 p.)

L'auteur signale une erreur matérielle commise par M. Resal, dans son important Mémoire sur les *Propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide,* et il donne l'expression exacte de l'accélération normale.

DURRANDE (H.). — *Note sur l'application des déterminants à la théorie des moments des forces.*

WAILLE (J.). — *Sur la distance d'un point à une droite.*

CARON (J.). — *Note sur la détermination des asymptotes dans les intersections des surfaces du second degré.* (8 p.)

TRANSON (A.). — *Sur une propriété des asymptotes et sur cette locution : « Les points situés à l'infini sur un plan sont en ligne droite. »* (7 p.)

RUCHONNET (Ch.). — *Propriété caractéristique de la droite rectifiante.*

KORKINE (A.) et ZOLOTAREFF (G.). — *Sur un certain minimum.* (19 p.)

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes réelles. En désignant par $[A]$ la valeur absolue de la quantité réelle A, on propose de déterminer les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ de $f(x)$, de sorte que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx$$

ait la valeur minimum.

SAINT-GERMAIN (A. DE). — *Sur les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré.*

Dostor (G.). — *Calcul du rayon de la sphère : 1° inscrite dans le tétraèdre, 2° circonscrite au tétraèdre.* (7 p.)

Rodet (L.). — *Démonstration élémentaire de la gravitation universelle.* (16 p.)

Mourgue. — *Expression de* $\sin ma$, $\cos ma$ *en fonction de* $\sin a$ *ou* $\cos a$ *seulement.* (10 p.)

Picart (A.). — *Expression de la différence d'ordre* n *d'une fonction, au moyen de la dérivée du même ordre de cette fonction.* (5 p.)

Catalan (E.). — *Sur l'intégration des différentielles rationnelles.*

Le Besgue (V.-A.). — *Sur les développements de* $\sin na$, $\cos na$, *suivant les puissances de* $2\cos a$, $2\sin a$. (7 p.)

Liguine (V.). — *Sur quelques propriétés du déplacement d'une figure plane dans son plan.* (14 p.)

Delègue. — *Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces.* (6 p.)

André (D.). — *Théorème d'arithmologie.*

Les nombres A, B, α, β étant des entiers supérieurs à zéro, si la somme

$$A^\alpha + B^\beta$$

est un nombre premier, le plus grand commun diviseur des nombres α, β est l'unité ou une puissance de 2.

Resal (H.). — *Essai sur la détermination du frottement de l'air sur un projectile oblong.*

Saltel (L.). — *Application de la généralisation du principe de correspondance à la théorie de l'élimination.*

JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt.

T. 76, Cahiers 3 et 4 ; 1873.

Fuchs (L.). — *Sur les relations qui ont lieu pour les intégrales, prises entre deux points singuliers, des solutions d'équations différentielles linéaires.* (37 p.)

On connaît le théorème sur le changement du paramètre et de l'argument pour la troisième espèce des transcendantes hyperelliptiques; c'est en généralisant, au moyen de ce théorème, l'équation de Legendre pour les modules de périodicité des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce que M. Weierstrass trouva un point de départ pour développer sa théorie des transcendantes supérieures. Cependant Abel a déjà signalé un résultat analogue dans la théorie des équations différentielles linéaires, et Jacobi a encore ajouté aux développements d'Abel et les a rendus plus succincts. Mais, du temps de Jacobi, le caractère des fonctions qui satisfont à des équations différentielles à coefficients rationnels avait été peu étudié; pour cette raison, il était impossible, comme le remarque Jacobi lui-même à la fin de son Mémoire, de donner une forme bien précise aux théorèmes développés.

Depuis environ dix ans M. Fuchs s'est consacré à l'étude de la nature de ces fonctions, et il est ainsi parvenu dans son nouveau Mémoire à préciser d'une manière suffisante les théorèmes d'Abel et de Jacobi. En même temps, il a su établir des relations entre les intégrales prises entre deux points singuliers des solutions des équations différentielles linéaires, relations analogues à celles qui ont été trouvées par Legendre pour les modules de périodicité des intégrales elliptiques, et par M. Weierstrass pour ceux des intégrales hyperelliptiques.

Pour plus de détails, il faut comparer :

Abel, Œuvres complètes, t. II, p. 54-65.

Jacobi, Journal de Crelle, t. 32 (Œuvres, t. I, p. 363).

Weierstrass, Programme du Gymnase de Braunsberg, 1848-49.

Fuchs, trois Mémoires, t. 66, 68, 75 du *Journal de Borchardt* (*Bulletin,* t. IV, p. 233).

Frobenius (G.). — *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen des séries.* (23 p.)

M. Fuchs a déterminé, le premier, la forme des intégrales d'une équation différentielle linéaire, telle que

$$P(y) = p(x)x^{\lambda}y^{(\lambda)} + p_1(x)x^{\lambda-1}y^{(\lambda-1)} + \ldots + p_{\lambda}(x)y = 0,$$

où $p(x), p_1(x), \ldots, p_{\lambda}(x)$ sont des séries développées suivant les puissances ascendantes et positives de la variable x, et qui sont convergentes à l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon R autour de l'origine; où de plus $y^{(k)}$ signifie la $k^{\text{ième}}$ dérivée de y par rapport à x. Plus tard, M. Thomé s'est occupé de la même équation, en y appliquant une méthode qui fournit plus rapidement les résultats; actuellement M. Frobenius y parvient par une nouvelle voie directe. Posons

$$f(x,\rho)=\rho(\rho-1)\ldots(\rho-\lambda+1)p(x)$$
$$+\rho(\rho-1)\ldots(\rho-\lambda+2)p_1(x)+\ldots+p_\lambda(x)=\sum f_r(\rho)\,x^r;$$

soit $g(\rho)$ une fonction arbitraire de ρ, et calculons les fonctions $g_r(\rho)$ depuis $r=1$, à l'aide de la formule récurrente

$$g_r(\rho)f(\rho+r)+g_{r-1}(\rho)f_1(\rho+r-1)+\ldots$$
$$+g_1(\rho)f_{r-1}(\rho+1)+g(\rho)f(\rho)=0.$$

Alors la série

$$g(x,\rho)=\sum_r g_r\,x^{\rho+r}$$

sera convergente à l'intérieur de la circonférence décrite avec le rayon R autour de l'origine, et satisfera à l'équation différentielle

$$\mathrm{P}(y)=f(\rho)\,g(\rho)\,x^\rho.$$

Après cela, l'auteur répartit les racines de l'équation $f(\rho)=0$ en certains groupes, tels que chaque groupe réunit toutes les racines qui ne diffèrent que de nombres entiers. Soient $\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_\mu$ les racines d'un groupe, rangées de manière que, si α est plus petit que β, $\rho_\alpha-\rho_\beta$ soit un nombre entier positif; soit ε non inférieur au maximum de deux racines d'un groupe quelconque; soit enfin

$$g(\rho)=f(\rho+1)f(\rho+2)\ldots f(\rho+\varepsilon)\,\mathrm{C}(\rho),$$

où $\mathrm{C}(\rho)$ est une fonction arbitraire de ρ. Alors, si l'on pose

$$g^{(k)}(x,\rho)=\frac{d^k g(x,\rho)}{d\rho^k},$$

l'intégrale de l'équation différentielle $\mathrm{P}(y)=0$ appartenant à la racine ρ_k sera

$$g^{(k)}(x,\rho_k) = x^{\rho_k}\sum\Big[g_r^{(k)}(\rho_k) + k g_r^{(k-1)}(\rho_k)(\log x) + \frac{k(k-1)}{1.2} g_r^{(k-2)}(\rho_k)(\log x)^k + \ldots + g_r(\rho_k)(\log x)^r\Big] x^r.$$

Les λ intégrales correspondant aux racines de l'équation $f(\rho) = 0$ seront indépendantes les unes des autres.

Frobenius (G.). — *Sur la notion de l'irréductibilité appliquée à la théorie des équations différentielles linéaires.* (36 p.)

L'auteur appelle *irréductible* une équation différentielle linéaire dépourvue de second membre et dont les coefficients sont des fonctions d'une variable définies partout comme monodromes, lorsqu'elle n'a point d'intégrale commune avec une autre équation différentielle linéaire jouissant de la même propriété, mais étant d'un ordre moins élevé; s'il n'en est pas ainsi, il l'appelle *réductible.* Alors, si une équation différentielle linéaire a *une* intégrale commune avec une équation irréductible, elle les aura *toutes* communes avec elle; et si une équation différentielle linéaire est réductible, il existera une équation différentielle linéaire d'ordre inférieur avec laquelle elle aura toutes ses intégrales communes. Supposons maintenant qu'on connaisse les coefficients des relations linéaires qui servent à exprimer les intégrales des systèmes fondamentaux, correspondant aux points singuliers les unes par les autres. Pour ce cas, l'auteur développe la solution du problème de déterminer si une équation différentielle donnée est réductible. Lorsque l'équation différentielle linéaire $P(y) = 0$ a toutes ses intégrales communes avec l'équation différentielle linéaire $Q(y) = 0$, on pourra mettre $P(y)$ sous la forme $R[Q(y)]$, où $R(y)$ est une expression différentielle linéaire. Si les multiplicateurs intégrants des équations différentielles linéaires $Q(y) = 0, R(y) = 0$ satisfont aux équations différentielles linéaires $Q'(y) = 0$, $R'(y) = 0$, les multiplicateurs de l'équation différentielle linéaire $R[Q(y)] = 0$ satisferont à l'équation différentielle linéaire $Q'[R'(y)] = 0$. Ceci résulte aisément de ce que les multiplicateurs de l'équation différentielle linéaire

$$v_\lambda D_x v_{\lambda-1} D_x v_{\lambda-2} \ldots D_x v_1 D_x v_0 y = 0$$

($\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_\lambda$ étant des fonctions de x) satisfont à l'équation différentielle linéaire

$$\nu_0 D_x \nu_1 D_x \nu_2 \ldots D_x \nu_{\lambda-1} D_x \nu_\lambda y = 0.$$

Donc si une équation différentielle linéaire d'ordre λ a toutes ses intégrales communes avec un autre ordre μ, l'équation différentielle linéaire d'ordre λ à laquelle satisfont ses multiplicateurs aura toutes ses intégrales communes avec une autre équation d'ordre $\lambda - \mu$.

Enfin l'auteur démontre ce théorème :

Lorsque, de deux intégrales différentes d'une équation différentielle linéaire, l'une est une expression différentielle homogène et linéaire de l'autre, et à coefficients monodromes, l'équation différentielle sera réductible.

Heine (E.). — *Le potentiel d'un cercle homogène.* (2 p.)

Thomé (L.-W.). — *Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires* (suite) (¹). (30 p.)

En poursuivant ses recherches (*Bulletin*, t. IV, p. 236), M. Thomé examine les relations qui ont lieu entre les deux équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0$$

et

$$(2)\qquad \frac{d^m M}{dx^m} - \frac{d^{m-1} . p_1 M}{dx^{m-1}} + \ldots + (-1)^m p_m M = 0,$$

dont l'une est l'équation différentielle du multiplicateur intégrant de l'autre. Il montre (1) que, si les coefficients p sont des fonctions continues quelconques de x, les intégrales prennent la forme

$$(3)\quad y_1 = \mu_1,\ y_2 = \mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2\, dx, \ldots,\ y_m = \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \ldots \int \mu_{m-1}^{-1} \mu_m\, dx.$$

$$(4)\quad \begin{cases} M_1 = \mu_m^{-1}, \quad M_2 = \mu_m^{-1} \int \mu_m \mu_{m-1}^{-1}\, dx, \ldots, \\ M_m = \mu_m^{-1} \int dx\, \mu_m \mu_{m-1}^{-1} \ldots \int \mu_2 \mu_1^{-1}\, dx. \end{cases}$$

(¹) *Voir* t. 74 et 75.

Les intégrales de l'une des équations différentielles résultent donc immédiatement des expressions de celles de l'autre, ce qui découle de la considération suivante : Si l'on réduit l'équation (1), à l'aide du facteur intégrant μ_m^{-1}, à

$$(5)\qquad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_1^{(1)}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_{m-1}^{(1)}y = c_m\mu_m,$$

où c_m est constant, la substitution $M = \mu_m^{-1}\int \mu_m M^{(1)}\,dx$ réduira l'équation (2) à

$$(6)\qquad \frac{d^{m-1}M^{(1)}}{dx^{m-1}} - \frac{d^{m-2}p_1^{(1)}M^{(1)}}{dx^{m-2}} + \ldots + (-1)^{m-1}p_{m-1}^{(1)}M^{(1)} = 0.$$

Cette substitution, ayant été faite k fois au moyen des k intégrales $\mu_1, \ldots, \mu_k$, ramènera (1) à la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}} + p_1^{(k)}\frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}} + \ldots + p_{m-k}^{(k)}y \\ &\quad = c_{m-k+1}\mu_{m-k+1} + c_{m-k+2}\mu_{m-k+1}\int \mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\,dx + \ldots \\ &\qquad + c_m\mu_{-k+1}\int dx\,\mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\ldots\int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m\,dx, \end{aligned}\right.$$

où les c sont constants, et (2) à la forme

$$(8)\qquad \frac{d^{m-k}M^{(k)}}{dx^{m-k}} - \frac{d^{m-k-1}p_1^{(k)}M^{(k)}}{dx^{m-k-1}} + \ldots + (-1)^{m-k}p_{m-k}^{(k)}M^{(k)} = 0.$$

Les quantités $M_1, M_2, \ldots, M_k$ satisfont à une équation différentielle d'ordre k

$$(9)\qquad \frac{d^k\varphi}{dx^k} - \frac{d^{k-1}.\,g_1\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots + (-1)^k g_k\varphi = 0.$$

Après cela M. Thomé fait voir (2) que les $p_a^{(k)}$ sont des fonctions entières et rationnelles des p_a, des g_a et de leurs dérivées; ces $p_a^{(k)}$ sont donc indépendants du choix des intégrales de l'équation (9).

Pour ses recherches ultérieures, l'auteur suppose que les p_a et les g_a soient des fonctions de l'argument complexe x, monodromes dans le voisinage d'un point $x = a$, continues à l'exception de ce point, et qui deviennent infinies d'un ordre fini pour $x = a$. Dans cette hypothèse, il examine l'indice caractéristique (*Bulletin*, t. IV, p. 236) des équations différentielles précédentes, et montre (2) que, si les intégrales d'une équation différentielle d'ordre k (9) d'indice caractéristique h' satisfont à l'équation différentielle (2) d'indice caractéristique h, les intégrales d'une équation différentielle d'ordre $m-k$ et d'indice caractéristique $h-h'$ satisferont à l'équation différentielle (1), et réciproquement. En appliquant ces considérations à l'équation (1) pour en rechercher les intégrales *régulières* (*Bulletin*, t. IV, p. 236), on trouve que, si l'équation différentielle (1) d'indice caractéristique h possède $m-h$ intégrales linéairement indépendantes (autant qu'elle peut en avoir), l'équation (2) contiendra les intégrales d'une équation différentielle d'ordre h et d'indice caractéristique h, et réciproquement. Or pour reconnaître généralement si l'équation (2) contient les intégrales d'une équation différentielle d'ordre h et d'indice caractéristique h, l'auteur définit (5) les intégrales de l'équation (2) par ces expressions :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &M_1 = \mu_m^{-1}, \quad M_2 = \mu_m^{-1}\int \mu_m \mu_{m-1}^{-1}\,dx, \ldots, \\ &M_k = \mu_m^{-1}\int dx\, \mu_m \mu_{m-1}^{-1} \ldots \int \mu_{m-k+2}\mu_{m-k+1}^{-1}\,dx, \end{aligned} \right.$$

où les dérivées $\dfrac{d\log\mu}{dx}$ sont monodromes dans le voisinage de $x=a$, et deviennent infinies d'un ordre fini pour $x=a$. La continuation de l'étude de ces intégrales fait encore voir que, si l'équation (2) possède h intégrales où $\dfrac{d\log\mu}{dx}$ devienne infini d'un ordre fini, mais supérieur à 1, elles satisferont à une équation d'ordre h et d'indice caractéristique h. C'est pourquoi l'auteur discute (6) la question de savoir si l'équation (2) possède des intégrales de la forme

$$e^{w}(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha, \quad w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}.$$

En posant $M = e^w N$, l'équation différentielle en N contiendra la quantité $\dfrac{dw}{dx} = z$, et celle-ci doit être déterminée de manière que l'équation en N puisse avoir une intégrale de la forme

$$(x-a)^r \sum_0^\infty c_a (x-a)^a.$$

La détermination de z fait l'objet principal du numéro 6; après cela, la convergence du développement

$$(x-a)^r \sum_0^\infty c_a (x-a)^a$$

reste à examiner. Si l'on trouve h intégrales de l'équation (2) jouissant de la propriété définie ci-dessus, elles servent à résoudre l'équation (1) au moyen de la formule (7) dont le premier membre égalé à zéro donne les intégrales régulières. Alors on a aussi résolu l'équation (2), en vertu des relations (3) et (4).

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Paul* GORDAN. (9 p., fr.)

La Lettre se rapporte au système des polynômes entiers en x, U, V, W, tels que le développement de l'expression à trois termes $U \sin x + V \cos x + W$ commence par la plus haute puissance possible de la variable, ce qui forme une extension de la théorie des fractions continues algébriques.

ROSANES. — *Sur un principe d'adjonction des formes algébriques.* (19 p.)

En égalant à zéro l'expression

$$a_0 \alpha_n - \binom{n}{1} a_1 \alpha_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 \alpha_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n \alpha_0,$$

où entrent les coefficients a et α de deux formes binaires de degré n, on établit une relation entre ces formes; l'auteur les appelle *conjuguées*. Dans le premier paragraphe, il considère des groupes conjugués, se bornant à des formes binaires. Après une généralisation du principe pour plusieurs variables, les §§ 2 et 3 développent une représentation de formes algébriques en sommes de puissances, représentation remarquable par la disposition géométrique distincte des droites qui servent de fondements aux formes linéaires. Dans le § 4, on fait l'application du problème aux courbes du troisième ordre; le théorème le plus général des représentations comme sommes de puissances est énoncé au § 5. Le sixième paragraphe, indépendant de la méthode des autres, déduit d'un nouveau principe une représentation de formes ternaires de degré n par $\frac{1}{2}n(n-1)$ puissances, que M. Reye avait déjà trouvée par l'application de considérations empruntées à la Mécanique.

BACHMANN (P.). — *Recherches sur les formes quadratiques*. (11 p.).

M. Hermite, déterminant les substitutions qui transforment une forme quadratique en elle-même, ne montre pas comment on peut tirer ces substitutions immédiatement des relations de transformation et ne prouve pas qu'on les trouve réellement toutes. M. Bachmann complète la méthode de M. Hermite pour les formes ternaires.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Borchardt*. (3 p., fr.)

WEBER (H.). — *Sur la théorie de la transformation des fonctions algébriques*. (4 p.) E. L.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique par un Comité de rédaction, composé de MM. les Maîtres de conférences de l'École.

2e Série, t. I; année 1872 (1).

PUISEUX (V.). — *De l'équilibre et du mouvement des corps pesants, en ayant égard aux variations de direction et d'intensité de la pesanteur*. (26 p.)

Dans les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps pesants à la surface de la Terre, on raisonne ordinairement comme si cette surface était immobile et que les actions de la pesanteur sur des molécules de masses égales fussent égales et parallèles entre elles. On admet aussi que la direction commune de ces actions reste constante relativement aux objets terrestres réputés immobiles.

---

(1) Nous n'analysons que les Mémoires consacrés aux Mathématiques.

En réalité, à prendre les choses à la rigueur, la pesanteur, à un instant déterminé, varie d'intensité et de direction quand on passe d'un point à un point voisin; en outre, les actions du Soleil et de la Lune sur un point de la surface de la Terre n'étant pas tout à fait égales et parallèles aux actions de ces astres sur le centre de notre globe, il en résulte, dans la grandeur et la direction de la pesanteur en chaque point, des changements continuels qui sont rendus manifestes par le phénomène des marées. M. Puiseux se propose d'examiner comment ces diverses circonstances modifient la théorie ordinaire de l'équilibre et du mouvement des corps pesants.

L'auteur commence par exprimer les composantes de l'attraction terrestre, en regardant la Terre comme un noyau solide recouvert d'une couche liquide, le noyau solide étant formé de couches sphériques, dans chacune desquelles la densité est constante, et supposant que la surface libre de la couche liquide soit celle d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation du globe.

Il évalue ensuite les composantes des forces provenant des actions de la Lune, et il montre que leur composition donne une force R variable avec le temps, mais qu'on peut considérer comme indépendante de la position du point matériel.

Cela posé, la connaissance de la force R, de l'attraction terrestre et des forces Φ qui agissent à la surface de la Terre permet d'écrire l'équation générale du mouvement des corps pesants. Cette équation contient des coefficients dont l'auteur, avant toute application, effectue le calcul numérique.

La première application est relative à l'angle que fait un fil à plomb avec la verticale du point de suspension. Il est clair qu'un fil à plomb se dirige suivant la verticale de son extrémité inférieure et non pas suivant celle de son extrémité supérieure. M. Puiseux trouve l'angle de ces deux verticales. Cet angle serait à Paris, pour un fil à plomb de 100 mètres, de $0'', 017$.

L'auteur examine ensuite la forme d'un fil pesant homogène, suspendu par une de ses extrémités. Le fil doit être dans un plan passant par la méridienne, et faisant un angle très-petit avec le méridien. Sa forme serait celle d'une parabole.

La troisième application est relative à la chute dans le vide d'un point pesant, abandonné à lui-même sans vitesse initiale. Le Mémoire se termine par l'étude du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe passant par son centre de gravité, et coïncidant avec la verticale moyenne de ce point. Un tel solide aurait deux ou quatre positions d'équilibre suivant sa forme.

Celle des conséquences qui paraît le plus susceptible d'une vérification expérimentale est relative à la déviation de la verticale, quand on s'élève à une certaine hauteur.

Wolf (C.). — *Description du sidérostat de L. Foucault.* (34 p.)

Resal (H.). — *Du mouvement d'un corps solide relié à un système matériel animé d'un mouvement relatif par rapport à ce corps.* (40 p.)

L'auteur se propose de faire ressortir l'influence sur le mouvement d'un corps solide (S) de l'inertie due au mouvement relatif d'un système (S), dont les points d'appui se trouvent sur le corps. Ce problème comprend comme cas particuliers l'étude des mouvements nuisibles d'une locomotive, celle de quelques appareils gyratoires, la recherche des moments par rapport aux axes principaux d'inertie de la Terre auxquels donnent lieu les oscillations de la mer et de l'atmosphère. L'auteur traite successivement :

1° Du mouvement de translation d'un corps solide, avec application à la stabilité des machines à vapeur;

2° Du mouvement de rotation des corps autour d'un point fixe.

M. Resal examine ensuite quelques cas particuliers dans lesquels la loi du mouvement relatif du système (S) est connue. Enfin il termine par l'étude du cas général où les éléments du mouvement relatif de (S) sont eux-mêmes des inconnues du problème.

Le Mémoire se termine par deux Notes : l'une consacrée au mouvement de translation latéral et au mouvement de lacet des véhicules d'un train de chemin de fer, la seconde à l'étude de l'influence d'une résistance constante sur le mouvement oscillatoire d'un corps produit par une force périodique.

Mascart. — *Sur les modifications qu'éprouve la lumière par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur.* — Ire Partie. (58 p.)

Hermite (Ch.). — *Sur l'intégration des fractions rationnelles* (1). (4 p.).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 181.

Laurent (H.). — *Mémoire sur la théorie des courbes gauches.* (12 p.)

L'auteur traite surtout de l'hélice osculatrice et du cylindre qui la contient; l'axe de cette courbe est la droite suivant laquelle se mesure la plus courte distance de deux normales principales infiniment voisines.

Cornu (A.). — *De la réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque.* (42 p.)

Darboux (G.). — *Mémoire sur les surfaces cyclides.*

L'auteur désigne sous ce nom les surfaces du quatrième ordre qui ont le cercle de l'infini pour ligne double, surfaces dont il a fait une étude développée dans un Ouvrage spécial. ([1])

L'auteur montre, entre autres résultats, qu'il existe sur toute cyclide une série de coniques sphériques, situées sur des sphères dont le centre décrit une cubique gauche ayant des relations remarquables avec la surface. Il détermine les sections planes, qui sont des ovales de Descartes, et les sections sphériques analogues aux ovales de Descartes. Le travail se termine par l'étude de certaines surfaces réglées, formées de normales aux cyclides, et analogues aux belles surfaces réglées trouvées par M. de la Gournerie.

Darboux (G.). — *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace.* (68 p.)

La théorie des tétraèdres et des distances mutuelles des points dans le plan et dans l'espace doit à un grand nombre de géomètres des formules élégantes, établissant des relations entre les aires, les volumes, les distances, se rapportant aux groupes géométriques considérés. Plusieurs équations importantes, dues à Euler, Legendre, Lagrange, Carnot, Gauss, Joachimsthal, Cayley, Sylvester, von Staudt, Siebeck, etc., ont été développées et démontrées par M. Baltzer dans son *Traité des déterminants.* L'auteur se propose de montrer qu'il peut y avoir, dans bien des cas, avantage à considérer ces formules, en les rattachant à certaines formes homogènes qui se présentent naturellement dans cette théorie.

Par exemple, pour le tétraèdre, cette forme homogène est celle qui, égalée à zéro, représenterait la sphère circonscrite. Pour les

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 52.

questions relatives à deux groupes de points, les formes homogènes contiennent deux séries de variables indépendantes; elles sont de la classe de celles qui, égalées à zéro, définissent la corrélation de deux figures. Alors les équations connues et d'autres, peut-être nouvelles, se déduisent de la considération des invariants et des covariants de ces formes.

Dans la première Partie, l'auteur étudie plus spécialement les questions relatives à un seul tétraèdre. Quelques développements se rapportent à un triangle remarquable, qui a pour côtés les trois produits des arêtes opposées du tétraèdre. Ce triangle adjoint a aussi été considéré par Joachimsthal, Möbius, Baltzer et von Staudt. Il demeure invariable quand on effectue une transformation par rayons vecteurs réciproques; il est toujours possible quand le tétraèdre existe, et ne se réduit à une ligne que si la sphère circonscrite se réduit à un point, comme l'a montré M. Cayley dans un élégant article inséré aux *Annali di Matematica* (¹).

A la fin de la première Partie, l'auteur fait usage d'une importante notion relative aux cercles, qui a été proposée par M. Chasles dans la *Géométrie supérieure* et dans la *Théorie des coniques homofocales* (²). Étant donné un cercle dans l'espace, par ce cercle on peut toujours faire passer deux sphères de rayon nul A, A′, dont les centres peuvent être appelés les *foyers du cercle*. Il est clair qu'un cercle est déterminé par ses deux foyers. Il suffit, au contraire, d'un seul de ces points pour déterminer un cercle situé dans un plan. La considération de ces foyers permet à l'auteur de retrouver la belle solution de Gergonne et plusieurs autres solutions du problème des contacts des cercles.

Dans la deuxième Partie sont établies les formules relatives à deux groupes de quatre sphères, deux tétraèdres, deux groupes de n points, n étant quelconque. L'auteur détermine l'équation de la sphère orthogonale à quatre autres, le rayon de cette sphère, les relations entre les angles des sphères et des cercles, la condition pour que cinq sphères soient orthogonales à une même sphère, etc.

Dans la troisième Partie se trouvent quelques applications des

---

(¹) *Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey, par rapport aux cercles qui touchent trois cercles donnés* (2ᵉ série, t. I, p. 132).

(²) *Journal de Liouville,* 2ᵉ série, t. V, p 425.

formules qui ont été données dans les Parties précédentes, par exemple, la construction du cercle coupant trois cercles donnés sous des angles donnés, coupant sous des angles égaux quatre cercles donnés, ou ayant avec quatre cercles donnés une tangente commune de même longueur, etc., et les problèmes analogues relatifs aux sphères.

Le Mémoire se termine par la démonstration d'une identité remarquable, qui lie les puissances d'un point par rapport à cinq sphères. Cette équation est homogène et du second degré; l'auteur y avait été conduit depuis longtemps d'une manière indirecte par ses études sur les cyclides.

Carnot (S.). — *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance.* (64 p.)

L'Ouvrage de Sadi Carnot était depuis longtemps épuisé. Tiré à un petit nombre d'exemplaires, ce mémorable travail est resté longtemps inconnu aux premiers auteurs de la Thermodynamique. C'est pour rendre service aux savants privés de la lecture d'un Ouvrage resté presque inédit, pour rendre un hommage éclatant et exceptionnel à la mémoire de Sadi Carnot, que la Rédaction des *Annales scientifiques de l'École Normale* réimprime aujourd'hui ses *Réflexions sur la puissance motrice du feu.*

T. II; année 1873.

Phillips. — *Notes sur divers points de la Thermodynamique.* (12 p.)

L'auteur traite: 1° des changements d'état d'un corps quelconque suivant une ligne adiabatique; 2° des diverses formules qui donnent la vitesse d'écoulement d'un gaz permanent par un petit orifice percé dans un réservoir; 3° d'une nouvelle forme des équations générales de la Thermodynamique, et sur le coefficient économique des cycles fermés réversibles.

Didon (F.). — *Note sur une formule de Calcul intégral* [1]. (18 p.)

---

[1] Cette Note et la suivante sont les derniers travaux d'un géomètre enlevé tout jeune à la science, et qui donnait les plus belles espérances. Nous avons déjà ailleurs essayé de rendre justice à sa mémoire, en nous faisant l'interprète des sentiments de ses camarades; mais nous tenons à renouveler ici l'expression des regrets de tous les maîtres et de tous les amis de Didon. G. D.

L'auteur démontre la proposition générale suivante, qui avait déjà fait l'objet des études de M. Laurent.

Si Δ désigne le déterminant fonctionnel de n fonctions bien déterminées $f(t, u, v, \ldots)$, $\varphi(t, u, v, \ldots)$, $\psi(t, u, v), \ldots$, à n variables imaginaires $t, u, v, \ldots$, et s'il n'existe aucun système de points $t, u, v, \ldots$, pris le premier sur un contour fermé T, le deuxième sur un contour fermé U, le troisième sur un contour fermé V, etc., susceptible d'annuler ou de rendre infinie l'une quelconque des fonctions $f, \varphi, \psi, \ldots$, l'intégrale multiple d'ordre n

$$\int\int\int\cdots\frac{\Delta}{f(t, u, v, \ldots).\varphi(t, u, v, \ldots).\psi(t, u, v)\ldots}\,du\,dv\,dw\ldots,$$

dans laquelle on fait parcourir à t tout le contour T, à u tout le contour U, etc., aura une valeur de la forme $(2\pi\sqrt{-1})^n p$, p représentant un nombre entier.

Didon (F.). — *Note sur l'attraction.* (6 p.)

L'auteur démontre la proposition suivante :

Si, pour une loi quelconque d'attraction, on considère, relativement à une masse attirante aussi quelconque, une surface d'égale attraction, c'est-à-dire telle que l'attraction de la masse sur tous les points de cette surface ait une même valeur R, les droites suivant lesquelles sont dirigées les attractions sur tous les points de cette surface sont toutes normales à une seconde surface, qui intercepte avec la première sur chacune de ces droites un segment égal au quotient par R du potentiel de la masse attirante sur le point correspondant de la première surface.

Didon applique ensuite cette proposition, et la prend pour point de départ de quelques questions sur l'attraction [1].

---

[1] L'élégant théorème que Didon fait connaître dans sa Note sur l'attraction peut être dégagé de toute notion de Mécanique, et prendre la forme suivante :

« Étant donnée une famille de surfaces, définie par une équation *quelconque*

$$V = F(x, y, z),$$

les normales aux différentes surfaces (V), en tous les points de l'espace pour lesquels on a

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \varphi(V),$$

sont normales à une même surface. »

Kretz. — *Mémoire sur les conditions à remplir dans l'emploi du frein dynamométrique.* (29 p.)

Durrande (H.). — *Essai sur le déplacement d'une figure de forme variable.* (40 p.)

L'auteur se propose d'étudier le déplacement d'une figure dont les diverses parties peuvent se déformer suivant une loi donnée, mais telle cependant que deux positions de la figure puissent être considérées comme deux figures homographiques. Le mouvement d'un corps solide invariable est un cas particulier de celui que traite l'auteur; celui d'un corps naturel en est un également, si l'on suppose les déformations très-petites.

Le point de vue très-général auquel s'est placé l'auteur le conduit à des propositions d'un réel intérêt. Plusieurs de ces propositions sont nouvelles, même quand on les restreint au cas d'un solide invariable.

D'Arlincourt. — *Nouveau relais.* (12 p.)

Niewenglowski. — *Note sur la transformation des courbes par rayons vecteurs réciproques.* (4 p.)

Niewenglowski. — *Sur les arcs de certaines courbes sphériques.* (12 p.)

Allégret. — *Mémoire sur la représentation des transcendantes par des arcs de courbe.* (28 p.)

Le Mémoire débute par un résumé historique, et l'auteur signale d'abord la méthode de Jacques Hermann pour représenter les quadratures par des arcs de courbe, à une quantité algébrique près, ainsi que les formules analogues de Jean Bernoulli. Il expose ensuite une autre méthode pour résoudre complétement le problème dans un grand nombre de cas, et rappelle les recherches de MM. W. Roberts et J.-A. Serret.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude de la transformation exponentielle de Maclaurin et à diverses conséquences de cette méthode. Les Chapitres suivants étudient les courbes que cette transformation fait dériver du cercle, de la ligne droite, des épicycloïdes, etc.

Phillips. — *Note sur un théorème de Cinématique.* (4 p.)

Le problème résolu est le suivant : Étant données deux courbes quelconques MN, M″N″, trouver une courbe M′N′, qui soit telle que, MN roulant sur M′N′, un point a, invariablement lié à MN, décrive M″N″.

Marie (M.). — *Théorie des fonctions de variables imaginaires.* (28 p.)

Dans cette première Partie l'auteur traite de la réalisation et de l'usage des formes imaginaires en Géométrie, ou de l'extension des méthodes de la *Géométrie analytique* de Descartes à l'étude des lieux représentés par les solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables.

Le Chapitre I^er traite des lieux imaginaires et de la définition des courbes que l'auteur appelle *conjuguées;* le Chapitre II, de la construction par points de ces courbes, avec application aux courbes et aux surfaces du second ordre; enfin le Chapitre III traite de la ligne droite et du plan.

Resal (H.). — *Théorie des effets observés par Savart sur l'influence mutuelle de deux pendules.* (15 p.)

Il s'agit de deux pendules oscillant sur des couteaux placés aux extrémités d'une barre horizontale suspendue en son milieu à une verge élastique verticale. L'auteur établit les équations différentielles du mouvement, et fait l'application à quelques cas particuliers.

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics [1].

T. XI (suite); 1871-1872.

Walton (W.). — *Sur certaines intégrales définies.* (5 p.)

L'objet de cet article est de donner des démonstrations simples et nouvelles de certaines intégrales définies qui forment le principal sujet de la suite du *Mémoire sur les intégrales définies,* publié par Poisson dans le tome X du *Journal de l'École Polytechnique.*

L'auteur considère successivement les intégrales

$$\int_0^\pi \frac{(\sin x)^{2n}\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n},\quad \int_0^\pi dx\log(1+2a\cos x+a^2),$$
$$\int_0^\pi \frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x},$$

et quelques autres qui s'y rattachent.

---

(1) Voir *Bulletin,* t. II, p. 267.

Cayley (A.). — *Sur la théorie des courbes et des surfaces développables.* (24 p.)

On sait que l'auteur a établi le premier [1] les formules relatives aux singularités des courbes gauches. Depuis, M. Cayley et M. Zeuthen ont introduit la considération de singularités nouvelles, le premier dans un article *On a special sextic developpable* [2], et le second dans un Mémoire dont nous avons rendu un compte détaillé [3], et qui a paru dans les *Annali di Matematica*, 2e série, t. III; 1869.

L'auteur se propose de reprendre et de développer cette théorie; ses formules ne comprennent pas moins de vingt et une singularités.

