$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{r^2+a^2-b^2} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\dfrac{\rho}{2\alpha}\left[\dfrac{a^2}{\rho^2}+\alpha^2+(\varphi-\varphi_0)^2\right], \\ \operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(\upsilon-\upsilon_0) = \dfrac{2\alpha(\varphi-\varphi_0)}{\dfrac{a^2}{\rho^2}-\alpha^2+(\varphi-\varphi_0)^2}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind die allgemeinsten für die Abwickelung der beiden in Rede stehenden Flächen auf einander, da sie drei willkürliche Constanten φ_0, υ_0, α enthalten. Für den Fall $b > a$ gelten die Formeln (2) ebenfalls, nur hat dann die willkürliche Constante α einen rein imaginären Wert. Setzt man $\alpha = m\sqrt{a^2-b^2}$, so kann man auch zu dem Falle $b = a$ übergehen, d. h. zur Abwickelung der Pseudosphäre auf sich selbst. Die Gleichungen (2) lassen sich leicht nach ρ und $\varphi-\varphi_0$ auflösen, und durch Combination beider Formen jener Gleichungen gelangt man unmittelbar zu den allgemeinsten Formeln für die Abwickelung zweier beliebigen Rotationsflächen mit constantem negativen Krümmungsmass auf einander. Die hier an einem Beispiel entwickelte Methode lässt sich auch in anderen Fällen mit Nutzen verwenden.

Ueber die Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen.

Von

E. Wiltheiss (Halle a. S.).

Das Integral

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E}}$$

hat Hr. Weierstrass durch die lineare Substitution auf die Form

$$u = -\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3}}$$

gebracht, wo g_2 und g_3 die Invarianten von $Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E$ sind:

$$g_2 = \begin{vmatrix} A & C \\ C & E \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} B & C \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}.$$

Aus der obigen Gleichung folgt, da

$$s = \wp u = -\frac{\partial^2 \lg\sigma}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}$$

ist, dass

$$(A)\quad \left(\frac{\partial^3 \log\theta}{\partial u^3}\right)^2 = -\begin{vmatrix} A & B & C+2.\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} \\ B & C-\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} & D \\ C+2.\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} & D & E \end{vmatrix}.$$

Durch weiteres Differentiiren ergiebt sich:

$$(B)\qquad \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u^4} = -6.\left(\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} g_2.$$

Diese beiden Gleichungen (A) und (B) gelten nicht nur für die ungeraden Thetafunctionen, sondern für alle Thetafunctionen, da

$$\frac{\partial^2 \lg\theta(u+\omega_i)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \lg\theta_i(u)}{\partial u^2}$$

ist.

Zwischen den partiellen Ableitungen zweiter, dritter und vierter Ordnung der hyperelliptischen Thetafunctionen bestehen nun bekanntlich ebenfalls partielle Differentialgleichungen. Ich habe kürzlich gefunden, dass sich dieselben, wenn die Thetafunctionen die durch Herrn Klein eingeführten Invarianteneigenschaften haben, auf eine den Gleichungen (A) und (B) ganz analoge Form bringen lassen. Diese möchte ich hier mitteilen.

Falls den Thetafunctionen die Gleichungen

$$du_1 = \frac{x_1\, dx_1}{2\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\, dx_2}{2\sqrt{f(x_2)}},$$

$$du_2 = \frac{dx_1}{2\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{2\sqrt{f(x_2)}},$$

wo

$$f(x) = Ax^6 + 6Bx^5 + 15Cx^4 + 20Dx^3 + 15Ex^2 + 6Fx + G$$

ist, zu Grunde liegen, so hat man die Determinante R =

$$\begin{vmatrix} A, & 3B, & 3C+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & D+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2} \\ 3B, & 9C-\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D-\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2} \\ 3C+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}, & 9D-\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 9E-\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F \\ D+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F, & G \end{vmatrix}$$

notwendig. Bezeichnet man nämlich die Subdeterminanten hiervon mit $R_{\mu,\lambda}$, so bestehen die Gleichungen

$$(\mathrm{A\,I})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^{\varkappa}\,\partial u_2^{3-\varkappa}} \cdot \dfrac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^{\lambda}.\partial u_2^{3-\lambda}} = (-1)^{\varkappa+\lambda+1}.16.R_{\varkappa+1,\lambda+1} \\ \qquad\qquad = (-1)^{\varkappa+\lambda+1}.16.R_{\lambda+1,\varkappa+1}, \end{cases}$$

welche als der Relation (A) entsprechend angesehen werden müssen.