Hoppe (R.). — *Déformation d'une sphère élastique pressée entre deux plans parallèles.* (8 p.)

Walton (W.). — *Note sur* $\sin\infty$ *et* $\cos\infty$.

L'auteur combat l'opinion de certains géomètres, qui prétendent que $\sin\infty = \cos\infty = 0$.

Glaisher (J.-W.-L.) — *Sur la sommation, par les intégrales définies, des séries géométriques du second ordre et des ordres supérieurs.* (16 p.)

Cayley (A.). — *Sur un théorème relatif à huit points sur une conique.*

Recherches sur ce théorème connu : *Si un octogone est inscrit dans une conique, les côtés* 1, 3, 5, 7 *de cet octogone coupent les côtés* 2, 4, 6, 8 *en huit points, formant un nouvel octogone inscrit dans une seconde conique.* M. Cayley démontre ce théorème, et forme même l'équation de la nouvelle conique.

Townsend (R.). — *Sur les analogues, dans la théorie des quadriques, de plusieurs propriétés connues des coniques.* (15 p.)

Williamson (B.). — *Sur le théorème de Gauss, relatif à la mesure de la courbure en un point d'une surface.*

Griffiths (J.). — *Sur le cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés.* (6 p.)

---

(1) *Journal de Liouville*, t. X.

(2) *Quarterly Journal*, t. VII; 1865.

(3) Voir *Bulletin*, t. I, p. 139.

Solution analytique de ce problème, proposé par Steiner.

T. XII; 1872-1873.

FERRERS (N.-M.). — *Extension des équations de Lagrange.* (4 p.)

L'auteur présente quelques remarques sur les équations en coordonnées quelconques du mouvement, dues à Lagrange, dans le cas où les équations de condition ont une forme particulière. Il applique ensuite ces équations modifiées à un problème particulier.

CAYLEY (A.). — *Un théorème sur l'élimination* (2 p.)

ABBOTT. — *Théorie élémentaire des marées.* (9 p.)

CAYLEY (A.). — *Note sur les ovales de Descartes.* (3 p.)

COCKLE (J.) — *Sur le mouvement des fluides.* (15 p.)

Suite et fin d'un Mémoire inséré dans le tome XI.

L'auteur étudie des mouvements définis auxquels il donne le nom de *mouvements plans, cylindriques* ou *sphériques.*

WALTON (W.) — *Sur l'évaluation de l'intégrale définie* $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$, *où* $a < 1$. (2 p.)

BALL (R.-S.). — *Étude géométrique sur l'équilibre cinématique et les petites oscillations d'un corps solide.* (7 p.)

WILLIAMSON (B.). — *Conditions pour le maximum ou le minimum d'une fonction d'un nombre quelconque de variables.* (4 p.)

GLAISHER (J.-W.-L.). — *Sur les séries semi-convergentes.* (6 p.)

L'auteur examine différentes séries, notamment la série de Bernoulli pour les différences finies. Il montre comment on peut obtenir cette série, ainsi que le reste, au moyen de l'intégration par parties.

ROBERTS (S.). — *Sur les courbes parallèles aux coniques.* (8 p.)

Dans ces derniers temps, divers géomètres, et parmi eux M. Roberts, ont étudié les courbes parallèles aux courbes algébriques, et en ont fait connaître les singularités. M. Roberts étudie ici les courbes parallèles aux coniques, leurs points de rebroussement et leurs diverses singularités.

TOWNSEND (R.). — *De l'attraction d'un ellipsoïde pour la loi de l'inverse de la quatrième puissance de la distance.* (20 p.)

L'auteur remarque qu'avec la loi qu'il a choisie le problème de l'attraction des ellipsoïdes est d'une solution extrêmement facile. Les résultats peuvent être obtenus d'une manière élémentaire, et ils sont d'une grande simplicité; par exemple, pour un point intérieur, les surfaces d'équilibre sont des ellipsoïdes semblables; pour un point extérieur, ce sont des surfaces homofocales.

JEFFERY (H.). — *Sur les rayons principaux de courbure d'une surface rapportée à des coordonnées tétraédriques et tangentielles.* (26 p.)

L'auteur considère différents systèmes de coordonnées, et il associe dans ses recherches, aux lignes de courbure ordinaires, d'autres lignes qu'il appelle *dual lines of curvature,* et dont les propriétés sont en quelque sorte celles des lignes de courbure ordinaires, transformées par la méthode des polaires réciproques. L'auteur avait déjà étudié ces lignes dans un travail sur les conicoïdes concycliques ([1]). M. Darboux les a aussi considérées, et en a donné quelques propriétés dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* p. 178.

BALL (R.-St.). — *Notes de Mécanique appliquée.* (3 p.)

CAYLEY (A.). — *Sur une équation identique se rattachant à la théorie des invariants.* (4 p.)

CAYLEY (A.). — *Note sur les intégrales*

$$\int_0^{x^2} \cos x^2\, dx \quad et \quad \int_0^{x^2} \sin x^2\, dx.$$

(8 p.)

A propos de ces intégrales, l'illustre géomètre présente des remarques sur les intégrales doubles dans les cas où la courbe limite s'étend à l'infini; il montre qu'il faut tenir compte de la forme de cette courbe limite à l'intérieur de laquelle on intègre. Ainsi l'on peut avoir des résultats différents, suivant qu'on intègre à l'intérieur d'un rectangle dont on fait croître les dimensions, ou d'un cercle dont le rayon devient infini.

([1]) *Quarterly Journal,* t. XI, p. 242.

Walton (W.). — *Sur la connexion entre certains théorèmes de la théorie des intégrales définies.* (3 p.)

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur une équation différentielle liée à celle de Riccati.* (9 p.)

L'auteur examine l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} \pm a^2 u - \frac{i(i+1)}{x^2} u = 0,$$

et il en exprime l'intégrale au moyen de diverses formules.

Townsend (R.). — *Sur une construction relative à la Dynamique d'un corps solide.* (8 p.)

Walton (W.). — *Sur le développement des fonctions en séries trigonométriques.* (2 p.)

L'objet de cet article est de donner la démonstration de la formule

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots = \frac{1}{2}(\pi - x).$$

Cayley (A.). — *Sur la cyclide.* (17 p.)

Dans cet article, l'auteur passe en revue diverses propriétés de la cyclide de Dupin, qui a, comme on sait, quatre points doubles, dont deux au moins sont imaginaires. Il développe les principaux modes de génération de cette surface, et en donne plusieurs équations de forme simple, rationnelles ou irrationnelles : en particulier, il examine la cyclide du troisième degré.

Glaisher (J.-W.-L.). — *Note sur certaines intégrales définies.* (3 p.)

Walton (W.). — *Sur l'expression du cosinus d'un multiple d'un angle en fonction des puissances du cosinus, et inversement.* (4 p.)

La démonstration proposée est purement élémentaire, et n'exige l'emploi d'aucune équation différentielle.

Minchin (G.-M.). — *Démonstration élémentaire d'un théorème fondamental.* (4 p.)

Relatif à la théorie des déterminants fonctionnels.

Cayley (A.). — *Sur les superlignes d'une surface quadrique dans un espace à cinq dimensions.* (5 p.)

WALTON (W.). — *Sur l'évaluation des deux intégrales définies*

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)\cos\alpha} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left[\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)\sin\alpha\right]dx.$$

WALTON (W.) — *Sur l'évaluation de l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1}-x^{-m})\,dx}{(1+x)\log x}, \quad \textit{où} \quad 1 > m > 0.$$

CAYLEY (A.). — *Démonstration du théorème de Dupin.* (7 p.)

WALTON (W.). — *Note sur une des intégrales définies d'Euler*

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin x\,dx = \frac{1}{2}\pi\log\frac{1}{2}.$$

CAYLEY (A.). — *Théorème concernant le hessien d'une fonction quaternaire.* (4 p.)

M. Cayley considère la fonction $P^k + \lambda P'^{k'}$, où P, P' sont deux fonctions homogènes de degrés donnés. Le hessien de cette fonction sera du quatrième ordre en λ. L'article en contient le développement complet, mis sous une forme simple.

CAYLEY (A.). — *Note sur la correspondance* (2, 2) *de deux variables.*

L'auteur entend par là une relation entre x, x' du second degré par rapport à chacune de ces variables. L'étude de cette relation a les rapports les plus étroits avec la théorie des polygones circonscrits et les théorèmes de Poncelet.

FROST (P.). — *Du potentiel moyen sur une surface sphérique.*

TOWNSEND (R.). — *Sur une construction dans la dynamique d'un corps rigide qui roule sans glisser sur une surface fixe rugueuse.* (3 p.)

L'auteur donne une élégante construction pour déterminer l'action de la surface sur le corps en grandeur et en direction.

WATSON (W.-H.). — *Du mouvement d'un point matériel rapporté à un espace en mouvement.* (10 p.)

TOWNSEND (R.). — *Sur une propriété de l'équilibre de deux* *anneaux circulaires se repoussant l'un l'autre, suivant la loi de l'inverse du cube de la distance.*

Walton (W.). — *Sur la $n^{ième}$ différentiation d'une intégrale $\int_b^c \varphi(x, a)\, dx$ par rapport à a, en supposant a compris entre b et c.* (6 p.)

Cette différentiation n'est pas permise si la fonction $\varphi(x, a)$ peut devenir infinie, et l'objet de cet article est de rechercher la différence entre

$$\frac{d^n}{da^n}\int_b^c \varphi(x, a)\, dx \quad \text{et} \quad \int_b^c \frac{d^n}{da^n}\varphi(x, a)\, dx.$$

Cayley (A.). — *Sur le théorème de Wronski.* (8 p.)

Il s'agit d'un théorème considéré par cet auteur comme une réponse à cette question : « En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences, et de résoudre généralement ce problème universel? »

Donné sans démonstration dans la *Réfutation de la Théorie des Fonctions analytiques de Lagrange,* et reproduit dans la *Philosophie de la Technie,* ce théorème a été établi dans le *Supplément à la réforme de la Philosophie*, Paris, 1867; il est donné aussi, mais sans démonstration, dans l'*Encyclopédie mathématique* de Montferrier, t. III, p. 398.

Ce théorème donne le développement de toute fonction $F(x)$ de la racine de l'équation

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \ldots;$$

mais il revient au même de considérer, au lieu de cette équation, la suivante :

$$\varphi(x) + \lambda f(x) = 0.$$

Alors, si l'on désigne par a une racine de l'équation $\varphi(x) = 0$, on aura, x désignant une racine de l'équation précédente,

$$F(x) = F(a) - \frac{\lambda}{1}\frac{1}{\varphi'(a)}F'(a)f(a) + \frac{\lambda^2}{1.2}\frac{1}{\varphi'^3(a)}\begin{vmatrix} \varphi' & f^2F' \\ \varphi'' & (f'F')' \end{vmatrix}$$
$$- \frac{\lambda^3}{1.2.3}\frac{1}{1.2\,\varphi'^6(a)}\begin{vmatrix} \varphi' & (\varphi^2)' & f^3F' \\ \varphi'' & (\varphi^2)'' & (f^3F')' \\ \varphi''' & (\varphi^2)''' & (f^3F')'' \end{vmatrix} + \ldots$$

Roberts (S.). — *De l'ordre de la condition pour que deux surfaces se touchent.*

Glaisher (W.-L.). — *Sur certaines séries pour le développement de π.*

Smith (C.). — *Trouver les foyers et les axes d'une conique en coordonnées trilinéaires.*

Moon (R.). — *Sur l'intégration des équations exactes applicables au mouvement dans un plan d'un fil infiniment mince.* (6 p.)

Townsend (R.). — *Sur les courbes tautochrones et brachistochrones pour les forces parallèles ou concourantes.* (11 p.)

L'auteur emploie les deux propositions suivantes :

« Pour des forces parallèles, toute courbe plane ou gauche, pour laquelle $S^2 = \varphi(z)$, z étant l'ordonnée d'un point dans la direction de la force, est tautochrone pour l'origine des arcs, pour une loi de la force donnée par la formule

$$Z = -\frac{1}{2}k^2\varphi'(z),$$

k étant constant.

» Pour des forces concourantes, toute courbe plane ou gauche, pour laquelle $S^2 = \varphi(r)$, où r est la distance au centre d'attraction, est tautochrone pour une loi de la force exprimée par la formule

$$R = -\frac{k^2}{2}\varphi'(r). \text{ »}$$

L'article contient le développement des nombreuses conséquences de ces deux propositions :

Horner (J.). — *Sur la méthode des factorielles de* W.-G. Horner. (8 p.)

Cayley (A.). — *Sur une transformation spéciale du quatrième ordre des fonctions elliptiques.*

Si l'on pose

$$X = (1 - x^2)(1 - k^2x^2), \quad Y = (1 - y^2)(1 - k^2y^2),$$
$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{(1-k^2)x^2}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{2\,dx}{\sqrt{X}}.$$

WALTON (W.). — *Sur les plans de rayons dans les cristaux à deux axes.* (7 p.)

BESANT (W.-H.). — *Notes mathématiques.* (5 p.)

ROBERTS (S.). — *Sur les caractéristiques plückériennes d'une courbe dont l'équation est un résultant ou un discriminant dans plusieurs cas généraux.* (24 p.)

COCKLE (J.). — *Sur les solutions singulières.* (13 p.)

WATSON (H.-W.). — *Courbure des courbes et des surfaces.* (14 p.)

L'auteur se propose de montrer comment les notions les plus élémentaires sur le mouvement d'un corps solide conduisent aux principales formules relatives à la courbure.

JEFFERY (H.-M.). — *Sur les réciproques des lignes géodésiques et des lignes de courbure sur un ellipsoïde, et sur ses podaires.* (24 p.)

Étude détaillée de ces lignes, et énoncé de plusieurs propositions qui étendent les théorèmes connus.

CAYLEY (A.). — *Note sur certains théorèmes généraux obtenus par M. Lipschitz.*

LIPSCHITZ (R.). — *Extension du problème planétaire à un espace à n dimensions de courbure constante.* (Traduit par M. CAYLEY.) (22 p.)

C'est une application que fait M. Lipschitz de ses beaux travaux bien connus de nos lecteurs.

WARREN (J.). — *Note sur l'optique géométrique.* (10 p.)

ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN (¹).

T. X et t. XI, 1re livraison; 1866-1871.

SEIDEL (L.) et LEONHARD (E.). — *Mesure de l'intensité lumineuse de deux cent-huit étoiles fixes, faites à l'aide du photomètre de Steinheil, pendant les années* 1852-1860. (118 p.)

STEINHEIL (C.-A. v.). — *Le chronoscope, instrument servant à déterminer le temps et la hauteur du pôle sans calcul.* (31 p., 2 pl. et 6 tableaux.)

BAUERNFEIND (C.-M.). — *Nivellement général de la Bavière.* (111 p., 1 pl.)

SEIDEL (L.). — *Sur les valeurs limites d'une exponentielle infinie de la forme*

$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}.$$

(10 p.)

Eisenstein, dans une étude de la fonction définie par l'équation

$$x^y = y,$$

prouve que la convergence de la fonction $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ est seulement pour les valeurs positives de $x \leqq 1$. L'auteur démontre que cette fonction prend des valeurs finies pour les valeurs de $x > 1$, jusqu'à $x = \sqrt[e]{e}$, et établit les principaux résultats suivants :

En désignant par x_n la valeur de la fonction $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ correspondant au nombre d'exposants n, alors, pour x compris entre 0 et $\frac{1}{e^e}$, la limite de x_{2n}, n croissant indéfiniment, est une certaine fonction u qui croît de 0 à $\frac{1}{e}$ et la limite de x_{2n+1} est une autre fonction v décroissant de 1 à $\frac{1}{e}$. Pour $x = \frac{1}{e^e}$, $v = u = \frac{1}{e}$. Pour des valeurs de x plus grandes que $\frac{1}{e^e}$ jusqu'à la valeur limite de $x = \sqrt[e]{e}$, les

(¹) *Mémoires de la Classe mathématique et physique de l'Académie des Sciences de Bavière,* à Munich. — Publiés par fascicules in-4°, à des époques indéterminées.

expressions x_{2n} et x_{2n+1} convergent vers la même limite, qui croît de $\frac{1}{e}$ à e.

Hesse (O.). — *Sur le Problème des trois Corps.* (25 p.)

On sait que le Problème des trois Corps conduit à dix-huit intégrales dont dix seulement sont connues.

L'auteur cherche à déterminer les huit intégrales restantes en traitant le problème suivant : Étant données les équations différentielles du problème de trois corps et les intégrales connues, trouver des équations différentielles symétriques desquelles on pourrait déduire chacune des intégrales inconnues.

Bauernfeind (C.-M.). — *Appareil servant à la solution mécanique des problèmes de Géodésie.* (9 p.)

Les problèmes dont cet appareil donne la solution mécanique sont les problèmes, dits *de Pothenot et de Hansen :*

Construire un quadrilatère dont on connaît deux côtés adjacents et les angles que font les deux côtés avec la diagonale aboutissant à leur sommet commun.

Construire un quadrilatère dont on connaît une diagonale et les quatre angles faits par l'autre diagonale avec les quatre côtés.

Il sert aussi pour la mise en station de la planchette d'arpenteur.

Hesse (O.). — *Un cycle des équations de déterminants.* (16 p.)

Développement analytique du théorème de Pascal.

A. P.

MÉLANGES.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES ;

Par M. Maurice LEVY.

Dans un des derniers cahiers du *Journal de Crelle* (Berlin, 1873), M. Borchardt, en faisant usage du potentiel des forces élastiques, de quelques-unes des considérations récemment développées par M. Lipschitz, sur les fonctions homogènes de *n différentielles,* et enfin d'un théorème bien connu, sur l'intégration multiple, établi par Jacobi dans sa *Theoria novi multiplicatoris*, a donné une nouvelle démonstration des équations remarquables par lesquelles Lamé exprime, en coordonnées curvilignes générales, les déplacements élastiques dans les milieux isotropes.

On sait que, si l'on rapporte les divers points d'un milieu élastique quelconque à des axes rectangulaires, les projections u, v, w, sur ces axes, du déplacement supposé infiniment petit d'un point M du milieu satisfont à trois équations linéaires à différences partielles du second ordre : ceci a lieu, que le milieu soit ou non isotrope; mais, dans le cas particulier des milieux isotropes, il se présente un fait remarquable. Si, aux trois fonctions u, v, w on adjoint quatre fonctions auxiliaires, à savoir : la dilatation cubique au point M et les rotations moyennes autour d'axes parallèles aux axes de coordonnées menés par ce point, ce qui porte à sept le nombre des fonctions à déterminer, ces sept fonctions satisfont à sept équations à différences partielles du premier ordre.

Ce que Lamé a montré, c'est que ces sept équations se maintiennent dans ce qu'elles ont d'essentiel, lorsque les déplacements élastiques, au lieu d'être rapportés à des coordonnées rectilignes, le sont à des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques, et c'est ce résultat que M. Borchardt a de nouveau mis en lumière.

Les calculs du géomètre allemand, bien que n'étant peut-être pas au fond plus courts que ceux de Lamé, sont en eux-mêmes très-intéressants, et par leur élégance, et parce qu'ils font bien ressortir les circonstances analytiques qui expliquent le résultat dû à Lamé; mais, en y regardant de près, on reconnaît que ce résultat est, en réalité, purement géométrique, et que les équations de Lamé ne sont pas autre chose que l'expression analytique d'un théorème très-élémentaire de *Géométrie pure,* établi en 1842 par Cauchy, sur ces quantités que l'illustre géomètre a introduites dans la Science sous le nom de *rotations moyennes*. En partant de ce théorème, il se trouve qu'on peut écrire les équations de Lamé presque sans calcul, et, comme elles sont fondamentales dans la théorie mathématique de l'élasticité, il nous a paru qu'il y aurait peut-être quelque utilité à les présenter de cette manière.

Il y a plus, les équations dont il s'agit ne sont pas applicables aux *surfaces élastiques,* ou du moins ne le sont que quand ces surfaces sont rapportées à leurs lignes de courbure, en sorte qu'elles ne permettraient pas d'étudier l'équilibre et le mouvement d'une surface élastique dont le *bord* ou contour soumis à des conditions données ne serait pas une ligne de courbure.

La marche que nous suivons (analogue, du reste, à celle qui, dans une question tout autre, a été employée par M. Bonnet pour la démonstration des formules de M. Codazzi) permet facilement de combler cette lacune.

I.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M d'un milieu élastique continu, isotrope ou non; u, v, w les projections de son déplacement sur les axes des coordonnées, et U, V, W les rotations moyennes autour de parallèles à ces axes issues du point M : u, v, w; U, V, W sont six fonctions de x, y, z dont les trois dernières sont définies par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} U = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right), \\ V = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right), \\ W = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right). \end{cases}$$

Soient maintenant ρ, ρ_1, ρ_2 les coordonnées curvilignes du point M. Appelons s la ligne d'intersection des surfaces ρ_1 et ρ_2; s_1 la ligne d'intersection des surfaces ρ_2 et ρ; s_2 la ligne d'intersection des surfaces ρ et ρ_1; et appelons, avec Lamé, $\frac{1}{r_i^{(j)}}$ la courbure de la surface ρ_i suivant la ligne de courbure s_j [1].

Les surfaces coordonnées étant ainsi définies, soient R, R_1, R_2 les projections du déplacement élastique du point M sur les normales à ces surfaces en M, et $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ les rotations moyennes autour de

---

[1] Nous prendrons, suivant l'usage, pour sens positif de la normale à une surface ρ_i, le côté de cette surface où le paramètre ρ_i croît, et pour sens négatif celui où il décroît; puis nous attribuerons à chaque courbure $\frac{1}{r_i^{(j)}}$ le signe + ou le signe −, suivant que le centre de cette courbure tombe sur la partie positive ou sur la partie négative de la normale à la surface ρ_i.

ces mêmes normales : R, R_1, R_2 ; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ sont six fonctions des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2.

Supposons qu'on prenne pour axes des coordonnées x, y, z les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 passant au point M.

Alors, pour le point particulier M, origine des coordonnées, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lll} u = \mathrm{R}, & v = \mathrm{R}_1, & w = \mathrm{R}_2, \\ \mathrm{U} = \mathfrak{R}, & \mathrm{V} = \mathfrak{R}_1, & \mathrm{W} = \mathfrak{R}_2. \end{array}\right.$$

Soit maintenant M′ un point pris sur la ligne s à une distance infiniment petite $ds = \dfrac{d\rho}{h}$ de M. En négligeant les infiniment petits du second ordre, les coordonnées rectilignes du point M seront

$$(4)\qquad dx = ds = \frac{d\rho}{h}, \quad dy = dz = 0.$$

Soient $\mathrm{M}'x'$, $\mathrm{M}'y'$, $\mathrm{M}'z'$ les normales aux surfaces ρ_i au point M′. Les projections du déplacement de ce point sur ces normales sont

$$\mathrm{R} + \frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\,d\rho, \quad \mathrm{R}_1 + \frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho}\,d\rho, \quad \mathrm{R}_2 + \frac{d\mathrm{R}_2}{d\rho}\,d\rho,$$

et si a, a', a'' ; b, b', b'' ; c, c', c'' désignent les cosinus des angles que les lignes $\mathrm{M}'x'$, $\mathrm{M}'y'$, $\mathrm{M}'z'$ font respectivement avec les axes des coordonnées $\mathrm{M}x$, $\mathrm{M}y$, $\mathrm{M}z$, les projections du déplacement de M′ sur ces axes seront

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\mathrm{R} + \dfrac{d\mathrm{R}}{d\rho}\,d\rho\right) a + \left(\mathrm{R}_1 + \dfrac{d\mathrm{R}_1}{d\rho}\,d\rho\right) b + \left(\mathrm{R}_2 + \dfrac{d\mathrm{R}_2}{d\rho}\,d\rho\right) c, \\ \left(\mathrm{R} + \dfrac{d\mathrm{R}}{d\rho}\,d\rho\right) a' + \left(\mathrm{R}_1 + \dfrac{d\mathrm{R}_1}{d\rho}\,d\rho\right) b' + \left(\mathrm{R}_2 + \dfrac{d\mathrm{R}_2}{d\rho}\,d\rho\right) c', \\ \left(\mathrm{R} + \dfrac{d\mathrm{R}}{d\rho}\,d\rho\right) a'' + \left(\mathrm{R}_1 + \dfrac{d\mathrm{R}_1}{d\rho}\,d\rho\right) b'' + \left(\mathrm{R}_2 + \dfrac{d\mathrm{R}_2}{d\rho}\,d\rho\right) c''. \end{array}\right.$$

Entre les neuf cosinus qui entrent dans ces expressions, il existe les six relations d'orthogonalité qui, en négligeant les infiniment petits du second ordre, peuvent s'écrire simplement

$$a = b' = c'' = 1, \quad b + a' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad c' + b'' = 0.$$

Mais, puisque la ligne s est une ligne de courbure de la surface ρ, on a

$$c' = 0,$$

et, par suite,

$$b'' = 0.$$

De plus, par la définition même des courbures et de leurs signes,

$$a'' = \frac{ds}{r_1} = \frac{d\rho}{hr_1}, \quad \text{d'où} \quad b = -\frac{ds}{r_1} = -\frac{d\rho}{hr_1},$$

$$a' = \frac{ds}{r_2} = \frac{d\rho}{hr_2}, \quad \text{d'où} \quad c = -\frac{ds}{r_2} = -\frac{d\rho}{hr_2}.$$

Par suite, les expressions ci-dessus des projections du déplacement de M′ sur les axes de coordonnées deviennent, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$(5\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{R} + \left(\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \frac{\mathrm{R}_1}{hr_1} - \frac{\mathrm{R}_2}{hr_2}\right) d\rho,\\ &\mathrm{R}_1 + \left(\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{hr_1}\right) d\rho,\\ &\mathrm{R}_2 + \left(\frac{d\mathrm{R}_2}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{hr_2}\right) d\rho. \end{aligned}\right.$$

Les mêmes projections peuvent être représentées par

$$u + \frac{du}{dx}\,ds = \mathrm{R} + \frac{du}{dx}\,\frac{d\rho}{h},$$

$$v + \frac{dv}{dx}\,ds = \mathrm{R}_1 + \frac{dv}{dx}\,\frac{d\rho}{h},$$

$$w + \frac{dw}{dx}\,ds = \mathrm{R}_2 + \frac{dw}{dx}\,\frac{d\rho}{h};$$

d'où

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\,\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \frac{\mathrm{R}_1}{r_1} - \frac{\mathrm{R}_2}{r_2},\\ \frac{dv}{dx} &= h\,\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{r_1},\\ \frac{dw}{dx} &= h\,\frac{d\mathrm{R}_2}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{r_2}, \end{aligned}\right.$$

ou, en se rappelant la formule très-simple, et dont la démonstration géométrique est immédiate [1],

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{r_i^{(j)}} = \frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\rho_i},$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\frac{dR}{d\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R_1 - \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R_2,\\ \frac{dv}{dx} &= h\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R,\\ \frac{dw}{dx} &= h\frac{dR_2}{d\rho} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R. \end{aligned}\right.$$

En prenant le point M' successivement sur les lignes s_1 et s_2, on trouverait de même les expressions des dérivées partielles de u, v, w, relativement à y et à z. Mais, au lieu des neuf dérivées partielles de u, v, w, il est plus utile de chercher les neuf quantités suivantes, qui ont des significations géométriques :

1° Les trois dilatations linéaires suivant les normales Mx, My, Mz aux trois surfaces coordonnées. La première est fournie par la première équation (7) ; les autres s'en déduisent par permutations tournantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\frac{dR}{d\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R_1 - \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R_2,\\ \frac{dv}{dy} &= h_1\frac{dR_1}{d\rho_1} - \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}R_2 - \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}R,\\ \frac{dw}{dz} &= h_2\frac{dR_2}{d\rho_2} - \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}R - \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}R_1, \end{aligned}\right.$$

d'où, pour la dilatation cubique θ ou $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$,

$$(9)\qquad \theta = hh_1h_2\left(\frac{d\frac{R}{h_1h_2}}{d\rho} + \frac{d\frac{R_1}{h_2h}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{R_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right).$$

2° Les trois quantités $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$ que M. de Saint-Venant a appelées les *glissements transversaux*. La seconde équation (7)

$$(a)\qquad \frac{dv}{dx} = h\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R$$

---

[1] *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § 28.

donne, par symétrie,

$$\frac{du}{dy} = h_1 \frac{dR}{d\rho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} R_1, \tag{b}$$

et, en additionnant (a) et (b), on a la dernière des équations suivantes, les deux autres s'en déduisant par permutations :

$$\text{(10)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} &= \frac{h_2}{h_1}\frac{d R_1 h_1}{d\rho_2} + \frac{h_1}{h_2}\frac{d R_2 h_2}{d\rho_1}, \\ \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} &= \frac{h}{h_2}\frac{d R_2 h_2}{d\rho} + \frac{h_2}{h}\frac{d R h}{d\rho_2}, \\ \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} &= \frac{h_1}{h}\frac{d R h}{d\rho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{d R_1 h_1}{d\rho}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en prenant la demi-différence des expressions (a) et (b), on trouve, pour les rotations moyennes, la dernière des équations suivantes, les deux autres s'en déduisant toujours par permutations,

$$\text{(11)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) &= \mathrm{U} = \mathcal{R} = \frac{h_1 h_2}{2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}\right), \\ \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) &= \mathrm{V} = \mathcal{R}_1 = \frac{h_2 h}{2}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho} - \frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2}\right), \\ \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) &= \mathrm{W} = \mathcal{R}_2 = \frac{h h_1}{2}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}\right). \end{aligned} \right.$$

II.

Remarquons que ce qui précède nous permet déjà d'écrire en coordonnées curvilignes les expressions des forces élastiques agissant sur les trois éléments plans tangents aux surfaces ρ_i qui se croisent au point M d'un corps élastique isotrope; car si A, A_1, A_2 sont les pressions normales à ces éléments, et T, T_1, T_2 les pressions tangentielles, on a

$$A = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, \qquad A_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, \qquad A_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz};$$

$$T = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right), \quad T_1 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right), \quad T_2 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right),$$

λ et μ étant deux constantes dépendant de la nature de la matière isotrope.

En remplaçant les seconds membres de ces expressions par les valeurs (8), (9) et (10), on aura les forces élastiques A_i et T_i en fonction des déplacements R_i; par suite, on aura, au moyen des mêmes déplacements, les pressions sur un élément plan quelconque; et cette méthode pourrait être facilement étendue aux corps hétérotropes, s'il y avait quelque intérêt à faire cette extension.

III.

Cherchons maintenant les dérivées partielles des fonctions U, V, W, comme nous avons cherché celles de u, v, w. Au premier abord, ce problème semble beaucoup plus difficile, parce que les dérivées de U, V, W dépendent des dérivées du second ordre R, R_1, R_2; mais nous allons montrer que le théorème de Cauchy, auquel nous avons fait allusion en commençant, lève la difficulté, et permet d'écrire le résultat cherché, sans aucun calcul nouveau. Ce théorème peut être énoncé ainsi :

Si l'on déforme infiniment peu un milieu continu, élastique ou non, et que sur chacune des droites issues d'un de ses points M *on porte une longueur égale ou proportionnelle à la rotation moyenne autour de cette droite, le lieu des extrémités des longueurs ainsi obtenues est une sphère passant par le point* M.

De là résulte : 1° que le diamètre de la sphère, passant par le point M, est, de toutes les droites issues de ce point, celle pour laquelle la rotation moyenne est maximum; cette rotation est ce que Cauchy nomme la *rotation principale;* 2° que la rotation moyenne autour de toute autre droite issue de M est représentée par la projection sur cette droite de la rotation principale.

Ainsi les rotations moyennes U, V, W se projettent et, par suite, se composent entre elles absolument comme les déplacements u, v, w [1]. Or, pour établir les équations (5), et par suite, toutes celles

---

[1] On peut démontrer le théorème de Cauchy d'une façon très-élémentaire. Soient x, y, z; x', y', z' deux systèmes d'axes rectangulaires. Soient m, n, p; m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2 les cosinus des angles que les x', y', z' font respectivement avec les x, y, z; enfin soient u, v, w; U, V, W les déplacements et les rotations moyennes relatifs aux premiers axes; u', v', w'; U', V', W' les quantités analogues pour le second système

qui en découlent, nous n'avons fait que des projections ; nous pourrions donc répéter mot pour mot tous les raisonnements qui ont conduit à ces équations, en substituant aux lettres u, v, w, R, R_1, R_2 celles U, V, W et $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$. En particulier, nous retrouverions ainsi les analogues des équations (11), de sorte que, en rapprochant les membres extrêmes de ces équations, nous pouvons, sans nouveau calcul, écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} &= h_1 h_2 \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}_1}{h_1}}{d\rho_2} - \frac{d\frac{\mathfrak{R}_2}{h_2}}{d\rho_1} \right), \\ \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} &= h_2 h \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}_2}{h_2}}{d\rho} - \frac{d\frac{\mathfrak{R}}{h}}{d\rho_2} \right), \\ \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} &= h h_1 \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}}{h}}{d\rho_1} - \frac{d\frac{\mathfrak{R}_1}{h_1}}{d\rho} \right). \end{aligned}\right.$$

IV.

Cela posé, quelle que soit la position des axes des coordonnées x, y, z, lorsqu'il s'agit d'un milieu élastique isotrope en équilibre sous l'action de forces quelconques, les sept fonctions u, v, w, U, V, W et θ satisfont aux équations suivantes :

---

d'axes. Au moyen des formules de transformation

$$u' = mu + nv + pw, \qquad x = mx' + m_1 y' + m_2 z',$$
$$v' = m_1 u + n_1 v + p_1 w, \qquad y = nx' + n_1 y' + n_2 z',$$
$$w' = m_2 u + n_2 v + p_2 w; \qquad z = px' + p_1 y' + p_2 z';$$

on trouve sans difficulté

$$\frac{dv'}{dz'} - \frac{dw'}{dy'} = (n_1 p_2 - p_1 n_2)\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) + (p_1 m_2 - m_1 p_2)\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + (m_1 n_2 - n_1 m_2)\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right),$$

ou, à cause que $n_1 p_2 - p_1 n_2 = m$, $p_1 m_2 - m_1 p_2 = n$, $m_1 n_2 - n_1 m_2 = p$, on a la première des trois équations suivantes, les deux autres s'obtenant par symétrie,

$$U' = m\,U + n\,V + p\,W,$$
$$V' = m_1 U + n_1 V + p_1 W,$$
$$W' = m_2 U + n_2 V + p_2 W.$$

Ces équations établissent la proposition énoncée.

1° Pour définir la dilatation cubique,

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \tag{13}$$

2° Pour définir les rotations moyennes,

$$\left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right),\\ V &= \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right),\\ W &= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

3° Entre les rotations moyennes et les composantes X, Y, Z suivant les axes de coordonnées de la force accélératrice rapportée à l'unité de masse

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dx} + \frac{\delta}{2\mu}X,\\ \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dy} + \frac{\delta}{2\mu}Y,\\ \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dz} + \frac{\delta}{2\mu}Z, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

où λ et μ sont, comme précédemment, les deux coefficients d'élasticité relatifs à la matière considérée, et δ sa densité.

Il s'agit de montrer que les sept fonctions R, R_1, R_2, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et θ des coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2 satisfont aussi à sept équations à différences partielles du premier ordre; or cela est évident par ce qui précède. On aura :

1° Pour définir la *dilatation cubique* θ, l'équation (9).

2° Pour définir les rotations moyennes $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, les équations (11), en considérant les deux derniers membres de chacune d'elles.

3° Reste donc à trouver les équations équivalentes à (15). A cet effet, soient F, F_1, F_2 les projections sur les normales aux surfaces ρ_i de la force accélératrice rapportée à l'unité de masse. Les équations (15) ayant lieu, quelle que soit la position des axes de coordonnées, faisons, comme précédemment, coïncider ces axes avec les normales Mx, My, Mz aux surfaces ρ_i qui se croisent en M. Alors les premiers membres de ces équations sont égaux aux premiers membres, et par suite aux seconds membres des équations (12).

De plus

$$X = F, \quad Y = F_1 \quad Z = F_2.$$

Enfin, puisque Mx, My, Mz sont les tangentes aux lignes d'intersection des surfaces ρ_i,

$$\frac{d\theta}{dx} = h\frac{d\theta}{d\rho}, \quad \frac{d\theta}{dy} = h_1\frac{d\theta}{d\rho_1}, \quad \frac{d\theta}{dz} = h_2\frac{d\theta}{d\rho_2};$$

donc les équations (15) deviennent

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 h_2 \left(\frac{d\dfrac{\mathcal{R}_1}{h_1}}{d\rho_2} - \frac{d\dfrac{\mathcal{R}_2}{h_2}}{d\rho_1}\right) &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} h \frac{d\theta}{d\rho} + \frac{\delta}{2\mu} F, \\ h_2 h \left(\frac{d\dfrac{\mathcal{R}_2}{h_2}}{d\rho} - \frac{d\dfrac{\mathcal{R}}{h}}{d\rho_2}\right) &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} h_1 \frac{d\theta}{d\rho_1} + \frac{\delta}{2\mu} F_1, \\ h h_1 \left(\frac{d\dfrac{\mathcal{R}}{h}}{d\rho_1} - \frac{d_2\dfrac{\mathcal{R}_1}{h_1}}{d\rho}\right) &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} h_2 \frac{d\theta}{d\rho_2} + \frac{\delta}{2\mu} F_2, \end{aligned}\right.$$

qui, avec (9) et (10), complètent les équations cherchées.

Ces équations ne sont pas absolument identiques à celles de Lamé. Ces dernières [(25), (26), (27) des §§ CLIV et CLV des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*] contiennent, au lieu des fonctions $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, trois autres fonctions auxiliaires désignées par les lettres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; mais les deux systèmes d'équations deviennent identiques, si l'on pose

$$\mathcal{R} = \tfrac{1}{2} h\mathcal{A}, \quad \mathcal{R}_1 = \tfrac{1}{2} h_1\mathcal{B}, \quad \mathcal{R}_2 = \tfrac{1}{2} h_2\mathcal{C}.$$

Au point de vue analytique, il est évidemment indifférent d'introduire les fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ou les fonctions $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$; mais ces dernières, outre qu'elles rendent les équations un peu plus symétriques, ont une signification géométrique que n'ont pas les premières. Elles paraissent donc préférables.

La méthode qui précède permet aussi facilement de trouver les équations d'équilibre d'une surface élastique, quelles que soient les lignes auxquelles on rapporte les points de cette surface, tandis que les équations de Lamé ne fournissent ce résultat que dans le cas particulier où les surfaces sont rapportées à leurs lignes de courbure.

Nous aurons occasion de revenir sur ce point.

Le gérant responsable : GAUTHIER-VILLARS.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME SIXIÈME. — MAI 1874.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, rue Monge, 29.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET ASTRONOMIQUES.

Ce BULLETIN, fondé en 1870, paraît régulièrement chaque mois. Il a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8° (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal forme depuis le 1er janvier 1873 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables), comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8°.

Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.

Prix pour un an (12 numéros en 2 volumes) :

Paris..	15 fr.
Départements et Algérie..............................	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie........	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce..........	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége.	20

A LA MÊME LIBRAIRIE.

LECOQ DE BOISBAUDRAN. — Spectres lumineux; *spectres prismatiques et en longueurs d'ondes* destinés aux recherches de Chimie minérale. Un vol. de texte grand in-8 et un Atlas, même format, de 29 belles planches gravées sur acier, contenant 56 spectres; 1874............... 20 fr.

Cet Ouvrage, entièrement original, contient 56 spectres prismatiques, choisis parmi les plus utiles en Chimie analytique, et soigneusement reproduits avec tous leurs détails, bandes ombrées à droite et à gauche, raies, intensités variées, etc. Afin de faciliter les comparaisons entre les spectroscopes divers, chaque spectre prismatique a été réduit en longueurs d'ondes sur une deuxième échelle où les raies et bandes sont simplement représentées par des traits. Le texte comprend : des observations sur l'emploi et la graduation du spectroscope, la mesure des raies, les modes d'opérer adoptés et recommandés par l'Auteur, une description détaillée de chacune des raies, bandes ou fonds lumineux existant sur les dessins; enfin, après chaque description du spectre, la liste des raies le plus caractéristiques de la substance étudiée. Les inévitables petites erreurs de gravure ont été relevées et consignées dans le texte.

TABLE DES MATIÈRES.

MAI 1874.

Revue bibliographique.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

DURÈGE (Dr. H.), ord. Professor an der Universität zu Prag. — ELEMENTE DER THEORIE DER FUNCTIONEN EINER COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's bearbeitet. Zweite, zum Theil umgearbeitete Auflage. — Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner, 1873 (1).

Cet Ouvrage, dont la première édition a paru en 1864, est le plus ancien Traité où se trouve exposée en corps de doctrine la théorie fondée par Cauchy, complétée et simplifiée par les découvertes de Riemann.

On possédait depuis longtemps de nombreuses formules fondées sur l'emploi des quantités imaginaires, bien avant que l'on eût cessé de considérer ces quantités comme des symboles d'impossibilité; mais c'est seulement à partir du moment où, se plaçant à un point de vue plus élevé, on a reconnu leur réalité et introduit leur représentation géométrique, que la théorie des quantités complexes a été véritablement fondée. Le premier pas dans cette voie a été fait par Argand en 1806. Quinze ans plus tard, Cauchy, quoique partageant encore les anciennes idées, établissait rigoureusement, dans son *Analyse algébrique,* les bases du Calcul des imaginaires, et bientôt il allait inaugurer, par l'invention du Calcul des résidus, la série de ses prodigieuses découvertes, auxquelles l'usage de la notation géométrique, adoptée par lui dans ses dernières productions, est venue ajouter la clarté et l'harmonie qui jusque-là leur faisaient défaut. Les travaux du grand géomètre ont solidement fondé la théorie de ces quantités, auxquelles l'usage tend maintenant à enlever le nom, désormais impropre, d'*imaginaires*. Il ne restait plus à ses successeurs qu'à la perfectionner.

La représentation géométrique, complétement satisfaisante pour les fonctions à une seule détermination, était encore imparfaite pour les fonctions susceptibles de plusieurs valeurs. Riemann combla cette lacune par l'ingénieuse conception de ses surfaces à plu-

(1) DURÈGE (H.) professeur ordinaire à l'Université de Prague. — *Éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe, principalement au point de vue des créations de Riemann.* Seconde édition, en partie refondue. — Leipzig, Teubner, 1873. 1 vol. in-8°, XII-223 p. Prix 1 Thlr. 20 Sgr.

sieurs nappes. Il alla plus loin : en développant la théorie de la transformation et de la déformation de ces surfaces, il parvint à ramener l'étude des points à l'infini à celle des points à distance finie, et il expliqua, par de pures considérations de Géométrie de situation, la multiplicité des valeurs des intégrales des fonctions non synectiques, et la périodicité des fonctions inverses de ces intégrales.

Le Mémoire dans lequel Riemann avait exposé sa méthode, en 1851, était longtemps resté accessible aux seuls disciples de l'auteur, et les géomètres, pour la plupart, reculèrent devant les difficultés que présentait la lecture de cette œuvre, concise jusqu'à l'obscurité : aussi M. Durège rendit-il un véritable service lorsqu'il publia son livre, il y a dix ans. Pour la première fois on eut sous les yeux un exposé méthodique des doctrines de Cauchy, débarrassées de certaines complications inutiles qu'y avait laissées l'inventeur, et complétées par les découvertes de Riemann, que M. Durège avait pu étudier dans les cahiers de ses élèves, et qu'il présentait avec tous les développements nécessaires et avec la clarté qui distingue ses écrits.

Bien que l'apparition de ce Traité ait été suivie de près par d'autres publications de plusieurs auteurs sur le même sujet, il n'en a pas moins atteint, en peu d'années, sa seconde édition, dans laquelle M. Durège a eu l'occasion d'introduire quelques améliorations. Donnons une idée du contenu de ce volume.

Après une Introduction où l'auteur rappelle les diverses phases qu'a traversées la théorie des quantités négatives et des quantités imaginaires, il expose dans le Chapitre I la représentation géométrique de ces dernières quantités.

Le Chapitre II traite des fonctions d'une variable complexe en général. L'auteur considère exclusivement les fonctions que Cauchy a nommées *monogènes*, et auxquelles seules on peut appliquer les règles du Calcul différentiel établies pour les quantités réelles.

Dans le Chapitre III, où il est question de fonctions à plusieurs déterminations, M. Durège explique leur mode de représentation *uniforme* (*eindeutig*) au moyen des surfaces de Riemann.

Le Chapitre IV est consacré aux intégrales des fonctions d'une variable complexe. L'auteur donne, d'après Riemann, la démonstration du théorème de Cauchy relatif à l'intégrale d'une fonction, prise le long du contour d'une aire à l'intérieur de laquelle la fonction est synectique. Il traite ensuite des intégrales prises autour d'un infini de la fonction, et auxquelles Cauchy a donné le nom de *résidus*.

L'étude du logarithme et de la fonction exponentielle, qui en est l'inverse, forme l'objet du Chapitre V.

Dans le Chapitre VI, M. Durège revient à la théorie générale; il démontre le théorème fondamental de Cauchy sur la représentation d'une fonction sous la forme d'un résidu, et il en tire les développements des fonctions en séries de puissances, infinies dans un seul sens ou dans les deux sens.

Le Chapitre VII comprend l'étude des valeurs infiniment grandes ou infiniment petites des fonctions tant uniformes que multiformes.

Dans le Chapitre VIII, intitulé *Intégrales*, M. Durège s'occupe d'abord des intégrales prises le long d'un contour fermé, puis des intégrales prises le long d'une ligne non fermée.

Ces premiers Chapitres sont restés à peu près tels qu'ils étaient dans la première édition. Des changements plus considérables ont été opérés dans le Chapitre IX, où l'auteur traite la difficile question de l'ordre de connexité des surfaces. Jusqu'à présent on avait bien démontré que le nombre q des sections transverses nécessaires pour transformer une surface donnée en une section simplement connexe est constant pour chaque surface; mais il restait à prouver que, réciproquement, tout système de q sections transverses, quelle que soit la loi de sa formation, changera nécessairement une surface à connexion $(q+1)^{\text{uple}}$ en une surface à connexion simple. Les nouvelles recherches de M. Durège lui ont permis de combler cette lacune importante.

Le Chapitre X, qui est le dernier de la nouvelle édition, a pour objet l'étude des modules de périodicité. L'auteur donne comme exemple l'inversion de la fonction logarithmique, de l'arc-tangente, de l'arc-sinus et de l'intégrale elliptique.

Le Chapitre XI de la première édition, relatif à la détermination d'une fonction d'après ses conditions de discontinuité, a été supprimé à cause des développements étendus qu'eût exigés l'état actuel de la question. L'ancien Chapitre XII a été fondu dans le Chapitre IX.

J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON (1).

T. CLXI; 1871.

CAYLEY (A.). — *Neuvième Mémoire sur les quantiques.* (34 p.)

M. Gordan a fait voir (2) que le nombre des covariants irréductibles d'un quantique binaire d'ordre quelconque est fini, et qu'en particulier, dans les cas d'un quintique et d'un sextique, le nombre des covariants irréductibles, y compris le quantique lui-même et ses invariants (art. 23 et 26), est aussi fini. De la théorie exposée dans son « Second Mémoire sur les quantiques (3) », M. Cayley avait conclu à tort que ce nombre, pour un quintique binaire, était infini. L'erreur provenait de ce que certaines relations linéaires, que l'auteur avait supposées indépendantes, ne le sont pas en réalité. Cette dépendance, qui n'existe pas pour les formes du deuxième, du troisième et du quatrième degré, apparaît seulement à partir du cinquième degré.

Bien que l'auteur ne soit pas encore parvenu à démontrer généralement que le nombre des covariants irréductibles est fini dans tous les cas, il fait voir cependant que la théorie peut se mettre d'accord avec les faits. Il reprend la théorie de M. Gordan pour ce qui touche aux quintiques, et donne les expressions de ceux des vingt-trois covariants qui n'avaient pas été établis dans les Mémoires précédents.

PERRY (S.-J.). — *Observations magnétiques faites à l'Observatoire de Stonyhurst College, d'avril 1863 à mars 1870. Résultats de sept années d'observations des forces horizontale et verticale.* (7 p.)

STRUTT (J.-W.) — *Sur la théorie du son.* (42 p.)

La question des tuyaux sonores, malgré le nombre et le mérite des physiciens qui s'en sont occupés, n'a pas fait jusqu'ici d'aussi grands progrès qu'on eût pu l'espérer. Cela tient, suivant

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 181 et 365.

(2) *Journal de Borchardt*, t. 69; 1869.

(3) *Philosoph. Trans.*, 1856.

M. Strutt, à ce que les expérimentateurs n'ont pas pris assez de soin pour simplifier les conditions de leurs expériences. La théorie des tuyaux ouverts, en particulier, était restée incomplète ou même inexacte tant qu'on a voulu l'asseoir sur l'hypothèse que l'air reste immobile à l'extrémité ouverte du tuyau, jusqu'à ce que M. Helmholtz l'ait enfin établie ([1]), sous certaines restrictions, mais sans rien supposer sur ce qui se passe à l'extrémité ouverte.

M. Helmholtz a traité aussi la question des vibrations de l'air dans des cavités dont les trois dimensions sont très-petites par rapport à la longueur d'onde, et qui communiquent avec l'atmosphère par un ou plusieurs petits trous percés dans leurs surfaces. Le Mémoire de M. Strutt a pour objet de donner la théorie des vibrations de cette nature sous une forme plus générale.

Rankine (W.-J.-M.). — *Sur la théorie mathématique des lignes de courant, particulièrement de celles à quatre foyers et remontantes*. (40 p., 1 pl.)

L'auteur appelle *ligne de courant* (*stream-line*) la trajectoire d'une particule dans un courant permanent de fluide. Chaque trajectoire conserve constamment la même figure, et c'est le lieu d'une file de molécules qui se suivent continuellement. Le mouvement d'un courant permanent peut être représenté à l'œil par un groupe de lignes de cette nature. Ces lignes sont importantes à considérer dans l'architecture navale, quand on veut déterminer la forme d'un vaisseau, de manière que les molécules de l'eau glissent sur sa surface avec le moins de frottement possible.

Ces lignes ont été étudiées déjà par plusieurs auteurs ([2]). M. Rankine a montré, dans ses travaux antérieurs, qu'elles peuvent être ou *unifocales* ou *bifocales*, c'est-à-dire qu'elles peuvent être engendrées par la combinaison d'un mouvement progressif uniforme, avec un autre mouvement consistant dans une divergence des particules à partir d'un certain point ou foyer, suivie d'une convergence soit vers le même point, soit vers un point différent. Sui-

---

([1]) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* (*Journal de Borchardt*, 1860).

([2]) Stokes (*Cambridge Transactions*, 1842 et 1850). — Hoppe (*Quarterly Journal of Mathematics*, 1856). — Rankine (*Philosophical Transactions*, 1864; *Philosophical Magazine*, 1864).

vant l'un ou l'autre de ces cas, les lignes de courant, lorsqu'elles se ferment, sont soit des cercles, soit des ovales. Pour avoir une ligne qui représente la coupe horizontale d'un navire aminci aux extrémités, il faut prendre deux portions appartenant à des courbes différentes, de sorte qu'à chaque extrémité il y a discontinuité de forme et de mouvement.

D'après les expériences faites par M. Froude sur des bateaux de deux formes différentes, la forme appointée à chaque extrémité offre moins de résistance pour les petites vitesses; pour les grandes vitesses, au contraire, la forme la plus avantageuse est une forme où les deux bouts sont arrondis et se relient au corps du bateau par une sorte de col légèrement évidé, rappelant la configuration des oiseaux nageurs. M. Froude a trouvé une infinité de courbes fermées satisfaisant ainsi à la condition d'éviter les discontinuités de mouvement, et que l'on obtient en introduisant *quatre* foyers au lieu de deux. On peut les appeler pour cette raison *lignes de courant quadrifocales*. M. Froude leur a donné le nom de *cycnoïdes* (κυκνοειδής), comme rappelant la forme d'un cygne.

Le Mémoire de M. Rankine se divise en quatre Chapitres, dont le premier étudie les lignes de courant au point de vue cinématique et géométrique. Le Chapitre II résume les principales propriétés des classes particulières de lignes de courant antérieurement connues. Dans le Chapitre III, l'auteur traite spécialement des lignes de courant quadrifocales. Le Chapitre IV a pour objet la théorie dynamique des *surfaces de courant*.

Sabine (sir Edward). — *Phénomènes magnétiques enregistrés à l'Observatoire de Kew. — N° IV. Analyse des principales perturbations indiquées par les magnétomètres de déclinaison et d'inclinaison de l'Observatoire de Kew, de* 1859 *à* 1864. (13 p.)

Pratt. — *Sur la constitution de la croûte solide de la Terre.* (23 p.)

L'auteur applique les données fournies par les récentes observations du pendule dans l'Inde à la vérification de l'hypothèse proposée par lui, en 1864, touchant la constitution de la croûte terrestre. Il suppose que la variété que nous apercevons dans l'élévation et la dépression des diverses portions de la surface du globe formant les montagnes, les plaines et le lit des mers, provient de ce que la masse, en se solidifiant, s'est inégalement contractée ; et que, au-dessous du niveau de la mer, sous les montagnes et les plaines, il y a un déficit de matière à peu près égal à la masse qui s'élève au-dessus de ce niveau. Au-dessous du lit de la mer, il y aurait un excès de matière à peu près égal au déficit que présenterait l'Océan comparé avec la roche ; de sorte que la quantité de matière renfermée dans une colonne verticale de même section, allant de la surface de la Terre jusqu'à une surface de niveau inférieure à la croûte, serait maintenant et aurait toujours été à peu près la même en tous les points de la Terre.

Cayley (A.). — *Sur le problème du triangle inscrit et circonscrit.* (44 p.)

Ce problème est un cas particulier de celui du polygone inscrit et circonscrit, lequel consiste à chercher un polygone tel, que ses sommets soient situés sur une ou plusieurs courbes données, et que ses côtés soient tangents à une ou plusieurs courbes données. On peut chercher d'abord quel est le nombre de ces polygones : lorsque les courbes contenant les sommets sont toutes distinctes des courbes tangentes aux côtés, le nombre des polygones s'obtient aisément et a une expression simple, savoir le double du produit des *ordres* des courbes contenant les sommets par les *classes* des courbes tangentes aux côtés ; mais, lorsque plusieurs de ces courbes se confondent en une seule, et en particulier lorsque tous les sommets doivent être situés sur une courbe et tous les côtés tangents à cette même courbe, le nombre des polygones est beaucoup plus difficile à déterminer. Le présent Mémoire contient la solution complète de tous les cas du problème, lorsque le polygone se réduit à un triangle. Les principes et les méthodes peuvent toutefois s'étendre au cas d'un polygone quelconque, la solution étant fondée principalement sur le principe de correspondance.

Reed (E.-J.). — *Sur l'inégale répartition du poids et de la résistance dans les navires, et sur ses effets dans l'eau calme, dans la vague et dans des positions exceptionnelles à la côte.* (53 p., 6 pl.)

Roscoe (H.-E.) et Thorpe (T.-E.). — *Sur la mesure de l'intensité chimique de la lumière totale du jour à Catane, pendant l'éclipse totale du 22 décembre 1870.* (10 p., 1 pl.)

Gibson (J.-C.) et Barclay (Th.). — *Mesures de la capacité inductive spécifique des diélectriques, prises au laboratoire de Physique de l'Université de Glasgow.* (11 p., 2 pl.)

Casey (J.). — *Sur les cyclides et les sphéro-quartiques.* (137 p.)

L'importance de ce Mémoire nous engage à reproduire ici *in extenso* le résumé qu'en a donné l'auteur dans les *Proceedings of the Royal Society of London* (t. XIX, p. 495) [1].

« Les courbes et les surfaces considérées dans ce travail forment, je crois, une des classes les plus fécondes en propriétés parmi toutes celles que l'on rencontre en Géométrie. Pour en donner une discussion complète et étendue, j'ai partagé mon Mémoire en plusieurs Chapitres. Je vais donner ici une esquisse de la méthode de recherches que j'ai suivie, en mentionnant quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu.

» Si l'on prend l'équation la plus générale du second degré en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, ces variables représentant des sphères au lieu de plans,

$$(a, b, c, d, l, m, n, p, q, r \between \alpha, \beta, \gamma, \delta)^2 = 0,$$

on aura la forme la plus générale sous laquelle puisse s'écrire l'équation d'une cyclide quartique. En partant de cette équation, j'ai prouvé qu'une cyclide quartique est l'enveloppe d'une sphère variable, dont le centre se meut sur une quadrique donnée, et qui coupe orthogonalement la jacobienne des sphères de référence $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

» La jacobienne de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ peut s'écrire sous une forme identique à celle du cercle de l'infini dans le système de coordonnées quadriplanaires. Le carré de la jacobienne peut s'exprimer par une équation du second degré en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Cette équation prend une forme très-simple quand $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont mutuellement orthogonales. Au moyen de cette équation, j'ai fait voir que toute cyclide quartique peut s'écrire sous la forme canonique

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + e\varepsilon^2 = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ étant cinq sphères mutuellement orthogonales. Ce sont

---

[1] *Voir* pour l'historique de cette question la liste de Mémoires placée à la fin de l'ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* dont nous avons rendu compte (*Bulletin*, t. V, p. 52).

les sphères d'inversion de la cyclide, et, en y incorporant les constantes, leurs équations sont liées par une relation identique

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 = 0.$$

» A l'aide de ces équations, j'ai montré que, en général, une quartique peut être engendrée de cinq manières différentes, comme enveloppe d'une sphère variable qui coupe orthogonalement une sphère donnée, et dont le centre se meut sur une quadrique donnée, quadrique à laquelle, en considération d'une de ses plus importantes propriétés, j'ai donné le nom de *quadrique focale* de la cyclide. Toute cyclide a, en général, cinq quadriques focales; ces quadriques focales sont confocales; leurs coniques focales sont les foyers doubles ou *nodo-foyers* de la cyclide.

» J'ai fait voir que les lieux des foyers isolés ou ordinaires des cyclides sont des sphéro-quartiques (courbes d'intersection d'une sphère et d'une quadrique). En général, une cyclide a cinq sphéro-quartiques focales. Si l'on appelle *confocales* deux cyclides ayant une sphéro-quartique focale commune, on peut faire passer par un point quelconque trois cyclides confocales avec une cyclide donnée; ces confocales sont orthogonales entre elles. Je donne encore d'autres méthodes pour engendrer les cyclides : ainsi, étant donnés trois cercles dans l'espace, dont les plans sont des plans diamétraux d'une sphère donnée, et qui sont orthogonaux à la sphère, une cyclide sera engendrée par un cercle variable dans l'espace, s'appuyant sur ces trois cercles. Cette méthode est analogue à celle qui sert à décrire les quadriques réglées par le mouvement d'une ligne.

» L'équation d'une cyclide peut s'interpréter de trois manières différentes, savoir, comme représentant : 1° une cyclide, 2° une sphéro-quartique, 3° un cône tangent à la cyclide. De là résulte que les sphéro-quartiques, tant par leur mode de génération que par un grand nombre de leurs propriétés, présentent une frappante analogie avec les cylindres. Ainsi la forme canonique de l'équation d'une sphéro-quartique est

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des cercles d'une sphère donnée U; les pôles des plans de α, β, γ, δ par rapport à U sont les sommets des quatre cônes qui peuvent être décrits par la sphéro-quartique. Les équations de α, β, γ, δ, en incorporant les constantes, sont liées par une relation identique

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0.$$

Au moyen de cette relation, qui a lieu aussi pour les quartiques bicirculaires, j'ai obtenu les équations des quatre sphéro-coniques focales de la sphéro-quartique. Ces sphéro-coniques se construisent géométriquement comme intersections de U avec les perpendiculaires abaissées de son centre sur les plans tangents aux quatre cônes que l'on peut faire passer par la sphéro-quartique. Les sphéro-coniques focales sont confocales, leurs foyers étant les foyers doubles ou nodo-foyers de la sphéro-quartique.

» Les sphéro-quartiques peuvent être transformées par inversion en bicirculaires; elles peuvent aussi être projetées suivant des bicirculaires, et cela de deux manières : premièrement, sur l'un ou l'autre des plans des sections circulaires de la quadrique dont l'intersection avec la sphère est la sphéro-quartique, au moyen de lignes parallèles à l'axe maximum ou minimum de cette quadrique; en second lieu, par la projection elliptique, c'est-à-dire au moyen des lignes de courbure des quadriques confocales qui passent par chaque point de la sphéro-quartique. La développable formée par les plans tangents à la sphère U en chaque point de la sphéro-quartique jouit de nombreuses propriétés géométriques. Ainsi le cône qui a pour sommet le centre de U, et qui s'appuie sur son arête cuspidale, peut être engendré par les lignes focales d'un cône variable, osculant un cône du second degré, et ayant un double contact avec un autre. L'arête de rebroussement et les lignes nodales de la développable peuvent être projetées suivant la développée et les coniques focales d'une quartique bicirculaire. La développable jouit d'un grand nombre de propriétés anharmoniques : ainsi toutes ses génératrices sont divisées homographiquement par les lignes nodales et la sphère U.

» Dans les Chapitres sur l'inversion et la classification des cyclides, j'ai prouvé que la présence ou l'absence de nœuds dépend des positions relatives de la quadrique focale et de la sphère d'inversion. Ainsi, si elles se touchent, il y aura un nœud conique, la cyclide étant, dans ce cas, l'inverse d'une quadrique, laquelle est un hyperboloïde ou un ellipsoïde, suivant que le nœud a un cône de contact réel ou imaginaire. Si elles sont osculatrices, la cyclide sera l'inverse d'un paraboloïde; le nœud sera biplanaire, si le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique; il sera uniplanaire, si le paraboloïde est cylindrique. Si la quadrique focale et la sphère d'inversion ont un double contact, la cyclide sera l'inverse d'un cône du second degré, et aura deux nœuds, qui devront être des nœuds coniques. Quand une cyclide a des nœuds, le nombre des quadriques focales éprouve une diminution. J'ai donné, dans les mêmes Chapitres, les équations et les singularités des cônes tangents, et j'ai fait voir que, en général, toute cyclide a autant de cônes doublement tangents qu'elle a de quadriques focales; en effet, les cônes doublement tangents sont les réciproques des cônes asymptotiques des quadriques focales. On prouve aussi que les lignes d'intersection d'une cyclide avec ses sphères d'inversion sont des lignes de courbure de la cyclide, et que le cercle imaginaire à l'infini est une courbe flecnodale sur sa surface des centres.

» Dans le Chapitre sur la classification des sphéro-quartiques, j'ai donné les caractéristiques de M. Chasles pour les cercles osculateurs d'une sphéro-quartique. Par inversion, on obtient les caractéristiques pour les cercles osculateurs des quartiques bicirculaires : ainsi $V = 24$ pour ces cercles. Dans le même Chapitre, les équations de M. Cayley, donnant les singularités des arêtes de rebroussement des développables, sont transformées de manière à faire connaître les singularités de la développée d'une courbe plane, étant données trois quelconques des singularités de la courbe.

» Les deux derniers Chapitres contiennent une indication des substitutions à l'aide desquelles, des propriétés des quadriques, on peut conclure les propriétés correspondantes des cyclides. Ces Chapitres sont, en réalité, l'exposé d'une nouvelle méthode de transformation géométrique; effectivement, puisque l'équation générale en α, β, γ, δ que j'emploie est de la même forme que l'équation générale d'une quadrique, si ce n'est que, dans ma méthode, les variables représentent des sphères au lieu de plans, on verra facilement que les théories des invariants, des figures réciproques, etc., dans la Géométrie des surfaces du second degré, ont leurs analogues dans la théorie des cyclides; et, en effet, les modes de démonstration employés pour l'une s'appliquent aussi à l'autre. Cette méthode de transformation est très-féconde ; j'en donne comme exemples de nombreux théorèmes : ainsi le lieu des centres d'une sphère variable, coupant suivant deux sphéro-quartiques doublement tangentes deux cyclides ayant une sphère d'inversion commune, est la développable circonscrite aux quadriques focales de ces cyclides qui correspondent à la sphère commune d'inversion. »

T. CLXII; 1872.

Stone (E.-J.). — *Détermination expérimentale de la vitesse du son.* (5 p.)

Perry (St.-J.). — *Étude magnétique de l'Est de la France en* 1869. (21 p.)

Cayley (A.). — *Corrections et additions au Mémoire sur la théorie des surfaces réciproques (Philosophical Transactions,* vol. CLIX, 1869). (5 p.)

Airy (G.-B.). — *Corrections aux valeurs calculées des longueurs d'ondes lumineuses, publiées dans les* Philosophical Transactions *pour l'année* 1868. (21 p.)

Spottiswoode (W). — *Sur le contact des surfaces.* (24 p.)

Soit P un point commun à deux surfaces U, V; par une droite arbitraire menée de ce point, faisons passer un plan coupant les deux surfaces et pouvant tourner autour de cette droite. L'auteur étudie les ordres de contact des sections ainsi obtenues. Les surfaces auront un contact complet d'un certain ordre, si l'ordre de contact des sections est indépendant de l'azimut de leur plan. Le contact est dit uniaxial, biaxial, etc., suivant qu'il a lieu suivant une, deux,... directions déterminées. Dans la dernière Section, l'auteur présente quelques considérations générales sur la détermination des surfaces ayant des contacts de divers ordres avec des surfaces données.

Evans (F.-J.). — *Sur la valeur actuelle de la déclinaison magnétique occidentale (variation du compas) sur les côtes de la Grande-Bretagne et sur ses changements annuels.* (12 p., 1 pl.)

Sabine (sir Edw.). — *Contributions au magnétisme terrestre.* N° XIII. (81 p., 3 pl.)

Airy (G.-B.). — *Expériences sur la puissance directrice des gros aimants d'acier, des barreaux de fer doux aimantés et des bobines galvaniques, dans leur action sur les petits aimants extérieurs.* (13 p.)

ANNALI di Matematica pura ed applicata. — In-4° [1].

2e Série, t. IV; 1870-1871.

Chistoffel (E.-B). — *Sur un problème proposé par Dirichlet.* (9 p.)

Addition au Mémoire inséré, t. I (2e série) du même Recueil.

Codazzi (D.). — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* (4e Mémoire, 15 p.)

Dans ce nouveau travail, l'auteur rappelle que l'abbé Aoust a introduit un élément géométrique nouveau, la *courbure inclinée,* qui simplifie la théorie des coordonnées curvilignes quelconques de l'espace. Il se propose d'étudier par une méthode particulière, et en employant les mêmes éléments que l'abbé Aoust, les relations entre les trois séries de surfaces déterminant un système de coordonnées curvilignes.

Il considère les neuf composantes obliques de la courbure ordinaire, les dix-huit composantes obliques de la courbure inclinée, et six autres quantités entre lesquelles il établit des relations finies ou aux dérivées partielles du premier ordre.

Geiser (C.-F.). — *Sur un théorème fondamental de la Géométrie.* (6 p.)

L'auteur examine certains modes de démonstration employés en Géométrie pure par M. Chasles et par d'autres géomètres; il adresse des objections à ce principe fondamental, que, si deux variables λ, λ' sont liées l'une à l'autre, de telle manière qu'à une valeur de chacune d'elles ne corresponde qu'une valeur de l'autre, la relation entre λ, λ' est de la forme

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 311, 370.

Ascoli (G.). — *Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des fonctions de variables complexes.* (5 p.)

M. Laurent a donné, dans sa *Théorie des résidus,* le théorème suivant :

Si les fonctions $\varphi_1(z),\ldots,\varphi_n(z),\ldots$ sont synectiques à l'intérieur d'une aire A, *et si la série*

$$\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+\ldots+\varphi_n(z)+\ldots$$

est convergente à l'intérieur de cette aire, ladite série représente une fonction synectique à l'intérieur de l'aire, dont la dérivée sera

$$\varphi'_1(z)+\varphi'_2(z)+\ldots+\varphi'_n(z)+\ldots,$$

et dont l'intégrale sera

$$\int\varphi_1(z)\,dz+\ldots+\int\varphi_n(z)\,dz+\ldots.$$

M. Ascoli se propose de donner une nouvelle démonstration de ce théorème que, du reste, nous croyons inexact.

Fuchs (L.). — *Sur le développement en série des intégrales des équations différentielles linéaires.* (14 p.; fr.)

Étant donnée l'équation

$$(1)\qquad D(y)-p=\frac{d^my}{dx^m}-p_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\cdots-p_0y-p=0,$$

l'auteur appelle *intégrale principale relative à x_0* l'intégrale de cette équation qui se réduit à zéro, ainsi que ses $m-1$ premières dérivées pour $x=x_0$. Cela posé, il remplace $D(y)$ par

$$(2)\qquad D_1(y)-D_2(y)=D(y),$$

de telle manière que $D_1(y)$, $D_2(y)$ soient des fonctions linéaires et homogènes de y et de ses dérivées, et que $D_1(y)$ contienne $\frac{d^my}{dx^m}$, en sorte que D_2y ne contiendra que les dérivées d'ordre inférieur. Soit u_0 une intégrale de l'équation

$$D_1(y)=0,$$

telle que $u_0, \frac{du_0}{dx},\ldots,\frac{d^{m-1}u_0}{dx^{m-1}}$ prennent, pour $x=x_0$, des valeurs qui soient les mêmes que pour la solution cherchée. Alors, en posant

$$y = u_0 + u,$$

u sera l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1(u) = D_2(u) + F_0(x),$$

où l'on a

$$F_0(x) = D_2(u_0) + p.$$

Soit u_1 l'intégrale principale appartenant à x_0 de

$$D_1(u) = F_0(x),$$

et posons

$$u = u_1 + v;$$

alors v sera l'intégrale principale de l'équation

$$D_1(v) = D_2(v) + F_1(x), \quad \text{où} \quad F_1(x) = D_2(u_1).$$

En continuant ces opérations, on trouve que

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_r + v_{r-1}$$

est une intégrale quelconque de l'équation (1), en supposant que u_ρ soit l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1 y = F_{\rho-1}(x), \quad \text{pour} \quad \rho > 0,$$

et u_0 l'intégrale quelconque de l'équation

$$D_1(y) = 0,$$

et que les fonctions F soient liées par les relations

$$F_\rho(x) = D_2(u_\rho), \quad \rho > 0,$$
$$F_0(x) = D_2(u_0) + p,$$

et enfin que u_{r-1} soit l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation

$$D_1 y = D_2 y + F_r(x).$$

L'auteur examine la loi de formation de ces fonctions, démontre la convergence du développement en série auquel il est ainsi conduit, et retrouve, comme application, les beaux résultats publiés par M. Caqué dans le *Journal de Liouville*, en 1864.

Armenante (A.). — *De la représentation des surfaces gauches du genre zéro sur un plan.* (23 p.)

L'auteur développe d'abord la théorie générale ; puis il en fait l'application aux surfaces du quatrième ordre.

Sturm (R.). — *Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du quatrième ordre et de la seconde espèce en quatre points d'un cercle.* (13 p. ; fr.)

Après avoir examiné cette question pour la courbe gauche du quatrième ordre et de la première espèce, M. Sturm passe à l'objet principal de son travail, et montre que, pour la courbe de la seconde espèce, l'enveloppe de tous les plans coupant la courbe en quatre points d'un cercle est une surface de la quatrième classe, ayant huit droites triples, et jouissant de remarquables propriétés. Dans une Note à la suite de cet article, M. Cremona indique plusieurs théorèmes relatifs à la même surface.

Petersen (J.). — *De l'emploi du principe des vitesses virtuelles en ayant égard au frottement.* (9 p.)

Roberts (M.). — *Sur les fonctions abéliennes à quatre périodes.* (10 p.; fr.)

Développement de plusieurs relations entre les intégrales abéliennes.