Die Uebersichtlichkeit der Differentialgleichungen lässt sich noch dadurch bedeutend vermehren, dass man sie mit Hülfe der vollkommen beliebigen Variabeln v und w zusammenfasst:

$$(\mathrm{A\,Ia})\quad \tfrac{1}{16}\left(v^3\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^3}+3v^2\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}+3v\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_2^3}\right)$$

$$\cdot\left(w^3\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^3}+3w^2\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}+3w\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_2^3}\right)=$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & -3v, & 3v^2, & -v^3, \\ 1, & A, & 3B, & 3C+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}, & D+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2} \\ -3w, & 3B, & 9C-\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D-\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}, & 3E+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2} \\ 3w^2, & 3C+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D-\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}, & 9E-\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F \\ -w^3, & D+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}, & 3E+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F, & G \end{vmatrix}.$$

Dazu kommt noch die bemerkenswerte Differentialgleichung:

$$R = 0,$$

zu welcher eine analoge bei den elliptischen Functionen nicht besteht.

Die Differentialgleichungen für die vierten partiellen Ableitungen der Thetafunctionen will ich sogleich mit Hülfe der beliebigen Variable w zusammenfassen. Dadurch erhalte ich:

$$(\mathrm{B\,I})\quad \begin{cases} w^4\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1^4}+4w^3\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1^3\partial u_2}+6w^2\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2^2}+4w\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^3}+\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_2^4} \\ = -6.\left(w^2.\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}+2w\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}+\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}\right)^2 \\ -12\left(f_{11}(w)\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}-2f_{12}(w)\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}+f_{22}(w)\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}\right)+24(f,f)_4, \end{cases}$$

eine Gleichung, die (B) entspricht.

Die Gleichungen (A I), (A Ia) und (B I) gelten für alle geraden und ungeraden Thetafunctionen.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dass ich diese Differentialgleichungen aus den Relationen:

$$2\left(A\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3B\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}=0,$$

$$6\left(B\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+2\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}=0,$$

$$6\left(C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3.D.\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-F\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}-2\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}=0,$$

$$2\left(D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3F\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-G\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}=0$$

abgeleitet habe.

Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.

Von

Georg Cantor (Halle a. S.).

In dem Aufsatze, betitelt: Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen (Journ. für Math. Bd. 77, S. 258), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, dass es unendliche Mannigfaltigkeiten giebt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., ν, ... beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., ν, ... haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, dass beispielsweise die Gesamtheit aller reellen Zahlen eines beliebigen Intervalles $(\alpha\ldots\beta)$ sich nicht in der Reihenform:

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_\nu,\quad \ldots$$

vorstellen lässt.

Es lässt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.

Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschliessende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen:

$$E=(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots),$$

welche von unendlich vielen Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ abhängen, wo jede dieser Coordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E.

Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:

$$
\begin{aligned}
E^{I} &= (m, m, m, m, \ldots),\\
E^{II} &= (w, w, w, w, \ldots),\\
E^{III} &= (m, w, m, w, \ldots).
\end{aligned}
$$

Ich behaupte nun, dass eine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ hat.

Dies geht aus folgendem Satze hervor:

„Ist $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ irgend eine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M, so giebt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_ν übereinstimmt.“

Zum Beweise sei:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),\\
E_2 &= (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_\mu &= (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Hier sind die $a_{\mu,\nu}$ in bestimmter Weise m oder w. Es werde nun eine Reihe $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$, so definirt, dass b_ν auch nur gleich m oder w und von $a_{\nu,\nu}$ verschieden sei.