Thomae (J.). — *Les séries heinéennes supérieures, ou les séries de la forme*

$$1+\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} x^n \frac{1-q^a}{1-q}\,\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{a+n-1}}{1-q^n}\,\frac{1-q^{a'}}{1-q^{b'}}\,\frac{1-q^{a'+1}}{1-q^{b'+1}}\cdots\frac{1-q^{a'+n+1}}{1-q^{b'+n+1}}$$
$$\times\ldots\frac{1-q^{a^{(h)}}}{1-q^{b^{(h)}}}\,\frac{1-q^{a^{(h)}+1}}{1-q^{b^{(h)}+1}}\cdots\frac{1-q^{a^{(h)}+n-1}}{1-q^{b^{(h)}+n-1}}.$$

(15 p.; fr.)

Betti (E.). — *Sur les espaces à un nombre quelconque de dimensions.* (19 p.)

Dini (U.). — *Sur les fonctions d'une variable complexe.* (16 p.)

Cet article traite du développement d'une fonction d'une variable complexe dans un espace compris entre deux cercles concentriques, entre deux ellipses homofocales, etc., en supposant que l'on connaisse la partie réelle pour tous les points du contour, et la partie imaginaire en un point pris à l'intérieur.

Dini (U.). — *Snr quelques formules générales de la théorie des surfaces et sur leurs applications.* (32 p.)

L'auteur examine différentes hypothèses, en particulier les systèmes de coordonnées curvilignes formés avec les deux séries de lignes asymptotiques, ou l'une de ces séries associée à ses trajectoires orthogonales, etc.

Roberts (W.). — *Sur les courbes équidistantes sphériques.* (3 p.; fr.)

Weyr (Ed.). — *Note sur les fonctions dont les dérivées successives forment des séries arithmétiques.* (3 p.; fr.)

Painvin (L.). — *Étude de la courbure en un point multiple d'une courbe plane.* (24 p.; fr.)

Lipschitz (R.). — *Sur la théorie de l'inversion d'un système de fonctions.* (21 p.)

Bardelli (G.). — *Quelques théorèmes de Statique rationnelle.* (12 p.)

Weyr (Em.). — *De la correspondance du second ordre entre deux systèmes simplement infinis.* (9 p.)

L'auteur étudie ce mode de correspondance, dans lequel à un élément de chaque série correspondent deux éléments de l'autre. Il y a quatre points coïncidant avec leurs homologues. M. Weyr applique les résultats obtenus, notamment aux courbes gauches situées sur l'hyperboloïde et à leurs perspectives.

Painvin (L.). — *Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche.* (37 p.; fr.)

Weyr (Em.). — *Sur les courbes gauches rationnelles.* (3 p.)

Zeuthen (H.-G.). — *Note sur les quadriques polaires.* (7 p.; fr.)

M. Zeuthen applique les propriétés des systèmes de quadriques à la détermination de l'ordre de la hessienne et de la steinérienne d'une surface d'ordre quelconque.

Du Bois-Reymond (P.). — *Sur la grandeur relative des infinis des fonctions.* (16 p.; fr.)

Cet article contient plusieur remarques sur les infinis et la classification des fonctions suivant leur type infinitaire.

T. V; 1871-1873.

Hoppe (R.). — *Quelques cas de mouvement d'un point sur un corps en mouvement.* (13 p.; fr.)

Imaginons qu'un corps solide soit obligé de parcourir des positions définies géométriquement, ce qui a lieu si toutes les quantités qui servent à exprimer ces positions sont des fonctions données d'un paramètre, fonction connue ou inconnue du temps. Supposons, de plus, qu'un point matériel ait la liberté de glisser le long d'une ligne fixe de ce corps. L'auteur examine deux cas : 1° celui où le mouvement du corps est réglé à l'avance, et où l'on cherche celui du point matériel; 2° celui où les deux mouvements sont inconnus, et où les conditions initiales seules sont données. Après avoir traité ces questions d'une manière générale, l'auteur fait l'application des résultats au cas où le corps solide est assujetti à tourner autour d'un axe fixe.

Ascoli (G.). — *Démonstration d'un théorème de Cauchy.* (3 p.)

Il s'agit de cette proposition fondamentale : l'équation

$$\frac{du}{dz}=f(u,z),$$

où $f(u, z)$ est une fonction synectique de u et de z, admet une intégrale synectique et une seule, quand les valeurs initiales de u et de z sont données.

Roberts (M.). — *Sur la rectification des lignes de courbure d'un ellipsoïde.* (3 p.; fr.)

Dans le tome II de ce Journal, M. Roberts a fait connaître des formules qui conduisent à la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde qui proviennent de l'intersection de cette surface avec un hyperboloïde gauche.

L'auteur traite actuellement du second système de lignes de courbure situées sur des hyperboloïdes à deux nappes, et complète ainsi la solution du problème qu'il s'était posé.

Combescure (E.). — *Sur diverses conditions d'intégrabilité et d'intégration.* (43 p.; fr.)

Ce Mémoire est divisé en articles : le premier traite de l'intégration d'une expression contenant une fonction déterminée de la variable indépendante et de ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé. L'auteur met sous une forme simple les conditions d'intégrabilité, et il étend ensuite la solution au cas où il y a plusieurs fonctions d'une variable indépendante.

Le troisième article traite de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = f(x, y).$$

M. Combescure cherche dans quel cas il est possible d'intégrer cette équation, au moyen d'une expression contenant, en dehors de tout signe d'intégration irréductible, une fonction arbitraire de x et de ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé, la variable y pouvant entrer d'une manière quelconque dans l'intégrale.

Le quatrième article est relatif au Mémoire de Laplace sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

M. Combescure reprend l'analyse de Laplace, en présentant plusieurs remarques nouvelles, et en indiquant les moyens de simplifier l'emploi de la méthode.

Comme application, il démontre l'importante formule intégrale donnée par Poisson dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour l'équation

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{du}{dx} + \frac{\mu}{x^2} u,$$

λ, μ étant des constantes réelles quelconques.

Reiss (M.). — *Évaluation du nombre de combinaisons desquelles les vingt-huit dés d'un jeu de domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu.* (50 p.; fr.)

Thomae (J.). — *Sur les limites de la convergence et de la divergence des séries infinies à termes positifs.* (10 p.; fr.)

Cremona (L.). — *Sur les transformations rationnelles dans l'espace.* (32 p.)

Noether (M.). — *Sur les courbes multiples des surfaces algébriques.* (14 p.)

L'auteur réunit dans ce travail plusieurs formules relatives au système des points d'intersection de trois surfaces, qui ont en commun une courbe multiple, et aussi au nombre de conditions équivalentes à une courbe multiple sur une surface donnée. Ces résultats constituent l'extension et une exacte détermination d'autres propositions déjà connues, dues principalement à M. Cayley.

Schlaefli (L.). — *Note sur le Mémoire de M. Beltrami : « Sur les espaces à courbure constante ».* (26 p.)

Beltrami (E.). — *Observation sur le Mémoire précédent.* (5 p.)

Schlaefli (L.). — *Sur un théorème de Jacobi, ramené à une forme plus générale, et appliqué à la fonction cylindrique.* (7 p.)

Codazzi (D.). — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* (5[e] Mémoire, 17 p.)

Développement des études précédentes de l'auteur sur la Géométrie infinitésimale.

Gundelfinger (S.). — *Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes du deuxième et du troisième ordre.* (13 p.)

On connaît les expressions données par M. Cayley pour les facteurs linéaires des formes binaires du second et du quatrième ordre en fonction des covariants. Dans le présent travail sont développés des résultats analogues pour une série de formes ternaires quadratiques et cubiques, décomposables en facteurs. Il est divisé en trois Parties : la première traite des formes quadratiques, et contient les formules relatives aux deux facteurs dans lesquels se décompose la forme, quand son déterminant est nul. L'auteur examine ensuite des questions analogues pour les formes ternaires qui sont proportionnelles à leur hessien, ou dont le hessien est identiquement nul. Il applique ensuite ces formules à différents problèmes, et, en particulier, à la recherche des formules données par M. Aronhold pour exprimer les coordonnées des points d'une courbe du troisième ordre en fonction irrationnelle d'un paramètre λ.

Combescure (E.). — *Sur quelques problèmes relatifs à deux séries de surfaces.* (25 p.; fr.)

Le premier article contient le développement de plusieurs formules relatives au système triple orthogonal, formé de surfaces parallèles et de deux séries de développables.

L'auteur se propose ensuite le problème suivant : Étant données deux séries seulement de surfaces aux paramètres respectifs α, β, deux surfaces infiniment voisines du premier système, et deux surfaces infiniment voisines du second, donnent lieu, par leurs intersections réciproques, à un canal quadrangulaire infiniment étroit, et dont la section droite change, en général, de forme et de grandeur quand on chemine le long de l'arête curviligne $\alpha =$ const., $\beta =$ const. On demande que cette section droite reste toujours la même pour un même canal infinitésimal.

Après avoir traité cette question, on demande seulement que la section droite demeure toujours semblable à elle-même, ce qui constitue un nouveau problème devant fournir toutes les solutions du précédent.

Aoust (l'abbé). — *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.* (25 p.; fr.)

Dans la *première Partie* de sa *Théorie des coordonnées curvilignes* (1), l'auteur a exposé les formules qui servent de fondement à cette théorie. La *seconde Partie* (2) a été consacrée aux principales applications de ces formules à la Géométrie des surfaces et des courbes tracées sur les surfaces. L'auteur généralise ces résultats, et déduit des mêmes formules une série de relations se rapportant aux divers éléments des surfaces, relations importantes qui, par suite de l'introduction de la courbure inclinée, prennent un caractère remarquable de simplicité.

Schlaefli (L.). — *Quand est-ce que, d'une surface générale du troisième ordre, il se détache une partie qui ne soit pas réellement coupée par tout plan réel?* (7 p.)

Siacci (F.). — *Sur quelques transformations des déterminants.* (9 p.)

---

(1) *Annali di Matematica*, 1ª Serie, t. VI.

(2) *Ibid.*, 2ª Serie, t. II.

Les articles de ce genre sont peu susceptibles d'analyse. Nous citerons cependant la proposition suivante :

Si l'on pose

$$A = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}, \qquad B = \sum \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{nn},$$

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial a_{rs}}, \qquad \beta_{rs} = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial b_{rs}},$$

on a

$$\begin{aligned} P(\lambda, \mu) &= \sum \pm (\lambda a_{11} + \mu b_{11}) \ldots (\lambda a_{nn} + \mu b_{nn}) \\ &= AB \sum \pm (\mu\alpha_{11} + \lambda\beta_{11})(\mu\alpha_{22} + \lambda\beta_{22}) \ldots (\mu\alpha_{nn} + \lambda\beta_{nn}). \end{aligned}$$

Si, en outre, on fait

$$\sum_t \alpha_{rt} b_{st} = h_{rs}, \quad \sum_t \beta_{rt} a_{st} = k_{rs},$$

on a

$$\begin{aligned} P(\lambda, \mu) &= A \begin{vmatrix} \mu h_{11} + \lambda & \mu h_{12} & \ldots & \mu h_{1n} \\ \mu h_{21} & \mu h_{22} + \lambda & \ldots & \mu h_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mu h_{n1} & \mu h_{n2} & \ldots & \mu h_{nn} + \lambda \end{vmatrix} \\ &= B \begin{vmatrix} \lambda k_{11} + \mu & \lambda k_{12} & \ldots & \lambda k_{1n} \\ \lambda k_{21} + \mu & \lambda k_{22} & \ldots & \lambda k_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda k_{n1} & \lambda k_{n2} & \ldots & \lambda k_{nn} + \mu \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dini (U.). — *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta^2 u = 0$. (40 p.)

On sait que Riemann a, le premier, considéré les problèmes consistant à intégrer l'équation précédente sous certaines conditions déterminées, tout à fait semblables à celles qui se posent en Physique mathématique : par exemple, la fonction u doit rester finie et continue, ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'un contour, et elle doit satisfaire à certaines conditions aux limites qui varient beaucoup suivant la nature de la question. De là, et suivant la forme du contour, un grand nombre de problèmes importants, à quelques-uns desquels M. Dini a déjà consacré un Mémoire cité plus haut, et qui font l'objet de son nouveau travail.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von O. SCHLÖMILCH, E. KAHL und M. CANTOR. — In-8° (¹).

T. XVIII; 1872.

MITTELACHER (C.). — *Sur la théorie générale des coniques.* (32 p.)

L'auteur développe d'abord différentes relations métriques entre des groupes de points et leurs polaires, et il en déduit ensuite les théorèmes fondamentaux de Pappus, de Carnot, de Ménélaüs, de Chasles, de Brianchon.

GEISENHEIMER. — *Sur les systèmes de rayons formés par les tangentes à une surface.* (25 p.)

L'auteur indique quelques propriétés de ces systèmes, et il démontre en particulier que les tangentes à un faisceau de lignes géodésiques d'une surface forment les normales d'une autre surface.

PERLEWITZ (P.). — *Recherches sur les cas dans lesquels un point attiré ou repoussé par deux centres fixes décrit une ellipse ou une hyperbole dont les foyers sont ces deux points.* (35 p.)

L'auteur, après avoir rappelé les recherches d'Euler, de Lagrange, de Legendre, de Jacobi, de MM. Liouville, J.-A. Serret et Königsberger, indique qu'il se propose d'examiner le cas particulier où la trajectoire est une conique. Ce cas est d'ailleurs très-étendu, et il méritait des recherches particulières. L'intégration est achevée au moyen des fonctions Θ.

ENNEPER (A.). — *Note sur l'équation biquadratique.* (3 p.)

SCHLEGEL (V.). — *Sur le poids spécifique des alliages.* (6 p.)

VOSS. — *Sur les coniques qui ont deux points communs.* (5 p.)

ECKARDT (F.-E.). — *Sur les normales à l'ellipse.* (4 p.)

GEER (VAN). — *Sur la théorie du mouvement rectiligne d'un point.* (6 p.)

Étant donnée une force répulsive inversement proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance, si on lance d'un point A vers le centre de répulsion un mobile avec une vitesse v_o, il se rapprochera

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 59.

du centre jusqu'en A', puis s'éloignera à l'infini. On propose de déterminer la vitesse v_0 de telle manière que le temps employé par le mobile pour aller de A en A' soit un maximum.

Jordan (W.). — *Généralisation d'un théorème de la méthode des moindres carrés.* (4 p.)

Caspari (F.). — *Sur la biographie de Bürmann.* (2 p.)

Gilles. — *La force de cohésion ramenée à la loi d'attraction de Newton.* (18 p.)

Wittwer. — *Sur l'espèce de mouvement que nous nommons* chaleur. (44 p.)

Burmester (L.). — *Constructions de Géométrie cinématique, relatives aux hélicoïdes et en particulier à leurs lignes d'ombre.* (18 p.)

Si une hélice glisse sur elle-même, toute courbe qui lui est invariablement liée engendre une surface hélicoïdale. Tous les plans passant par l'axe coupent cette surface suivant des courbes égales, que l'auteur appelle les *méridiens,* et tous les plans normaux à l'axe la coupent suivant d'autres courbes égales, qu'il appelle *courbes normales.* C'est en partant de cette génération par le mouvement que l'auteur établit d'une manière très-simple les propositions relatives au contour apparent et aux lignes d'ombre des hélicoïdes. Comme application, M. Burmester traite l'hélicoïde réglé et ceux dont la courbe normale est une épicycloïde, etc.

Schlegel (V.). — *Détermination mathématique des rapports numériques que présentent les échelles diatoniques majeures, et de la consonnance qui existe entre les divers sons.* (15 p.)

Kötteritzsch (Th.). — *Sur les hypothèses dualistique et unitaire, dans la théorie de l'électricité.* (6 p.)

Okatow (M.). — *Tableau comparatif des mouvements dont reste susceptible un corps soutenu en certains points de sa surface par des appuis normaux, et sur les systèmes de forces qui peuvent être tenus en équilibre par ces appuis.* (3 p.)

Holzmüller (G.). — *Contributions à la théorie des transformations isogonales.* (25 p.)

L'auteur entend par là les transformations planes, définies par des formules telles que

$$X + Yi = \varphi(x + yi).$$

On sait que ces transformations sont les seules qui conservent les angles et la similitude des parties infiniment petites. M. Holzmüller traite successivement les exemples suivants :

$$X + Yi = \cos(x + yi),$$
$$X + Yi = \sin\operatorname{am}(x + yi),$$
$$X + Yi = \sqrt{1 - (x + yi)^2}.$$

Le dernier conduit à des courbes du quatrième ordre bien connues, qui ont été d'abord étudiées par M. Siebeck, comme le rappelle l'auteur.

KÖTTERITZSCH (Th.). — *Contribution à la Mécanique des corps ellipsoïdaux*. (28 p.)

Application à l'ellipsoïde des recherches précédentes de l'auteur sur la distribution de l'électricité.

MÜLLER (F.). — *Relations entre le module des fonctions elliptiques et les invariants de la forme biquadratique binaire*. (8 p.)

MILINOWSKI. — *Générations de figures projectives courbes*. (19 p.)

HEGER (R.). — *L'hexaèdre harmonique et l'octaèdre harmonique*. (5 p.)

Noms donnés par l'auteur : 1° à l'hexaèdre formé par trois couples de plans dont les arêtes d'intersection sont dans un même plan ; 2° à l'octaèdre formé par trois couples de points dont les droites de jonction se coupent en un même point. On a alors cette proposition :

« Si une surface du second ordre contient sept sommets d'un hexaèdre harmonique elle contient le huitième. »

GUNDELFINGER (S.). — *Sur une proposition de la théorie des déterminants*. (3 p.)

Généralisation d'une proposition donnée par M. Kronecker, t. 72 du *Journal de Borchardt*.

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur quelques intégrales de forme générale*. (4 p.)

Dans le tome X du *Zeitschrift*, M. Schlömilch a démontré d'une manière nouvelle les deux formules

$$\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,\frac{h\,du}{h^2+u^2}=\frac{\pi}{2}f(h),$$

$$\int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2i}\,\frac{u\,du}{h^2+u^2}=-\frac{\pi}{2}f(h),$$

dues à Cauchy, et a donné les deux suivantes, qui sont nouvelles,

$$\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,\frac{u\,du}{h^2+u^2}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h+x},$$

$$\int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2i}\,\frac{h\,du}{h^2+u^2}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h-x}-\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h+x},$$

où il ne faut prendre que la partie principale de la première intégrale du second membre. L'auteur fait subir à ces formules diverses transformations.

Eckardt (F.-E.). — *Sur l'épicycloïde et l'hypocycloïde.* (4 p.)

Matthiessen (L.). — *Sur la formule établie par Regnault pour les coefficients moyens de dilatation de l'air atmosphérique et du mercure.* (3 p.)

Becker (J.-C.). — *Sur la théorie des polyèdres.*

Steinschneider (M.). — *Thabit (Thebit) ben Korra. Notice bibliographique.* (8 p.)

Ritsert (E.). — *Sur la réflexion de la lumière par les miroirs inclinés.* (7 p.)

Geisenheimer. — *Les singularités des complexes de lignes.* (17 p.)

Étude de cette question au point de vue le plus général; extension de quelques théorèmes déjà connus pour les complexes du second ordre.

Frahm (W.). — *Sur la génération des courbes de la troisième classe et du quatrième ordre.* (24 p.)

Étude détaillée de ces courbes, dont l'hypocycloïde à trois rebroussements est le type le plus remarquable.

Schönemann (P.). — *Sur la construction et la représentation de l'icosaèdre et du dodécaèdre étoilé.* (5 p.)

WEYRAUCH (J.-J.). — *Équation de la ligne élastique pour une tige rectiligne chargée d'une manière quelconque.* (8 p.)

THOMAE (J.). — *Étude d'un problème de représentation conforme.* (6 p.)

ENNEPER (A.). — *Sur quelques intégrales définies.* (8 p.)

MOHR. — *Sur l'histoire de la Théorie mécanique de la chaleur et de la théorie des gaz.* (9 p.)

LEWÄNEN (S.). — *Sur la surface minimum engendrée par une droite.*

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur la convergence ou la divergence simultanée de deux séries.* (1 p.)

MATTHIESSEN (L.). — *Résolution générale en nombres entiers de l'équation*

$$y^2 = ax^2 \pm 1.$$

(1 p.)

SIMONY. — *Bases d'une nouvelle théorie moléculaire dans l'hypothèse d'une seule matière et d'un seul principe de force.* (48 p.)

SERSAWY (V.). — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles.* (6 p.)

GILLES. — *La force d'inertie ramenée à la loi d'attraction de Newton.* (4 p.)

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur les séries dont la convergence ne subsiste plus quand on prend tous les termes avec le même signe.* (2 p.)

Étant donnée la série

$$\varphi = f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + \ldots,$$

si l'on change l'ordre des termes en faisant suivre p termes positifs de q termes négatifs, la nouvelle somme est égale à l'ancienne augmentée de

$$\frac{1}{2} \log \frac{p}{q} + \lim \left[\omega f(\omega) \right],$$

ω croissant indéfiniment.

SILLDORF. — *La transformation géométrique de l'espace.* (20 p.)

Gundelfinger (S.). — *Résolution d'un système d'équations, dont deux sont quadriques et les autres linéaires.* (9 p.)

L'auteur expose d'une manière élémentaire la résolution de cette question, si importante pour la Géométrie analytique.

Biehringer. — *Des courbes tracées sur les surfaces de révolution.* (36 p.)

Beck (A.). — *Propriétés fondamentales d'un système de lentilles, traitées par la Géométrie.* (13 p.)

Gilles. — *Les forces répulsives de la nature ramenées à la loi d'attraction de Newton.* (12 p.)

Enneper (A.). — *Remarques sur les lignes géodésiques.* (6 p.)

BULLETTINO di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. — In-4° [1].

T. V; 1872.

Cantor (M.), traduit par Biadego (G.-B.). — *Euclide et son siècle. Essai d'histoire mathématique.* (25 p.) [2].

L'auteur fait une étude complète et approfondie des travaux d'Euclide, ainsi que de ses célèbres contemporains : Archimède, Eratosthène et Apollonius.

Le Mémoire est accompagné de plusieurs notes du traducteur.

Martin (Th.-H.). — *Hypothèse astronomique de Pythagore.* (36 p.; fr.)

Ce Mémoire peut se résumer ainsi :

Pythagore et ses premiers disciples ont considéré la Terre comme immobile au centre du ciel, qui, suivant eux, tournait chaque jour autour de la Terre avec tous les astres, et au centre des révolutions, obliquement contraires, du Soleil, de la Lune et des cinq planètes. Ils attribuaient aux planètes des mouvements circulaires et uniformes. Quant à la relation entre la série des intervalles musicaux de la

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 96.

[2] *Euklid und sein Jahrhundert* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XII, 1857, Supplément).

gamme et la série des distances des orbites, Pythagore n'y pouvait voir ni identité ni proportionnalité, mais seulement une analogie plus ou moins éloignée.

Martin (Th.-H.). — *Hypothèse astronomique de Philolaüs.* (31 p.; fr.)

Suivant Philolaüs, la Terre tournait autour d'un Feu central (Hestia), placé au centre du monde; elle comptait, ainsi que le Soleil, au nombre des planètes. Pour compléter le nombre 10 qu'il avait pris pour base de son harmonie céleste, il avait imaginé l'Antichthone, situé entre la Terre et le Feu central, et toujours invisible pour l'hémisphère terrestre que nous habitons. Dans son système le Soleil était une espèce de lentille recevant et condensant la lumière diffuse dans l'espace.

Mansion (P.). — *Notice sur les travaux de* Jules Plücker, *par* M. Alfred Clebsch. (Traduit de l'allemand.) (29 p.; fr.)

Ce travail est accompagné d'une Note sur les travaux physiques de Plücker par M. le professeur Hittorf, et de la liste des travaux de Plücker (¹).

Bierens de Haan. — *Notice sur* Meindert (Mathieu) Semeijns. (7 p.; fr.)

Mathieu Semeijns, savant hollandais du XVIIIe siècle (1708-1775), est l'auteur d'une hypothèse sur le magnétisme terrestre. Pour expliquer la déviation du compas, il considérait la Terre comme formée de trois sphères concentriques tournant autour du même axe avec des vitesses différentes.

Boncompagni (B.). — *Sur la vie et les travaux de* Meindert Semeijns. (7 p.)

Notice bibliographique accompagnée d'indications relatives aux travaux de Semeijns.

Stiattesi (A.). — *Biographie du P. Giovanni Antonelli, D. Sc. P.* (14 p.)

Boncompagni (B.). — *Sur un Ouvrage de l'abbé N.-L. de la Caille intitulé : « Leçons élémentaires de Mathématiques ».*

(¹) Publiée dans le *Bulletin,* t. III, p. 59; 1872.

Étude bibliographique sur les diverses éditions françaises, latines, italiennes et grecques de ce livre.

Sédillot (L.-Am.). — *Lettre à M. Boncompagni au sujet d'une Note de M. Th.-H. Martin.* (3 p.; fr.)

Hankel (H.), traduit par Keller (Ph.). — *Sur un volume intitulé :* « Geschichte der mathematischen Wissenchaften. I. Theil. » Von den ältesten Zeiten bis Ende der 16 Jahrhunderts. Von » Dr Heinrich Suter. — Zürich, 1872 » ([1]).

Indication de quelques erreurs contenues dans l'Ouvrage de M. Suter.

Menabrea (F.-L., comte). — *Sur un écrit de M. le professeur A. Genocchi. Lettre à M. Boncompagni.* (5 p.)

Sédillot (L.-Am.). — *Sur quelques points de l'histoire de l'Astronomie ancienne, et en particulier sur la précession des équinoxes. Lettre à M. Boncompagni.* (12 p.; fr.)

Hankel (H.), traduit par M. Keller (Ph.). — *Histoire des Mathématiques chez les Arabes.* (59 p., 1 pl.)

Cette étude intéressante est extraite d'un travail que l'auteur prépare sur l'Histoire générale des Mathématiques ([2]). Voici les titres des Chapitres :

I. Introduction de l'Astronomie indienne chez les Arabes.
II. Traduction arabe des écrits mathématiques des Grecs.
III. Astronomes et mathématiciens du IXe siècle.
IV. Astronomes et mathématiciens du Xe et du XIe siècle.
V. Astronomes et mathématiciens d'Espagne.
VI. Astronomes et mathématiciens d'Orient, du XIIIe au XVIe siècle.
VII. Signes numériques des Arabes.
VIII. Arithmétique élémentaire.
IX. L'Algèbre et son origine.
X. Développement ultérieur de l'Algèbre.

([1]) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 14.

([2]) Depuis que ces lignes sont écrites, nous avons appris avec regret la mort du jeune et savant auteur, enlevé subitement à la Science le 29 août 1873, à l'âge de trente-quatre ans. Son Livre, malheureusement inachevé, doit paraître à la librairie Teubner, à Leipzig. On nous en fait espérer une traduction française. (*Note de la Rédaction.*)

XI. Arithmétique théorique et Analyse indéterminée.
XII. Géométrie.
XIII. Construction des équations cubiques.
XIV. Trigonométrie.
XV. Les Tables trigonométriques.

STEINSCHNEIDER (M.). — *Vie des Mathématiciens arabes, tirées d'un Ouvrage de* BERNARDINO BALDI; *avec des Notes.* (108 p.)

Bernardino Baldi, d'Urbino (1553-1617), premier abbé de Guastalla, a laissé un Ouvrage intitulé *Delle Vite de' Matematici,* dont M. le prince Boncompagni possède trois exemplaires manuscrits, l'un autographe. M. Steinschneider a extrait de cet Ouvrage quatorze articles contenant les biographies des savants arabes dont voici les noms : Messala, Alfagranus, Alkindi, Albumazar, Thebit, Albategnius, Almansor, Alhazen, Ali Abenrodan, Punicus, Ali Abenragel, Arzachel, Geber, Alpetragius, et il les a publiées avec des Notes étendues, historiques et critiques.

GENOCCHI (A.). — *Remarques sur une Lettre de M. le comte* L.-F. MENABREA [1]. (8 p.)

Réponse aux critiques adressées par M. Menabrea aux travaux de Félix Chiò sur la série de Lagrange, travaux approuvés par l'Académie des Sciences de Paris.

CARINI (I.). — *Sur les Sciences occultes au moyen âge, et sur un codex de la famille Speciale.* (2 p.)

Compte rendu de cet Ouvrage par M. le prince Boncompagni.

A. P.

REVUE DES PUBLICATIONS NORVÉGIENNES.

LIE (Sophus). — *Sur la théorie des problèmes différentiels.* (Forh. i Chr., 1872, p. 132-133.)

Courtes indications relativement à plusieurs théories nouvelles. L'Auteur attire en même temps l'attention sur ce fait, que ces nouvelles théories, publiées simultanément par M. Mayer et par lui-

---

[1] Voir *Bulletin,* t. IV, p. 246, et l'article de M. Menabrea, mentionné ci-dessus, p. 254.

même au commencement de l'année 1872, ramènent le Problème des trois Corps à la recherche d'une intégrale de chacun des systèmes de six, de quatre et de deux équations différentielles ordinaires qu'il considère.

Lie (S.). — *Sur la théorie des invariants des transformations tangentielles.* (Forh. i Chr., p. 133-135.)

Soient $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions données de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, et supposons qu'il soit toujours possible d'exprimer (f_i, f_k) en fonction des f: les équations linéaires

$$(f_1, \varphi) = 0, \ldots, (f_r, \varphi) = 0$$

forment un système complet. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-r}$ les solutions communes de ces équations; on pourra, comme on sait, exprimer (φ_i, φ_k) en fonction des φ. Les deux groupes de fonctions f et φ sont en relation de réciprocité complète. Il y a un certain nombre m de fonctions F de $f_1, \ldots, f_r$, qui donnent

$$(f_1, \mathrm{F}) = 0, \ldots, (f_r, \mathrm{F}) = 0.$$

Les deux nombres r et m sont les seules propriétés du groupe f qui subsistent sans altération dans une transformation tangentielle quelconque. Là-dessus se fondent d'importantes théories d'intégration.

Lie (S.). — *Nouvelle méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre entre n variables* (Forh. i Chr., 1872, p. 28-34).

Par des considérations sur les variétés (*Mannigfaltigkeiten*) n-uplement étendues, l'auteur établit une nouvelle méthode d'intégration. D'après cette méthode, l'intégration d'une équation

$$\mathrm{F}(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0$$

n'exige que la détermination d'une seule intégrale de chacun des systèmes considérés de $2n-3$, $2n-5, \ldots, 5, 3, 1$ équations différentielles ordinaires.

Lie (S.). — *Court résumé de plusieurs nouvelles théories.* (Forh. i Chr., p. 24-27.)

Pour que les équations

$$z' = F_0(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$
$$x'_i = F_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

définissent une transformation tangentielle, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$[F_i, F_k] = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n).$$

Il est convenable de généraliser la notion de caractéristique donnée par Monge. Si l'on connaît une solution, renfermant trois paramètres, de l'équation de Monge et d'Ampère

$$rt - s^2 + A r + B s + C t + D = 0,$$

il est possible de trouver une transformation tangentielle qui ramène la même équation à la forme linéaire

$$ar + bs + ct + d = 0.$$

Cette remarque simplifie beaucoup la théorie de ces équations donnée par Ampère.

GULDBERG (C.-M.). — *Sur le mouvement de l'eau dans les conduites.* (Polyteknisk Tidsskrift, 6e cah., 1871, p. 1-8.)

Après une courte revue des travaux de Colding, de Levy et de Hagen, l'Auteur expose ses propres recherches. Il traite particulièrement des conduites rectangulaires; la formule qu'il établit est analogue à celle qui a été donnée auparavant par Levy dans le cas d'une section circulaire.

GULDBERG (C.-M.). — *Théorie des courants de l'eau et de l'air à la surface de la Terre.* (Polyteknisk Tidsskrift, 3e cah., 1872, p. 1-9.)

L'auteur passe d'abord en revue les travaux de Colding; puis viennent ses propres recherches, qui se rapportent au Gulf-Stream et au mouvement de l'air dans les ouragans. Il donne une formule pour ce dernier phénomène.

GULDBERG (C.-M.). — *Remarques sur la formule pour la mesure des hauteurs par le baromètre.* (Forh. i Chr., 1872, p. 120-131.)

Discussion de l'importance relative des quantités qui entrent dans la formule pour la mesure barométrique des hauteurs.

Guldberg (A.-S.). — *Sur la résolution des équations du second, du troisième et du quatrième degré.* (Forh. i Chr., 1872, p. 144-169.)

Tables pour le calcul numérique, avec une explication.

S. L.

MÉLANGES.

FRANÇOIS-XAVIER DE ZACH.

Parmi les savants de la génération précédente, dont l'influence sur les développements de l'Astronomie a été considérable, sans que leurs noms soient restés attachés à quelque théorème important ou à quelque grande découverte, il faut placer en première ligne le baron de Zach, dont Lalande pouvait déjà, en 1803, dire sans exagération : « Aucun des astronomes vivants n'a été plus utile au progrès de la Science », bien que de Zach ne fût pas, à beaucoup près, l'astronome le plus éminent de son temps.

Franz Xaver von Zach, né à Pest, le 13 juin 1854, d'une famille distinguée, mais sans fortune, fut élevé, paraît-il, dans un couvent de Jésuites, où il reçut d'abord, conformément à ses dispositions naturelles, une instruction mathématique; mais il y conçut en même temps contre cet ordre une aversion qui le domina pendant toute sa vie. Le passage de Vénus, pendant l'été de 1769, et la grande comète qui apparut dans l'automne de la même année, déterminèrent, dès cette époque, la vocation du jeune homme pour l'Astronomie, et le Traité de Lalande, qui venait alors de paraître, fut son premier guide.

A l'exemple d'un de ses frères aînés (le futur général d'artillerie Antoine de Zach), François-Xavier, après avoir terminé ses études, entra, en 1775, dans l'armée autrichienne, parvint à peu près au grade de capitaine, et ne tarda pas à être nommé à une chaire de Mécanique, créée exprès pour lui à Lemberg, mais que, à la mort de Marie-Thérèse, on supprima pour cause d'économies, en promettant toutefois à Zach de songer à lui à la première vacance.

Zach, goûtant peu la perspective d'une attente indéfinie, partit en 1783 pour l'étranger; il employa l'été de cette même année à perfectionner son instruction à Paris, où il fit la connaissance de Lalande, de Laplace, de Bochart de Saron, etc.; au mois de novembre suivant il partit pour Londres, où il se mit en relation avec Maskelyne, Herschel, Ramsden, Emery, etc., et particulièrement avec l'envoyé de Saxe, le comte Henri de Brühl, amateur zélé de l'Astronomie, qui possédait un observatoire privé dans les environs de Londres. Zach plut tellement au comte, que celui-ci le prit dans sa maison en qualité de correspondant (*informator*) et d'homme de compagnie, l'introduisit partout, l'emmena dans ses voyages, bref lui fit une position aussi sûre qu'agréable. Ainsi Zach passa l'automne de 1784 chez lord Egremont, beau-fils du comte, à Petworth-House; là il découvrit les papiers scientifiques posthumes du célèbre Harriot, sur lesquels il fit paraître une Notice, et il publia, entre autres, les précieuses observations de la comète de 1607, consignées dans ces papiers, et qui servirent plus tard à Bessel de base pour un nouveau calcul de cette comète (la comète de Halley). Ainsi, dans l'été de 1785, il accompagna le comte à Bruxelles, puis à Dresde, fit de là une échappée à Berlin pour voir Bode, et en novembre retourna avec son protecteur à Londres, en passant par Paris, après avoir, pendant tout son voyage, déterminé la position de chaque lieu à l'aide du sextant et du chronomètre. Ainsi, pour citer encore un dernier fait, il fit connaissance, sans doute encore par l'intermédiaire du comte, avec le duc Georges de Marlborough, qu'il alla voir, paraît-il, dans son observatoire de Blenheim, dans l'Oxfordshire, et il fut certainement à Oxford, où il fit sur Harriot une lecture qui lui valut le diplôme honoraire de docteur en droit.

Tandis que Zach vivait ainsi auprès du comte de Brühl, un des amis de celui-ci, comme lui amateur passionné de l'Astronomie, le duc Ernest de Saxe-Gotha, le pria de lui venir en aide pour l'acquisition de bons instruments, destinés à un observatoire qu'il projetait de construire. Le comte accepta la commission, et lui demanda en même temps s'il possédait un bon astronome pour son nouvel observatoire, en lui recommandant si chaudement Zach pour cet emploi, que le duc Ernest s'empressa de l'engager. En conséquence, Zach partit pour Gotha (30 mai 1786), où il arriva le 22 juin suivant; aussitôt il sut décider le prince à se rendre lui-même en Angleterre, pour y visiter les observatoires et les ateliers et y faire les commandes nécessaires. Ce voyage eut lieu, en effet, du 5 juillet au 11 septembre.

A peine de retour, Ernest résolut de conduire dans le midi de la France sa femme, dont la santé était affaiblie, et d'emmener Zach avec lui. Zach partit donc pour Hyères, en passant par Francfort, Lyon et Marseille, et là, avec les instruments qu'il avait emportés, il dressa un petit observatoire sur une tour d'un fort et y travailla avec activité. Au printemps de 1787 il alla à Gênes et à Milan, puis à Genève et à Chamounix; dans l'automne il revint à Gotha.

Pendant le même automne, Zach dressa le plan d'un nouvel observatoire sur le Seeberg, près de Gotha, et, après que ce plan eut été approuvé, il en détermina la méridienne et l'on commença les fondations. Pour ne pas rester inactif pendant la construction de l'édifice, il fit en même temps disposer l'aile orientale du château de Friedenstein pour l'installation provisoire des instruments qui étaient déjà arrivés; en sorte que, de 1787 à 1791, il put déterminer de nombreuses positions du Soleil et des étoiles. Il alla occuper alors le nouveau bâtiment, achevé avec succès dans toutes ses parties, et dont Lalande, qui le visita lui-même en 1798, dit, en rendant compte de sa construction : « L'observatoire de Gotha est le plus beau et le plus utile qu'il y ait en Allemagne; M. le duc y a dépensé plus de 200 000 francs; aucun prince de ce siècle n'a donné ni suivi cet exemple. »

Zach ne manqua pas non plus d'aides pour les observations et les calculs. Sans parler de la part considérable que l'auguste couple prit à ces travaux — car la duchesse elle-même était une habile et laborieuse calculatrice — il eut presque toujours le bonheur de pouvoir appeler auprès de lui des jeunes gens de talent, désireux de se familiariser, sous sa direction, avec l'Astronomie pratique. Nous citerons parmi eux :

Peter Niewland, qui fut plus tard professeur éminent d'Astronomie à Leyde, mais qui, malheureusement, mourut très-jeune;

Gottlieb-Friedrich Bohnenberger, d'abord théologien, puis professeur d'Astronomie à Tubingue, et qui, inspiré par Zach, composa, aussitôt après son départ du Seeberg, son excellent Livre *Sur la détermination des positions géographiques* ([1]);

Johann-Carl Burckhardt, qui, avec la recommandation de Zach, vint à Paris, y traduisit la *Mécanique céleste* de Laplace, fut reçu membre du Bureau des Longitudes, et, après la mort de Lalande, dans la maison duquel il habitait, devint son successeur à l'Observatoire de l'École Militaire.

Jan-Frederic van Beeck-Calkoen, qui exerça depuis avec distinction les fonctions de professeur d'Astronomie à Leyde;

Johann-Caspar Horner, qui se signala plus tard comme astronome-navigateur dans le voyage autour du monde de Krusenstern, occupa ensuite une chaire de Mathématiques dans sa ville natale de Zurich, et s'est fait surtout connaître par ses excellents articles dans la nouvelle édition du *Dictionnaire de Physique* de Gehler;

Johann-Tobias Bürg, qui, bien que déjà astronome-adjoint à l'Observatoire de Vienne et couronné pour le calcul de ses Tables de la Lune, n'en vint pas moins chercher pendant plusieurs mois au Seeberg les savants entretiens de Zach;

Et, avant tous, le conseiller de finances Bernhard von Lindenau, qui commença tard, mais avec grand succès, ses études astronomiques, fut dans la suite le successeur de Zach au Seeberg, et enfin, comme président du Conseil des ministres de Saxe, mérita par ses services la reconnaissance de son pays.

Tandis que Zach faisait ainsi de son Seeberg une pépinière de bons astronomes praticiens, il travaillait en même temps à différents Ouvrages scientifiques. Sans parler de quelques écrits d'actualité sur une opposition d'Uranus, sur la latitude d'Erfurt, etc., d'une traduction annotée de l'*Eloge de Bailly*, par Lalande, etc., nous citerons en première ligne les *Tabulæ motuum Solis novæ et correctæ*, publiées par lui en 1792, aux frais du duc Ernest, à qui elles étaient dédiées. Comme suite à ces Tables, il publia en 1804, peu après la mort du duc et comme hommage à sa mémoire, les *Tabulæ motuum Solis novæ et iterum correctæ*, puis, en 1809, les *Tables abrégées et portatives du Soleil*. En seconde ligne, nous mentionnerons les *Tabulæ aberrationis et nutationis*, dédiées au

([1]) *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten*. Göttingen, 1795.

duc Georges de Marlborough, qui l'avait aidé de ses conseils et de son argent, et suivies, en 1812, des *Nouvelles Tables d'aberration et de nutation*. Toutes ces Tables, étant très-maniables et donnant, en outre, de bons résultats, furent très-bien accueillies, comme le furent surtout les Catalogues d'étoiles qu'il y joignit, et dont l'un comprenait 381 étoiles fondamentales, et l'autre, 1830 étoiles zodiacales. Le premier, fondé sur des observations faites par Zach quand il était encore au château de Friedenstein, s'accordait très-bien avec les travaux analogues de Delambre et de Lalande, ce qui faisait dire à celui-ci : « L'accord qui se trouve dans nos résultats forme une preuve de l'exactitude à laquelle nous sommes tous trois parvenus. » Le second, dont les ascensions droites avaient été obtenues par Zach au Seeberg, à l'aide de l'instrument des passages de Ramsden, parfaitement construit et parfaitement situé, tandis que les déclinaisons avaient été, pour la plupart, déterminées par Lalande au cercle mural de l'École Militaire de Paris, présentait, d'après ce dernier astronome, surtout pour les ascensions droites, une exactitude supérieure à celle de tous les Catalogues précédents.

A ces travaux scientifiques importants il faut ajouter encore l'édition faite par Zach de l'excellent Mémoire d'Olbers *Sur la détermination de l'orbite des comètes* ([1]), d'autant plus que Zach l'augmenta d'une remarquable Préface, de quelques additions complémentaires, et d'un Catalogue de toutes les comètes observées jusqu'alors. Citons également son édition du nouvel Atlas céleste, dressé par Goldbach et revu par lui.

Un épisode marquant dans la vie de Zach fut le Congrès astronomique tenu en août 1798 à l'Observatoire du Seeberg, et dont l'idée fut inspirée d'abord par une visite de Lalande, annoncée pour cette époque, et par le souhait exprimé par le célèbre astronome de pouvoir faire, à cette occasion, la connaissance personnelle de Bode. Sans un avis envoyé d'Angleterre à diverses cours d'Allemagne, et portant « qu'un astronome français pourrait très-bien s'occuper d'autres révolutions que des révolutions célestes », et en vertu duquel, par exemple, le permis de voyage demandé

([1]) *Abhandlungen über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen.* Weimar, 1797.

par les astronomes autrichiens ne leur fut pas accordé, un plus grand nombre de savants auraient pris part à cette réunion. Malgré cela, outre Lalande et sa nièce, M^me Le Français, qui l'accompagnait, outre Zach et son aide Horner, on compta encore, parmi les membres présents, Bode, de Berlin; Klügel, Gilbert et Pistor, de Halle; Seyffer, de Göttingue; Wurm, de Nürtingen; Köhler et Seyffert, de Dresde; Schaubach et Feer, de Meiningen, et Huber l'aîné, de Bâle. Ce dernier ne put prendre aucune part aux travaux, car il tomba malade et mourut. Le Congrès dura une dizaine de jours, employés soit en entretiens libres et en excursions de toute espèce, soit en séances régulières. Les discussions et les résolutions eurent pour objet l'emploi du temps moyen et des mesures métriques pour les données scientifiques; l'introduction de quelques nouvelles constellations, proposées par Lalande et par Bode; un vœu, demandant des observations plus fréquentes des culminations lunaires, etc. D'autre part, il ne fut pris aucune décision relativement à la convenance de la division décimale du quadrant, et il ne fut même pas question de l'introduction du nouveau Calendrier français, déjà très-impopulaire dans le pays même qui l'avait vu naître. Malheureusement, le temps fut presque toujours mauvais, de sorte qu'il ne fut guère possible de songer à faire usage des instruments que l'on avait sous les yeux. On put, du moins, se rendre, le 14 août, à une invitation de la duchesse, à l'Inselsberg, où l'on emporta des chronomètres et des sextants, de sorte que Lalande eut l'occasion de se convaincre par lui-même des grands avantages pratiques de ces derniers instruments, vantés si souvent par Zach. On quitta Gotha, en se promettant mutuellement de s'y réunir de nouveau dans quelques années.

Dès le commencement de cette même année 1798, Zach avait inauguré la publication d'un Journal consacré à l'Astronomie et à la Géographie, qui parut d'abord sous le titre de *Allgemeine geographische Ephemeriden,* et, deux ans après, sous celui de *Monatliche Correspondenz.* Cette fondation rendit les plus grands services aux deux sciences qu'elle eut d'abord pour objet, et Zach, par cette seule entreprise, s'acquit des droits tout à fait exceptionnels à la reconnaissance des savants. Le journal eut un plein succès, Zach ayant trouvé, d'une part, dans Lalande, Laplace, Méchain, Delambre, Olbers, Humboldt, Gauss, Bessel, Schröter, Bohnenberger, Piazzi, Oriani, Herschel, Troughton, etc., d'excellents collaborateurs, et, d'autre part, ayant su diriger ce Recueil de telle manière, qu'il ne devint pas seulement nécessaire aux gens du métier, mais encore qu'il intéressa les amateurs d'Astronomie, et qu'il gagna à cette science de nombreux amis. Aujourd'hui même, plus d'un demi-siècle s'est écoulé, et l'on éprouve encore une véritable jouissance à parcourir ces vieux volumes; seulement on ne peut s'empêcher de regretter que l'époque actuelle ne nous offre rien de semblable. D'ailleurs l'immense utilité de ce Journal apparaît d'une manière éclatante dans l'histoire de la découverte des petites planètes, Zach lui-même ayant pris à toutes les périodes de cette découverte une telle part, que nous ne pouvons nous dispenser ici d'en donner un rapide aperçu.

Son attention ayant déjà été appelée, à plusieurs reprises, sur la grande lacune existant entre Mars et Jupiter, Zach voulut aussi s'occuper de cette question. Dès 1785, il communiqua à Bode non-seulement ses idées sur ce sujet, mais encore les éléments d'une planète qu'il supposait située dans cette lacune; et, dans sa révision du ciel étoilé, commencée à Friedenstein en 1787, il travailla d'abord sur les étoiles zodiacales, convaincu que cette marche était la seule qui pût lui faire rencontrer la planète inconnue. Plus tard, dans l'automne de 1800, Zach se trouvant, avec Olbers et von Ende, à Lilienthal, pour rendre visite à Schröter et à son inspecteur Harding, on y parla sérieusement de cette entreprise, et l'on décida de distribuer le zodiaque entre vingt-quatre astronomes, dont Piazzi devait faire partie. Chaque associé devait recevoir une carte de sa portion, s'étendant jusqu'aux plus petites étoiles télescopiques, et, par de continuelles révisions du ciel, s'assurer de son état d'immobilité, ou reconnaître les astres errants qui pourraient se présenter. Il est évident que ce plan, qui a été réalisé de nos jours par les Cartes célestes de l'Académie de Berlin, aurait nécessairement donné des résultats au bout d'un petit nombre d'années, si Piazzi n'en eût prévenu l'exécution par la découverte qu'il fit, le premier jour du nouveau siècle, de la planète Cérès, comprise précisément dans cette lacune. Piazzi, il est vrai, avait cru d'abord que son astre errant n'était qu'une petite comète; il s'était borné à suivre sa marche, et c'est seulement le 24 janvier qu'il avait envoyé à Oriani et à Bode un avis formel de sa découverte.

Mais aussitôt que Bode (20 mars), et, par l'intermédiaire de celui-ci, Zach (fin d'avril) eurent reçu ces premières indications, ils en conclurent que ce devait être la planète cherchée ; et les calculs de l'orbite, entrepris bientôt après par Olbers et par Burckhardt, donnèrent d'une manière si concluante une petite excentricité, que Piazzi et Lalande, malgré toute la résistance qu'ils avaient opposée d'abord, durent finir par se ranger à l'opinion de leurs confrères. Mais, par malheur, avant que la lettre de Piazzi parvînt à sa destination, la planète avait depuis longtemps disparu dans les rayons du Soleil, et il ne restait plus guère d'espoir de pouvoir la retrouver avant la fin de l'année ; tandis que, d'un autre côté, les méthodes usitées jusqu'alors étaient insuffisantes pour fournir des éléments qui pussent satisfaire à la totalité des vingt observations faites par Piazzi jusqu'au 11 février. C'est alors que le jeune Gauss vint apporter aux astronomes en détresse le secours de son immense talent. A l'aide d'une méthode nouvelle, indépendante de l'hypothèse de la petitesse de l'inclinaison et de l'excentricité, méthode que, depuis, il développa encore davantage dans son Ouvrage classique *Theoria motus*, etc., il calcula une orbite elliptique satisfaisante, et publia même une éphéméride pour faciliter les recherches des observateurs. A l'aide de cette éphéméride, Cérès fut retrouvée par Zach, pour la première fois probablement, le 1er et le 31 décembre 1801 ; puis par Olbers, le 1er et le 2 janvier 1802, et, dès lors, elle fut acquise définitivement et pour toujours à notre système solaire.

Dans toute l'histoire de cette découverte, la *Monatliche Correspondenz* joua un rôle capital, comme Gauss l'affirme en ces termes dans une Lettre à Zach : « Avec quelle tiédeur et quelle indifférence n'eût-on pas accueilli la découverte de Piazzi, si vous n'aviez pas dans votre Journal rassemblé et répandu, avec toute la rapidité possible, toutes les informations sur cet événement ; si vous n'aviez pas éveillé l'intérêt du public, pesé les raisons pour et contre, et établi avec la plus haute probabilité la nature planétaire de cet astre ! Vraisemblablement, bien peu d'astronomes se seraient donné la peine de le retrouver, alors que le maître et chef de tous les astronomes d'aujourd'hui (Lalande) éprouvait encore lui-même, tout récemment, des doutes si forts au sujet de la nouvelle planète. » Dans les découvertes des autres planètes Pallas, Junon et

Vesta, qui suivirent celle de Cérès, comme aussi dans tous les autres événements astronomiques importants de cette époque, on vit toujours Zach et sa *Correspondenz* au premier rang dans l'action.

En octobre 1802, Frédéric-Guillaume de Prusse confia à notre Zach le relèvement astronomique et trigonométrique de la Thuringe, et le duc Ernest, toujours prêt à mettre sa fortune privée au service des travaux scientifiques, décida que l'on y rattacherait la mesure de 3 à 4 degrés du méridien du Seeberg, et de 5 à 6 degrés du parallèle. Dès 1803, tout était en très-bon train, et, dans le courant de cette année et de la suivante, on effectua diverses déterminations de latitudes, et, en outre, à l'aide de signaux de poudre, quelques déterminations de longitudes; on mesura plusieurs azimuts, on commença la triangulation, en s'appuyant sur une base soigneusement mesurée, etc. Pour ces travaux, Zach trouva d'excellents aides dans le futur général von Müffling, et dans d'autres officiers préposés à cette opération, parfois aussi dans Bürg et dans Lindenau; mais, par malheur, cette mesure de degré, la première qui ait été entreprise en Allemagne dans les temps modernes, fut bientôt interrompue. « Les champs d'Uranie », disait plus tard Zach, « furent convertis en champs de Mars; la fameuse bataille d'Iéna et ses suites nous firent abandonner nos triangles »; et la mort de l'excellent duc Ernest, survenue en 1804, amena pour Zach lui-même, nommé grand-maître du palais de la duchesse, une vie toute différente. Dans les premiers temps, la résidence de la veuve ayant été transférée au château de Christiansburg, à Eisenberg, près d'Iéna, Zach put bien encore se livrer sans obstacle à ses anciennes occupations; mais, les médecins ayant prescrit à la duchesse de passer l'hiver de 1804-1805 dans le midi de la France, il fut forcé d'abandonner pendant ce temps à Lindenau son Observatoire et la rédaction de son Journal.

Les voyageurs passèrent d'abord par Viviers, où l'on rendit visite à Flaugergues, puis par Marseille; ensuite, après un séjour de plusieurs mois à Hyères, ils revinrent chez eux par la Suisse et par Strasbourg, où le chef de brigade Henry était précisément occupé de la détermination d'une position géographique. Zach fixa alors de nouveau sa résidence à Eisenberg, où la duchesse fit construire pour lui un observatoire; mais il habita aussi une grande partie du temps au Seeberg, dont il reprit la direction, en même temps que la rédaction du Journal. Dans l'été de 1807, la duchesse s'étant décidée à habiter d'une manière permanente les climats méridionaux, la direction du Seeberg passa définitivement entre les mains de Lindenau, qui convint en même temps de continuer la *Monatliche Correspondenz,* sous le nom de Zach.

Le nouveau voyage eut lieu par Nuremberg et Insbruck, puis par Vérone et Padoue, où l'on rencontra Cagnoli et Santini. On passa l'hiver de 1807-1808 à Venise, l'été de 1808 à Gênes, Milan, Bologne et Florence; l'hiver de 1808-1809 à Pise; l'été de 1809 à Milan et à Turin. A partir de décembre 1809, la petite cour se fixa auprès de Marseille, dans une maison de campagne qui se prêtait à la construction d'un petit observatoire, jusqu'au moment où les troubles qui s'élevèrent, au printemps de 1814, après la chute de Napoléon, engagèrent les voyageurs, par mesure de prudence, à se retirer à Gênes. Mais à peine y furent-ils arrivés et eurent-ils commencé leur installation, que Murat, désirant profiter du secours de Zach pour l'établissement d'un nouvel observatoire à Naples, envoya une frégate pour le chercher. Après une traversée orageuse, qui lui procura l'occasion de voir l'illustre exilé de l'île d'Elbe, Zach débarqua heureusement à Naples, où l'on mit à sa disposition tout ce qui était nécessaire pour les travaux préparatoires de la construction à la Mergelina; mais, dans le courant de l'été, Murat fut renversé, et Zach revint, assez désappointé, à Gênes, où il crut maintenant pouvoir trouver, pour de longues années, un séjour tranquille.

Comme Zach ne voyageait jamais sans emporter avec lui un théodolite, quelques sextants et des chronomètres, et qu'il savait manier ces instruments avec une habileté toute particulière, s'il lui manquait quelque chose pour ses travaux d'Astronomie et de Géographie, du moins il pouvait déterminer la position de chaque point un peu remarquable, et, dans les pays où l'on avait déjà fait des mesures de degré, il recueillait toutes les données possibles qui lui paraissaient utiles pour la vérification de ces mesures, comme on peut le voir par les nombreuses communications insérées dans la *Monatliche Correspondenz,* par son *Mémoire sur le degré de Beccaria,* publié en 1811, etc. En outre, soit en voyage, soit dans les observatoires qu'il improvisait pendant ses séjours de quelque durée, il observait et calculait avec soin les solstices, les oppositions, les éclipses, les occultations d'étoiles, etc., et surtout les comètes qui venaient à se montrer; il recueillait, dans les collections et dans les bibliothèques, les nombreuses notices historiques et littéraires, grâce auxquelles les journaux publiés par lui, avant comme après cette époque, sont encore aujourd'hui des mines si riches et si précieuses. Ajoutons encore, comme fruit de son séjour à Marseille, un travail de longue haleine, publié en 1814 en deux volumes, sous le titre de : *Attraction des montagnes,* travail dans lequel il écarte résolûment cette action, souvent alléguée comme excuse d'observations imparfaites, et la réduit en même temps à sa mesure exacte. « Que Zach », dirai-je en me servant des paroles de Lindenau, « ait entrepris et mené à bonne fin une opération si difficile, si longue, si coûteuse, qui jusqu'alors n'avait été commencée que deux fois, par de grands États; qu'il l'ait fait sans autre secours étranger que celui de son secrétaire, et en prenant à sa charge toute la dépense, c'est ce que nous ne pouvons passer sous silence, d'autant que cela offre une riche matière à des réflexions, que nous ne voulons pas toutefois développer plus longuement. »

Après le départ de Zach, dans l'été de 1807, Lindenau continua pendant plusieurs années à rédiger la *Monatliche Correspondenz,* sous le nom de son prédécesseur et dans le même esprit; mais, à la fin de 1813, il dut annoncer à ses lecteurs que, par suite de la part qu'il devait prendre à la campagne qui allait s'ouvrir, la rédaction du Journal serait momentanément interrompue. Quand il revint, dans l'été de 1814, de Paris au Seeberg, il ne reprit plus l'ancien mode de publication; il se décida, en 1816, à faire paraître, avec Bohnenberger, un *Journal pour l'Astronomie et les Sciences qui s'y rapportent* (1); mais ce Recueil, malgré le mérite des collaborateurs, n'atteignit jamais la vogue de l'ancien, et cessa d'exister dès 1818. D'autre part, dans la même année 1818, Zach commença à publier, à Gênes, une *Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique,* qui réussit admirablement, comme la première. Il faut bien l'avouer, Zach ne la rédigeait plus avec le même soin que l'ancienne, et il lui échappait quelquefois des bévues qui donnaient beau jeu à la critique;

(1) *Zeitschrift für Astronomie und verwandten Wissenschaften.*

en outre, sa plume, de tout temps incisive, devenait, avec les années, de plus en plus mordante, et, pour bien des gens, extrêmement désagréable. Comme il est, hélas! dans la nature humaine de se souvenir bien mieux des injures que des bienfaits, les adversaires de Zach se multiplièrent, même en Allemagne, et les Benzenberg, les Schubert, les Bürg, les Bode, etc., passèrent dans leur camp, parce que Zach leur avait en passant marché sur le pied. Olbers, Gauss, Bessel et Encke eux-mêmes manifestèrent une grande indignation lorsque Zach intervint un peu imprudemment dans l'affaire entre Pasquich et Kmeth ([1]), eux qui, quelques années auparavant, n'avaient pas eu une seule parole de blâme contre Arago, qui avait attaqué Zach d'une manière si passionnée et si injuste ([2])!

Zach avait, en effet, pris la liberté de critiquer plusieurs savants de Paris; il avait, par exemple, reproché à Delambre une certaine nonchalance dans ses mesures d'angle; il avait déploré l'inactivité qui régnait, à cette époque, à l'Observatoire de Paris, et que d'autres aussi avaient constatée; il avait adressé aux rédacteurs de la *Connaissance des Temps* quelques dures critiques, etc. Lorsque, ensuite, il s'occupa, dans un article intitulé : *les Singes astronomes*, de l'histoire des *Mestivos* (enfants d'un père blanc et d'une mère négresse, dont quelques naturalistes français avaient fait des singes), histoire souvent reproduite d'après la Condamine, et qu'il fit raconter par un auditeur d'un professeur d'Anatomie de Paris, « qu'il y avait en Amérique des *singes* en état de faire des observations *aussi parfaitement que les faisaient les savants français* », les astronomes parisiens se crurent obligés de répondre, et Arago riposta dans les *Annales*, dont il était un des rédacteurs. Si, après avoir rapporté les accusations de Zach, il eût cherché à les contredire par des faits, on eût pu lui pardonner une certaine violence de langage; mais, au lieu de cela, il chercha seulement à rabaisser Zach de toutes les manières, « moyen désespéré », comme Horner en fait la remarque, « qui n'a d'explication que la mauvaise cause de celui qui l'emploie ». Il voulut, par exemple, faire croire au public que Zach, l'auteur des calculs de tant de

([1]) *Voir* la *Correspondance entre Gauss et Schumacher*, t. I, p. 363 et suivantes.
([2]) *Annales de Chimie et de Physique*, 1821. — *OEuvres d'Arago*, t. XII, p. 47.

Tables et d'orbites de comètes, n'entendait pas même la Trigonométrie sphérique; que l'homme signalé par Lalande comme le plus habile dans la détermination des ascensions droites connaissait à peine la lunette méridienne. etc. Il alla même jusqu'à porter contre Zach la grave accusation d'avoir publié *comme son propre travail* les Tables solaires de Delambre, qui lui avaient été communiquées en manuscrit par Lalande, bien que le moindre usage illégitime, en pareil cas, fût en contradiction la plus formelle avec son caractère, et que l'emprunt fût en lui-même très-invraisemblable, puisque les Tables de Zach diffèrent entièrement, pour leur disposition, de celles de Delambre, et que ce dernier remarque lui-même avec satisfaction que les deux Tables, *quoique fondées sur des observations différentes,* sont en parfait accord.

Par bonheur, Zach ne releva pas le gant, bien qu'il fût plus aisément venu à bout d'une attaque ouverte, quoique si peu mesurée, que des hostilités secrètes des jésuites et consorts, qui, en face de lui, cherchaient à se faire passer pour ses plus intimes amis et ses plus fervents admirateurs, mais qui ne cessaient, en arrière, de travailler contre lui, si bien qu'il se trouva dans le cas d'écrire à Littrow, au sujet d'un de ces bons amis : « Je vous assure que, si le diable et cet homme entraient dans ma chambre en se tenant par la main, je me jetterais dans les bras du diable pour qu'il me protégeât contre l'autre. »

« Plaignons le galant homme, le noble cerf après lequel tant de chiens sont aujourd'hui lâchés », écrivait Littrow à Horner dès 1822; « au lieu de passer le soir d'une vie si bien remplie, tranquille et heureux au milieu des amis qui lui sont dévoués, il est harcelé par des misérables, et, ce qui doit lui être le plus douloureux, par ceux-là mêmes qu'il a jadis comblés de bienfaits, et qui doivent à lui, et à lui seul, toute leur existence astronomique. » Et il devait presque en être ainsi; car si quelquefois les visites et les lettres des amis restés fidèles, Lindenau, Horner, Littrow, etc., venaient le ranimer; si les observations, les travaux de cabinet et d'autres occupations du même genre le distrayaient momentanément; s'il avait la satisfaction d'avoir, par son action, fait gagner du terrain à l'Astronomie en Italie, en obtenant, par exemple, la construction de l'observatoire de Marlia, près de Lucques, et en y procurant à Pons une place digne enfin de son mérite, les jours n'en commençaient pas moins pour lui où il lui faudrait dire : « Je n'y prends point plaisir ! » Non-seulement il fut attaqué d'une maladie grave, la pierre, que les médecins furent longtemps à reconnaître, et qui se manifesta de la manière la plus douloureuse, dans l'été de 1826, mais encore, tandis qu'il était au lit, brisé par la souffrance, ses ennemis réussirent, par des rapports mensongers, à obtenir du roi bigot Charles-Félix, par l'entremise de son confesseur, qu'il fût enjoint à Zach, en août 1826, de sortir dans les cinq jours de ses États. On ne se contenta pas d'une déclaration des médecins que le malade était alors absolument hors d'état d'être transporté, ni d'une réclamation autographe de la duchesse au roi, ni d'une attestation fournie par le ministère de Saxe en faveur de Zach et portant sur tout son passé : il fallut encore les démarches énergiques de l'envoyé de Prusse à Turin pour obtenir qu'il fût sursis à l'ordre d'expulsion jusqu'au moment où le malade pourrait se mettre en route sans que sa vie fût en danger formel. Ce moment, attendu par Zach avec une impatience si naturelle en pareilles circonstances, semblait reculer de plus en plus; il fut, en 1827, dans la nécessité de faire venir de Paris à Gênes le célèbre Civiale pour une consultation, et c'est seulement le 22 mai 1827 que le pauvre patient, après avoir rendu quelque temps auparavant les derniers devoirs à son excellente duchesse, put quitter Gênes pour se rendre à Paris à petites étapes, en passant par Turin et Genève, et se confier au traitement de Civiale. Là encore les choses n'allèrent pas aussi vite qu'on pouvait d'abord l'espérer. C'est seulement le 8 décembre, quand il eut subi vingt-cinq opérations, que les médecins purent déclarer que son état ne réclamait plus leurs soins. Il passa l'hiver à Marseille et l'été de 1828 chez son ami Schäferli, dans l'Elfenau, près de Berne; il alla visiter Horner à Zurich et se rendit enfin à Francfort, où son cher Lindenau, alors député à la Diète, lui tenait un logement prêt. Malheureusement, à l'entrée de l'hiver, l'ancien mal ayant reparu, un second voyage à Paris devint nécessaire, et quand il voulut encore essayer, dans l'été de 1830, de retourner en Allemagne, il lui fallut de nouveau revenir à Paris, où il succomba, le 2 septembre 1832, à une attaque de choléra. Son tombeau, où Lindenau fit placer une modeste pierre, est au cimetière du Père-Lachaise. Sa dépouille mortelle est depuis longtemps détruite; mais nous jouissons encore aujourd'hui de bien des fruits de sa loyale activité, et nous devons pour cela tenir sa mémoire en honneur. « Moi, du moins », dirai-je en répétant les paroles de Littrow, « je conserverai avec respect son souvenir jusqu'à la fin de ma vie! » RUDOLPH WOLF.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ANSART (A.), capitaine de frégate. — Essai sur la Mécanique des vents et des courants. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 128 p., 8 pl. 3 fr.

BERTIN (E.), Ingénieur des constructions navales. — Notes sur la théorie et l'observation de la houle et du roulis. — Paris, Gauthier-Villars, 1872. Gr. in-8, 56 p., 1 pl. 1 fr. 75

— Complément aux Notes sur la théorie et l'observation de la houle et du roulis. — 1874, 40 p. 1 fr. 25

BONNANGE (F.). — Projet d'un Catalogue universel des productions intellectuelles. Précédé d'une Préface de M. *É. Littré*. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 39 p., 1 pl. 2 fr.

BRIOT et BOUQUET, professeurs à la Faculté des Sciences. — Théorie des fonctions elliptiques. 2e édition, 2e fascicule. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4, 160 p. — Prix de l'Ouvrage complet pour les souscripteurs : 30 fr.

DUMOULIN (Eug.). — Manuel élémentaire de Photographie au collodion humide, à l'usage des commençants. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-12, 62 p. 1 fr. 50

GLOESENER, Professeur à l'Université de Liége. — Études sur l'électro-dynamique et l'électro-magnétisme. Importance du principe du renversement alternatif du courant dans les électro-aimants. — Bruxelles, Hayez, et Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 111 p. 4 fr.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME SIXIÈME. — JUIN 1874.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, rue Monge, 29.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1874

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.

Ce BULLETIN, fondé en 1870, paraît régulièrement chaque mois. Il a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8° (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal forme depuis le 1er janvier 1873 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables), comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8°.

Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.

Prix pour un an (12 numéros en 2 volumes) :

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége.	20

OUVRAGES REÇUS PAR LA RÉDACTION.

(SUITE.)

ABBADIE (A. D'). — Observations relatives à la physique du globe, faites au Brésil et en Éthiopie, rédigées par *R. Radau*. Paris, 1873.

ANDRÉ (C.) et RAYET (G.). L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique, depuis le milieu du XVIIe siècle jusqu'à nos jours. Ire Partie: Angleterre. Paris, 1874.

BALTZER (R.) Die Elemente der Mathematik. II. Bd. Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie. 4. Aufl. Leipzig, 1874. 1 vol. in-8.

BELLAVITIS (G.). Duodecima Rivistà de Giornali. (*Atti dell' Istituto Veneto*, 1873).

BERTINI (E.). Libro quinto di Euclide. (*Periodico di Scienze mat. et nat. per l'insegn. second.*, Roma.)

BORCHARDT (C.-W.). Untersuchungen über Elasticität unter Berücksichtigung der Wärme. (*Monatsb. d. Berl. Akademie*, 1873.)

— Ueber Deformationem elastischer isotroper Körper durch mechanische, an ihrer Oberfläche wirkende Kräfte. (*Ibid.*)

CATALAN (E.). — Recherches sur quelques produits indéfinis. (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, 1873.)

CAYLEY (A.). On polyzomal Curves, otherwise the Curves $\sqrt{U}+\sqrt{V}+\ldots=0$. (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. XXV.)

— On geodesic Lines, in particular those of a quadric Surface. (*Proceedings of the London Math. Soc.* vol. IV, 1872-1873.)

CLAUSIUS (R.). Ueber verschiedene Formen des Virials. (*Poggendorff's Annalen*. 1874.)

DE TILLY. Rapport sur une Lettre de M. *A. Genocchi*, « sur quelques développements de la fonction $\log \Gamma(x)$ ». (*Bulletins de l'Acad. de Belgique*, t. XXXVI, 1873).

— Rapport sur un Mémoire envoyé au Concours de 1873, par M. *Mansion*, sur la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partilles des deux premiers ordres. (*Ibid.*)

DILLNER (G.). Traité de Calcul géométrique supérieur. Ire Partie. (*Mémoire de la Société royale d'Upsal*; 1873).

DURÈGE (H.). Zur Analysis situs Riemann'scher Flächen. (*Sitzb. der k. Akad. d. Wissensch. zu Wien*, Jänner 1874.)

DURRANDE (H.). Discours prononcé pour la rentrée solennelle des Facultés et de l'École de Médecine de Rennes. 1874.

KRONECKER (L.) Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen. (*Monatsb. d. Berl. Akad.* 1874.)

(*A suivre.*)

TABLE DES MATIÈRES.

JUIN 1874.

Revue bibliographique.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

PONCELET (J.-V.). — Cours de Mécanique appliquée aux machines, publié par M. *Kretz*, ingénieur en chef des Manufactures de l'État. — Un fort volume in-8° imprimé sur vélin, avec gravures dans le texte et deux planches. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Prix : 12 fr.

En présentant à l'Académie ce volume qui, sera surtout extrêmement utile aux professeurs de sciences appliquées et aux ingénieurs, M. Resal s'est exprimé ainsi :

« L'origine de cet Ouvrage remonte à 1825, époque à laquelle Poncelet, qui jusqu'alors s'était uniquement occupé de Géométrie, fut chargé d'organiser, à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie, l'enseignement de la Mécanique appliquée.

» En 1826, des feuilles lithographiées, reproduisant les Leçons de Poncelet, furent distribuées aux officiers élèves. On ne tarda pas à connaître au dehors l'originalité de cet enseignement, qui se distinguait par la nouveauté des aperçus et la nature de certaines questions qui y avaient trouvé place.

» Ces feuilles furent, l'année suivante, soumises à l'appréciation de l'Académie. Dans la séance du 7 mai 1827, Ch. Dupin, au nom d'une Commission qu'il constituait avec Arago, fit, sur l'enseignement de Poncelet, un Rapport extrêmement élogieux, qui aurait conclu à l'insertion aux *Mémoires des Savants étrangers*, si le Ministre de la Guerre ne s'était réservé la faculté de reproduire les lithographies.

» Aux feuilles de 1826, qui produisirent une grande impression dans le monde savant, succédèrent, avec quelques modifications, celles de 1832 et de 1836, publiées en cahiers par les soins de M. Morin. C'est en collationnant ces trois éditions que M. Kretz a constitué l'Ouvrage dont il s'agit, et dont on comprendra toute l'importance par le simple énoncé des chapitres qui le composent :

» 1° Considérations générales sur les machines en mouvement ; 2° principaux moyens de régulariser l'action des forces sur les machines et de transmettre les vitesses dans des rapports donnés ; 3° calcul des résistances passives dans les pièces à mouvement uniforme ; 4° influence de la variation de la vitesse sur les résistances.