Ist also $a_{\nu,\nu} = m$, so ist $b_\nu = w$, und ist $a_{\nu,\nu} = w$, so ist $b_\nu = m$.

Betrachten wir alsdann das Element:

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

von M, so sieht man ohne weiteres, dass die Gleichung:

$$E_0 = E_\mu$$

für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von ν:

$$b_\nu = a_{\mu,\nu},$$

also auch im besondern:

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

wäre, was durch die Definition von b_ν ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform: $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ bringen lässt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, dass ein Ding E_0 sowohl Element von M, wie auch nicht Element von M wäre.

Dieser Beweis erscheint nicht nur wegen seiner grossen Einfachheit, sondern namentlich auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil das darin befolgte Princip sich ohne weiteres auf den allgemeinen Satz ausdehnen lässt, dass die Mächtigkeiten wohldefinirter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, dass jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L.

Sei beispielsweise L ein Linearcontinuum, etwa der Inbegriff aller reellen Zahlgrössen z, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind.

Man verstehe unter M den Inbegriff aller eindeutigen Functionen $f(x)$, welche nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen, während x alle reellen Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, durchläuft.

Dass M keine kleinere Mächtigkeit hat als L, folgt daraus, dass sich Teilmengen von M angeben lassen, welche dieselbe Mächtigkeit haben, wie L, z. B. die Teilmenge, welche aus allen Functionen von x besteht, die für einen einzigen Wert x_0 von x den Wert 1, für alle andern Werte von x den Wert 0 haben.

Es hat aber auch M nicht gleiche Mächtigkeit mit L, da sich sonst die Mannigfaltigkeit M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu der Veränderlichen z bringen liesse, und es könnte M in der Form einer eindeutigen Function der beiden Veränderlichen x und z:

$$\varphi(x, z)$$

gedacht werden, so dass durch jede Specialisirung von z ein Element $f(x) = \varphi(x, z)$ von M erhalten wird und auch umgekehrt jedes Element $f(x)$ von M aus $\varphi(x, z)$ durch eine einzige bestimmte Specialisirung von z hervorgeht. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Denn versteht man unter $g(x)$ diejenige eindeutige Function von x, welche nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für jeden Wert von x von $\varphi(x, x)$ verschieden ist, so ist einerseits $g(x)$ ein Element von M, andererseits kann $g(x)$ durch keine Specialisirung $z = z_0$ aus $\varphi(x, z)$ hervorgehen, weil $\varphi(z_0, z_0)$ von $g(z_0)$ verschieden ist.

Ist somit die Mächtigkeit von M weder kleiner noch gleich derjenigen von L, so folgt, dass sie grösser ist als die Mächtigkeit von L. (Vgl. Crelle's Journal, Bd. 84 S. 242.)

Ich habe bereits in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ (Leipzig 1883; Math. Annalen Bd. 21) durch ganz andere Hülfsmittel gezeigt, dass die Mächtigkeiten kein Maximum haben; dort wurde sogar bewiesen, dass der Inbegriff aller Mächtigkeiten, wenn wir letztere ihrer Grösse nach geordnet denken, eine „wohlgeordnete Menge“ bildet, so dass es in der Natur zu jeder Mächtigkeit eine nächst grössere giebt, aber auch auf jede ohne Ende steigende Menge von Mächtigkeiten eine nächst grössere folgt.

Die „Mächtigkeiten“ repräsentiren die einzige und notwendige Verallgemeinerung der endlichen „Cardinalzahlen“, sie sind nichts anderes als die actual-unendlich-grossen Cardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu, wie jenen; nur dass die gesetzmässigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche „Zahlentheorie“ zum Teil eine andersartige ist, wie im Gebiete des Endlichen.

Die weitere Erschliessung dieses Feldes ist Aufgabe der Zukunft.