» Quoique les premières Leçons de Poncelet sur la Mécanique appliquée remontent presque à un demi-siècle, le Cours qui vient de paraître, à quelques détails près, est très-complet. Les lacunes inhérentes aux progrès des sciences et des mécanismes qui ont pu se produire dans une aussi longue période ont été comblées par des Notes placées au bas des pages, qui témoignent des soins consciencieux apportés par M. Kretz à cette publication et donnent une haute idée de sa sagacité et de son esprit observateur et philosophique. Parmi ces Notes, les unes ont surtout pour but de mettre en lumière les idées, parfois mal interprétées, de l'auteur ; les autres résument certains travaux récents encore peu connus ; d'autres enfin se font remarquer par leur originalité. Je crois devoir signaler parmi celles-ci :

» Période de mise en marche des machines et des conditions de bon fonctionnement. — De l'écart proportionnel des vitesses au point de vue de la régularisation ; effet du couplement sur la régularité. — Détermination de la vitesse de règle et conditions de régularité des machines industrielles. — Corrélation entre le régulateur et le volant. — Équations du mouvement d'une transmission en tenant compte de l'élasticité des liens. — Rapport des accélérations maxima et minima des manivelles simples et à double effet. — Volant des machines couplées. — Ralentissement dans les transmissions par courroies ; loi des tensions d'une courroie sur une poulie en mouvement. — Influence de l'écartement des arbres sur le fonctionnement des outils.

» En résumé, le *Cours de Mécanique appliquée* de Poncelet traite avec une haute autorité toutes les questions qui forment aujourd'hui le fonds de l'enseignement en ce qui concerne la science de l'ingénieur et du mécanicien, et les Notes qui y ont été ajoutées renferment des considérations utiles qui établissent de nouveaux liens entre la théorie et la pratique industrielle. »

TABLE DES MATIÈRES.

MACHINES : *Lois générales du mouvement. Moyens généraux de régulariser le mouvement des machines.* — IV. DE L'ÉTABLISSEMENT DES MACHINES INDUSTRIELLES : *Conditions du meilleur établissement des machines. Indications générales sur l'établissement des machines. Conditions pratiques de l'établissement des machines.*

IIe SECTION. — Des principaux moyens de régulariser l'action des forces sur les machines et de transmettre les vitesses dans des rapports déterminés.

I. DES MODÉRATEURS : *Des divers genres de modérateurs. Des freins. Des volants à ailettes.* — II. DES RÉGULATEURS : *Des divers genres de régulateurs. Des régulateurs à pompe et à flotteur. Du régulateur à force centrifuge. Nouveau régulateur à ressort et instantané.* — III. DES MANIVELLES : *Notions préliminaires sur les manivelles. Considérations dynamiques sur les effets des manivelles. Des manivelles conduisant des pièces à mouvement rectiligne alternatif. Des manivelles conduisant un balancier à mouvement alternatif. Du joint brisé ou universel.* — IV. APPLICATIONS PARTICULIÈRES DE LA THÉORIE DES VOLANTS : *Considérations générales sur l'emploi et sur la construction des volants. Calcul du volant des manivelles à simple ou à double effet dans les hypothèses les plus simples. Calcul du volant, en tenant compte du poids et de l'inertie des pièces oscillantes.* — V. MOYENS GÉOMÉTRIQUES DE TRANSMETTRE LES VITESSES DES PIÈCES DANS UN RAPPORT DONNÉ : *Communication d'un mouvement par simple contact des roues. Communication du mouvement par courroies ou par chaînes. Communication du mouvement par engrenages. Des cames.* — ADDITIONS RELATIVES AUX VALEURS DE DIVERS MOMENTS D'INERTIE : *Principes généraux. Moment d'inertie des lignes ou verges à section très-petite. Moment d'inertie des aires planes ou disques minces. Observations générales. Moments d'inertie des corps ou volumes à dimensions quelconques. Applications.*

IIIe SECTION. — Calcul des résistances passives dans les pièces à mouvement uniforme et soumises à des actions sensiblement invariables.

I. CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES. — II. DES DIVERSES SORTES DE RÉSISTANCES : *De la résistance directe du frottement et de l'adhérence des corps en contact. Résistance due au roulement des corps. De la roideur des cordes et des courroies. Frottement des cordes et courroies autour des cylindres immobiles.* — III. APPLICATIONS AUX MACHINES SIMPLES : *Frottement d'un corps sur un plan incliné. Frottement du coin. Frottement des pièces maintenues dans une direction invariable par des guides, des coulisses, etc. Frottement des tourillons des pièces de rotation. Frottement des pivots, des épaulements des axes. Résistance des roues et roulettes. Équilibre du treuil, en ayant égard au frottement et à la roideur des cordes. Calcul des résistances dans les poulies, le treuil des Chinois et le cabestan. Des treuils en arbres tournants conduits par des cordes et courroies sans fin. Des palans ou poulies mouflées. De la résistance des chaînes. Manière de tenir compte du poids des cordes et courroies dans les équations d'équilibre. Frottement de la vis à filets carrés. Frottement de la vis à filets* *triangulaires. Du frottement dans les engrenages.* — NOTES : I. *Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme* $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, ... II. *Sur le moment total et le bras de levier moyen des résistances dans la vis à filets carrés ou triangulaires et les cônes de friction.*

IVe SECTION. — Influence des variations de la vitesse sur les résistances.

I. DES RÉSISTANCES DANS LES PIÈCES A MOUVEMENT VARIABLE PÉRIODIQUE OU PERMANENT. — II. INFLUENCE DES CHANGEMENTS BRUSQUES SUR LA VITESSE : *Principes généraux.* — III. APPLICATIONS : *Du choc des cames et des pilons. Du choc des cames et des marteaux. Des machines à percer, à découper, à étamper et à frapper les monnaies.*

TODHUNTER (I.), M. A., F. R. S. — A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THEORIES OF ATTRACTION AND THE FIGURE OF EARTH, FROM THE TIME OF NEWTON TO THAT OF LAPLACE. — London, Macmillan & Co.; 1873 (1).

L'Histoire scientifique, qui est déjà redevable à M. Todhunter de deux publications importantes (2), vient encore de s'enrichir d'une nouvelle production du savant auteur, consacrée, comme les précédentes, à l'examen critique et détaillé de tous les travaux qui ont paru sur le vaste sujet indiqué par le titre. Ce Livre ne s'adresse donc pas aux lecteurs curieux de connaître seulement les circonstances qui ont accompagné la découverte des grands faits de la Science, et la biographie des inventeurs. Il est écrit pour l'usage des géomètres, et destiné à leur servir de guide dans une étude approfondie de cette difficile théorie.

Nous ne saurions mieux faire, pour donner une idée exacte du contenu de ce Livre, que de traduire l'analyse que l'auteur lui-même en a donnée dans sa Préface :

« Le premier Chapitre est nécessairement consacré à Newton, le

---

(1) TODHUNTER (I.). *Histoire des Théories mathématiques de l'Attraction et de la Figure de la Terre, depuis le temps de Newton jusqu'à celui de Laplace.* — 2 vol. in-8°, XXXVI-476 et 508 p. Prix : 24 sh.

(2) *A History of the Process of the Calculus of Variations during the nineteenth Century.* 1861; 1 vol. in-8°.

A History of the Mathematical Theory of the Probability, from the time of Pascal to that of Laplace. 1865; 1 vol. in-8°.

fondateur de l'Astronomie physique. La puissance de génie qui se révèle dans tous ses travaux n'apparaît nulle part avec plus d'éclat que dans la manière dont il a traité nos deux sujets.

» Dans la théorie de l'attraction, entre autres résultats importants, il a fait voir que l'attraction d'une couche sphérique sur un point extérieur est la même que si la couche était réunie en son centre, et que l'attraction sur un point intérieur est nulle. Ces deux propositions constituent une théorie complète de l'attraction d'une sphère dans laquelle la densité varie avec la distance au centre. En outre, le résultat relatif à un point intérieur a été étendu par Newton au cas où les surfaces qui limitent la couche sont des ellipsoïdes de révolution semblables, semblablement placés et concentriques.

» Newton, dans sa recherche de la figure de la Terre, partit de la supposition qu'on pouvait la traiter comme un fluide homogène, tournant avec une vitesse angulaire uniforme. Il admit comme postulat qu'il pouvait exister, en pareil cas, un équilibre relatif, si la forme était celle d'un ellipsoïde de révolution aplati; et il détermina le rapport des axes et la loi de variation de la gravité à la surface. Cette recherche, malgré quelques imperfections, est un rare exemple de succès dans la première discussion d'un problème des plus difficiles, et constitue un monument impérissable du génie hors ligne de son auteur.

» Le second Chapitre est consacré à Huygens. C'est à ce géomètre que nous devons l'importante condition d'équilibre d'un fluide, savoir, que la force résultante en un point quelconque de la surface libre doit être normale à la surface en ce point, et par là il a contribué indirectement à l'avancement de nos connaissances sur ce sujet; mais Huygens n'accepta jamais le grand principe de l'attraction mutuelle des particules de la matière, et à cause de cela on ne lui est redevable que de la solution d'un problème théorique, celui de la recherche de la forme de la surface d'un fluide animé d'un mouvement de rotation sous l'influence d'une force dirigée constamment vers un point fixe.

» Le Chapitre III traite de recherches diverses, se rattachant à notre sujet, pendant le cours de la génération qui suivit la publication des *Principes*. On n'ajouta rien, en réalité, aux résultats théoriques de Newton, tandis que les mesures d'arcs de méridien en France conduisaient les Cassini à adopter l'hypothèse que la forme de la Terre n'était pas aplatie, mais allongée.

» Le Chapitre IV est relatif à Maupertuis. Ce géomètre écrivit divers Mémoires, parmi lesquels il y en avait deux en forme de commentaires des théories de Newton sur l'attraction et la figure de la Terre. Ces théories étaient rendues plus accessibles par la traduction du langage géométrique de l'original dans le langage analytique familier de l'époque. En adhérant aux conclusions de Newton, Maupertuis a puissamment contribué au triomphe de la vérité chez ses compatriotes, contre les erreurs soutenues par l'autorité de Descartes et des Cassini.

» L'important postulat, admis par Newton, fut examiné pour la première fois par Stirling, géomètre éminent; on voit, dans le Chapitre V, qu'il a obtenu, au moins implicitement, une démonstration approchée du résultat cherché.

» Dans le Chapitre VI, on rend compte de divers Mémoires de Clairaut, antérieurs à la publication de son important Ouvrage sur la figure de la Terre. Clairaut a donné, explicitement, une démonstration par approximation de la vérité du postulat de Newton. Il a fait connaître aussi le théorème qui porte son nom, et qui établit une liaison entre l'ellipticité de la Terre et le coefficient du terme exprimant l'accroissement de la gravité lorsqu'on passe de l'équateur au pôle.

» Le Chapitre VII contient un récit sommaire des circonstances dans lesquelles s'est opérée la mesure d'un arc de méridien en Laponie. J'ai entrepris d'exposer la marche des théories mathématiques de l'attraction et de la figure de la Terre; mais je ne prétends pas y faire entrer les opérations pratiques, qui conduisent à la connaissance des dimensions exactes de la Terre. Ces opérations consistent surtout en observations du pendule et en mesure d'arcs, et un compte rendu de ces travaux, tiré des sources originales, formerait un ouvrage aussi intéressant qu'instructif; mais les sujets plus difficiles auxquels j'ai consacré les présents volumes m'ont fourni une abondance de matériaux assez grande, sans que je fasse aucune digression sérieuse sur le terrain des applications pratiques. Je me suis donc borné à de courtes indications sur les plus anciennes observations du pendule, et sur les deux grandes expéditions de Laponie et du Pérou; ces expéditions méritent quelque attention, à cause de leur intérêt historique et des preuves décisives qu'elles ont fournies de la forme aplatie de la Terre.

» Le Chapitre VIII traite de diverses recherches faites entre 1721 et 1740. Desaguliers soutint, avec une ardeur parfois inconsidérée, l'aplatissement de la Terre contre l'hypothèse des Cassini; d'autre part, les mesures prises en France semblaient toujours favoriser cette hypothèse. Vers la fin de cette période, l'Académie de Paris proposa pour sujet de prix la Théorie des marées, ce qui donna occasion aux importantes recherches de Maclaurin.

» Le Chapitre IX est consacré à Maclaurin. Ce géomètre résolut complétement le problème de l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point de l'intérieur ou de la surface; sa méthode et ses résultats se prêtaient à l'extension, qui se présentait naturellement, de ce cas à celui d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. L'extension qu'il entreprit de faire au cas d'un point extérieur demande à être exposée avec soin, pour corriger les erreurs de nature contraire qui s'y rencontrent. Le résultat le plus général, obtenu jusque-là, peut être énoncé ainsi : Les potentiels de deux ellipsoïdes confocaux pour un point donné, extérieur aux deux corps, sont entre eux comme leurs masses. Ce théorème a été établi pour la première fois par Laplace; mais Maclaurin l'a démontré pour le cas particulier où le point extérieur est sur le prolongement d'un des axes des ellipsoïdes. Dans la théorie de la figure de la Terre, le plus grand mérite de Maclaurin est d'avoir donné une démonstration exacte du postulat de Newton, dont on n'avait jusque-là que des preuves par approximation.

» Dans le Chapitre X, on rend compte des travaux de Thomas Simpson. Cet éminent géomètre fit voir explicitement que, si la vitesse angulaire de rotation dépasse une certaine valeur, l'ellipsoïde aplati n'est pas une forme possible d'équilibre relatif pour une masse fluide; de ces résultats il s'ensuivait implicitement que, pour une valeur quelconque de la vitesse angulaire inférieure à cette limite, il existe plus d'une figure d'équilibre relatif. Simpson a donné aussi une remarquable étude sur l'attraction à la surface d'une classe très-étendue de corps approchant de la sphère.

» Le Chapitre XI consiste dans une analyse du célèbre Ouvrage de Clairaut. La Première partie de cet Ouvrage traite des principes de l'équilibre des fluides; ici Clairaut s'est montré de beaucoup supérieur à ses prédécesseurs, au point de vue de la généralité et de l'exactitude, et il a présenté la théorie sous la forme qu'elle conserve encore, à l'exception seulement du perfectionnement dû à Euler, qui a introduit la notion de la pression en un point quelconque du fluide, en même temps que le symbole convenablement choisi pour la désigner. La seconde Partie traite de la figure de la Terre. Pour le cas d'un fluide homogène, Clairaut a suivi pas à pas Maclaurin. Le cas d'un fluide hétérogène n'avait pas été jusque-là traité d'une manière pratique, et Clairaut inventa, pour l'étudier, un beau procédé, que l'on a conservé jusqu'à présent sans aucun changement essentiel. Le principal résultat est une certaine équation reliant l'ellipticité des couches avec leur densité, et qui se présente sous deux formes, que j'ai respectivement désignées sous les noms d'*équation primitive* et d'*équation dérivée* de Clairaut.

» Le Chapitre XII retrace brièvement les circonstances de la mesure de l'arc de méridien au Pérou. J'ai examiné avec soin les nombreuses publications, consistant en grande partie en articles de controverse, auxquelles a donné lieu cette mémorable expédition; et, par des renvois exacts aux sources, je suis venu en aide à tous ceux qui voudront étudier cette question et en connaître à fond les détails.

» Le Chapitre XIII est consacré à la première moitié des écrits de d'Alembert, relatifs à notre sujet. Ces écrits sont volumineux, et peuvent avoir indirectement servi à répandre le goût de ces recherches, que doit avoir ressenti l'auteur lui-même; mais, à cause des erreurs de principes et des inexactitudes de détails qu'ils renferment, leur valeur intrinsèque n'est pas considérable. Dans les diverses tentatives qu'il a faites pour critiquer l'Ouvrage de Clairaut, d'Alembert me semble avoir eu constamment tort en ce qui regarde la figure de la Terre, et avoir eu raison seulement sur quelques points secondaires de l'Hydrodynamique. On lit, dans la vie de d'Alembert, publiée dans le *Biographical Dictionary of the Society for the Diffusion of Useful Knowledge*, que « lui et Clairaut étaient rivaux, » et qu'aucun ouvrage de l'un d'eux ne paraissait sans trouver dans » l'autre un critique sévère; mais que d'Alembert, le plus circon- » spect et le plus profond des deux, prenait généralement le bon » côté de la question. » Ce jugement est prononcé par une très-haute autorité, devant laquelle j'ai coutume de m'incliner avec respect; mais, pour ce qui touche au sujet du présent Ouvrage, je me permettrai de prendre le contre-pied de cette sentence.

» Le Chapitre XIV est consacré principalement à Boscovich, dont les écrits nous offrent des exposés élémentaires des résultats les plus importants obtenus à la date de leur publication. Je donne aussi une courte Notice sur le poëme de Stay, pour lequel Boscovich a fourni des Notes et des dissertations supplémentaires.

» Le Chapitre XV traite des recherches diverses qui ont eu lieu entre les années 1741 et 1760. Il renferme une brève analyse d'un Mémoire couronné sur la Figure de la Terre, publié par Clairaut, quelques années après son Traité.

» Le Chapitre XVI a pour objet la seconde moitié des écrits de d'Alembert. Leur caractère général est le même que celui de la première moitié; les recherches elles-mêmes sont déparées par de graves erreurs, mais elles servent à attirer l'attention sur des sujets pleins d'intérêt et d'importance.

» Les Ouvrages de Frisi sont analysés dans le Chapitre XVII. Ils ressemblent à ceux de Boscovich, en ce qu'ils ont plutôt contribué à propager qu'à augmenter les connaissances sur la question.

» Le Chapitre XVIII traite des recherches diverses qui ont été faites de 1761 à 1780. Les trois premiers Mémoires de Laplace appartiennent à cette période; mais nous avons cru convenable d'en ajourner l'examen. Le Chapitre contient le compte rendu d'un Mémoire de Lagrange, traitant par l'Analyse la question que Maclaurin avait résolue géométriquement. Les opérations exécutées dans les monts Schehalliens, pour la détermination de la densité de la Terre, sont mentionnées, et l'on renvoie aux sources pour les travaux postérieurs sur le même sujet. Ici finit le premier volume, contenant l'histoire de notre sujet pendant le siècle qui a suivi la publication des *Principes* de Newton.

» Le Chapitre XIX concerne le premier des trois Mémoires de Laplace. On peut dire que l'objet principal de ces Mémoires est la solution d'un problème qui est une extension du postulat de Newton. Newton admettait qu'un sphéroïde aplati était une forme possible d'équilibre relatif pour un fluide animé d'une rotation; le problème actuel est de faire voir qu'un sphéroïde aplati est la *seule* forme possible, au moins sous certaines restrictions. J'appelle cette question le *Problème de Legendre*, ce géomètre étant le premier qui en ait donné une solution passable. D'Alembert aborda le problème, mais il y échoua. Laplace ne le résolut pas complétement; mais il fit voir que, pour une classe très-nombreuse de figures approchant de la sphère, l'équilibre était impossible. Il obtint aussi l'expression de la loi de la gravité qui doit avoir lieu universellement.

» Le Chapitre XX est consacré à un Mémoire qui occupe une place remarquable dans l'histoire de la théorie de l'attraction : c'est le premier Mémoire de Legendre. La limite atteinte par Maclaurin est maintenant, pour la première fois, dépassée de beaucoup; Legendre montre que le théorème concernant les ellipsoïdes confocaux est vrai pour *toute position* du point extérieur, quand les ellipsoïdes sont de révolution. Legendre introduit ici les expressions célèbres, jusque-là inconnues, que l'on appelle maintenant, d'habitude, les *coefficients de Laplace;* en outre, d'après une idée suggérée par Laplace, nous voyons apparaître dans cette théorie la fonction appelée aujourd'hui la *fonction potentielle*.

» Le Chapitre XXI nous met sous les yeux un Traité assez rare de Laplace, et contient l'analyse de la partie de ce Traité qui se rapporte à l'attraction et à la figure de la Terre. Là se trouve pour la première fois la démonstration du théorème concernant l'action des ellipsoïdes confocaux sur un point extérieur, théorème que j'appelle du nom de Laplace. Les théories de l'attraction des ellipsoïdes et de la figure homogène de la Terre sont présentées dans ce Traité à peu près sous la même forme que dans la *Mécanique céleste*.

» Le Chapitre XXII est relatif au second Mémoire de Legendre. Ici Legendre résout le problème auquel j'attache son nom. Il admet que le fluide a la figure d'un corps de révolution et qu'il ne s'écarte pas beaucoup de la forme sphérique.

» Le Chapitre XXIII rend compte des quatrième, cinquième et sixième Mémoires de Laplace. Le quatrième et le cinquième Mémoire contiennent la théorie de l'attraction des sphéroïdes, et la théorie des fonctions de Laplace sous la même forme que dans la *Mécanique céleste*. Le sixième Mémoire est relatif à l'anneau de Saturne.

» Le Chapitre XXIV est consacré au troisième Mémoire de Legendre. L'objet de ce Mémoire est de démontrer le théorème de Laplace sur les ellipsoïdes confocaux, par un procédé plus direct que celui que Laplace lui-même avait employé. Legendre démontre le théorème sans développer ses expressions en séries; mais la marche est excessivement longue et compliquée.

» Le Chapitre XXV analyse le quatrième Mémoire de Legendre. On y trouve un grand développement de la méthode de Clairaut pour le cas d'un fluide homogène. L'auteur obtient une équation générale, analogue à l'équation primitive de Clairaut, et il s'en sert pour faire voir que les couches doivent être ellipsoïdales.

» Le Chapitre XXVI est consacré au septième Mémoire de Laplace. Ce Mémoire contient quelques discussions numériques des longueurs de degrés et des longueurs du pendule à seconde; il s'y trouve aussi une théorie de la figure hétérogène de la Terre, qui s'accorde, en substance, avec celle du quatrième Mémoire de Legendre.

» Le Chapitre XXVII traite des recherches diverses qui ont eu lieu de 1781 à 1800. Entre autres sujets, nous avons ici à mentionner l'*Introduction à l'étude de l'Astronomie physique,* par Cousin, un Mémoire de Lagrange, et un autre de Trembley; ce dernier travail est d'une valeur aussi médiocre que les différents Mémoires du même auteur que j'ai examinés dans mon *Histoire de la Théorie mathématique des Probabilités.*

» Le Chapitre XXVIII rend compte des deux premiers volumes de la *Mécanique céleste*, en tant qu'ils se rapportent à notre sujet. Laplace y a reproduit avec peu de changements les quatre derniers de ses sept Mémoires, et l'ensemble forme un Traité qui n'a pas encore été dépassé.

» Le Chapitre XXIX retrace l'histoire des recherches concernant le théorème de Laplace. Ivory, Legendre, Gauss et Rodrigues ont tous donné des discussions complètes de l'attraction des ellipsoïdes, tandis que Biot et Plana ont commenté des parties de cette théorie. La méthode d'Ivory est la plus simple de toutes, et elle a conquis une place permanente dans nos Ouvrages élémentaires, d'autant plus qu'on a l'habitude de parler du *théorème d'Ivory,* quoiqu'il fût plus exact de dire la *démonstration par Ivory du théorème de Laplace.*

» Le Chapitre XXX traite d'une équation que Laplace semble avoir considérée avec une prédilection marquée, et qui se rencontre souvent dans ses Ouvrages. Toutefois cette équation ne parut pas satisfaisante à Ivory, qui la critiqua avec sévérité. On peut dire que le résultat de cette discussion a été d'établir l'exactitude de l'équation, pourvu qu'on s'en serve, comme le faisait Laplace lui-même, avec les précautions convenables; mais, d'autre part, les résultats que Laplace voulait atteindre au moyen de son équation s'obtiennent maintenant, en général, sans y avoir recours, de sorte qu'à présent cette équation est rarement employée dans la pratique.

» Le Chapitre XXXI explique l'équation aux différentielles partielles du symbole qui désigne la fonction potentielle. Laplace avait d'abord admis qu'une certaine équation avait lieu à la fois pour une particule extérieure et pour une particule intégrante du corps considéré; mais Poisson montra que les deux cas exigeaient des formes d'équation différentes.

» Le Chapitre XXXII discute une méthode donnée par Laplace pour résoudre le problème de Legendre, avec l'objection faite à cette méthode par Liouville, et l'analyse que Poisson a substituée à celle de Laplace.

» Le Chapitre XXXIII passe en revue divers Mémoires publiés par Laplace, pendant le premier quart du présent siècle.

» Le Chapitre XXXIV est consacré à la partie du cinquième volume de la *Mécanique céleste* qui se rapporte à notre double sujet, et qui consiste principalement dans une reproduction des Mémoires dont il a été question au Chapitre XXXIII.

» Strictement parlant, la période historique que je me proposais de décrire s'arrête ici; mais il m'a semblé convenable de renfermer dans mon cadre tous les écrits de trois mathématiciens qui avaient déjà joué un rôle important dans mon Livre, et qui peuvent être associés naturellement avec leurs prédécesseurs, particulièrement avec Laplace. Ces auteurs sont Poisson, Ivory et Plana.

» Le Chapitre XXXV contient un compte rendu de tous les travaux de Poisson qui n'avaient pas été déjà examinés. Les plus importants sont un Mémoire approfondi sur l'attraction des sphéroïdes, et un Mémoire contenant une nouvelle étude du théorème de Laplace sur les ellipsoïdes confocaux.

» Le Chapitre XXXVI donne une courte esquisse des nombreux articles et Mémoires publiés par Ivory, en vue surtout de défendre certaines opinions personnelles, à la fois singulières et erronées. Les grandes promesses que faisaient entrevoir ses premiers succès ne furent suivies d'aucun résultat de quelque valeur dans les essais de ses dernières années.

» Le Chapitre XXXVII est consacré à Plana, qui a écrit divers Mémoires, la plupart en forme de commentaires, sur Lagrange, Legendre et Laplace.

» Le dernier Chapitre traite de différentes recherches entreprises pendant le premier quart du présent siècle. C'est par hasard que l'Histoire se termine par un paragraphe relatif à Bowditch; mais, au point de vue de ses qualités morales et intellectuelles et de son dévouement désintéressé à la Science, le nom d'un des géomètres les plus distingués de l'autre côté de l'Atlantique mérite bien de clore une liste qui commence par le nom de Newton. »

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

T. LXXVII, 1873, 2e semestre (fin).

N° 22. Séance du 1er décembre 1873.

Resal. — *Note accompagnant la présentation du « Cours de Mécanique appliquée aux machines »* de J.-V. Poncelet.

Faye. — *Sur les trombes terrestres et solaires.*

Morin (le général). — *Observations sur la Communication de* M. Faye.

Siacci (F.). — *Sur un théorème de Mécanique céleste.*

M. Newcomb a communiqué à l'Académie, en 1872, le théorème suivant : « Si $b_1, b_2, \ldots, b_{3n}$ sont les coefficients du temps dans les expressions des coordonnées et des vitesses de n planètes; si c_1, $c_2, \ldots, c_{3n}$ sont les constantes canoniques dont les grands axes, les excentricités et les inclinaisons des orbites peuvent être considérées

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 76.

comme des fonctions, et si V est le viriel exprimé en fonction de $c_1, c_2, \ldots, c_{3n}$, on a $b_i = \frac{\partial V}{\partial c_i}$. »

M. Siacci donne une nouvelle démonstration de ce théorème, et montre qu'on peut remplacer le viriel par la constante des forces vives avec le signe changé, et que cette constante n'est dépendante que des grands axes, des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Mercadier (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.*

L'auteur donne l'équation qui représente ce mouvement, et montre que les conséquences en sont identiques aux expériences indiquées dans les Notes précédentes.

N° 23. Séance du 8 décembre 1873.

Menabrea (L.-F.). — *Note sur l'identité des formules données par Cauchy pour déterminer les conditions de convergence de la série de Lagrange, avec celles qui ont été établies par Lagrange lui-même.*

Les formules établies par Cauchy se trouvent dans son *Mémoire sur divers points d'Analyse* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* t. VII), et celles de Lagrange dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences de Berlin,* année 1768, *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales* (*OEuvres de Lagrange,* t. III, p. 5).

Wolf (C.). — *Observation des étoiles filantes de novembre.*

Stephan (E.). — *Nouvelles observations de la comète périodique de M. Faye, et découvertes et observations de vingt nébuleuses, faites à l'Observatoire de Marseille.*

Mercadier (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.* (Suite.)

N° 24. Séance du 15 décembre 1873.

Levy (M.). — *Sur une réduction de l'équation à différences partielles du troisième ordre, qui régit les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal.*

Si $\rho = F(x, y, z)$ est l'équation de la famille de surfaces, on regardera z comme une fonction des variables indépendantes x, y, ρ; par ce moyen, M. Levy fait disparaître trois des six dérivées du troisième ordre que l'équation en question renferme, et il énonce une règle très-simple qui permet d'écrire immédiatement la nouvelle équation, en prenant l'équation connue de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy.

N° 25. Séance du 22 décembre 1873.

Lucas (F.). — *Rapport anharmonique de quatre points du plan.*

L'application de l'Algèbre des imaginaires à la Géométrie est déjà fort ancienne; sans parler de la représentation géométrique des imaginaires, dont l'idée a été développée par Argand (1806), Mourey (1828), Gauss (1831), nous rappellerons que M. Bellavitis a donné, dans les *Annales de Mathématiques* de Fusinieri, cette proposition très-générale : « A toute relation entre des points en ligne droite correspond une relation analogue entre un même nombre de points situés sur un plan. » Dans deux Mémoires insérés au *Journal de Crelle,* en 1856, Möbius étudie les propriétés du double rapport formé avec quatre segments pris parmi ceux qui unissent deux à deux quatre points situés d'une manière quelconque sur un plan, en faisant correspondre les segments aux formes imaginaires de l'Algèbre.

Citons encore les Mémoires de Siebeck (*Journal de Borchardt,* 1858), de M. Transon (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1868), de M. Beltrami (*Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche,* extrait du tome IX des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne*, 1870), où l'on donne les propriétés du rapport anharmonique complexe, des involutions complexes, etc.

Jordan (C.). — *Sur les polynômes bilinéaires.*

Soit un polynôme bilinéaire

$$P = \sum A_{\alpha\beta}\, x_\alpha y_\beta, \quad \text{où} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

qu'on se propose de ramener à la forme (dite *canonique*)

$$x_1 y_2 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m, \quad \text{où} \quad m \overline{\gtrless} n.$$

M. Jordan donne la solution des trois questions suivantes :

1° Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canonique simple, par des substitutions *orthogonales*, opérées les unes sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les autres sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2° Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques, mais opérées *simultanément* sur les x et sur les y.

3° Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q, par des substitutions linéaires quelconques, opérées *isolément* sur chacune des deux séries de variables.

Le second problème a déjà été traité par M. Kronecker (*Monatsbericht*, 15 octobre 1866), et le troisième par M. Weierstrass. (*Ibid.,* 18 mai 1868.)

Vicaire (E.). — *Sur la constitution physique du Soleil. Réponse aux articles de* M. Faye.

N° 26. Séance du 29 décembre 1873.

Puiseux (V.). — *Sur la formation des équations de condition qui résulteront des observations du passage de Vénus du* 8 *décembre* 1874.

Chaque observation du passage de Vénus conduira à une équation de condition entre les diverses inconnues de la question, et pourra contribuer, par conséquent, à la détermination de ces inconnues, dont la plus importante est la valeur moyenne de la parallaxe solaire. Pour faciliter la formation de ces équations, qui exige des calculs assez laborieux, M. Puiseux a construit des Tables, d'où l'on peut tirer commodément les nombres qui doivent entrer dans ces équations ; ces Tables terminent la Note actuelle.

Boussinesq (J.). — *Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres sans cohésion.*

Genocchi (A.). — *Observations relatives à une Note précédente de* M. Menabrea, *concernant la série de Lagrange.*

M. Genocchi fait remarquer que la transformation dont M. Menabrea se sert a été employée, il y a plus de vingt-cinq ans, par Félix Chiò, et il ajoute qu'un second Mémoire de Félix Chiò (t. XII des *Savants étrangers*) contient, outre des calculs et des équations identiques à ceux de M. Menabrea, plusieurs propositions très-remarquables, pour déterminer les cas dans lesquels la règle de Lagrange doit s'accorder avec celle de Cauchy.

T. LXXVIII, 1874. 1er semestre.

N° 1. Séance du 5 janvier 1874.

LEDIEU (A.). — *Interprétation mécanique des lois de Dulong et Petit et de Wœstyn sur les chaleurs spécifiques atomiques. Observations présentées à propos des dernières Communications de* MM. LOCKYER, DUMAS *et* BERTHELOT, *relatives à la nature des éléments des corps.*

PAINVIN (L.). — *Recherche des conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe donnée, un contact d'ordre déterminé.*

REYE (Th.). — *Réponse aux remarques de* M. FAYE *sur les trombes terrestres et solaires.*

N° 2. Séance du 12 janvier 1874.

LE VERRIER. — *Tables du mouvement de Jupiter, fondées sur la comparaison de la théorie avec les observations.*

SIACCI (F.). — *Sur le Problème des trois Corps.*

L'auteur présente une méthode, au moyen de laquelle on peut toujours avoir plusieurs systèmes canoniques de huit équations, dont chacun réduit, par conséquent, à sept le nombre des intégrations à faire, en tenant compte de l'intégrale des forces vives.

LUCAS (F.). — *Propriétés géométriques des fractions rationnelles.*

Le point de départ des recherches de l'auteur est l'équation

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \lambda,$$

qui détermine ce qu'on a nommé une *involution complexe* (Beltrami, etc.); il en déduit plusieurs propriétés relatives aux courbes, qu'il appelle *cyclides*.

PÉPIN (le P.). — *Théorèmes d'Analyse indéterminée.*

Les théorèmes énoncés concernent l'équation indéterminée

$$ax^4 + by^4 = z^2.$$

N° 3. Séance du 19 janvier 1874.

Resal (H.). — *Sur la théorie des chocs.*

Anciennement on concluait, de l'assimilation des corps complétement élastiques à de véritables ressorts, que la somme des vitesses normales extrêmes au point de contact, dans le choc de deux corps, était égale au double de la vitesse pareille, dans l'hypothèse où les corps seraient complétement dénués d'élasticité. M. Resal montre que cette règle se vérifie dans toutes les circonstances que peut présenter le choc de deux corps élastiques, lorsqu'on fait abstraction du frottement, en résolvant complétement le problème considéré à son point de vue le plus général.

Lucas (F.). — *Propriétés géométriques des fractions rationnelles.* (Suite.)

Fouret. — *Détermination, à l'aide du principe de correspondance, du nombre des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues.*

N° 4. Séance du 26 janvier 1874.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe de l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

pour tout cycle fermé et réversible.

Morin (le général). — *Sur l'enseignement de la Mécanique appliquée donné par Poncelet.*

Le général Morin, en retraçant la vie de Poncelet et l'historique de ses recherches dans le domaine de la Mécanique appliquée, désire appeler l'attention de l'Académie sur l'ensemble des travaux si originaux de ce célèbre géomètre sur ce sujet, et provoquer la publication de la partie des œuvres qui s'y rapporte.

Lucas (F.). — *Propriétés géométriques des fractions rationnelles.* (Suite.)

Voici quelques-unes des propositions énoncées par l'auteur :

« Si tous les points racines d'une équation algébrique forment les sommets d'un polygone convexe, les points racines de l'équation dérivée sont tous situés à l'intérieur de ce polygone.

» Si tous les points racines d'une équation algébrique sont disposés en ligne droite, cette droite contient aussi les racines de l'équation dérivée. »

Zeuthen (G.). — *Détermination des nombres plückériens des enveloppes.*

Laguerre. — *Sur la théorie des équations numériques.*

M. Laguerre énonce les propositions suivantes, qui sont remarquables :

« 1° Étant donné un cercle quelconque, contenant tous les points racines de l'équation $f(x,y) = 0$, et étant pris un point quelconque ξ en dehors de ce cercle, toutes les racines d'une quelconque des équations

$$\left(\xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy}\right)^i f = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro un émanant de l'équation proposée, sont également contenues dans l'intérieur du cercle.

» 2° Si deux points du plan, ξ, ξ', satisfont à la relation

$$\xi' \frac{df}{d\xi} + \eta' \frac{df}{d\eta} = 0,$$

tout cercle mené par ces deux points contient au moins un point racine ; il y a, en outre, au moins un point racine à l'extérieur de ce cercle. »

N° 5. Séance du 2 février 1874.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe de l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

pour tout cycle fermé et réversible. (Suite et fin.)

Zeuthen (G.). — *Détermination des nombres plückériens des enveloppes.* (Suite.)

Ce second article a pour objet la démonstration des formules qui servent à déterminer le nombre des points cuspidaux et celui des tangentes d'inflexion de l'enveloppe d'un système donné.

Flammarion. — *Orbite apparente et période de révolution de l'étoile double ζ d'Hercule.*

M. Flammarion conclut de la comparaison de toutes les observations que la période de révolution est de $34^{\text{ans}},57$.

N° 6. Séance du 9 février 1874.

Morin (le général). — *Étude expérimentale sur la balistique intérieure.*

Tisserand (F.). — *Observations faites à l'Observatoire de Toulouse. — Observation de l'aurore boréale du 4 février* 1874, *à Toulouse.*

Mathieu (É.). — *Mémoire sur le Problème des trois Corps.*

Cette Note a principalement pour objet de démontrer directement que deux combinaisons des équations des aires sont renfermées dans les huit équations canoniques que l'auteur avait données dans le Mémoire présenté dans la séance du 10 novembre 1873.

Lucas (F.). — *Théorèmes concernant les équations algébriques.*

Supposant un point quelconque P du plan affecté d'une masse égale à l'unité et repoussant un autre point Q en raison inverse de la distance PQ, l'auteur appelle *action algébrique* de P sur Q la force ainsi engendrée, et il énonce les théorèmes suivants :

« Les actions algébriques exercées par les racines (M) d'une équation sur une racine I de sa dérivée se font équilibre.

» La résultante des actions algébriques exercées sur une des racines (M) d'une équation par toutes les autres racines équivaut à la résultante des actions algébriques exercées sur cette même racine par toutes celles de l'équation dérivée. »

Genocchi (A.). — *Sur l'impossibilité de quelques égalités doubles.*

Painvin (L.). — *Conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe d'ordre quelconque, un contact du cinquième ordre.*

Laguerre. — *Sur les normales abaissées d'un point donné sur une surface de second ordre.*

N° 7. Séance du 16 février 1874.

Clausius (R.). — *Sur une équation mécanique qui correspond à l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Les équations que M. Clausius rappelle sont celles qu'il a données dans deux Mémoires publiés en 1870 et 1873. (*Annales de Poggendorff*, t. CXLII et CL.)

Tresca. — *Rapport sur un Mémoire de* M. Marey, *concernant le point d'appui de l'aile sur l'air* (dans le vol des insectes et des oiseaux).

Jourjon. — *Sur une transformation de la formule de Taylor.*

La transformation indiquée par l'auteur résulte de l'identité

$$f(x+h) - f(x) = f\left[\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}\right] - f\left[\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}\right].$$

N° 8. Séance du 23 février 1874.

Resal (H.), — *Du mouvement ondulatoire d'un train de wagons dû à un choc.*

Supposant le train placé sur une voie droite et les centres de gravité des véhicules situés dans un même plan vertical, M. Resal admet que la percussion a lieu dans ce plan, que l'action mutuelle entre deux véhicules est proportionnelle à leur déplacement relatif et que les résistances pendant le mouvement sont proportionnelles à la masse; il intègre alors et discute les équations du mouvement.

Ledieu (A.). — *Observations à propos de la dernière Communication de M. Clausius sur l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Laguerre. — *Sur les droites qui sont doublement tangentes* *à la surface lieu des centres de courbure d'une surface du second ordre.*

Dans sa première Note (séance du 9 février), M. Laguerre rappelle d'abord le théorème suivant, dû à M. Desboves (*Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre*) :

Si une conique située sur une surface (S) *du second ordre est telle que les normales à* (S) *issues de trois de ses points se coupent en un même point, il y aura de même une infinité d'autres groupes analogues de trois normales à* (S), *et les normales à* (S) *rencontrent une même droite* Δ.

Une droite Δ jouit donc de cette propriété, que le lieu des pieds des normales, menées de chacun des points de la droite à la surface (S), se décompose en deux coniques.

L'auteur signale plusieurs propriétés relatives à ces droites, celle-ci entre autres :

Toutes les droites Δ *sont doublement tangentes à la surface* Θ, *lieu des centres de courbure de la surface* (S).

Ces diverses propositions sont, pour la plupart, déduites de relations analogues à celles qui ont été données par Joachimsthal ([1]).

Dans sa seconde Note, M. Laguerre revient sur cette dernière proposition et la conclut, à l'aide de considérations géométriques, de plusieurs théorèmes généraux démontrés d'abord pour des surfaces d'ordre quelconque.

N° 9. Séance du 2 mars 1874.

Chasles. — *Considérations sur le caractère propre du principe de correspondance.*

Voici en quels termes M. Chasles caractérise ce principe :

« Le principe de correspondance s'applique, avec une très-grande facilité, à une infinité de questions. Cette facilité est telle, que sans qu'on ait besoin d'exprimer, par aucune équation, comme en Analyse, les conditions de la question, on pose sur-le-champ deux nombres qui satisfont à ces conditions, et dont la simple somme exprime la solution. Toutefois il peut se trouver dans ce résultat

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. 53.

des solutions étrangères qu'il faut élaguer.... A cet égard, les courbes unicursales ont un très-utile privilége....

» Le principe de correspondance a encore un autre caractère, qui doit accroître considérablement l'étendue des résultats qui lui seront dus : c'est que, en l'appliquant à une question des plus simples, on reconnaît immédiatement que le raisonnement sera absolument le même dans le cas de la plus grande généralisation que peut admettre la question....

» Enfin j'ajouterai que le principe de correspondance comporte une telle facilité de solution que, quelle que soit la question qu'on s'est proposée, indépendamment de la généralisation dont je viens de parler, on a tout aussitôt la pensée d'appliquer ce mode de solution spontanée à diverses autres questions relatives à la figure qu'on a sous les yeux.... »

M. Chasles apporte de nombreux exemples à l'appui de ses assertions. Nous citerons le théorème suivant, généralisation d'une propriété bien connue des coniques :

Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à quatre courbes, de classes n', n'', n''', n^{iv}, quatre tangentes faisant entre elles un rapport anharmonique donné, est une courbe de l'ordre $2n'$, n'', n''', n^{iv}.

FAYE. — *Sur le mouvement descendant des trombes solaires et terrestres, et sur la formation de leurs gaînes opaques.* Réponse à M. le Dr Reye.

SECCHI (le P.). — *Observations des protubérances solaires pendant le dernier trimestre de l'année* 1873. *Résultats fournis par l'emploi des réseaux, au lieu de prismes, dans les observations spectrales des protubérances.*

JORDAN (C.). — *Sur la réduction des formes bilinéaires.*

Cette Note est une réponse à une critique de M. Kronecker, relative au Mémoire de M. Jordan *Sur la réduction des formes bilinéaires,* Mémoire inséré dans le *Journal de Liouville,* 1873.

THOULET (J.). — *Projection gnomonique de la surface terrestre sur un octaèdre et sur un cube circonscrit à la sphère.*

MANNHEIM (A.). — *Démonstration géométrique de quelques* *théorèmes, au moyen de la considération d'une rotation infiniment petite.*

Les propriétés établies concernent principalement les normales aux surfaces de second ordre; M. Mannheim retrouve ainsi plusieurs des théorèmes énoncés par M. Laguerre (Séance du 23 février).

Flammarion (C.). — *Orbite apparente et période de révolution de l'étoile double η de la Couronne.*

La durée de la révolution serait de $40^{\text{ans}},17$.

N° 10. Séance du 9 mars 1874.

Resal (H.). — *Note sur la théorie de la houle.*

Phillips. — *Note sur un nouveau spiral réglant des chronomètres et des montres.*

Hatt (Ph.). — *Sur une disposition particulière du micromètre à fils mobiles, proposée pour les lunettes qui serviront à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil.*

Bertin (E.). — *Nouvelle Note sur les vagues de hauteur et de vitesse variables.*

N° 11. Séance du 16 mars 1874.

Resal (H.). — *Note sur l'emploi des lames flexibles pour le tracé d'arcs de cercle d'un grand diamètre.*

L'appareil ingénieux présenté par M. Resal permet de tracer très-exactement des arcs de cercle de 2 mètres de diamètre; il est d'une construction fort simple et repose sur le principe suivant : si une lame élastique est encastrée dans deux pièces, mobiles à volonté autour de deux axes variables, les encastrements, en raison de la symétrie, ne donnent lieu qu'à deux couples de sens contraire, lorsqu'on fait tourner ces encastrements d'un même angle; le profil de la lame sera un arc de cercle.

Secchi (le P.). — *Recherches expérimentales conduisant à une détermination de la température du Soleil.*

Beaumont (Élie de). — *Rapport sur les travaux géodésiques relatifs à la nouvelle détermination de la méridienne de France,* *fait au nom d'une Commission formée des Membres des Sections de Géométrie, d'Astronomie, de Géographie et Navigation et des Membres composant le Bureau.*

Cet important Rapport comprend treize pages des *Comptes rendus*.

JORDAN (C.). — *Sur une application de la théorie des substitutions aux équations différentielles linéaires.*

La question qui constitue l'objet principal de ce Mémoire est la suivante :

Les substitutions qui s'opèrent sur les intégrales autour de chaque point critique étant supposées connues, s'assurer si le groupe dérivé de ces substitutions est primaire ou non.

LAGUERRE. — *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie plane.*

Pour appliquer la théorie des formes binaires à l'étude des courbes, M. Laguerre considère ce qu'il nomme l'*équation mixte* de la courbe, notion qu'il a déjà présentée dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Liouville;* il en a été rendu compte au *Bulletin* (1872, t. III, p. 379). L'auteur se propose principalement, dans le Mémoire actuel, de déterminer les équations mixtes des courbes que l'on obtient en égalant à zéro les divers covariants de l'équation mixte d'une courbe donnée.

BOUSSINESQ (J.). — *Sur les lois de la distribution plane des pressions à l'intérieur des corps isotropes dans l'état d'équilibre limite.*

N° 12. Séance du 23 mars 1874.

BOUSSINESQ (J.). — *Sur la distribution plane des pressions à l'intérieur des corps isotropes, dans l'état d'équilibre limite. Mode d'intégration des équations différentielles.*

VICAIRE (E.). — *Sur la loi de l'attraction astronomique, sur les masses des divers corps du système solaire, et en particulier sur la masse et sur la durée du Soleil.*

L'auteur pense que la proportionnalité de l'attraction aux masses n'est pas une vérité démontrée, et que, comme hypothèse, elle n'est pas vérifiée par ses conséquences.

Fouret. — *Sur les systèmes de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définies par deux caractéristiques.*

L'auteur considère les systèmes généraux définis par une équation algébrique, entière et rationnelle, entre les quantités

$$x, y, \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \quad \left(\alpha = \frac{dy}{dx}, \beta = y - x\frac{dy}{dx}\right);$$

les caractéristiques μ et ν de ce système seront les degrés respectifs de cette équation par rapport à α et β, et par rapport à x et y; M. Fouret énonce plusieurs théorèmes généraux relatifs à ces systèmes.

Painvin (L.). — *Condition explicite pour qu'une conique ait un contact du cinquième ordre avec une courbe donnée.*

Les Notes présentées sur ce sujet, dans les séances des 5 janvier, 9 février et 23 mars, résument les résultats principaux d'un Mémoire qui comprend les trois Parties suivantes : dans la première Partie, on donne l'équation explicite des $2m - 3$ sécantes joignant les points d'intersection d'une conique osculatrice avec une courbe d'ordre m au point d'osculation; la deuxième Partie renferme l'interprétation géométrique de la condition qui exprime que la conique a un contact du cinquième ordre; la troisième Partie donne la forme explicite de cette équation de condition et une application à une courbe particulière du quatrième ordre.

Mannheim (A.). — *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde.*

L'auteur conclut des théorèmes qu'il énonce la détermination de la courbe de contact des plans tangents doubles de la surface des ondes, et les sections circulaires des cônes tangents aux points doubles de cette même surface.

Rayet (G.). — *Sur un cadran solaire grec trouvé par* M. O. Rayet, *à Héraclée du Latmos.*

N° 13. Séance du 30 mars 1874.

Picart (A.). — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.*

Voici la méthode indiquée par M. Picart : si n est le nombre des dérivées de l'ordre le plus élevé de l'équation proposée, nous associons à cette équation $n-1$ autres équations renfermant chacune une constante arbitraire, et telles que les valeurs de ces dérivées, tirées des n équations, rendent *intégrable* le système d'équations aux différentielles totales, qui lie la fonction et ses dérivées successives. L'intégration de ce système donne une intégrale complète, de laquelle on cherche à déduire ensuite l'intégrale générale.

Zenger (Ch.). — *Sur une méthode d'agrandissement photographique pour les observations astronomiques.*

Laussedat. — *Sur l'emploi des signaux lumineux dans les opérations géodésiques.*

MONTHLY NOTICES of the Royal Astronomical Society of London ([1]).

T. XXXIII; novembre 1872 à février 1873.

Marth (A.). — *Liste des coordonnées de la Voie lactée.*

M. Marth, astronome de M. Newall, croit que le travail le plus utile auquel puisse être employé un grand équatorial ($0^m,63$ d'ouverture) est de construire, dans une station dont le climat soit favorable (Malte, Ténériffe ou Madère), une Carte de la Voie lactée comprenant toutes les étoiles et toutes les nébuleuses visibles dans cette région du ciel. C'est, en effet, répondre à un pressant appel, adressé, en 1844, par Argelander aux astronomes possesseurs d'instruments puissants, et continuer l'œuvre entreprise dans notre hémisphère par MM. Heiss et Schmidt.

M. Marth publie aujourd'hui, comme travail préparatoire de cette Carte, comme base d'un premier canevas, la liste des coordonnées de toutes les étoiles de l'*Uranometria nova* d'Argelander, jusqu'à la 6^e^ grandeur, comprises dans la zone centrale de la Voie lactée.

Proctor (R.-A.). — *Les régions nébuleuses voisines de la Vierge et de la Chevelure de Bérénice.*

([1]) Voir *Bulletin*, t. III, p. 245.

Comme conclusion aux deux dessins qui accompagnent cette Note, M. Proctor dit que les nébuleuses ne doivent pas être situées en dehors de notre système stellaire; mais il ne donne de cette affirmation aucune preuve bien convaincante.

Freeman (M.-A.). — *Procédé graphique de transformation des coordonnées célestes.*

Tennant (J.-F.). — *Examen des photographies prises à Dodabetta pendant l'éclipse totale de Soleil des* 11-12 *décembre* 1871.

Ces photographies ont été successivement projetées sur un verre dépoli, et les images formées ont été assez belles pour que certaines particularités remarquables de la Couronne soient reproduites sur cinq d'entre elles. On a mesuré la position relative de ces points et du disque de la Lune, et l'on a trouvé qu'ils avaient, par rapport à ce disque, un mouvement précisément égal à celui que produirait le passage de la Lune devant le Soleil. C'est une preuve évidente que la Couronne est en grande partie formée par l'atmosphère solaire.

Todhunter (L.). — *Sur l'arc de méridien mesuré dans le sud de l'Afrique.*

On sait qu'en 1752 Lacaille a mesuré un arc de méridien au Cap de Bonne-Espérance, et que l'arc obtenu par lui est beaucoup plus long qu'on ne devait s'y attendre, d'après les mesures faites dans l'hémisphère nord (trop long de 860 pieds pour 1 degré). Depuis, sir Thomas Maclear, alors Astronome royal au Cap, a entrepris une opération beaucoup plus vaste que celle de Lacaille, opération dont les résultats concordent avec ceux qui se déduisent des meilleures mesures géodésiques faites dans l'hémisphère austral. Les travaux de M. Maclear ont été publiés dans un Ouvrage en deux volumes, qui a valu à son auteur une médaille d'or de la Société Royale, et le prix de Lalande de l'Académie des Sciences de Paris, et qui a pour titre : *Verification and extension of la Caille's Arc of meridian at the Cape of Good Hope.* Malheureusement, d'après M. Todhunter, cet Ouvrage ne répond pas complétement à son titre; c'est bien plutôt le récit d'une nouvelle opération que la comparaison de cette opération avec l'ancienne et la recherche des causes auxquelles sont dues les erreurs qui en faussaient les résultats; par exemple, des mesures différentes faites entre la ville du Cap (*Cape Town*) et *Klyp Fountain*, on a déduit les trois résultats suivants :

Amplitude.	Longueur en pieds.	Longueur pour 1 degré.
1°.13′.17″,33	445506	364728,8
1.13.17,33	445361	364607,5
1.13.14,51	445027	364568,3

Le premier a été donné par Lacaille; le second résulte de la combinaison des triangles de Lacaille avec les bases modernes, et le troisième provient des mesures astronomiques et géodésiques modernes. M. Maclear n'explique nulle part d'où peuvent provenir ces différences. Il y a, dans l'Ouvrage de M. Maclear, malgré toute sa valeur, quelques imperfections, que M. Todhunter signale à l'attention de l'auteur.

Toutes ces questions ont de l'intérêt pour ceux qui s'occupent de la détermination de la forme de la Terre; et c'est précisément à propos d'un Ouvrage de ce genre (1), que M. Todhunter vient de publier, qu'il a été conduit à faire de la triangulation du Cap une étude si approfondie.

Lindsay (Lord) et Gill (A.). — *Préparatifs pour l'observation du passage de Vénus.*

Nous les indiquerons plus en détail, lorsqu'il sera question des travaux faits à l'Observatoire de Dun-Echt en 1872. Nous insisterons seulement sur les observations que lord Lindsay et son astronome veulent faire avec l'héliomètre, instrument qui, à leur avis, a été trop délaissé par les astronomes que la Société Royale et le Gouvernement ont chargés de diriger et de surveiller les préparatifs des expéditions subventionnées par le Gouvernement et la Société Royale Astronomique.

Les deux échelles qui font mouvoir les demi-lentilles de l'objectif de leur héliomètre ont été graduées avec la même machine à diviser, qu'on faisait, dans chaque cas, marcher dans le même sens; puis, l'une d'elles ayant été retournée bout pour bout, il s'ensuit nécessairement que, lorsque les deux moitiés de l'objectif se dépla-

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 276.

ceront l'une par rapport à l'autre pour l'observation, le trait qui, primitivement, aurait coïncidé dans les deux échelles, se déplacera de quantités égales dans des directions opposées. Le déplacement, mesuré à l'aide de ces deux échelles, sera donc complétement indépendant des erreurs périodiques de la graduation.

D'autre part, la monture de l'objectif porte un thermomètre métallique, qui donne la température de ces deux échelles ; de telle sorte que si, par une étude préalable faite avec un cercle méridien bien étudié et dans une salle dont on peut élever progressivement la température, on a déterminé la loi de variation de la valeur d'une division de l'échelle avec cette quantité, les observations seront complétement indépendantes des variations de température qui pourront survenir pendant la durée totale du passage.

Avec ces précautions, on peut admettre que chaque observation faite avec l'héliomètre ne sera pas soumise à une erreur plus forte que $0'',5$; par conséquent, si l'on répète dix fois la même observation, l'erreur probable de la série complète sera de

$$\frac{0'',5}{\sqrt{10}} = 0'',160.$$

Avec dix séries de ce genre, l'erreur probable de la plus courte distance des centres du Soleil et de la planète serait donc de

$$0'',050.$$

D'un autre côté, au lac Baïkal, où le Gouvernement russe organise une expédition héliométrique, correspondant à celle de lord Lindsay à l'île Maurice, le facteur de la parallaxe pour la distance minimum des centres est de 0,9; à l'île Maurice, il est de 0,3. Prenons pour parallaxe de Vénus, par rapport au Soleil, le nombre $23'',5$, qui évidemment suffit ici; la différence totale des distances minima des centres du Soleil et de la planète sera de

$$23'',5\,(0,9+0,3) = 28'',2,$$

de telle sorte que l'effet, d'une erreur probable de $0'',050$ dans la mesure des distances minima des centres du Soleil et de la planète, sur la parallaxe solaire qu'on déduirait de ces mesures, serait, en prenant pour parallaxe solaire approchée le nombre $8'',9$, égal à

$$0'',050 \times \frac{8,9}{28,2} = 0'',016,$$

c'est-à-dire moindre que *deux centièmes de seconde.* Les mesures photographiques ou les observations des contacts donneront-elles la même approximation? Lord Lindsay ne le pense pas.

Auwers. — *Expéditions allemandes pour le passage de Vénus.*

Trois expéditions principales seront envoyées par la Société Astronomique allemande et le Gouvernement impérial : dans le voisinage de Chefoo, en Chine; à l'île Auckland; à l'île Macdonald, ou, si le séjour dans cette île présente des difficultés trop considérables, à l'île Kerguelen.

Ces trois expéditions porteront surtout leur attention sur les points suivants :

1° Mesures héliométriques de la distance de Vénus au point du bord du Soleil le plus voisin, ainsi qu'au plus éloigné, pendant toute la durée du passage;

2° Observation de l'époque du premier et du dernier contact;

3° Photographies du phénomène, d'où l'on puisse déduire l'angle de position et la distance de Vénus par rapport au centre du Soleil.

En outre, une quatrième expédition, envoyée dans l'île Maurice, sera chargée de mesures héliométriques et de l'observation des contacts; et une cinquième, purement photographique, sera envoyée en Perse.

Outre les instruments nécessaires pour déterminer le temps du lieu et quelques petites lunettes, les appareils emportés par les différentes expéditions sont :

1° Quatre héliomètres de Fraunhofer, de 8 centimètres d'ouverture et de $1^m,14$ de foyer;

2° Quatre équatoriaux de Fraunhofer, de 12 centimètres d'ouverture et de $1^m,95$ de foyer;

3° Deux appareils photographiques de Steinheil, ayant un objectif achromatique de 15 centimètres d'ouverture;

4° Deux appareils photographiques de Steinheil, munis d'objectifs quadruples de 11 centimètres d'ouverture.

Les stations dont les longitudes encore inconnues doivent être déterminées par les observations de la Lune seront munies, en outre, d'instruments de passage à lunette brisée de 67 centimètres d'ouverture, et d'altazimuts dont les cercles ont de 32 à 38 centimètres.

A l'île Maurice, on observera, d'une part, avec ces instruments, les hauteurs et les passages de la Lune au méridien, et, d'autre part, avec un réfracteur, un nombre aussi grand que possible d'occultations d'étoiles par la Lune.

Proctor (R.-A.). — *Sur l'origine des météores de novembre.*

Quoique les recherches de MM. Schiaparelli, Adams, Le Verrier et d'autres aient fait connaître la nature de l'orbite des météores de novembre et démontré la relation qui existe entre ces corps et la comète de Tempel (comète I, 1866), on n'est point fixé sur la façon dont ils ont pénétré dans notre système. L'opinion généralement admise, énoncée pour la première fois par M. Le Verrier, est que les météores de novembre proviennent des espaces interstellaires et qu'ils ont été entraînés dans leur orbite actuelle par l'attraction de la planète Uranus ; mais cette opinion paraît tout à fait improbable à M. Proctor, tant à cause de la faible distance à laquelle l'essaim météorique aurait dû approcher d'Uranus, pour que l'effet indiqué se produisît (distance moindre que celle du premier satellite d'Uranus), qu'à cause de ses dimensions énormes, plusieurs millions de milles en hauteur et en largeur, et plusieurs centaines de millions de milles en longueur. D'après lui, les météores de novembre n'auraient pas une origine extraplanétaire, mais, au contraire, proviendraient de la planète Uranus elle-même. Ils seraient dus à une sorte d'éruption volcanique, ayant eu lieu autrefois sur Uranus. Une pareille hypothèse peut évidemment être faite pour toutes les planètes, grandes ou petites, s'étendre à toutes les averses météoriques et à toutes les comètes, de telle sorte que, d'après M. Proctor, chaque planète serait ainsi accompagnée d'un certain nombre d'essaims météoriques et de comètes qu'elle aurait rejetés de son sein. Les comètes provenant de Jupiter, par exemple, partageant son fort mouvement d'avance, devraient dès lors, pour la plupart, se mouvoir dans la même direction que la planète ; celles qui tireraient leur origine de Neptune, dont le mouvement est beaucoup plus lent, se déplaceraient très-probablement dans une direction différente, déductions qui semblent s'accorder avec l'observation. Toutes les comètes dont l'aphélie est près de l'orbite de Jupiter avancent; un nombre considérable de celles dont l'aphélie est près de l'orbite de Neptune rétrogradent.

Enfin il est évident, d'après cette théorie, que l'un ou l'autre des nœuds de chacune de ces comètes doit être tout près de l'orbite de la planète dont elle dérive. Or, maintenant, les nœuds de toutes les comètes joviennes et neptuniennes, aussi bien que des comètes saturniennes et uraniennes (comète de Tempel), sont près des orbites de leurs planètes génératrices.

Hind. — *Sur deux anciennes apparitions probables de la comète des météores de novembre.*

M. Hind remarque que la comète observée en Chine dans la dernière semaine d'octobre 1366 a une orbite très-semblable à celle de la comète de Tempel, et qu'à la même époque on a vu, en Bohême et en Portugal, une véritable averse d'étoiles filantes. « Elles étaient en nombre tel et si serrées, que le ciel paraissait en feu. »

A la fin de janvier et dans les premiers jours de février 868, on a également observé, en Europe et en Chine, une comète dont la marche dans le ciel fut voisine de celle que devait alors avoir la comète des météores de novembre.

Or, entre 1866 et 1366, il y a quinze périodes de $33^{\text{ans}},28$, et, entre 1366 et 868, quinze périodes de $33^{\text{ans}},24$. Il est donc presque certain que la comète de Tempel a dû être observée en 868 et 1366. Depuis cette époque, la durée de sa révolution n'aurait même que très-peu changé.

Hind. — *Sur la comète de Pons.* (Comète I, 1818.)

Carrington (R.-C.). — *Sur la marche d'une pendule dans l'air raréfié.*

Lynn (W.-T.). — *Sur la parallaxe et le mouvement propre de l'étoile* 21185 *de Lalande.*

Les observations les plus récentes conduisent aux valeurs suivantes :

Mouvement en ascension droite..	$-0^{s},044$
Mouvement en déclinaison......	$+4'',66$

qui s'accordent avec les valeurs obtenues par Argelander en 1857.

C'est, après 1830 Groombridge et la 61^e du Cygne, l'étoile qui a le mouvement propre le plus considérable; sa parallaxe paraît, d'ailleurs, être, à très-peu près, la même que celle de la 61^e du Cygne.

BROWNING (J.). — *Sur une nouvelle forme de l'oculaire solaire.*

RUSSELL (C.-W.). — *Sur l'amas coloré qui entoure l'étoile $\varkappa$ de la Croix du Sud.*

Depuis les observations faites par sir John Herschel au Cap de Bonne-Espérance, aucun observatoire de l'hémisphère austral n'a repris l'étude de l'amas voisin de la Croix du Sud. M. Russell, directeur de l'Observatoire de Sydney, à la Nouvelle-Galles du Sud, a consacré quelques mois de l'année 1872 à combler cette lacune. L'instrument dont il se servait est un équatorial de Merz de $7\frac{1}{4}$ pouces d'ouverture libre et de 10 pieds 4 pouces de foyer, pouvant supporter un grossissement de 400 fois. Les couleurs étaient, en outre, vérifiées avec un télescope de Browning de $8\frac{1}{2}$ pouces d'ouverture.

M. Russell a déterminé les positions de 130 étoiles, de la 6^e à la 15^e grandeur; 15 d'entre elles sont colorées soit en jaune, comme l'étoile $\varkappa$, soit en rouge, soit en bleu; 25 de ces étoiles n'avaient point été aperçues par Herschel, et c'est là un fait remarquable, lorsqu'on songe aux dimensions du télescope que cet astronome employait. D'un autre côté, la comparaison des étoiles communes avec le catalogue d'Herschel montre que beaucoup d'entre elles se sont déplacées depuis 1834; quant aux couleurs, elles sont réellement splendides et justifient ce mot d'Herschel, que cet amas brille « comme un splendide joyau ».

WILSON (J.-M.). — *Sur les positions des deux étoiles de Castor.*

HERSCHEL (A.-S.), GRANT, LOWE (E.-J.), ROSSE (lord), FASEL (V.). — *Sur l'averse météorique du 27 novembre 1872.*

Nous résumons sous ce titre les Notes présentées à la Société Royale Astronomique sur les observations faites à Newcastle, Glasgow, Nottingham, Birr-Castle, et Morges (en Suisse). L'aspect général du phénomène n'a pas été différent de celui qu'a présenté la grande averse du 13-14 novembre 1866; cependant les météores ont été moins brillants. Leur couleur normale était la couleur blanche ; rarement ils ont égalé en éclat une étoile de première grandeur ; cependant de temps à autre paraissait un météore de splendeur inaccoutumée et dont l'éclat rivalisait avec celui de Jupiter ou de Sirius.

La durée de la visibilité d'un météore n'excéda point, en général, deux ou trois secondes ; deux ou trois d'entre eux, pourtant, sont restés visibles pendant une trentaine de secondes.

L'ensemble de ces observations porte à admettre que le point radiant de cette averse était à peu près au milieu de l'intervalle qui sépare sur la sphère céleste les étoiles γ et 51 d'Andromède, c'est-à-dire par 26 degrés d'ascension droite et 44 degrés de déclinaison nord. Le nombre des météores tombés dans cette averse est d'ailleurs excessivement considérable. M. Grant, à Glasgow, en a compté 10 579, de 5^h30^m à 11^h50^m du soir ; M. Lowe, à Nottingham, en a observé, 14 665, de 5^h50^m à 10^h30^m, dans un quart environ de la portion visible de la sphère céleste, ce qui ferait le chiffre énorme de 58 660 en tout pendant les 4^h30^m qui commencèrent la nuit du 27 novembre ; à Birr-Castle, enfin, on en a vu 7995, de 7^h47^m à 14^h38^m.

D'un autre côté, l'intensité de l'averse fut loin d'être constante pendant toute sa durée ; mais, d'abord croissante pendant la première moitié du phénomène, elle a décru ensuite d'une façon régulière ; c'est ce que montre le tableau suivant, où sont inscrits les nombres de météores observés à Glasgow pendant chaque période de quinze minutes, à partir de 5^h30^m.

Numéro du quart d'heure.	Nombre de météores.	Numéro du quart d'heure.	Nombre de météores.
1.........	150	13........	599
2.........	174	14........	413
3.........	292	15........	418
4.........	507	16........	213
5.........	643	17........	233
6.........	840	18........	246
7.........	721	19........	190
8.........	890	20........	116
9.........	881	21........	111
10.........	930	22........	74
11.........	1070	23........	48
12.........	777	24........	22

Perry (S.-J.). — *Sur les météores de novembre.*

Le Rév. Perry donne le résumé des observations faites au collége de Stonyhurst dans les nuits des 10 et 13 novembre.

Pihl (M.-O.). — *Sur les météores du 27 novembre 1872.*

Le professeur Fearnley, de Christiania, et M. Bruhns, directeur de l'Observatoire de Leipzig, ont montré que l'orbite de la comète de Biéla avait dû couper celle que décrit l'essaim météorique de novembre, le 6 (Fearnley) ou le 3 (Bruhns) janvier de l'année 1846 ([1]), et ils présument que le dédoublement de la comète, qui a été observée pour la première fois par Maury, le 27 décembre 1845, c'est-à-dire sept ou dix jours avant les dates que nous venons d'indiquer, est dû à cette rencontre des deux orbites. En outre, ces deux astronomes considèrent comme très-probable l'arrivée d'un fait semblable en 1859, fait auquel devrait être attribuée la disparition de la comète à son retour de 1865-1866. Pour le professeur Fearnley, ceci est d'autant plus probable que les années 1846-1847, comme l'année 1826 (1859 — 33 ans), ont été remarquables par l'intensité de l'averse des Léonides. On peut donc admettre que les météores de la fin de novembre sont les débris de l'une de ces dernières catastrophes, de 1859 ou de 1866.

Fasel (V.). — *Sur la lumière zodiacale.*

Hind. — *Sur l'étoile binaire α des Gémeaux.*

La meilleure détermination de l'orbite de cette étoile double est due à M. Thiele, de Copenhague, et représente la série tout entière des observations, de 1719 jusqu'à nos jours. Il en résulte les éléments suivants :

Passage au périastre.	1750,326
Longitude du périastre, comptée au sortir du nœud sur l'orbite rapporté au méridien de 1850.	$-294^\circ\ 0',8$
Nœud (méridien de 1850).	$31^\circ 58',8$
Inclinaison.	$42^\circ\ 5',4$
Excentricité.	0,34382
Moyen mouvement annuel.	$-\ 21',6685$
Demi-grand axe.	$7'',5375$
Durée de la révolution, en années.	996,85

([1]) *Forhandlinger af Videnskabsselskabet i Christiania,* 1867, p. 25 et 16.

HIND. — *Éléments de l'orbite de ξ de la Grande-Ourse.*

Passage au périastre	1875,687	
Durée de la révolution en années...	60,679	
Longitude du périastre, comptée sur l'orbite à partir du nœud........	332° 33′	1872
Nœud	100,42	1872
Inclinaison	56,20	
Excentricité....................	0,38302	
Demi-grand axe..................	2″,587	

LYNN (W.-T.). — *Sur le mouvement propre des étoiles* 21258 *de Lalande et* 1830 *Groombridge.*

Le mouvement propre de la petite étoile 21258 de Lalande (8e grandeur) a été signalé par Argelander [1] et évalué par lui, d'après ses observations de Bonn, à 4″, 5. Cette découverte a été confirmée par les observations faites à l'Observatoire royal de Greenwich, en 1864 et 1869, observations qui, comparées les unes aux autres, conduisent aux valeurs suivantes :

Mouvement propre en asc. droite............	$-0^s, 386$
Mouvement propre en distance polaire nord. .	$-1'', 36$

D'un autre côté, sa parallaxe a été déterminée par Auwers, et trouvée égale à 0″,27; cette étoile se trouve donc 761 000 fois plus loin de nous que le Soleil; en d'autres termes, il faut environ douze ans à la lumière qu'elle émet pour arriver jusqu'à la Terre.

Ces résultats ont engagé M. Lynn à reprendre l'étude du mouvement propre de l'étoile 1830 Groombridge : les observations de Greenwich lui ont aussi fourni les éléments de son calcul, et la comparaison des positions données par le Catalogue de douze ans (*Twelve years Catalogue,* 1845) avec les observations récentes de 1869, 1870 et 1871 lui a donné :

Mouvement propre en asc. droite............	$+0^s, 344$
Mouvement propre en distance polaire nord...	$+5'', 77$

Ces nombres équivalent à un mouvement de 7″, 03, sur un arc de grand cercle. C'est de beaucoup le mouvement propre le plus considé-

(1) *Astronomische Nachrichten;* vol. LIV, p. 245.

rable que nous connaissions ; celui de cinq étoiles seulement surpasse la moitié de ce nombre : ce sont les mouvements propres de 61 Cygne, 21185 de Lalande, 21258 de Lalande, μ Cassiopée et o^2 Eridan.

Ajoutons qu'on n'a encore fait, à notre connaissance, aucune recherche sur la parallaxe de ces deux dernières étoiles.

Elger (C.-E.). — *Sur les couleurs des composantes de γ Dauphin.*

Ces observations ont été faites à Bedford avec une lunette achromatique de Cooke, de 4 pouces d'ouverture, munie d'un oculaire grossissant 180 fois, et embrassent une période de six ans (septembre 1866 à novembre 1872). En 1850, Smyth, à Hartwell, avait trouvé les deux composantes de grandeurs inégales (dans le rapport de 4 à 7) elles ont paru d'égale grandeur à M. Elger; d'ailleurs; l'une d'elles, la plus brillante de Smyth, est toujours restée de couleur orange, tandis que la couleur de l'autre a passé du jaune au vert, puis au bleu.

Tupman (le Capitaine). — *Observations des protubérances solaires.*

Dans cette Note, M. Tupman, capitaine d'artillerie de la Marine royale, donne les résultats de 246 observations de protubérances faites par lui en septembre, octobre et novembre 1872, avec une lunette de 3 pouces d'ouverture et 40 pouces de foyer, et un spectroscope à vision directe de Browning, composé de cinq prismes, et dont le pouvoir dispersif équivalait à celui d'un prisme de flint ordinaire, d'angle réfringent égal à 60 degrés ([1]).

Carrington (R.-C.). — *Sur un double altazimut.*

Robinson (T.-R.). — *Note sur la marche d'une horloge astronomique dans l'air raréfié.*

Denison (E.-B.). — *Sur un nouveau mode de compensation de l'erreur barométrique des horloges astronomiques.*

La construction des instruments méridiens a été depuis quelques années portée à un haut degré de perfection et ceux de ces appa-

---

([1]) Le prix total de l'appareil spectroscopique et de sa monture est de 18 livres (450 francs); M. Tupman croit qu'on pourrait le réduire encore beaucoup.

reils qui sortent des ateliers des grands constructeurs de Londres, de Paris ou de Munich ne laissent presque plus rien à désirer sous le rapport de la perfection des tourillons ou du mécanisme des pièces mobiles. D'un autre côté, l'expérience a fait découvrir des procédés sûrs pour assurer aux piliers sur lesquels ils reposent une stabilité presque parfaite, ou, du moins, pour prévenir tous les changements brusques qu'ils pourraient éprouver. Si l'astronome opère avec adresse, il peut donc être sûr de connaître avec précision, à chaque instant, la position que sa lunette méridienne occupe par rapport au méridien terrestre.

La détermination de l'ascension droite des étoiles n'est plus alors sujette qu'à deux sortes d'erreurs : la première provenant de l'imperfection inévitable de l'estime de la fraction de seconde à laquelle elle passe sous un fil ; la seconde ayant son origine dans la marche plus ou moins régulière de la pendule employée pour compter le temps.

Les causes qui peuvent troubler la marche régulière d'une pendule sont nombreuses : la plus sensible est l'action de la température sur la tige du balancier, qui alternativement s'allonge ou se raccourcit, et fait retarder ou avancer la pendule. On sait combien il est rare d'avoir des horloges insensibles aux variations du thermomètre ; mais cette action perturbatrice peut être complétement annulée si l'on a soin, comme à Greenwich ou à Paris, de placer les pendules dans une cave profonde, dont la température soit constante, ou du moins indépendante des changements diurnes ou accidentels de la température de l'air extérieur.

La seconde cause d'erreur, bien plus difficile à éliminer, provient des variations dans la pression atmosphérique. Un pendule qui oscille dans l'air éprouve de sa part deux sortes d'actions : il y a d'abord une perte de poids égale au poids de l'air déplacé, et si la pression et, par suite, la densité de l'air viennent à changer, la perte de poids change et la pesanteur du pendule se trouve augmentée ou diminuée, sans que pour cela son moment d'inertie ait le moins du monde varié ; par suite de cette circonstance, les pendules doivent avancer lorsque le baromètre baisse, retarder lorsqu'il monte ; en second lieu, le pendule en mouvement rencontre dans l'air une résistance proportionnelle à la pression ; si cette résistance augmente, l'amplitude d'oscillation devient plus petite, la durée d'une oscillation diminue, et l'horloge doit avancer.

Ces deux causes perturbatrices ne se compensent point, et toute pendule éprouve dans sa marche des perturbations qui sont liées par une loi complexe aux variations du baromètre.

Pour supprimer cette cause d'erreur, les astronomes ont depuis longtemps songé à placer les pendules dans le vide ou dans de l'air à pression constante.

Des expériences de cet ordre avaient été faites en 1829 et 1832, par Sabine et Baily, et viennent d'être reprises par M. Carrington, qui a montré que son horloge retardait lorsque la pression de l'air augmentait.

M. Denison, un des grands horlogers de Londres, revient sur ce résultat et décrit un système propre à compenser l'influence de l'action de l'air. L'appareil consiste essentiellement en un baromètre à mercure fixé sur le balancier ; lorsque la pression de l'air augmente, cas ou la pendule doit retarder, sa masse se rapproche de l'axe d'oscillation et, la longueur du balancier se trouvant ainsi diminuée, la pendule tend à marcher plus vite ; de là la possibilité d'une compensation dont le célèbre artiste donne des preuves théoriques et expérimentales.

Klinkerfues et Pogson. — *Sur la nouvelle découverte de la comète de Biéla.*

Le 30 novembre 1872, M. Klinkerfues envoyait à M. Pogson, directeur de l'Observatoire de Madras, un télégramme ainsi conçu : « La comète de Biéla a rencontré la Terre le 27 novembre ; cherchez vers l'étoile θ du Centaure. »

Les nuages empêchèrent toutes recherches jusqu'au 2 décembre à 17 heures, temps moyen, où survint une légère éclaircie : M. Pogson trouva immédiatement la comète, non loin de la position indiquée par M. Klinkerfues ; elle se présentait, dit-il, sous la forme « d'un disque lumineux, circulaire, avec un noyau bien caractérisé, mais sans apparence de queue ; son diamètre était d'environ 45 secondes. » Le lendemain, M. Pogson rencontra, à peu de distance de la première, une nouvelle nébulosité cométaire, dont le diamètre était de 75 secondes, et qui présentait une queue de faible éclat, mais de 8 minutes de longueur environ.

Tupman. — *Sur la réapparition de la comète de Biéla.*

L'ensemble des observations faites sur l'averse météorique du

27 novembre et sur la comète de Biéla elle-même, conduit M. Tupman aux conclusions suivantes :

1° L'averse météorique a été produite par une portion éloignée de la comète, détachée de l'un des deux noyaux du côté le plus éloigné du Soleil, et se mouvant à peu près sur le prolongement du même rayon vecteur.

2° La comète *principale* eut la même longitude que la Terre, le 27 novembre entre 3 et 4 heures, à une distance du Soleil moindre que la Terre d'environ les 0,032 de la distance moyenne de cette dernière : c'est elle que M. Pogson a retrouvée le 3 décembre.

3° La comète *secondaire* rencontra la Terre comme la première, mais douze heures plus tôt : c'est elle que M. Pogson a aperçue le 2 décembre.

Meldrum (C.). — *Observations de l'averse météorique du 27 novembre, faites à l'île Maurice.*

Cette Note résume les observations faites à l'île Maurice : par M. Meldrum à l'Observatoire ; MM. C. Bruce, recteur du collége, et E. Newton, secrétaire auxiliaire du gouvernement, au collége Royal ; le lieutenant-colonel O'Brien, inspecteur général de la police, M. A. Brown, MM. R. Stein et A. Macpherson, M. Morsch ; M. le capitaine Fry et M. le capitaine Gaston, commandant la frégate française *la Pénélope*, alors en station devant l'île Maurice.

Marth (A.). — *Éphéméride pour l'observation physique de la Lune.*

M. Marth, astronome de M. Newall, de Gateshead, publie une Éphéméride destinée à faciliter l'observation des différents cratères de la Lune. Il donne leurs positions aux époques où ils sont le mieux éclairés par le Soleil.

Airy (G.-B.). — *Occultations et phénomènes des satellites de Jupiter, observés à l'Observatoire royal de Greenwich, en 1872.*

Proctor (R.-A.). — *Carte représentant les terres et les mers de Mars, telles qu'on les verra de la Terre aux différentes époques de l'année 1873.*

Buffham (W.). — *Taches de la planète Uranus.*

Les astronomes n'avaient jusqu'ici distingué sur le disque de la planète Uranus aucune tache assez bien dessinée ou assez persistante pour que son mouvement permît d'affirmer la rotation de cette planète et de calculer sa durée.

M. W. Buffham, en se servant d'un télescope à miroir métallique, de 9 pouces d'ouverture, construit par Browning, a pu, les 25 et 27 janvier 1870, voir sur le disque d'Uranus deux taches brillantes qui chaque fois se sont lentement déplacées de l'est vers l'ouest. Le 9 mars 1872, il a encore fait une observation semblable; la tache fut visible pendant trois heures et demie.

En rapprochant tous ces résultats, on trouve :

Durée de la rotation d'Uranus.............	12 heures.
Inclinaison de l'équateur sur l'orbite......	80 degrés.

Il est remarquable que le plan de l'équateur ne coïncide pas avec le plan des satellites.

Dunkin (E.). — *Sur une erreur dans l'ascension droite de l'étoile* 3735, *du Catalogue de Groombridge.*

Stone (E.-J.). — *Sur le cercle méridien de l'Observatoire royal du Cap de Bonne-Espérance.*

Denning. — *Sur la visibilité de Jupiter.*

(*A suivre.*) C. A.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ (¹).

T. VI, 4ᵉ livraison; 1873.

Bougaïef (N.-V.). — *Théorie des dérivées numériques.* 4ᵉ Partie (²). (52 p.)

Cette partie du travail de M. Bougaïef contient les Chapitres suivants :

Développements en fonction du symbole $E\sqrt[m]{\frac{n}{u}}$.

Problèmes relatifs à la forme des fonctions numériques.

Conclusion.

La représentation de diverses fonctions numériques par des séries

---

(¹) *Journal de la Société mathématique de Moscou.* Voir *Bulletin*, t. V, p. 292.

(²) Voir *Bulletin*, t. III, p. 210; t. V, p. 296-298.

200-2

dépendant du symbole $E\sqrt[m]{\frac{n}{u}}$ est fondée sur la considération de diverses classes de nombres, telles que : 1° les nombres non décomposables en facteurs carrés; 2° les nombres non décomposables en facteurs cubes; en général les nombres n'admettant pas de facteurs de degré m. L'auteur considère en particulier les fonctions

$$H_1(n),\quad H_2(n),\ldots,\quad H_m(n),$$

qui représentent : la première, le nombre des nombres non divisibles par des carrés et inférieurs à n; la deuxième, celui des nombres non divisibles par des cubes, etc.; pour ces fonctions il donne des formules qui permettent de calculer leurs valeurs exactes et leurs valeurs asymptotiques.

Il trouve, entre autres, la valeur asymptotique de $H_1(n)$ égale à $\frac{6}{\pi^2}n$, c'est-à-dire la même qui a été trouvée par Lejeune-Dirichlet, à l'aide du Calcul des probabilités [1].

Dans la conclusion, il expose les principes généraux de la théorie des fonctions numériques. La différence qui existe entre celles-ci et les fonctions analytiques, consistant en ce qu'elles sont essentiellement discontinues, ainsi que leurs variables, ne permet pas de leur appliquer les méthodes générales de l'Analyse. L'étude de ces fonctions conduit à des principes nouveaux et variés, par suite de la variété même des modes de discontinuité. En effet, la continuité n'admet qu'une seule détermination, tandis que les hypothèses sur le mode de discontinuité peuvent être très-diverses. La continuité elle-même peut être envisagée comme un cas particulier de la discontinuité, lorsque les accroissements sont infiniment petits et infiniment rapprochés.

Les fonctions numériques peuvent être divisées en deux classes :

1° Les fonctions discontinues d'une variable continue, comme les fonctions dépendant du symbole E; elles ont beaucoup de points communs avec les fonctions analytiques, de sorte qu'on peut les appeler *semi-analytiques;*

---

(1) Ce résultat a été communiqué par Lejeune-Dirichlet à M. Kummer, qui l'a, à son tour, communiqué à l'auteur.

2° Les fonctions qui varient, ainsi que leurs variables, par intervalles finis. On peut les ramener quelquefois à la première classe, par exemple en les groupant en nombre considérable. Ainsi la fonction $\rho(n)$, qui exprime le nombre de diviseurs de n, est de la deuxième classe, tandis que

$$\sigma(n) = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=n} \rho(u) = \mathrm{E}\frac{n}{1} + \mathrm{E}\frac{n}{2} + \mathrm{E}\frac{n}{3} + \cdots$$

est de la première classe.

Oumof (N.-A.). — *Théorie des actions mutuelles à distance finie, et son application à la déduction des lois électrostatiques et électrodynamiques.* (43 p.)

Le but de ce travail est de ramener les phénomènes des actions mutuelles de corps à distance aux phénomènes produits dans les milieux environnants. Sans faire aucune hypothèse particulière sur la nature des milieux, l'auteur prend pour point de départ le principe de l'action égale à la réaction et le principe de la conservation des forces vives exprimé par la formule

$$\sum \frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const.}$$

(Π étant l'énergie potentielle de Rankine, et le premier terme l'énergie cinétique). Il appelle milieu *composé* celui dans lequel peut avoir lieu la conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle, et milieu *simple* celui dans lequel cette conversion n'a pas lieu. Il établit les formules pour un milieu simple, et il explique divers phénomènes de l'électricité par l'interposition de ce milieu (éthéré) entre les corps électrisés.

Sloudskiï (J.-A.). — *Du mouvement libre d'un liquide.* (8 p.)

Un liquide libre (non contenu dans un vase) peut se mouvoir de façon que ses molécules n'exercent aucune pression mutuelle les unes sur les autres. L'auteur établit les conditions d'un tel mouvement, qu'il appelle *libre,* dans trois hypothèses sur les forces extérieures.

Letnikof (A.-V.). — *Éclaircissement des principaux points de* *la théorie de la différentiation avec un indice quelconque* (à propos du Mémoire de M. Sonine [1]). (33 p.)

Dans son Mémoire intitulé : « Théorie de la différentiation avec » un indice quelconque [2] », M. Letnikof, en envisageant ce problème comme la recherche d'une formule d'interpolation pouvant reproduire les termes de la série

$$\ldots, \int^{(n)} f(x)\,dx^n, \ \ldots, \ \int f(x)\,dx, \ f(x), \ f'(x), \ldots, \ f^{(n)}(x), \ \ldots,$$

a été amené à considérer l'expression

$$(1) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\xi}{p} \frac{f(x-p\delta)}{\delta^\xi} \quad [3],$$

dont les valeurs limites sont, pour $\xi < 0$,

$$(2) \qquad \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_u^x (x-\alpha)^{-\xi-1} f(\alpha)\,d\alpha,$$

et, pour $\xi > 0$,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=m} \frac{f^{(k)}(u)(x-u)^{-\xi+k}}{\Gamma(-\xi+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-\xi+m+1)} \int_u^x (x-\alpha)^{-\xi+m} f^{(m+1)}(\alpha)\,d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Ces deux expressions se réduisent en une seule, et représentent la formule cherchée, c'est-à-dire l'expression de $[D_x^\xi f(x)]_u^x$ pour ξ quelconque. M. Sonine a accusé d'inexactitude la première de ces formules, en s'appuyant sur ce que l'expression (1), ayant pour $\xi > 0$ son dénominateur infiniment petit, devient infinie. L'auteur fait remarquer qu'il n'en est pas ainsi, et il établit que le numérateur de (1) tend vers zéro comme le dénominateur, et que leur rapport a pour limite l'expression (3).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. V, p. 292.

[2] *Математическій Сборникъ*, t. VI, p. 1; 1867.

[3] Le symbole $\binom{\xi}{p}$ désignant le coefficient du terme général de la puissance d'un binôme.

Il fait observer ensuite que la formule

$$(4)\qquad \frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i}\int_\alpha^\alpha \frac{f(\alpha)d\alpha}{(\alpha - x)^{p+1}} + \frac{d^p(0)}{dx^p},$$

établie par M. Sonine, en faisant abstraction de la fonction complémentaire, se ramène, par un changement de variable, à la formule (3). M. Sonine a aperçu aussi cette transformation; mais il ne l'a pas crue permise, à cause de la fonction complémentaire. L'auteur explique que la non-existence d'une fonction complémentaire dans la formule (3) est due à la considération des dérivées et des intégrales prises entre certaines limites, tandis que la formule (4) renferme une intégrale fermée indéfinie.

Enfin l'auteur signale l'inexactitude d'une formule de M. Sonine, déduite de la formule (4); mais son appréciation nous obligerait d'entrer dans beaucoup plus de détails que ne le comporte l'étendue de cet article.

Lioubimof (N.-A.). — *Réponse à M.* Bredikhine. (7 p.)

Bredikhine (F.-A.). — *Observations sur la réponse de M.* Lioubimof. (4 p.)

Andréief (K.-A.). — *Démonstration d'une propriété générale des polygones.* (9 p.)

Considérons une figure formée par l'intersection de n circonférences passant par un point; si le point commun s'éloigne à l'infini et que les rayons de circonférences deviennent infiniment grands, la figure deviendra un polygone rectiligne de n côtés.

Les polygones qu'on obtient en combinant k à k les n côtés du polygone considéré s'appellent *polygones secondaires d'ordre* k.

En considérant les polygones circulaires, il est facile de démontrer que :

1° Dans un quadrilatère, les quatre circonférences circonscrites aux triangles secondaires passent par un point commun appelé *point singulier* du quadrilatère;

2° Dans un pentagone, les points singuliers des six quadrilatères secondaires sont situés sur une même circonférence, dite *circonférence singulière* du pentagone.

En général, *dans un polygone de n côtés, pour n pair, les circonférences singulières des polygones d'ordre $n - 1$ passent par* *un même point, et pour n impair les points singuliers des polygones d'ordre n — 1 sont situés sur une même circonférence.*

Ce théorème, établi indépendamment de la position du point commun des circonférences, est encore vrai pour le cas où ce point est à l'infini, c'est-à-dire pour les polygones rectilignes.

2e Partie.

Orlof (J.-E.). — *Des machines.* (17 p.)

Leçon d'inauguration faite à la Faculté de Moscou, le 21 octobre 1872.

Tseraskiï (V.-K.). — *Passage de Vénus sur le disque solaire en* 1874.

Après avoir exposé l'historique des divers essais de détermination de la parallaxe solaire, l'auteur donne les époques des passages de Vénus (entrées et sorties) pour quarante et une localités principales de la Russie. A. P.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

André (C.) et Rayet (G.). — L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique, depuis le milieu du XVIIe siècle jusqu'à nos jours. 1re Partie : Angleterre. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-18 jés. 180 p., 33 fig. dans le texte. 4 fr. 50

Boussingault, membre de l'Institut. — Agronomie, Chimie agricole et Physiologie. 2e éd. revue et augmentée. T. V, 1874; 428 p., 1 pl. — Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

Cahours (A.). — Traité de Chimie générale élémentaire. *Chimie organique.* Leçons professées à l'École Polytechnique. 3e édition, t. I. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-12, 451 p. Ce tome I se vend séparément 6 fr.

La *Chimie organique* comprendra 3 volumes, dont le prix total est, pour les souscripteurs, de 15 fr.

Dormoy (É.). — Théorie mathématique des paris de courses. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 103 p. 2 fr.

Dupuy (L.). — Exposition de la méthode de Hansen, relative au calcul des perturbations des petites planètes. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 230 p. 6 fr.

DURRANDE (H.). — Cours populaire de Mécanique. Cinématique. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4, lithogr. 101 p. 3 fr.

FINANCE (Ch.). — Arithmétique à l'usage des élèves des Écoles normales primaires, des colléges, etc. Nouvelle édition. — Paris, Gauthier-Villars, s. d. In-12., 390 p. 2 fr. 50

LECOQ DE BOISBAUDRAN. — Spectres lumineux. Spectres prismatiques et en longueurs d'ondes, destinés aux recherches de Chimie minérale. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 2 vol. gr. in-8; 1 vol. de texte, et Atlas de 29 pl. 20 fr.

LE VERRIER (U.-J.). — Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires, t. X, 1874. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4, 304-67-37 p., 1 pl. 30 fr.

Recherches astronomiques (suite). *Chapitre* XVIII. Détermination des actions mutuelles de Jupiter et de Saturne, pour servir de base aux théories des deux planètes. — Additions au Chapitre XVII. — C. WOLF et C. ANDRÉ : Recherches sur les apparences singulières qui ont souvent accompagné l'observation des contacts de Mercure et de Vénus avec le bord du Soleil.

MASTAING (L. DE). — Cours de Mécanique appliquée à la résistance des matériaux. Leçons professées à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures; rédigées par M. *G. Courtès-Lapeyrat.* — Paris, J. Dejey et Cie, 1874. Gr. in-8, 352 p., 2 pl. 15 fr.

MONCEL (Th. DU). — Détermination des éléments de construction des électro-aimants, suivant les applications auxquelles on veut les soumettre. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 39 p. 1 fr. 50

MOOCK (L.). — Traité pratique complet d'impression photographique aux encres grasses. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-18, 140 p. 3 fr.

NORMAND (J.-A.). — Note sur la détermination de la parallaxe solaire. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8, 10 p. 1 fr.

RECUEIL de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'Observation du passage de Vénus sur le Soleil. (Formant le tome XLI des *Mémoires de l'Académie des Sciences*). — Paris, Firmin Didot et Ganthiers-Villars, 1874. In-4, 460 p., 5 pl. 12 fr. 50

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
AVEC LA COLLABORATION
DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TABLE DES MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VI. — 1er SEMESTRE 1874.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—

1874

BULLETIN
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET ASTRONOMIQUES;

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

Commission des Hautes Études.

Président, M. *Chasles.*

Membres du Comité, MM. *J. Bertrand, Puiseux, J.-A. Serret.*

Cette publication, exclusivement consacrée aux Mathématiques et à l'Astronomie, comprend trois Parties principales : 1° *comptes rendus de Livres*; 2° *analyses de Mémoires;* 3° *traductions de Mémoires importants et peu répandus, réimpressions d'Ouvrages rares* et *Mélanges scientifiques.*

« Faire connaître aux savants l'état de la branche des sciences qu'ils cul- » tivent, ce qu'il reste à faire, et le point d'où ils doivent partir s'ils veulent » lui faire faire des progrès », tel était le but que s'était proposé M. de Férussac en fondant son *Bulletin,* qui a rendu pendant plusieurs années de si grands services aux géomètres.

Le nouveau *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* se rattache directement, par le but et le plan, à cette utile publication. Il sera accueilli, nous l'espérons, avec la même faveur que son devancier.

Le Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, fondé en 1870, paraît régulièrement chaque mois. Il a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8° (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal forme, depuis le 1er janvier 1873, 2 volumes par an (un volume par semestre, avec Tables), comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8°.

Les abonnements sont annuels et partent de janvier.

Prix pour un an (12 numéros en 2 volumes) :

Paris..	15 fr.
Départements et Algérie..........................	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie....	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce......	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége.	20

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VI. — JANVIER-JUIN 1874.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

MÉLANGES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

TABLE GÉNÉRALE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

CITÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. — GÉNÉRALITÉS.

ARITHMÉTIQUE. — ANALYSE.

GÉOMÉTRIE.

MÉCANIQUE. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

ASTRONOMIE. — GÉODÉSIE. — PHYSIQUE DU GLOBE. — PROBABILITÉS.

FIN DU TOME SIXIÈME.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

LES PASSAGES DE VÉNUS SUR LE DISQUE SOLAIRE

CONSIDÉRÉS AU POINT DE VUE DE LA DÉTERMINATION DE LA DISTANCE DU SOLEIL A LA TERRE.

PASSAGE DE 1874.

NOTIONS HISTORIQUES SUR LES PASSAGES DE 1761 ET 1769.

PAR EDMOND DUBOIS ☼, O.I.,
Examinateur-Hydrographe de la Marine.

UN VOLUME IN-18 JÉSUS, AVEC FIGURES DANS LE TEXTE; 1873. — PRIX : 3 FR. 50 C.

En envoyant à l'Éditeur un mandat sur la Poste ou des timbres-poste, on recevra l'Ouvrage franco dans toute la France.

Il n'est pas de question en Astronomie qui ait provoqué plus d'observations, qui ait excité le zèle de plus d'observateurs, qui ait mis à l'œuvre plus de calculateurs, qui ait fait dépenser plus d'argent, enfin qui ait suscité plus de souffrances et d'embarras de tous genres, que celle de la recherche de la distance de la Terre au Soleil, par l'observation d'un passage de Vénus sur le disque solaire.

Cette question, laissée sans solution satisfaisante, au dernier passage de Vénus, il y a cent quatre ans, va encore revenir occuper le monde savant et lui donner presque les mêmes agitations qu'au siècle dernier.

Vénus passera, en effet, devant le disque du Soleil le 9 décembre 1874, et encore le 6 décembre 1882. Ce phénomène ne devant plus se représenter avant l'an 2004, les astronomes de toutes les nations vont encore essayer de mettre à profit ces passages attendus depuis plus de cent ans. Les instruments se confectionnent, les observateurs s'exercent, les préparatifs de départ se font dans le but d'établir des observatoires temporaires, disséminés sur la surface du globe et choisis en vue du meilleur résultat à obtenir. M. Edmond Dubois, autrefois professeur d'Astronomie à l'École Navale, aujourd'hui Examinateur de la Marine, a pensé qu'il rendrait service à ses anciens Élèves, ainsi qu'il le dit dans sa Préface, et aussi aux personnes studieuses que ces questions intéressent, en publiant sur les *Passages de Vénus* un travail suffisamment complet et faisant connaître au lecteur toutes les méthodes de calcul et d'observation qui peuvent conduire de l'observation des phases d'un passage à la connaissance aussi exacte que possible de la distance de la Terre au Soleil.

L'Ouvrage de M. Edmond Dubois ne pourra donc manquer d'être considéré par tous les hommes d'étude, et pendant la période de temps qui va s'écouler jusqu'en 1882, comme une œuvre d'actualité très-importante, que voudront lire ceux qui sont au courant des formules mathématiques ordinaires. Pour être bien compris, cet Ouvrage n'exige, en effet, que les notions scientifiques que l'on donne dans toutes les Écoles du Gouvernement.

Après avoir indiqué que, au point de vue de la recherche de la distance du Soleil à la Terre, les passages de Vénus ont une importance réelle, du moins théoriquement, M. Edmond Dubois fait voir pourquoi ces passages ont lieu si rarement et n'arrivent maintenant que pendant les mois de décembre ou de juin.

L'Auteur donne ensuite les formules à l'aide desquelles on peut prédire exactement l'époque d'un passage de Vénus et les instants des différentes phases, pour un observateur situé au centre de la Terre. Il fait suivre cette analyse d'un exemple numérique relatif au passage de 1874; les mêmes formules seraient employées pour le passage de 1882. Il a cru utile de rappeler ensuite au lecteur les formules de parallaxe, dont il donne le développement par la méthode qui lui a paru le plus à la portée de ceux auxquels s'adresse son Livre.

Il fait ensuite voir, par deux méthodes différentes, comment on peut prédire les différentes phases d'un passage de Vénus pour un lieu déterminé; et, après avoir traité cette partie avec tous les développements nécessaires, il la fait suivre d'un exemple numérique faisant connaître l'heure, temps moyen de Paris, à laquelle aura lieu le premier contact externe, dans le passage de 1874, pour un observateur situé à l'île Amsterdam.

M. Dubois aborde enfin la fameuse méthode de Halley, permettant de déduire la parallaxe solaire des observations très-précises de deux contacts externes, ou de deux contacts internes, du disque de Vénus avec le disque solaire, faites dans des lieux différents choisis d'une manière convenable. Il donne ensuite, comme venant en aide à la méthode de Halley, celle de de l'Isle et celle des équations de conditions, n'exigeant *qu'un seul* contact dans chaque lieu, mais à la condition que la longitude de chaque station sera exactement déterminée.

L'Auteur traite, avec tous les développements qu'exige l'importance de cette question, le *choix des stations*. Il indique les moyens graphiques servant à guider ce choix, et met sous les yeux du lecteur les tableaux des lieux principaux du globe dans lesquels la parallaxe *retarde* ou *accélère* l'instant des contacts. Il donne, en outre, dans cette partie de son travail, une méthode géométrique anglaise qui permet de déterminer, avec plus de précision, les stations convenables, et examine, relativement au passage de 1874, les indications fournies par cette méthode et celles qui résultent des formules analytiques dont il a fait précédemment usage.

La valeur réelle de la méthode de Halley résidant entièrement dans la précision avec laquelle les contacts sont déterminés, l'auteur consacre un chapitre à l'examen des causes d'erreur qui peuvent nuire à cette précision. Il fait connaître les recherches qui ont été faites à ce sujet, d'abord par M. Faye sur la visibilité d'un filet de lumière, et aussi par MM. *Wolf* et *André* sur le phénomène optique connu sous le nom de *goutte noire*, questions qui n'avaient pas été assez étudiées au passage de 1769. Il reproduit enfin les conseils des astronomes anglais relativement à la manière d'observer les contacts.

Après avoir dit quelques mots des mesures micrométriques que certains astronomes allemands pensent devoir être substituées à la détermination directe de l'instant des phases, M. Dubois traite, d'une manière aussi complète que le comporte l'étendue limitée de son travail, le rôle que jouera la Photographie dans les prochains passages de Vénus. Il donne à ce sujet un résumé de tous les travaux, de toutes les expériences et des préceptes qui ont été fournis sur cette matière par les astronomes photographes français, anglais et américains.

La seconde Partie du Livre de M. Edmond Dubois est consacrée à des notions historiques assez étendues sur les passages de Vénus sur le Soleil en 1761 et 1769.

L'Auteur a pensé que, pour mieux faire comprendre au lecteur combien les astronomes modernes ont raison de se préoccuper de la difficulté qu'apporte la précision exigée par la méthode de Halley, lorsqu'on veut obtenir la parallaxe solaire à un demi-dixième de seconde près, il était nécessaire de lui faire pour ainsi dire toucher du doigt les observations du siècle dernier.

M. Dubois examine donc d'abord les observations et les calculs du passage de 1761, et ensuite ceux du passage de 1769. Il accompagne cet examen de tableaux mettant en relief tous les observateurs et leurs observations, et fait voir ainsi nettement au lecteur les divergences qui se sont présentées. A l'examen de ces nombres, on comprend combien ces observations laissaient à désirer, et l'on se rend compte des résultats différents fournis par les nombreux calculateurs qui ont voulu utiliser, en tout ou en partie, ces différentes observations.

En présentant cet Ouvrage à l'Académie des Sciences dans la séance du 1er décembre 1873, M. Faye s'est exprimé ainsi : *Ce Travail est un exposé remarquable de la question ; l'historique est complet, et l'Auteur a passé en revue et discuté toutes les méthodes que l'on se propose d'appliquer dans les prochains passages de Vénus. Je me fais,* a-t-il ajouté, *un véritable plaisir d'en faire hommage à l'Académie, au nom de son savant Auteur.*

ANNUAIRE POUR L'AN 1874, publié par le BUREAU DES LONGITUDES (contenant une Notice scientifique sur la Constitution physique du Soleil, 2e Partie, par M. *Faye*, Membre de l'Institut; avec **7 planches**, dont **trois coloriées**). In-18. *Nouveau prix*.............. 1 fr. 50 c.

*Pour recevoir l'*Annuaire *franco par la poste en France*, *ajouter* 35 *c*.

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1874 se termine, comme les années précédentes, par une Notice scientifique. Cette année, le Bureau a voulu faire connaître la méthode nouvelle qui a permis aux Astronomes de suivre et d'étudier jour par jour les protubérances, c'est-à-dire les flammes hydrogénées qui jaillissent sur le pourtour du disque solaire et atteignent des hauteurs si considérables. On sait que ces phénomènes, révélés par les éclipses totales, ne pouvaient être observés autrefois qu'à la faveur de ces éclipses si rares et si courtes, et au prix des plus grands sacrifices. Aujourd'hui, à l'aide d'une petite lunette et d'un prisme analyseur, on est en état de les observer à tout instant. Ils ont révélé ainsi, autour du Soleil, un genre d'activité tout nouveau, la circulation de l'hydrogène incandescent presque pur, gaz qui paraît jouer un rôle prépondérant dans la mécanique, la physique et la chimie de l'Univers. L'*Annuaire* de 1874 donne, dans une série de planches, les figures de ces merveilleux phénomènes, ainsi que leur distribution sur le pourtour du disque solaire, la description des instruments employés à ce genre d'observation, une région du spectre solaire vue d'abord sur la photosphère, ensuite sur les taches, et deux gravures du disque lui-même à l'époque de l'apparition et de la segmentation de plusieurs belles taches. Ce mode de publication graphique contribuera à la vulgarisation, dans notre pays, de découvertes qui lui appartiennent en grande partie, et l'Auteur fait appel aux observateurs de bonne volonté afin d'organiser chez nous l'étude suivie des phénomènes solaires, les plus grandioses et les plus féconds en questions d'avenir. La Notice de 1874 donne enfin l'analyse critique des idées nouvelles qui semblent prédominer aujourd'hui parmi les météorologistes, et qui se rattachent intimement à la constitution du Soleil.

BABINET, de l'Institut (Académie des Sciences). — **Études et Lectures sur les sciences d'observation et leurs applications pratiques**. Tomes I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII. In-12 sur carré fin.

Chaque volume se vend séparément................. 2 fr. 50 c.

BIOT (J.-B.), Membre de l'Institut (Académie des Sciences). — **Traité élémentaire d'Astronomie physique.** 5 forts vol. in-8, avec 94 planches; 3e édition, corrigée et augmentée.............................. 40 fr.

BRÜNNOW (F.), Directeur de l'Observatoire de Dublin. — **Traité d'Astronomie sphérique et d'Astronomie pratique.** Édition française publiée par *E. Lucas*, Agrégé des Sciences mathématiques, Astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, et *C. André*, Agrégé des Sciences physiques, Astronome adjoint à l'Observatoire de Paris; avec une Préface de M. *C. Wolf*, Astronome titulaire de l'Observatoire de Paris. 2 vol. in-8, avec figures dans le texte; 1869-1872......................... 20 fr.

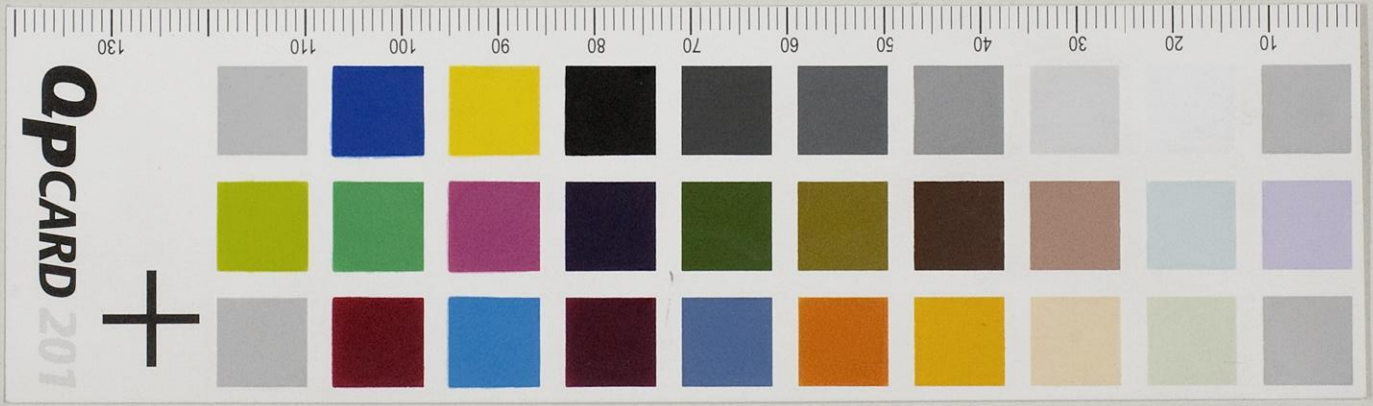
On vend séparément :

Astronomie sphérique. In-8; 1869......................... 10 fr.
Astronomie pratique. In-8; 1872.......................... 10 fr.

DISLÈRE (P.), Ingénieur des Constructions navales, Secrétaire du Conseil des Travaux de la Marine. — **La Marine cuirassée.** Grand in-8, avec 7 planches; 1873.. 7 fr.

FLAMMARION (Camille). — **Études et Lectures sur l'Astronomie.** In-12; tomes I, II, III, IV, avec cartes; 1867-1869-1872-1873. *Il paraît un volume par an.* Chaque volume se vend séparément... 2 fr. 50 c.

1263 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.


QPCARD 201